MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vojtěch Borák

Metoda Lagrangeových multiplikátorů ve variačním počtu

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Černý Robert, Ph.D.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Obecná fyzika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Psát poděkování je vždy těžké. Člověk vděčí i za ty nejmenší věci tolika lidem, a bakalářská práce není žádná maličkost. Ze všech nejvíc bych zde však rád poděkoval rodině, přátelům i fakultě za podporu v těžkých chvílích, za příležitosti kterých se mi díky nim dostalo, a za všechno, co do mého života přinesli. Dále bych rád poděkoval panu docentu Černému za příležitost vytvořit tuto práci. za možnost ukázat svůj vlastní hypotézu. Díky všem těmto lidem jsem mohl absolvovat bakalářské studium na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy. Studium, na které se rozhodně nezapomíná. Tato zkušenost mne obohatila a pomohla mi překonat co jsem považoval dříve za nepřekonatelné.

Název práce: Metoda Lagrangeových multiplikátorů ve variačním počtu

Autor: Vojtěch Borák

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Černý Robert, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Tato práce řeší několik základních příkladů z variačního počtu a demonstruje prospěšnost zamyšlení se a případné pozměnění úlohy bez snížení dimenze za přítomnosti vazeb. Všechny úlohy jsou řešeny metodou Lagrangeových multiplikátorů. Především v konečné dimenzi demonstruje hypotézu autora ohledně nesnižování dimenze problému klasifikace definitnosti diferenciální formy druhých derivací a ukazuje jednak příklad, ve kterém je autorův nápad prospěšný, i příklad, kde svádí na scestí.

Klíčová slova: Lagrangeovy multiplikátory; Variační počet

Title: Method of Lagrange multipliers in Calculus of Variations

Author: Vojtěch Borák

Department: Department of mathematical analysis

Supervisor: doc. RNDr. Černý Robert, Ph.D., Department of mathematical analysis

Abstract: This thesis demonstrates solving a couple of basic examples from the calculus of variation and demonstrates the benefit of occasional transformation of our example without reducing dimension with presence of constraints. All the examples were solved using the method of Lagrange multipliers. Primary focus is to show author´s hypothesis of not reducing dimension when classifying the extrema- Situations are being demonstrated, where author´s idea helps and where it leads to wrong assumptions.

Keywords: Lagrange multipliers; Calculus of variation

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Každý ve fyzice zběhlý čtenář si jistě vybaví příklady založené na rozkladu sil. Kvádr na nakloněné plošině, malá koule valící se po velké kouli, výtah skrze Zemi nebo příklady s pružinou či kyvadlem. Tyto na počátku komplikované úlohy se však značně zjednoduší, zabrousíme-li do pokročilejších učebnic matematiky a mechaniky. Nahlédneme-li například do [**?**], mohou naše oči spočinout na takzvaných diferenciálních principech fyziky, konkrétně pak na principu virtuální práce. Hlubším zkoumáním zmíněné knihy se dozvíme, že namísto pracného rozkladu sil lze mechanické úlohy řešit pokročilejší, avšak velmi elegantní metodou. Zavedeme si za pomoci standardního fyzikálního značení *Lagrangian* L

$$L\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$L(\overrightarrow{x},\overrightarrow{v}) := T(\overrightarrow{v}) - V(\overrightarrow{x})$$

kde T značí kinetickou a V potenciální energii (bodového) tělesa, jehož trajektorii zkoumáme. Potom akci S, definovanou jako

$$S(\overrightarrow{x}) := \int_a^b L(\overrightarrow{x(t)},\overrightarrow{\dot{x}(t)})\,\mathrm{d}t,$$

nazýváme funkcionál. Princip virtuální práce, známý také jako Hamiltonův princip, následně tvrdí, že skutečná dráha $\overrightarrow{x}$ tělesa je dána extremálou akce. Snadno nahlédneme, že se jedná o nekonečně-dimenzionální úlohu, na kterou nástroje pro hledání extrémů funkcí více proměnných v konečně-dimenzionálním prostoru nestačí. Hledáním extremál funkcionálů se zabývá variační počet. Cílem této práce je demonstrovat řešení tohoto typu úloh za přítomnosti vazeb. Zaměříme se zejména na podrobnou klasifikaci extremál, která bývá ve fyzikální literatuře často zanedbávána. Kromě toho si předvedeme autorův nápad s nesnižováním dimenze při klasifikaci extrému.

Kapitola 2

Připomenutí teorie variačního počtu a extrémů funkcí více proměnných

2.1 Extrémy v konečné dimenzi

Variační počet studuje kritické body a extrémy funkcí, s aplikacemi od geometrie přes optimizace až po mechaniku. S hledáním extrémů jsme se při studiu obeznámili již v konečné dimenzi, nejprve při hledání extrémů funkce jedné proměnné, později jsme tuto teorii rozpracovali pro funkce více proměnných. Zde nám přibyl nový typ úloh, extrémy za přítomnosti vazeb. S řešením tohoto nového typu úloh nám pomáhá následující věta.

Věta 2.1.1 (O extrémech funkcí více proměnných s vazbami)**.** *Nechť $s < r$ jsou přirozená čísla a funkce*

$$f(x_1,...,x_r),g_1(x_1,...,x_r),...,g_s(x_1,...,x_r)$$

nechť mají spojité parciální derivace 1. řádu v otevřené množině $E \subset E_r$. V každém bodě množiny E nechť má matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial x_r} \end{pmatrix}$$

hodnost s. Budiž M množina všech bodů $[x_1,\ldots,x_r]$, v nichž jsou první parciální derivace $h := f - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i$, kde $f = f(x_1,\ldots,x_r)$ a $g_i = g_i(x_1,\ldots,x_r)$ pro všechna $i \in \{1,\ldots,s\}$ podle všech proměnných nulové. Potom platí: i) Má-li funkce f v nějakém bodě $a = [a_1,\ldots,a_r] \in E$ lokální extrém vzhledem k M, pak existují reálná čísla $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ tak, že platí

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_j} = 0 \ \forall j \in \{1,\ldots,r\},$$

$$g_k(a) = 0 \ \forall k \in \{1,\ldots,s\}.$$

ii) Je-li $a \in E$ bod a $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ čísla, která splňují poslední dva řádky i), a mají-li funkce g_i v bodě a totální diferenciál 2. řádu, pak sestrojme kvadratickou formu v proměnných $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$

$$\Psi(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r) = \sum_{j,m=1}^{r} \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_m} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial^2 g_k(a)}{\partial x_j \partial x_m} \right) \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_m.$$

Nechť matice z počátku věty má v bodě a hodnost s, je aspoň jeden její s-řadový determinant v bodě a různý od nuly; budiž kupříkladu

$$\left(\frac{D(g_1, \ldots, g_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} \right)_{[a_1, \ldots, a_r]} \neq 0.$$

Napišme s rovnic

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_l} \mathrm{d}x_l = 0 \ \forall k \in \{1, \ldots, s\}.$$

Vypočtěme z nich $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_s$ *jako lineární formy v proměnných* $\mathrm{d}x_{s+1}, \ldots, \mathrm{d}x_r$ *a dosaďme tyto lineární formy do Ψ za* $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_s$*. Tím přejde Ψ v kvadratickou formu* $\Phi(\mathrm{d}x_{s+1}, \ldots, \mathrm{d}x_r)$ *proměnných* $\mathrm{d}x_{s+1}, \ldots, \mathrm{d}x_r$*. Je-li tato forma Φ positivně (negativně) definitní, má f v bodě a vzhledem k M ostré lokální minimum (maximum); je-li indefinitní, nemá f v bodě a vzhledem k M lokální extrém.*

Větu lze nalézt v Jarníkově knize [**?**, Věta 217]. Přechod z jedné do více dimenzí vytvořil nové překážky v hledání extrémů. Naše funkce mohou nyní být například konvexní v jedné proměnné a konkávní v jiné, což vytváří útvar podobný sedlu, takzvaný sedlový bod, kde se nenachází extrém, nebo bude funkce konvexní na přímkách $x = 0, y = 0$ a konkávní na přímkách $x = \pm y$. Proto nám již nestačí pouze určit druhé parciální derivace podle proměnných dané funkce, musíme hledat kvadratickou formu zavedenou v předchozí větě. Přechodem do nekonečně mnoha dimenzí ve variačním počtu se nám situace bude více a více komplikovat. Ukážeme si však, že ne vždy je situace tak komplikovaná, jak by se na první pohled zdálo. Demonstrujeme si standardní postup řešení a porovnáme ho s autorovým nápadem nesnižování dimenze diferenciální formy Ψ.

2.2 Variační počet

V této práci se budeme zabývat především extrémy funkcionálů, tedy zobrazení, jejichž argumentem jsou funkce. Na demonstrativním příkladu si ukážeme zjednodušující situaci v konečné dimenzi a dále pak několik příkladů v dimenzi nekonečné. Nejdříve se však musíme ponořit do příslušné teorie. Ve vší obecnosti rozumíme pod pojmem funkcionál zobrazení z normovaného lineárního prostoru do $\mathbb{R}$. Příkladem takového funkcionálu jsou určité integrály. Právě funkcionály reprezentované integrálem nás budou zajímat. Speciálně funkcionály které nás zajímají, mají v matematickém značení tvar

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) \, \mathrm{d}x$$

na množině

$$M := \{y \in C^1([a,b]) \colon y(a) = A, y(b) = B\},$$

kde $a,b,A,B \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$. Argument funkce f značíme (x,y,z). Teorie pro hledání extrémů v tomto nekonečně-dimenzionálním prostoru, jak je formulována například v [**?**], pracuje na lineárních prostorech, což však množina M splňuje pouze pro $A = B = 0$. Tento problém obejdeme zadefinováním v jako afinní funkce splňující $v(a) = A$ a $v(b) = B$ (tedy $v(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)$), píšeme $y = u + v$ a pracujeme s funkcionálem

$$\Phi(u) := F(u + v)$$

na množině

$$X := \{u \in C^1([a,b]) \colon u(a) = 0, u(b) = 0\},$$

což už je lineární prostor. Používáme zde normu

$$\|u\|_{C^1([a,b])} = \max_{[a,b]} |u| + \max_{[a,b]} |u'|.$$

V dalším budeme vždy pod symbolem X rozumět právě zavedený prostor. Dále budeme standardně $y'(x)$ používat pro označení derivace ve všech bodech, speciálně v případě krajních bodů intervalu (a,b) tím pak budeme mít na mysli jednostranné derivace z vnitřní strany. Parciální derivace pak budeme značit $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$. Nejdříve si zadefinujme, co vlastně budeme hledat. Všechna tvrzení, věty a definice v této kapitole byla přejata z [**?**, kapitoly 6.1, 6.2 a 6.3].

Definice 2.2.1 (Stacionární bod)**.** Nechť X je normovaný lineární prostor, $F \colon D_F \subset X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $a \in D_F$ je *stacionárním bodem* (nebo *extremálou* nebo *kritickým bodem*) funkcionálu F, jestliže

$$\delta F(a)(h) = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in X.$$

Alfou a omegou našeho hledání extremál funkcionálů bude takzvaná *Euler-Lagrangeova rovnice.*

Věta 2.2.2 (Euler-Lagrangeova rovnice)**.** *Nechť $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu F. Pak funkce*

$$x \mapsto f_z(x,y_0(x),y_0'(x))$$

je spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ a y_0 splňuje Euler-Lagrangeovu rovnici

$$f_y(x,y_0(x),y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z(x,y_0(x),y_0'(x)) = 0 \qquad \textit{na } [a,b].$$

O hladkosti nalezených stacionárních bodů, případně extremál, hovoří následující věta.

Věta 2.2.3 (O regularitě minimizéru)**.** *Nechť $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu F a $x_0 \in (a,b)$ je takové, že*

$$f_{zz}(x_0,y_0(x_0),y_0'(x_0)) \neq 0.$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $y_0 \in C^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$.

Nás budou zajímat případy s vazbou, kterými se zabývá metoda *Lagrangeových multiplikátorů.*

Věta 2.2.4 (O Lagrangeových multiplikátorech). *Nechť* $f,g \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ *a* $y_0 \in M$ *je minimizérem funkcionálu*

$$F(y) = \int_a^b f(x,y(x),y'(x))\,\mathrm{d}x$$

vzhledem k množině $\{y \in M : G(y) = \gamma\}$, *kde*

$$G(y) = \int_a^b g(x,y(x),y'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Nechť $\delta G(y_0) \not\equiv 0$ *(existuje* $h \in X$ *splňující* $\delta G(y_0)(h) \neq 0$*). Pak existuje* $\lambda \in \mathbb{R}$ *takové, že*

$$\delta F(y_0)(h) - \lambda \delta G(y_0)(h) = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in X,$$

neboli na $[a,b]$ *platí*

$$\begin{aligned} f_y(x,y_0(x),y_0'(x)) - \lambda g_y(x,y_0(x),y_0'(x)) \\ - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(f_z(x,y_0(x),y_0'(x)) - \lambda g_z(x,y_0(x),y_0'(x))\Big) = 0. \end{aligned}$$

Výraz na posledním řádku lze rozderivovat pomocí řetízkového pravidla opět až při dodatečném předpokladu $y \in C^2((a,b))$*), který nám může dát věta o regularitě minimizéru zmíněná výše.*

Jedním z předpokladů Lagrangeových multiplikátorů je netriviálnost diferenciálu vazby G v bodě extremály. Pokud si uvědomíme, že diferenciál funkcionálu dává opět funkcionál, pomohou nám při ověřování tohoto předpokladu následující lemmata.

Lemma 2.2.5 (DuBois-Reymondovo lemma). *Nechť pro funkci* $g \in C([a,b])$ *platí*

$$\int_a^b g h'\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in C^1([a,b]) \text{ splňující } h(a) = h(b) = 0.$$

Pak g *je konstantní na* $[a,b]$.

Lemma 2.2.6 (Fundamentální lemma variačního počtu). *Nechť pro funkci* $g \in C([a,b])$ *platí*

$$\int_a^b g h\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in C^1([a,b]) \text{ splňující } h(a) = h(b) = 0.$$

Pak $g \equiv 0$ *na* $[a,b]$.

2.3 Klasifikace extremál

V momentě, kdy máme řešení Euler-Lagrangeovy rovnice, je potřeba rozhodnout, zda-li jsme našli minimum, maximum nebo se nejedná o extrém. Jako v případě extrémů funkcí konečně mnoha proměnných, i zde se setkáme s vícero možnostmi.

Věta 2.3.1 (Lagrangeova nutná podmínka pro integrální funkcionál)**.** *Nechť $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je bodem lokálního minima funkcionálu F. Pak*

$$f_{zz}(x,y_0(x),y_0'(x)) \geq 0 \qquad \textit{na } [a,b].$$

Důkaz viz [**?**, Propositon 6.1.4.].

Věta 2.3.2 (Lagrangeova postačující podmínka pro integrální funkcionál)**.** *Nechť $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu F. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $h \in X$ splňující $\|h\|_{C^1([a,b])} \leq \delta$ má funkce*

$$\varphi(t) := F(y_0 + th)$$

vlastnost

$$\varphi''(t) \geq 0 \qquad \textit{pro } t \in (0,1),$$

pak F má v bodě y_0 lokální minimum. V případě, že předchozí vlastnost platí s ostrou nerovností, jedná se o ostré lokální minimum.

Zdrojem je pak [**?**, Theorem 6.1.5.]. Práce s diferenciály dle jejich definic je krajně náročná, proto si zavedeme pomocné lemma o tvaru těchto diferenciálů.

Lemma 2.3.3. *Nechť F,Φ,v jsou jako v úvodu kapitoly 2.2 a $u,h \in X$, pak (používáme $y := u + v$)*

$$\delta\Phi(u;h) = \int_a^b f_y(x,y,y')h + f_z(x,y,y')h' \,\mathrm{d}x$$

a

$$\delta^2\Phi(u;h,h) = \int_a^b f_{yy}(x,y,y')h^2 + 2f_{yz}(x,y,y')hh' + f_{zz}(x,y,y')h'^2 \,\mathrm{d}x.$$

Lemma přejato z [**?**]. Bohužel ani toto vyšetřování chování druhého diferenciálu nemusí vždy stačit. Jemnější vyšetřování chování druhého diferenciálu nám pak dává výsledky i v případě, kdy hrubým vyšetřováním nic nezjistíme, avšak má to svou cenu. Budeme totiž požadovat, aby naše stacionární body byly z C^2, což nám omezí prostor řešení. K tomuto přístupu si je potřeba zadefinovat následující pojmy.

Definice 2.3.4 (Jacobiho rovnice a konjugované body)**.** Buď f $\in C^3([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, $f_{zz} > 0$ *na* $[a,b]$, $y_0 \in M \cap C^2([a,b])$ stacionární bod funkcionálu $F = \int_a^b f \mathrm{d}x$. Označme

$$P(x) := f_{zz}(x,y_0,y_0') > 0 \textit{ na } [a,b] \textit{ a}$$

$$Q(x) := f_{yy}(x,y_0,y_0') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{yz}(x,y_0,y_0')).$$

Pak bod $x \in (a,b]$ nazveme konjugovaným bodem k a, pokud existuje $h \in C^2([a,b])$, které řeší Jacobiho rovnici

$$-(Ph')' + Qh = 0; h(a) = h(x) = 0.$$

Odsud přejdeme k nejdůležitějšímu důsledku jemnějšího vyšetřování chování druhého diferenciálu, který nás zajímá, a to Jacobiho větě.

Věta 2.3.5 (Jacobiho věta)**.** *Buď* $f \in C^3([a,b]\times\mathbb{R}^2), y_0 \in M \cap C^2([a,b])$ *stacionární bod funkcionálu* $F = \int_a^b f \mathrm{d}x$ *a nechť platí*

$$f_{zz}(x,y_0,y_0') > 0 \text{ na } [a,b]$$

a P,Q jsou výše zmíněné. (1)Nechť na intervalu (a,b] neexistuje konjugovaný bod k bodu a. Pak je y_0 *bodem lokálního minima funkcionálu F na množině M. (2)Buď* y_0 *bodem lokálního minima funkcionálu F na množině M. Pak na intervalu (a,b) neexistuje konjugovaný bod k bodu a.*

Jacobiho věta nám poskytuje mocný nástroj vyšetřování charakteru extremál. Existuje však i jiná cesta, která je v některých případech mnohem rychlejší. Mluvíme tu o konvexitě funkcionálů.

Definice 2.3.6 (Konvexita fukcionálu)**.** Nechť X je normovaný lineární prostor, $M \subset X$ je konvexní a $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že funcionál F je *konvexní* na M jestliže

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq F(\lambda x) + F((1-\lambda)y) \qquad \text{pro všechna } x,y \in M \text{ a } \lambda \in [0,1].$$

Přejato z [**?**, Definition 6.1.7].
Speciálně pak je funkcionál $F = \int_a^b f \mathrm{d}x$ konvexní, pokud

$$f_{yy} \geq 0, \quad f_{zz} \geq 0, \quad f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2 \geq 0.$$

Věta 2.3.7 (Globální minimum pro konvexní funkcionál)**.** *Nechť* $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ *je pro každé* $x \in [a,b]$ *konvexní v poslední dvojici proměnných a* $y_0 \in M$ *je stacionárním bodem funkcionálu* F*. Pak* F *má v bodě* y_0 *globální minimum.*

Zdroj pak máme [**?**, Proposition 6.1.8.]. Tyto nástroje nyní využijeme na několika příkladech.

Kapitola 3

Několik demonstrativních příkladů

3.1 Funkce konečně mnoha proměnných a extrémy

Na následujících příkladech bych rád prezentoval svou vlastní hypotézu týkající se snižování dimenze diferenciální formy při identifikaci nalezených extrémů. Založeno na postřehu autora, někdy nám standardní snižování dimenze pouze prodlužuje naši cestu k řešení. Při alternativním postupu nesnižujeme dimenzi naší diferenciální formy druhých derivací, místo toho rovnou přejdeme k určení definitnosti a identifikaci podezřelých bodů. Rozvažme správnost této hypotézy. Může se stát, že by nás cesta nesnížení dimenze naopak zavedla na scestí? Ano, jak si brzy také ukážeme. Avšak pouze v případě, kde bude diferenciál v nesnížené dimenzi hlásit sedlo, zatímco Jarník detekuje extrém. Proč? Uvažme situaci, kde by diferenciální forma v plné dimenzi hlásila extrém, v tomto případě libovolný. To znamená, že má tato forma stejné znaménko pro všechny možné hodnoty proměnných dané formy. Co nám udělá redukce dimenze podle Jarníka? Ta nás nechá vybrat jednu proměnnou a s ní sváže hodnoty všech ostatních proměnných dané formy přesně jako v příkladu výše. Jenomže pokud pro všechny možné kombinace hodnot všech proměnných má forma dané znaménko, pak musí mít stejné znaménko pro takové kombinace hodnot proměnných, které jsou navzájem nějak svázané, přesněji pak které jsou svázané Jarníkovými rovnicemi

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_l} \mathrm{d}x_l = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, s\}.$$

Tudíž, pokud nám vyšetřování diferenciální formy příslušné dané funkci $h := f - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, kde $f = f(x_1, \dots, x_{n+1})$ a $g_i = g_i(x_1, \dots, x_{n+1}) \forall i \in \{1, \dots, n\}$, hlásí extrém, pak tam již daný extrém musí být. Pokud nám však forma v plné dimenzi hlásí sedlo, neznamená to nutně, že tam sedlo opravdu je.

Příklad 3.1.1. Na začátku jsme zmínili citaci z legendárních Jarníkových knih, větu o extrémech za přítomnosti vazby v konečné dimenzi **??**. Aplikace teorie konečné dimenze nalezneme však například ve statistice. Mějme šestistěnnou hrací kostku, o níž víme následující informace. Pravděpodobnost, že na kostce padnou čísla 2,3,4 a 5 jsou stejné, tedy $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p$. Pravděpodobnost hodu šestky je dvakrát větší než pravděpodobnost hodu jedničky, to jest $p_6 = 2p_1$. Nakonec, jelikož se jedná o pravděpodobnosti, platí norma $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$. Naším cílem je určení hodnot jednotlivých pravděpodobností maximalizací takzvané Shannonovy entropie (viz [?]). Shannon definuje entropii

$$S = \sum_{i=1}^{6} -p_i \log(p_i).$$

Stejně jako v předchozím příkladě píšeme

$$h = -4p\log(p) - p_1\log(p_1) - p_6\log(p_6) + \lambda_1(p_1 + p_6 + 4p - 1) + \lambda_2(p_6 - 2p_1).$$

Nabízí se otázka, proč používáme pouze dva multiplikátory, když máme ještě dodatečné vazby svazující p_2 až p_5. Díky těmto dodatečným vazbám však lze triviálně funkci h převést na funkci pouze 3 proměnných. Jelikož však v případě označení $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p$ platí $h_p = \sum_{i=2}^{5} h_{p_i}$, dojdeme ke správnému výsledku tak i tak. V podstatě jsme v zadání v dimenzi 6, podmínka $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p$ nám pak převede úlohu do dimenze 3 a zbylé 2 vazby uvažujeme již jako standardní vazby a využijeme multiplikátory. Nejprve dle předpokladů hledáme matici parciálních derivací vazeb

$$D_g = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

u níž opět vidíme hodnost dvě a pokračujeme ve výpočtu. Derivací podle proměnných p_i získáme

$$h_{p_1} = -\log(p_1) - 1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 = e^{\lambda_1 - 1 - 2\lambda_2},$$

$$h_p = -4\log(p) - 1 + \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow p_i = e^{\lambda_1 - 1}, i \in \{2,3,4,5\},$$

$$h_{p_6} = -\log(p_1) - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow p_6 = e^{\lambda_1 - 1 + \lambda_2}.$$

Vyjádříme pravděpodobnosti p_i, vytkneme výraz $e^{\lambda_1 - 1}$ a dosadíme do první vazební podmínky

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = e^{\lambda_1 - 1}(4 + e^{\lambda_2} + e^{-2\lambda_2}) = 1.$$

Z druhé vazební podmínky nyní umíme vyjádřit

$$\frac{1}{4 + e^{\lambda_2} + e^{-2\lambda_2}}(2e^{2\lambda_2} - e^{-\lambda_2}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{\log(2)}{3}$$

Označme ještě

$$4 + e^{\lambda_2} + e^{-2\lambda_2} =: Z$$

a upravme do konvenčního tvaru

$$p_1 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{2\log(2)}{3}},$$

$$p_i = \frac{1}{Z}, i \in \{2,3,4,5\}, a$$
$$p_6 = \frac{1}{Z} e^{\frac{\log(2)}{3}}.$$

Napišme si ještě druhé parciální derivace

$$h_{p_i p_j} = 0 \; pro \; i \neq j \; a \; h_{p_i p_i} = -\frac{1}{p_i}.$$

Nyní je potřeba přejít k identifikaci nalezeného podezřelého bodu. Zde si ukážeme dva postupy. Standardní postup z **??** a ten posléze porovnáme s autorovým postupem vysvětleným před tímto příkladem. Podle Jarníkova návodu napíšeme rovnice s proměnnými diferenciální formy druhých derivací (k,l,m)

$$-2k + m = 0 \implies m = 2k,$$

$$k + l + 4m = 0 \implies l = -9k.$$

Naše forma poté nabírá tvaru

$$\mathrm{d}h(k,l,m) = -\frac{1}{p_1}k^2 - \frac{4}{p}l^2 - \frac{1}{p_6}m^2.$$

Podle Jarníka je následně potřeba dosadit jak za pravděpodobnosti, tak za l a m, abychom dostali finální tvar

$$\mathrm{d}h(k,l,m) = -Zk^2\left(e^{\frac{2\log(2)}{3}} + 4e^{-\frac{\log(2)}{3}} + 324\right).$$

Teprve zde pak Jarník zkoumá definitnost. My však můžeme být rychlejší než Jarník, upustíme-li od snižování dimenze a přejdeme rovnou k určování definitnosti, což je přesně autorův nápad. Forma druhých derivací v plné dimenzi

$$\mathrm{d}h(k,l,m) = -\frac{1}{p_1}k^2 - \frac{4}{p}l^2 - \frac{1}{p_6}m^2$$

je díky nezápornosti pravděpodobností p_1, p a p_6 negativně definitní, odkud pak máme lokální maximum. Tedy výpočet jsme zkrátili ze 4 řádků na jeden. V tomto případě nám tedy tento náhradní postup značně urychlil cestu k řešení.

Příklad 3.1.2. V předchozím příkladě jsme rozebírali extrémy funkce konečného počtu proměnných a všimli jsme si, že ne vždy je pro klasifikaci extrému potřeba snižovat dimenzi. Opravdu je to ale vždy tak snadné? Ukážeme si, že nikoliv. Mějme tedy funkci $f = x^2 + y^2 + z^2$ s vazbami $g_1 = x^2y - 1 \; a \; g_2 = z^2y - 1$. Hledejme extrémy f na množině $M = \{x,y,z \in \mathbb{R}; g_1 = 0; g_2 = 0\}$. Nejprve ověřme z předpokladů hodnost matice parciálních derivací vazeb.

$$D_g = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & z^2 & 2zy \end{pmatrix}.$$

Matice má tedy hodnost závislou na (x,y,z), což pro nás znamená potřebu dosadit a její hodnost ověřit v každém podezřelém bodě zvlášť. Mějme tudíž funkci $h := f - \lambda_1(g_1 - 1) - \lambda_2(g_2 - 1)$.

$$h_x = 2x - 2\lambda_1 xy = 0 \quad \text{odtud} \quad 2x(1 - \lambda_1 y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \lambda_1 = \frac{1}{y}$$

$$h_z = 2z + 2\lambda_2 zy = 0 \quad \text{odtud} \quad 2z(1-\lambda_2 y) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee \lambda_2 = \frac{1}{y}$$

Pro $x = 0$ a $z = 0$ nemáme splněny vazební podmínky, tedy dostáváme $\lambda_1 = \frac{1}{y}, \lambda_2 = \frac{1}{y}$. Postupujme tedy dále. Dostáváme

$$h_y = 2y - \lambda_1 x^2 - \lambda_2 z^2 = 0$$
$$2y^2 - \lambda_1(x^2 y) - \lambda_2(z^2 y) = 0.$$

Pokud nyní dosadíme vazební podmínky a výrazy pro naše lambdy, získáme

$$2y^2 - \frac{2}{y} = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

Zaměřme se na fakt, že jak naše funkce f, tak i vazby, jsou sudé v proměnných x a z. Můžeme se tedy snadno omezit na oblast $x,y \geq 0$ s tím, že nalezený extrém bude poté sídlit v bodech $(\pm x_0, y_0, \pm z_0)$. Odtud pak máme jediný podezřelý bod $(1,1,1)$. Hodnost naší matice D_g je v tomto bodě 2 jako počet vazeb, přesně dle požadavku příslušné věty. Nyní tedy, majíce jediný podezřelý bod, je třeba určit kvadratickou formu druhého diferenciálu.

V této práci však především autor demonstruje svou hypotézu. Ta se zaměřuje na sestavení diferenciální formy z druhé části **??**. Nejprve tedy podle Jarníka. Naše forma pak nabývá tvaru

$$\mathrm{d}h(k,l,m) = 2k^2 + 2l^2 + 2m^2 - (\lambda_1 y)k^2 - (\lambda_2 y)m^2 - 2\lambda_1 xkl - 2\lambda_2 zml.$$

Pokud pak napíšeme rovnice

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}k + \frac{\partial g_1}{\partial y}l + \frac{\partial g_1}{\partial z}m = 2xyk + x^2 l = 0 \; a$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial x}k + \frac{\partial g_2}{\partial y}l + \frac{\partial g_2}{\partial z}m = z^2 l + 2zym = 0,$$

můžeme vyjádřit proměnné naší formy k a m pomocí třetí proměnné l a dosadit. Vzniklá forma

$$\mathrm{d}h(k,l,m) = \left(\frac{x^2+z^2}{2y^2} + \frac{3\lambda_1 x^2 + 3\lambda_2 z^2}{4y} + 2\right) l^2$$

je zajisté pozitivně definitní, jelikož obě lambdy i proměnná y jsou nezáporné a x a z se vyskytují pouze v druhých mocninách. V tomto případě jsme pro Jarníkův postup udělali celkem okliku, jelikož tato úloha nám umožňuje využít konvexity v jedné dimenzi a ukázat tak globální minimum. Pokud bychom však žádné snižování dimenze v naší diferenciální formě neprováděli, výsledná forma

$$\mathrm{d}h(k,l,m) = 2l^2 - 2\lambda_1 xkl - 2\lambda_2 zml$$

například v bodě $(x,y,z) = (1,1,1)$ nabývá pro $(k,l,m) = (1,1,1)$ hodnoty -2, zatímco pro $(k,l,m) = (1,1,-1)$ je to 2, což nám dává sedlový bod.

Můžeme si pak povšimnout, že se dá k celému příkladu přistoupit ještě trošku jinak. V našem případě je naše h nezávislé na x a z, tudíž nám postačí teorie v jedné dimenzi. Druhou derivací dostaneme okamžitě

$$h_{yy} = 2 + \frac{2}{y^2},$$

což nám dává konvexitu, víme tedy, že jsme našli globální minimum bez potřeby sestavovat příslušné formy.

3.2 Funkcionály a variační počet

Příklad 3.2.1. Již od začátku se chceme věnovat příkladům na variační počet. Především pak za použití metody *Lagrangeových multiplikátorů*. Podívejme tedy se společně na funkcionál

$$F(x,y(x),y'(x)) = \int_0^\pi (y')^2 \mathrm{d}x$$

$$\textit{na } M = \{y \in C^1((0,\pi)) : y(0) = y(\pi) = 0, G := \int_0^\pi y^2 \mathrm{d}x = l; l \in \mathbb{R}\}.$$

Tento jednoduchý problém vyřešíme vyšetřováním náhradního funkcionálu

$$H(x,y(x),y'(x)) = \int_0^\pi (y')^2 - \lambda y^2 \mathrm{d}x.$$

Použití techniky *Lagrangeových multiplikátorů* **??**, o které se snažíme, je podmíněno nenulovostí prvního diferenciálu G. Ověřme.

$$\delta G(y_0; h) = \int_0^\pi 2yh\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow g \equiv 0,$$

kde poslední rovnost je dána *Fundamentálním lemmatem variačního počtu* **??**. Zde zvážíme několik možností. První, co se dá nahlédnout, je triviální řešení $y \equiv 0$, jež vyhovuje pouze vazbě $G = 0$. To jest krajně nezajímavý případ, který nebudeme dále uvažovat. Z důvodu konvence budiž dále $l \geq 0$. Pojďme se podívat, zda-li nelze něco říci o řešení již v tomto momentě. Protože

$$h_{zz} = f_{zz} = 2,$$

lze již díky *regularitě minimizéru* **??** počítat dále s vědomím, že naše stacionární body budou alespoň třídy C^2. Dosadíme do E-L rovnic:

$$h_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h_z = -2\lambda y - 2y'' = 0,$$

$$y = a\sin(\sqrt{\lambda}x) + b\cos(\sqrt{\lambda}x) \textit{ pro } \lambda > 0.$$

Koeficient λ uvažujeme pouze kladný neboť pro záporné hodnoty vychází jako řešení reálné exponenciely, které jistě nemohou splňovat podmínky nulovosti v nule a π. Vyčíslení koeficientů proběhne dosazením do počáteční a koncové podmínky na y a vazby G. Mějme na paměti taktéž předpoklady z *Věty o Lagrangeových multiplikátorech* **??**, kde předpokládáme $\lambda \in \mathbb{R}$. Odtud okamžitě můžeme psát substituci $\sqrt{\lambda} = k, k^2 = \lambda$. Pokračujme ve výpočtu.

$$y(0) = 0 \Rightarrow b = 0,$$

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dosazením do počáteční a koncové podmínky jsme tedy dostali tvar extremály

$$y_0 = a\sin(kx).$$

V dalším kroku potřebujeme zajistit splnění vazební podmínky nabývající tvaru

$$G(y_0) = \int_0^\pi a^2 \sin^2(kx)\mathrm{d}x = l.$$

$$\int_0^\pi a^2\sin^2(kx)\mathrm{d}x = \int_0^\pi a^2\frac{1-\cos(2kx)}{2}\mathrm{d}x = a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2k\pi)}{4k}\right).$$

Odtud píšeme vztah mezi konstantami a, k a l

$$a^2(2k\pi - \sin(2k\pi)) = 4kl \Rightarrow a^2\frac{\pi}{2} = l.$$

Zde se nám řešení rozvětví na případ $l = 0$ a $l \neq 0$:

$$l = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee 2k\pi = \sin(2k\pi) \Rightarrow k = 0).$$

V tomto případě jsme dostali triviální řešení. Dále tedy buď $l \neq 0$ a použijeme nulovost funkce *sinus* v bodech $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$a^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = l \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2l}{\pi}},$$

$$y_0 = \sqrt{\frac{2l}{\pi}}\sin(kx).$$

Nyní je potřeba říci, co jsme to vlastně našli. Krok číslo jedna, dosazení do nutné podmínky nulovosti prvního diferenciálu:

$$\delta H(y_0;h) = \int_0^\pi 2y_0'h' - 2k^2y_0h\mathrm{d}x.$$

Aplikujeme per-partes na první část integrálu s využitím nulovosti funkce h v okrajových bodech a dosazením funkce y_0 dostaneme (uvažme význam h jako tečných vektorů, speciálně pak $h(0) = h(\pi) = 0$)

$$\delta H(y_0;h) = [2y_0'h]_0^\pi - \int_0^\pi 2y_0''h + 2k^2y_0h\mathrm{d}x = 0.$$

Nutná podmínka minima je v platnosti a my pokračujeme dále v určování minim a maxim našeho funkcionálu. Nejjednodušší bude přímo dosadit do funkcionálu F a dívat se, jakých hodnot bude pro daná k náš funkcionál nabývat. Jelikož jsme psali $H = F - \lambda(G - l)$, platí rovnost funkčních hodnot funkcionálů F a H na množině M.

$$\begin{aligned} F = \int_0^\pi \frac{2lk^2}{\pi}\cos^2(kx)\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{2lk^2}{\pi}(1-\sin^2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2lk^2}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = k^2l. \end{aligned}$$

Nyní je potřeba se na náš výsledek podívat kritickým okem. To, co jsme označovali jako y_0, je ve skutečnosti posloupnost $y_0(k)$. Jelikož jsme žádné jiné extremály nenašli (zdůrazněme, že nulovost prvního diferenciálu v bodě neboli řešení Euler-Lagrangeovy rovnice je nutná podmínka extrému!), zkusme se na to podívat jako na extrémy $F(y_0(k)) = F(k)$ jakožto funkce skalární proměnné k. Pro fixní $l \neq 0$ (*tedy i $k \neq 0$, jinak nelze splnit vazebni podminku*) vidíme minimum $F(k)$ v bodě $y_0(k = \pm 1)$. Nyní je nutné ověřit naši hypotézu. Podíváme se na druhý diferenciál

$$\delta^2 H(y_0;h,h) = \int_0^\pi 2h'^2 - 2k^2h^2\mathrm{d}x.$$

Bohužel z tohoto výrazu nemůžeme okamžitě říci nic o znaménku druhého diferenciálu, a tudíž jsme nepokročili. Je očividné, že zde nám *Lagrangeova postačující podmínka* **??** nepomůže. Obrátíme se tedy na Jacobiho teorii **??**. Napišme funkce P a Q:

$$P = 2,\, Q = -2k^2 \quad \text{odtud} \quad -2h'' - 2k^2h = 0 \Leftrightarrow h'' + k^2h = 0.$$

Řešením rovnice napravo je lineární kombinace sinů a kosinů, při aplikaci podmínek $h(0) = h(x) = 0$ máme řešení

$$h(k) = Asin(kx), k \in \mathbb{Z}.$$

Pro $k = \pm 1$ neexistuje konjugovaný bod a tudíž jsme prokázali správnost našeho podezření. Pro $k = 0$ máme triviální řešení které opět nesplňuje vazbu a pro jiná k existují konjugované body a tudíž tam nemáme minima. Při opětovném pohledu na náš vztah

$$y_0 = \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \sin(kx),$$

si můžeme všimnout, že tento funkcionál není shora omezený, tedy nemá maximum. Někdy se nám stane, že funkcionál $H = F - \lambda G$ může být konvexní a tudíž máme minimum určené bez práce. V tomto případě nám to však nepomohlo a museli jsme sáhnout po mnohem pokročilejší teorii.

Příklad 3.2.2. Vyšetřeme nyní tedy celkem jednoduchý funkcionál

$$F(x,y(x),y'(x)) = \int\limits_{-a}^{a} xy' \mathrm{d}x$$

$$na\ M = \{y \in C^1((0,\pi)) : y(-a) = y(a) = 0,$$
$$G(x,y(x),y'(x)) := \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2} \mathrm{d}x = l; l > 0\}.$$

Na první pohled vidíme neexistenci extrému pro funkcionál bez vazby. Avšak zafixováním délky křivky $y(x)$ se to změní a extrém se nám objeví. Vydejme se tedy cestou *Lagrangeových multiplikátorů* **??**, pro což nejprve ověříme nenulovost variace vazby. V průběhu výpočtu ještě bude občas potřeba vyhodnotit vztah integračních mezí a délky křivky, kterou držíme jako vazbu. Máme

$$\delta G(y; h) = \int_{-b}^{b} g_y(x,y,y')h + g_z(x,y,y')h' \,\mathrm{d}x \quad = \int_{-b}^{b} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} h' \,\mathrm{d}x.$$

Z duBois-Reymondova lemmatu dostáváme, že variace vazby je nulová pouze v případě

$$\frac{(y_0)'}{\sqrt{1 + (y_0)'^2}} \equiv C \qquad \text{na } [-a,a].$$

V případě $C = 0$ je řešením jedině triviální funkce $y_0' \equiv 0$, což je pro nás nezajímavý případ. Pro $C = \pm 1$ nemá rovnice řešení a ve všech ostatních případech je opět řešení pro nás nezajímavé. Ve všech případech by muselo být $a = \frac{l}{2}$.

Všechny ostatní extremály získáme ze standardní *Euler-Lagrangeovy rovnice* pro funkcionál $H := F - \lambda(G - l)$:

$$h_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h_z = 1 - \lambda \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)' = 0.$$

Zde si povšimneme několika věcí. Zaprvé, pokud bychom změnili znaménko u funkcionálu F, změní se pouze znaménko před lambdou $z-$ *na* $+$. Za druhé pak pro případ $\lambda = 0$ nemá tato rovnice řešení, tj. funkcionál F nemá bez přítomnosti vazeb extremály a tedy ani extrémy. Jako řešení poté pro $\lambda \neq 0$ dostáváme

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)' = \frac{1}{\lambda} \quad \text{odtud} \quad \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{x}{\lambda} + C,$$

čemuž odpovídají křivky

$$y_0 = \pm \sqrt{\lambda^2 \mp (x + \lambda C)^2} + D.$$

Naším výsledným řešením je poté teoreticky ještě slepenec křivek $+y_0$ a $-y_0$. Jelikož však musí být naše řešení alespoň třídy $C^1([-a,a])$, můžeme slepovat pouze v místech nulové derivace $x_0 = \lambda C$. Podle Věty o *regularitě minimizéru*(**??**) (v našem případě $f_{zz} - \lambda g_{zz} = 0 - \lambda \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$, jelikož neuvažujeme případ $\lambda \neq 0$) jsou extremály třídy C^2. Přímo pak můžeme spočíst $y_0''(x_0) = \mp \frac{1}{|\lambda|}$, slepovat tedy nemůžeme ani v bodě x_0 a Euler-Lagrangeova rovnice má pouze naše dvě řešení. Nyní dosadíme do počátečních podmínek $y_0(-a) = y_0(a) = 0$:

$$y_0(a) = \pm \sqrt{\lambda^2 - (a + \lambda C)^2} + D = 0 = \pm \sqrt{\lambda^2 - (-a + \lambda C)^2} + D = y_0(-a),$$

odkud získáme tvar extremály (máme C=0)

$$y_0 = \pm \lambda \sqrt{1 - \frac{x^2}{\lambda^2}} \mp \lambda \sqrt{1 - \frac{a^2}{\lambda^2}}.$$

Zároveň s tím z řešení Euler-Lagrangeovy rovnice máme $\lambda > 0$. Podíváme-li se nyní na druhou derivaci, dostaneme výraz

$$h_{zz} = -\frac{\lambda}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kterýžto je díky znaménku lambdy záporný nenulový. Všechny ostatní druhé parciální derivace jsou nulové. Pokud bychom tedy vzali funkcionál $-F$, což by opět pouze změnilo znaménko u lambdy $z-$ *na* $+$, dostali bychom konvexitu a globální minimum. Z toho lze prohlásit, že námi nalezená nezáporná funkce

$$y_0 = \lambda \sqrt{1 - \frac{x^2}{\lambda^2}} - \lambda \sqrt{1 - \frac{a^2}{\lambda^2}}$$

je globální maximum funkcionálu H, a tedy i funkcionálu F na množině M.

Ve fyzice je běžné pracovat s více dvojicemi proměnných (y_i, y_i'), obvykle souřadnicemi v daném systému. Naše dosavadní teorie však byla formulována čistě pro jednu dvojici proměnných. Ve fyzice je zcela běžné provést záměnu souřadnic tak, aby nové souřadnice automaticky splňovaly vazební podmínky, což v příkladech klasicky zmenší počet dvojic proměnných y_i, y_i'. Mnohdy se pak v nových souřadnicích celá úloha řeší jako úloha pro jednu zobecněnou souřadnici y. V praxi pomocí této substituce nejprve přepíšeme Lagrangián jako $L = L(t, y(t), y'(t))$. Poté již hledáme extremály akce v nových souřadnicích. Matematicky můžeme na Lagrangiány v kanonických a transformovaných souřadnicích pohlížet jako na naprosto separátní úlohy, jež pak propojí použití Lagrangeovy teorie z mechaniky.

Jelikož autor je studentem fyziky, zmiňme ještě několik detailů z aplikace variačního počtu ve fyzice. Implicitně se předpokládá existence extrému a Hamiltonův princip nepožaduje určení, zda je námi nalezený extrém minimum či maximum. Nalezli-li jsme extremály, přičemž fyzikální smysl má obvykle pouze jedna, pak to již musí být můj extrém a jsem hotov.

Příklad 3.2.3. Budeme hledat extremály u jedné z nejzákladnějších úloh fyziky, rovinného kyvadla a klasifikujeme je. Pracujeme tedy v rovinně (x, y). Vazbu v našem případě tvoří rameno kyvadla

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0.$$

Lagrangián pro hmotný bod v tíhovém poli bez vazby vypadá jednoduše

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy.$$

Nejprve vezmeme Lagrangián L a dosadíme do něj substituce $x = l\sin(y), y = -l\cos(y)$. Zavedením těchto nových souřadnic je již vazba $x^2 + y^2 - l^2 = 0$ splněna automaticky. Dostaneme funkcionál

$$F(x, y(x), y'(x)) = \int_a^b \frac{m}{2}(l^2 y'^2) + mlg\cos(y)\,\mathrm{d}x.$$

Zadáním naší úlohy tedy je najít a identifikovat všechny extremály funkcionálu F. Než přejdeme k E-L rovnici, můžeme o řešení již nyní ukázat nezápornost druhé derivace

$$f_{zz} = ml^2.$$

Odtud poté díky *Regularitě minimizéru* **??** víme, že naše extremála bude třídy C^2. Řešení E-L rovnice

$$-mgl\sin(y) - ml^2 y'' = 0$$

máme ve tvaru $y'' = \frac{g}{l}\sin(y)$, kde y představuje úhlovou výchylku od rovnovážného stavu. Toto řešení je v každé učebnici teoretické mechaniky a není těžké ho získat. Co již učebnice neuvádí je klasifikace získané extremály. Jelikož platí rovnice $y'' = -\frac{g}{l}\sin(y)$, můžeme z ní dosadit do F a přejít do tvaru

$$F(x, y(x), y'(x)) = \int_a^b \frac{m}{2}(l^2 y'^2) - ml^2 y''\,\mathrm{d}x.$$

Zde se nám hodí využít jedno z kritérií extrému, *Lagrangeova postačující podmínka* **??**. Napišme si funkci

$$\varphi(t) = \int_a^b \frac{m}{2}(l^2(y' + th')^2) - ml^2(y'' + th'')\,\mathrm{d}x$$

a její druhou derivaci

$$\varphi''(t) = \int_a^b ml^2h'^2\,\mathrm{d}x,$$

kterážto je díky nezápornosti m a reálným hodnotám l a h' jistě větší nebo rovná nule dokonce pro všechny reálné funkce $h(x)$. Odtud díky **??** víme, že námi nalezená funkce, určená předpisem $\ddot{\Phi} = -\frac{g}{l}sin(\Phi)$, je hledaným lokálním minimem.

Kapitola 4

Závěr

V úvodu jsme zmínili jako cíle práce demonstrovat řešení variačních úloh za přítomnosti vazeb. Po obsáhlém výpisu podstatných definic a vět potřebných jednak pro hledání, tak následně i pro klasifikaci extremál, jsme přešli k řešení specifických problémů. První řešený příklad byl na extrémy v konečné dimenzi, kde jsme si ukázali celkem jednoduchý a názorný příklad standardního postupu řešení, uvedeného například v **??**. Na tom samém příkladu byla demonstrována autorova hypotéza s nesnižováním dimenze, což se ukázalo jako rychlejší cesta k cíli. Hned na následujícím příkladu jsme si však ukázali, jak vrtkavá cesta to je. Tam, kde nám předtím nesnižování dimenze formy pomohlo v rychlejším rozhodování, nás hned v dalším příkladě zavedlo na sedlo, zatímco Jarník jednoznačně určil lokální minimum. Krátkou rozvahou jsme následně došli k závěru, že zahlásí-li metoda nesnižování dimenze extrém, pak tam daný extrém opravdu je, zatímco v případě určení sedla v plné dimenzi jsme nikam nepokročili. Snažit se snižovat dimenzi v nekonečné dimenzi by pak vedlo spíše ke zesložitění celé úlohy, a tedy se o to nebudeme pokoušet. Avšak z autorovy hypotézy, aplikované na příkladech v konečné dimenzi, vyplynulo, že ani tam není vždy snížení dimenze potřeba! Poslední příklad ještě ukázal vzácné použití metody Lagrangeových multiplikátorů v klasické mechanice, přičemž v relativitě je následně lze potkat více. Jako třešničku na dortu jsme poté provedli ve fyzikální literatuře obvykle nezmiňovanou klasifikaci extrému. Identifikovali jsme minimum.

Literatura

[1] Brdička M., Hladík A., *Teoretická mechanika*, Academia, Praha.

[2] Jarník V., *Diferenciální počet II*, Academia, Praha.

[3] Drábek P., Milota J., *Lectures on Nonlinear Analysis*, Vydavatelský servis, Republikánská 28, 312 00 Plzeň.

[4] Dresden A., On the Second Variation, Jacobi's Equation and Jacobi's Theorem, *Annals of Mathematics, Second Series* **15** (1913 - 1914), 78-83.

[5] Shannon C.E., A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal* **27** (1948), 379-423, 623-656.