MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Hana Marková

Vlastnosti derivace

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná Matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Děkuji doc. Miroslavu Zelenému, PhD., za jeho metodické vedení. Rovněž mu děkuji za vstřícnost, podnětné rady a připomínky, kterými mi při vypracování této bakalářské práce pomáhal.

Název práce: Vlastnosti derivace

Autor: Hana Marková

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V bakalářské práci dáváme do souvislosti pojmy derivace, Darbouxova vlastnost a funkce první Baireovy třídy. Dokazujeme, že každá derivace má Darbouxovu vlastnost a je první Baireovy třídy. Dále charakterizujeme funkce první Baireovy třídy pomocí jejich úrovňových množin. Zavádíme pojem Zahorského tříd a dáváme je do souvislosti s funkcemi první Baireovy třídy s Darbouxovou vlastností. Na konci práce dokazujeme Clarksonovu-Denjoyovu větu o derivaci a jejich úrovňových množinách.

Klíčová slova: Derivace, Darbouxovu vlastnost, Funkce první Baireovy třídy

Title: Properties of derivative

Author: Hana Marková

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In the bachelor thesis we relate the concepts of derivative, the Darboux property and the function of the Baire class one. It is shown that each derivative has Darboux property and is of the Baire class one. Furthermore, we characterize the functions of the Baire class one using their associated sets. We introduce the concept of Zahorski classes and put them in connection with the functions of the Baire class one with the Darboux property. At the end of the thesis, we prove the Clarkson-Denjoy theorem.

Keywords: Derivative, Darboux property, Baire class one functions

Obsah

Kapitola 1

Základní definice a věty

Pokud nebude uvedeno jinak, budeme v celé této práci předpokládat, že f je reálná funkce jedné reálné proměnné, tj. $f : M \to \mathbb{R}$, kde množina $M \subset \mathbb{R}$. Intervalem budeme rozumět i prázdnou množinu a bod.

1.1 Základní definice a značení

Definice 1. *Řekneme, že f má na intervalu I* ***Darbouxovu vlastnost****, jestliže $f(J)$ je interval, kdykoliv $J \subset I$ je interval.*

Definice 2. *Funkce f je* ***první Baireovy třídy*** *na intervalu I, jestliže je limitou posloupnosti spojitých funkcí na intervalu I.*

Definice 3. ***Variaci funkce*** *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme předpisem*

$$V_a^b(f) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|;\ \{x_i\}_{i=0}^{n} \text{ je dělení } [a,b]\}.$$

Řekneme, že funkce $g : I \to \mathbb{R}$ má na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ ***omezenou variaci****, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $V_a^b(g) < K$ pro každý interval $[a,b] \subset I$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu I značíme $BV(I)$.*

Definice 4. *Řekneme, že funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je* ***absolutně spojitá****, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každou konečnou posloupnost bodů $a \le a_1 \le b_1 \le \ldots \le a_n \le b_n \le b$ splňující $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$ platí $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$. Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $AC([a,b])$.*

Definice 5. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, pak M je typu*

1. *$\mathbf{G}_\delta$, pokud je spočetným průnikem otevřených množin v $\mathbb{R}$,*
2. *$\mathbf{F}_\sigma$, pokud je spočetným sjednocením uzavřených množin v $\mathbb{R}$.*

Definice 6. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, pak M je* ***perfektní****, pokud je uzavřená a nemá žádné izolované body.*

Definice 7. ***Hustotou měřitelné množiny*** *$M \subset \mathbb{R}$ v bodě $x \in \mathbb{R}$ rozumíme číslo*

$$d(M,x) = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda(M \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))},$$

pokud tato limita existuje, přičemž $B(x,r)$ značí uzavřenou kouli se středem x a o poloměru r a λ značí Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}$.

Definice 8. *Nechť $x \in \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, pak x je*

1. ***bodem oboustranné akumulace*** *množiny M, jestliže pro každé $r > 0$ mají intervaly $(x - r, x)$ a $(x, x + r)$ neprázdný průnik s M,*

2. ***bodem oboustranné kondenzace*** *množiny M, jestliže pro každé $r > 0$ mají intervaly $(x - r, x)$ a $(x, x + r)$ nespočetný průnik s M,*

3. ***bodem hustoty*** *množiny M, jestliže M je měřitelná a hustota množiny M je v tomto bodě rovná 1.*

Definice 9. ***Perfektní cesta*** *funkce f v bodě $x \in \mathbb{R}$ je perfektní množina $P \subset \mathbb{R}$ taková, že*

1. *x je bodem oboustranné akumulace množiny P a zároveň*

2. *f restringovaná na P je spojitá v x.*

Definice 10. ***Oscilací funkce*** *f na neprázdném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ budeme rozumět číslo*

$$\omega_f(I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x).$$

Definice 11. ***Oscilací funkce*** *f v bodě $x \in \mathbb{R}$ budeme rozumět číslo*

$$\omega_f(x) = \lim_{r \to 0} \omega_f((x - r, x + r)),$$

pokud tato limita existuje.

Značení 1. *Jako $\mathcal{DB}_1(I)$ budeme značit třídu takových funkcí, jenž mají na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ Darbouxovu vlastnost a zároveň jsou na něm první Baireovy třídy.*

Značení 2. *Jako $\Delta'(I)$ budeme značit třídu funkcí, které mají na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ primitivní funkci.*

1.2 Základní lemmata a věty

Lemma 1 (Darbouxova vlastnost derivace)**.** *Nechť $f \in \Delta'(I)$. Potom f má na I Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Nechť $J \subset I$ je interval. Vezměme y_1, $y_2 \in f(J)$, $y_1 > y_2$ a $z \in (y_1,y_2)$. Dále nalezněme x_1 a x_2 takové, že $f(x_1) = y_1$ a zároveň $f(x_2) = y_2$. Nechť $x_1 < x_2$. (Případ $x_1 > x_2$ lze dokázat analogicky.) Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Definujme funkci H následovně:

$$H(x) = F(x) - zx \text{ pro } x \in [x_1,x_2].$$

Funkce H je spojitá, neboť F je spojitá. Existuje tedy bod $x_* \in [x_1,x_2]$, který je bodem minima funkce H na $[x_1,x_2]$. Dokážeme, že minimum neleží v krajních bodech. Platí, že

$$H'(x) = F'(x) - z = f(x) - z \;,\; x \in (x_1,x_2).$$

Dále počítejme

$$\begin{aligned} H'_+(x_1) &= f(x_1) - z = y_1 - z < 0, \\ H'_-(x_2) &= f(x_2) - z = y_2 - z > 0. \end{aligned}$$

Z tohoto plyne, že

$$\begin{aligned} &\exists \delta_1 > 0 \forall x \in P_+(x_1,\delta_1) : H(x) < H(x_1), \\ &\exists \delta_2 > 0 \forall x \in P_+(x_2,\delta_2) : H(x) < H(x_2). \end{aligned}$$

Potom tedy $x_* \in (x_1,x_2)$ a platí, že

$$H'(x_*) = f(x_*) - z = 0,$$

tedy z tohoto plyne, že $f(x_*) = z$, tedy $z \in f(J)$. Tudíž $f(J)$ je interval.

$\square$

Věta 2. *Nechť $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, pak platí, že $\Delta'(I) \subset \mathcal{DB}_1(I)$.*

Důkaz. Nechť $f \in \Delta'(I)$ a nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Platí, že F je na intervalu I spojitá. Pro každé $x \in I$ platí, že

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Pokud $b = \infty$, položme $f_n = \frac{F(x+\frac{1}{n} - F(x)}{\frac{1}{n}}$. Pak f_n jsou spojité funkce pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pokud $b < \infty$, nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a < b - \frac{2}{n_0}$. Pak pro $n \geq n_0$ definujme funkce f_n následovně:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}}, & \text{pro } x \in (a,b-\frac{2}{n}) \\ \frac{F(b-\frac{1}{n}) - F(b-\frac{2}{n})}{\frac{1}{n}}, & \text{pro } x \in [b-\frac{2}{n},b) \end{cases}.$$

Funkce f_n jsou spojité pro všechny $n \geq n_0$. Tímto je důkaz hotov.

$\square$

Věta 3 (Cantorův-Baireův princip)**.** *Pro každé $\alpha < \omega_1$, kde ω_1 značí první nespočetný ordinál, mějme uzavřené množiny $F_\alpha \subset \mathbb{R}$ takové, že $\alpha < \beta$ implikuje, že $F_\alpha \supset F_\beta$. Pak můžeme najít číslo $\mu < \omega_1$ takové, že*

$$F_\mu = F_\alpha \qquad\qquad \textit{pro } \mu \leq \alpha < \omega_1.$$

Věta 4. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je množina taková, že ji lze zapsat jako*

$$M = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,\ n \in \mathbb{N},$$

kde množiny A_k jsou typu F_σ pro všechny $k \in \{1,\ldots,n\}$. Pak existuje rozklad $\{B_i\}_{i=1}^n$ množiny M takový, že

$$M = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n,$$

kde množiny B_k jsou typu F_σ, zároveň $B_k \subset A_k$ a navíc jsou po dvou disjunktní.

Věta 5. *Pro každou neprázdnou množinu $F \subset \mathbb{R}$, kterou lze zapsat jako nekonečné sjednocení množin typu F_σ, tj. $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots$, existuje interval $(\lambda,\mu) \subset \mathbb{R}$ a n takové, že $(\lambda,\mu) \cap F \subset F_n$.*

Věta 6. *Nechť funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nabývá pouze konečných hodnot $c_1 < \cdots < c_n$. Jestliže každá z množin $\{x \in [a,b] : f(x) = c_k\}$ je typu F_σ, pak je funkce f na intervalu $[a,b]$ první Baireovy třídy.*

Důkazy Vět 3-6 lze nalézt v [2] na stranách 140-146.

Věta 7. *Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) *funkce f je první Baireovy třídy,*

(ii) *pro každé reálné A jsou množiny $\{x \in [a,b] : f(x) < A\}$ a $\{x \in [a,b] : f(x) > A\}$ typu F_σ,*

(iii) *každá neprázdná uzavřená podmnožina $P \subset [a,b]$ obsahuje bod x takový, že restrikce f na P je spojitá v x.*

Důkaz.

$(ii) \to (i)$: Nejprve předpokládejme, že f je omezená funkce. Tedy existují konstanty $l,L \in \mathbb{R}$ takové, že

$$l < f(x) < L \text{ pro každé } x \in [a,b].$$

Rozdělme interval $[l,L]$ na n stejných částí. To jest

$$c_0 = l < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = L,$$

přičemž $c_{k+1} - c_k = \frac{L-l}{n}$ pro každé $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

Dále označme $A_k = \{x \in [a,b] : c_{k-1} < f(x) < c_{k+1}\}$ pro $k = 1,2,\ldots,n-1$. Dle předpokladu jsou tyto množiny typu F_σ a platí, že

$$[a,b] = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}.$$

Podle Věty 4 existuje rozklad intervalu $[a,b]$ takový, že

$$[a,b] = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{n-1},$$

kde B_k jsou typu F_σ, po dvou disjunktní a takové, že $B_k \subset A_k$ pro $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$.

Nechť f_n je funkce taková, že

$$f_n(x) = c_k \text{ pro } x \in B_k, \text{ kde } k \in \{1,2,\dots,n-1\}.$$

Tedy platí, že $l < f_n(x) < L$ pro všechna $x \in [a,b]$. Podle Věty 6 je funkce f_n první Baireovy třídy.

Zvolme libovolný bod $x_0 \in [a,b]$. Potom platí, že

$$x_0 \in B_k \subset A_k \text{ pro nějaké } k \in \{1,2,\dots,n-1\}.$$

To znamená, že $f_n(x_0) = c_k$ a platí, že $c_{k-1} < f(x_0) < c_{k+1}$. Tudíž

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{L-l}{n}.$$

Pro $n \to \infty$ funkce f_n stejnoměrně konvergují k funkci f, tudíž podle [3] paragrafu 24.4. je funkce f první Baireovy třídy.

Přejděme nyní k obecnému případu. Uvažujme funkci

$$g(x) = \operatorname{arctg}(f(x)).$$

Funkce $g(x)$ je omezená. Pro $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$ platí, že

$$\{x \in [a,b] : g(x) > A\} = \{x \in [a,b] : \ f(x) \ > \ \operatorname{tg}(A)\}.$$

Jestliže $A \geq \frac{\pi}{2}$, pak je množina $\{x \in [a,b] : g(x) > A\}$ prázdná. Pokud je ovšem $A < -\frac{\pi}{2}$, pak platí, že $\{x \in [a,b] : g(x) > A\} = [a,b]$. Tudíž množina $\{x \in [a,b] : g(x) > A\}$ je typu F_σ pro všechny A. To samé platí i pro $\{x \in [a,b] : g(x) < A\}$.

Podle již dokázaného platí, že funkce g je první Baireovy třídy, tedy platí, že $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n$, kde funkce g_n jsou spojité pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a takové, že

$$-\frac{\pi}{2} < g_n(x) < \frac{\pi}{2}.$$

Platí, že

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}(g_n(x)).$$

Tedy platí, že funkce f je první Baireovy třídy.

$(i) \to (iii)$: Nechť $P \subset [a,b]$ je neprázdná uzavřená množina. Pokud P obsahuje alespoň jeden izolovaný bod, pak bude tento bod požadovaným bodem spojitosti. Proto dále předpokládejme, že P je perfektní množina.

Nechť D je uzavřený interval obsažený v $[a,b]$ a předpokládejme, že ve vnitřku D je obsažený alespoň jeden bod z P. P je perfektní, tudíž ve vnitřku D je nekonečně mnoho bodů z P.

Ukážeme, že existuje uzavřený interval d ležící ve vnitřku D, obsahující body z P ve svém vnitřku, takový, že oscilace funkce f na $P \cap d$ je menší než libovolné předepsané číslo.

Nejprve se přesvědčíme o existenci uzavřeného intervalu $E \subset D$ takového, že $E \cap P$ je neprázdná perfektní množina. Krajní body intervalu D označme jako a_0 a b_0. Tedy $D = [a_0, b_0]$.

Nekonečná množina $D \cap P$ je uzavřená a žádný z bodů, možná kromě a_0 nebo b_0, není izolovaným bodem této množiny. Pokud a_0 ani b_0 není izolovaným bodem množiny $D \cap P$, definujme množinu E jako $E := D$. Pak platí, že $E \cap P$ je perfektní. Pokud a_0 je izolovaným bodem množiny $D \cap P$, potom množina $D_1 := (D \cap P) \setminus \{a_0\}$ je uzavřená. Jediným izolovaným bodem množiny $D_1 \cap P$ může být b_0. Pokud b_0 není izolovaným bodem množiny $D_1 \cap P$, definujme množinu E jako $E := D_1$. Pak platí, že $E \cap P$ je perfektní množina. Pokud b_0 je izolovaným bodem množiny $D_1 \cap P$, definujme množinu $E := (D_1) \setminus \{b_0\}$. Pak platí, že $E \cap P$ je perfektní množina. Pokud a_0 není izolovaným bodem množiny $D \cap P$ a zároveň b_0 je izolovaným bodem množiny $D \cap P$ potom množina $D_2 := (D \cap P) \setminus \{b_0\}$ je uzavřená. Definujme množinu E jako $E := D_2$. Pak platí, že E je perfektní množina.

Podle předpokladu můžeme funkci f psát jako

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad \text{pro všechna } x \in [a,b],$$

kde f_n jsou spojité funkce. Zvolme $\varepsilon > 0$ a definujme množiny $A_{n,m}$ následovně:

$$A_{n,m} := \{x \in E : |f_n(x) - f_{n+m}(x)| \le \varepsilon\} \quad m,n \in \mathbb{N}.$$

Množiny $A_{n,m}$ jsou uzavřené, což plyne ze spojitosti funkcí f_k. Dále definujme množiny B_n následovně:

$$B_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m}.$$

Rovněž množiny B_n jsou uzavřené a ukážeme, že $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Tedy, jestliže je $x_0 \in E$, pak posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, a proto pro dostatečně velké n a libovolné m máme, že $|f_n(x_0) - f_{n+m}(x_0)| < \varepsilon$, tudíž $x_0 \in B_n$. Obrácená inkluze je triviální.

Rovnost $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ nám také dává, že

$$E \cap P = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap P.$$

Podle Věty 5 existuje interval (λ,μ) mající s $E \cap P$ neprázdný průnik a $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$(\lambda,\mu) \cap E \cap P \subset P \cap B_n.$$

Nechť $x \in (\lambda,\mu) \cap E \cap P$, poté máme, že

$$|f_n(x) - f_{n+m}(x)| \le \varepsilon$$

pro libovolné m.

Díky limitnímu přechodu $m \to \infty$ dostáváme, že

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Množina $E \cap P$ je perfektní a interval (λ,μ) obsahuje nejméně jeden bod z této množiny. To nám dává, že množina $E \cap P \cap (\lambda,\mu)$ je nekonečná.

Nechť x_0 je bod z množiny $E \cap P \cap (\lambda,\mu)$, který ale není koncovým bodem intervalu E. Vezměme uzavřený interval d, který obsahuje bod x_0 ve svém vnitřku a je tak malý, že

(i) leží v intervalu (λ,μ),

(ii) leží ve vnitřku intervalu E, tedy ve vnitřku intervalu D,

(iii) oscilace funkce f_n na intervalu d je méně než ε.

Nechť x_1 a x_2 jsou dva body z množiny $P \cap d$. Pak platí, že

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \leq \varepsilon, |f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq \varepsilon, |f_n(x_2) - f(x_2)| \leq \varepsilon.$$

Což nám dává, že

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 3\varepsilon.$$

Tedy oscilace funkce f je na množině $P \cap d$ méně než ε.

Tímto jsme dokázali, že pro každý uzavřený interval $D \subset [a,b]$, obsahující body z P ve svém vnitřku, existuje jiný uzavřený interval d, ležící ve vnitřku D, který také ve svém vnitřku obsahuje body z P a v němž platí, že oscilace funkce f na $P \cap d$ je libovolně malá.

Nyní vezměme uzavřený interval $d_1 \subset [a,b]$ obsahující ve svém vnitřku body z P, délky $l_{d_1} < 1$ a takový, že oscilace funkce f na množině $P \cap d_1$ je méně než 1. Dále najdeme uzavřený interval d_2, ležící ve vnitřku d_1, obsahující ve svém vnitřku body z P, mající délku $l_{d_2} < \frac{1}{2}$ a takový, že oscilace funkce f na množině $P \cap d_2$ je méně než $\frac{1}{2}$. Dále pokračujeme v procesu, čímž vytvoříme posloupnost uzavřených intervalů.

$$d_1 \supset d_2 \supset d_3 \cdots .$$

Každý z těchto uzavřených intervalů leží ve vnitřku předchozího intervalu, obsahuje ve svém vnitřku body z P a oscilace funkce f je na množině $P \cap d_n$ menší než $\frac{1}{n}$.

Nechť ξ je bod společný pro všechny intervaly d_n. Bod ξ patří do P, protože P je uzavřená. Nyní je již snadno vidět, že funkce f restringovaná na P je spojitá v bodě ξ.

$(iii) \to (ii)$: Nechť g, h jsou dvě reálná čísla, $g < h$. Definujme množiny G a H následovně:

$$G := \{x \in [a,b] : f(x) > g\}, \; H := \{x \in [a,b] : f(x) < h\}.$$

Platí, že $[a,b] = G \cup H$.

Nechť $P \subset [a,b]$ je neprázdná uzavřená množina. Nechť x_0 je bodem spojitosti funkce f restringované na P. Je jasné, že musí platit alespoň jedna z těchto dvou nerovností:

$$f(x_0) > g,\ f(x_0) < h.$$

Nechť například platí, že $f(x_0) > g$. Ze spojitosti funce f v bodě x_0 existuje interval δ, který obsahuje bod x_0 a je tak malý, že $f(x) > g$ pro všechny x z množiny $P \cap \delta$. Definujme množinu

$$P^* := P \setminus (P \cap \delta).$$

P^* je uzavřená množina, neboť platí, že $P^* = P \cap \delta^c$. Zde tedy

$$P \setminus P^* = P \cap \delta \subset G.$$

Kdyby platilo, že $f(x_0) < h$, pak bychom mohli analogicky najít uzavřenou množinu $P^* \subset P$ takovou, že $P \setminus P^* \subset H$.

Tímto jsme ukázali, že pro každou neprázdnou uzavřenou množinu P, můžeme najít uzavřenou podmnožinu $P^* \subset P$ takovou, že množina $P \setminus P^*$ je neprázdná a je celá obsažená buď v G nebo v H.

Označme $P_0 = [a,b]$ a najděme uzavřenou množinu $P_1 \subset P_0$ takovou, že $P_0 \setminus P_1$ je neprázdná a je celá obsažená buď v G nebo v H. Jestliže P_1 není prázdná, najdeme uzavřenou množinu P_2 takovou, že $P_1 \setminus P_2$ je neprázdná a je celá obsažená buď v G nebo v H. V tomto procesu pokračujeme dále a nacházíme buď prázdnou množinu P_n anebo zkonstruujeme posloupnost množin P_n takových, že $P_n \setminus P_{n+1}$ je neprázdná pro všechna přirozená čísla n a každá z množin $P_n \setminus P_{n+1}$ patří buď do H nebo do G.

Nechť platí druhá možnost. Definujme množinu P_ω následovně:

$$P_\omega := \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n.$$

V případě toho, že ani P_ω není prázdná pokračujeme dále v konstrukci množin $P_{\omega+1}, P_{\omega+2}, \cdots$.

Nechť $\alpha < \omega_1$ je transfinitní ordinál a předpokládejme, že všechny množiny P_β pro $\beta < \alpha$ byly již zkonstruovány a jsou neprázdné. Jestliže je α izolovaný ordinál, je P_α uzavřená podmnožina množiny $P_{\alpha-1}$ taková, že $P_{\alpha-1} \setminus P_\alpha$ je neprázdná a celá obsažená v H nebo G. Jestliže je ale α limitní ordinál, definujme množinu P_α jako

$$P_\alpha := \bigcap_{\beta<\alpha} P_\beta.$$

Předpokládejme tedy, že všechny množiny P_α pro $\alpha < \omega_1$ jsou neprázdné. Podle Cantorova-Baireova principu můžeme najít takové μ, že

$$P_\mu = P_{\mu+1},$$

a zároveň takové, že neprázdnost P_μ implikuje neprázdnost $P_\mu \backslash P_{\mu+1}$. Tento proces definování množin P_α nemůžeme provést pro všechny limitní ordinály. Tedy nutně existuje $\lambda < \omega_1$ takové, že

$$P_\alpha \neq \emptyset \text{ pro } \alpha < \lambda \text{ a } P_\lambda = \emptyset.$$

V tomto případě můžeme počáteční interval $P_0 = [a,b]$ zapsat ve tvaru

$$[a,b] = \bigcup_{\alpha<\lambda} (P_\alpha \setminus P_{\alpha+1}).$$

Tedy, pokud je $x \in [a,b]$, pak můžeme najít takové $\alpha < \lambda$, že $x \notin P_\alpha$. Nechť β je první takové číslo. Je jasné, že β je izolovaný ordinál, kdyby β byl limitní ordinál, pak by x, které je ve všech P_α pro všechna $\alpha < \beta$, bylo i v průniku P_β. To znamená, že $x \in (P_{\beta-1} \setminus P_\beta)$ a že platí

$$[a,b] \subset \bigcup_{\alpha<\lambda} (P_\alpha \setminus P_{\alpha+1}).$$

Opačná inkluze je triviální.

Každá z množin $P_\alpha \setminus P_{\alpha+1}$ je buď v množině H nebo v množině G. Označme jako T množinu všech $\alpha < \lambda$ takových, že

$$P_\alpha \setminus P_{\alpha+1} \subset G.$$

Nechť $U := W_\lambda \setminus T$. Kde W_λ je množina všech ordinálu menších než λ.
Je jasné, že $U \cap T = \emptyset$ a že

$$[a,b] = \bigcup_{\alpha\in T} (P_\alpha \setminus P_{\alpha+1}) \cup \bigcup_{\alpha\in U} (P_\alpha \setminus P_{\alpha+1}).$$

Každá z množin $P_\alpha \setminus P_{\alpha+1}$ je typu F_σ, jejich sjednocení

$$A = \bigcup_{\alpha\in T} (P_\alpha \setminus P_{\alpha+1}),\ B = \bigcup_{\alpha\in U} (P_\alpha \setminus P_{\alpha+1})$$

jsou také typu F_σ, protože množiny T, U jsou spočetné. Poznamenejme, že $A \subset G$ a $B \subset H$ a že A a B jsou disjunktní (protože množiny $P_\rho \setminus P_{\rho+1}$ a $P_\theta \setminus P_{\theta+1}$ mají prázdný průnik pro $\rho \neq \theta$).

Tedy máme, že pro každé dvě reálná čísla g, h, $g < h$, můžeme nalézt rozklad intervalu $[a,b]$ na dvě disjunktní množiny typu F_σ, to jest, $[a,b] = A \cup B$, kde

$$A \subset \{x \in [a,b] : f(x) > g\} \text{ a } B \subset \{x \in [a,b] : f(x) < h\}.$$

Zafixujme nyní g a h a uvažujme posloupnost reálných čísel $\{h_i\}_{i=1}^\infty$ takovou, že

$$h_1 > h_2 > h_3 > \cdots,\ \lim h_n = g.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nyní máme, že $[a,b] = A_n \cup B_n$, kde A_n a B_n jsou množiny typu F_σ a platí, že

$$A_n \subset \{x \in [a,b] : f(x) > g\},\ B_n \subset \{x \in [a,b] : f(x) < h_n\}.$$

Definujme množiny R a S následovně:

$$R := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ S := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Platí, že $R \cap S = \emptyset$ a že $[a,b] = R \cup S$. Množina R je typu F_σ. Ukážeme, že $\{x \in [a,b] : f(x) > g\} = R$.

Platí, že jestliže je $f(x_0) > g$, pak pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ máme, že $f(x_0) > h_n$, a tedy $x_0 \notin B_n$. To znamená, že $x_0 \notin S$, a tedy $x_0 \in R$.

Z tohoto plyne, že $\{x \in [a,b] : f(x) > g\} \subset R$. Opačná inkluze je zřejmá. Tedy $\{x \in [a,b] : f(x) > g\}$ je typu F_σ.

Obdobný důkaz můžeme provést i pro $\{x \in [a,b] : f(x) < h\}$.

❑

Věta 8. *Nechť je funkce f diferencovatelná na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a $f \in BV([a,b])$, pak platí, že $f \in AC([a,b])$.*

Důkaz. Pokud má funkce f konečnou variaci na $[a,b]$, pak ji lze zapsat ve tvaru $f = g - h$, kde g, h jsou neklesající funkce. Z [5][Věta 22.7] víme, že g', $h' \in \mathcal{L}^1([a,b])$. Platí, že $f' = g' - h'$ skoro všude. Z tohoto plyne, že i $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$. Tudíž máme, že

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y)dy\ (a \leq x \leq b).$$

Podle známé charakterizace [4][Věta 7.18] dostáváme, že $f \in AC([a,b])$. Tím je důkaz hotov.

❑

Kapitola 2

Zahorského třídy

Definice 12. *Nechť $E \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina typu F_σ. Řekneme, že E je třídy*

- $\mathbf{M_0}$, *jestliže každý bod z E je bodem oboustranné akumulace množiny E,*
- $\mathbf{M_1}$, *jestliže každý bod z E je bodem oboustranné kondenzace množiny E,*
- $\mathbf{M_2}$, *pokud každé jednostranné prstencové okolí každého bodu x z E má s E průnik kladné míry,*
- $\mathbf{M_3}$, *jestliže pro každé x z E a pro každou posloupnost uzavřených intervalů takovou, že $\{I_k\}$ konverguje k x, $\lambda(I_n \cap E) = 0$ a $x \notin I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(I_n)/dist(x, I_n) = 0$,*
- $\mathbf{M_4}$, *jestliže existuje posloupnost uzavřených množin $\{K_n\}$ a posloupnost kladných čísel $\{\mu_n\}$ tak, že $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ a že pro každé $x \in K_n$ a každé $c > 0$ existuje číslo $\epsilon(x,c) > 0$ takové, že pro jakékoliv h a h_1 splňující nerovnosti $hh_1 > 0$, $h/h_1 < c$, $|h + h_1| < \epsilon(x,c)$ platí*
$$\frac{\lambda(E \cap (x+h, x+h+h_1))}{|h_1|} > \mu_n,$$
- $\mathbf{M_5}$, *jestliže každý bod z E je bodem hustoty množiny E.*

Poznámka. Prázdnou množinu řadíme do všech tříd.

Definice 13. *Nechť $f : I \to \mathbb{R}$, $k \in \{0,1,\dots,5\}$. Řekneme, že f je třídy $\mathcal{M}_\mathbf{k}$, pokud každá úrovňová množina funkce f patří do třídy M_k.*
Úrovňovou množinou funkce f rozumíme množinu ve tvaru $\{x \in I : f(x) < \alpha\}$ nebo $\{x \in I : f(x) > \alpha\}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Věta 9. *Platí, že $\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2 \supset \mathcal{M}_3 \supset \mathcal{M}_4 \supset \mathcal{M}_5$.*

Důkaz Věty 9 lze nalézt v [6].

Věta 10. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f \in \mathcal{DB}_1$. Pak platí, že graf funkce f je souvislý.*

Důkaz Věty 10 lze nalézt v [1] na straně 10.

Věta 11. *Nechť I je uzavřený interval, pak platí, že $\mathcal{DB}_1(I) = \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1$.*

Důkaz. Z definic tříd M_0 a M_1 plyne, že $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_0$.
Dále dokážeme, že $\mathcal{DB}_1(I) \subset \mathcal{M}_1$:

Nechť $f \in \mathcal{DB}_1(I)$. Z Věty 10 víme, že graf funkce f je souvislý. Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon, \delta > 0$. Definujme množinu E následovně:

$$E := \{x \in I : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\} \cap (x_0, x_0 + \delta).$$

Nejprve ukážeme, že množina E má mohutnost kontinua.

Pro všechny $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ buď M_x úsečka s počátečním bodem $(x_0, f(x_0) + \varepsilon)$ a koncovým bodem $(x, f(x_0))$.
Dále buď N_x úsečka s počátečním bodem $(x_0, f(x_0) - \varepsilon)$ a koncovým bodem $(x, f(x_0))$.

Nechť $P_x = M_x \cup N_x \cup \{(x_0, y) : |y - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$. P_x je sjednocením dvou úseček a dvou polopřímek. Graf $G(f)$ je souvislý, tudíž P_x graf protíná. Je jasné, že bod průniku leží v $M_x \cup N_x$. Toto platí pro všechna $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Z toho plyne, že množina E má mohutnost kontinua. Protože f je první Baierovy třídy, je množina E typu F_σ z čehož plyne, že E obsahuje neprázdnou perfektní množinu.

Položme $\varepsilon_1 = \delta_1 = 1$ a zvolme perfektní množinu P_1 tak, že

$$P_1 \subset (x_0, x_0 + \frac{\delta_1}{2}) \text{ a } |f(x) - f(x_0)| < 1 \text{ pro všechny } x \in P_1.$$

Nechť $\delta_2 = \min\{x - x_0 : x \in P_1\}$ a dále pokračujme indukcí. Tedy položme

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n} \text{ a } \delta_n = \min\{x - x_0 : x \in P_{n-1}\}.$$

Množina P_n je taková, že

$$P_n \subset (x_0, x_0 + \frac{\delta_n}{2}) \text{ a } |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n} \text{ pro každé } x \in P_n.$$

Definujme množinu Q tak, že $Q := \{x_0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Množina Q je perfektní, bod x_0 je bodem akumulace množiny Q zprava a funkce f restringovaní na Q je spojitá v x_0.

Obdobně sestrojíme množinu R, kde x_0 bude bodem akumulace zleva a funkce f restringovaná na R bude spojitá v x_0. Množina $P \cup R$ tvoří potom perfektní cestu funkce f v bodě x. Bod x_0 byl volen libovolně, tudíž platí, že funkce f má perfektní cestu v každém bodě svého definičního oboru.

Dále si uvědomme, že pokud má funkce f v každém bodě svého definičního oboru perfektní cestu, pak už nutně musí platit, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ jsou množiny $\{x \in I : f(x) < a\}$ a $\{x \in I : f(x) > a\}$ ve třídě M_1.

$\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{DB}_1(I)$: Tento důkaz můžeme nalézt v [6].

Nyní tedy máme, že $\mathcal{DB}_1(I) \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{DB}_1(I)$. Tím je důkaz hotov. ❑

Věta 12 (Clarksonova-Denjoyova věta)**.** *Nechť I_0 je otevřený interval, $f \in \Delta'(I_0)$, $\alpha < \beta$ a $E = \{x \in I_0 : \alpha < f(x) < \beta\}$. Pak je E prázdná nebo $\lambda(E) > 0$.*

Důkaz. Protože $f \in \Delta'(I_0)$ pak máme, že $f \in \mathcal{DB}_1(I_0)$, a tudíž je množina E typu F_σ. Označme F primitivní funkci k funkci f na intervalu I_0.
Pro spor předpokládejme, že množina E je neprázdná a zároveň $\lambda(E) = 0$.

Zvolme x_0, α_1 a β_1 takové, že $\alpha < \alpha_1 < f(x_0) < \beta_1 < \beta$. Definujme

$$E_1 = \{x \in I_0 : \ \alpha_1 \ < \ f(x) < \ \beta_1 \ \} \text{ a } P_1 = \overline{E_1}.$$

Protože $f \in \mathcal{DB}_1$, pak platí, že E_1 je oboustranně hustá sama v sobě, jak plyne z Věty 10, tudíž P_1 je perfektní z definice.

Nechť x_1 je bod spojitosti funkce f restringované na P_1. Protože E_1 je hustá v P_1, existuje uzavřený interval I takový, že $x_1 \in I$, $I \cap P_1$ je perfektní a platí, že

$$\alpha < f(x) < \beta \text{ pro všechna } x \in I \cap P_1.$$

Protože $I \cap P_1 \subset E$, pak $\lambda(I \cap P_1) = 0$.

Nechť $[c,d]$ je nejmenší možný interval obsahující $I \cap P_1$ a nechť $\{(c_k,d_k)\}$ je posloupnost intervalů v $[c,d]$ doplňkových k P_1. Pro každé x z každého intervalu (c_k,d_k) platí, že $f(x) \geq \beta_1$ nebo že $f(x) \leq \alpha_1$. Protože f má Darbouxovu vlastnost, může platit pouze jedna z těchto dvou nerovností na intervalu (c_k,d_k).

Nechť $\mathcal{I}_1$ (respektive $\mathcal{I}_2$) sestává ze všech intervalů $[c_k,d_k]$ takových, že f na nich splňuje první (respektive druhou) nerovnost. Nechť A_1 (respektive A_2) označuje množinu koncových bodů intervalů z $\mathcal{I}_1$ (respektive z $\mathcal{I}_2$).

Pokud f restringovaná na $(P_1 \cap [c,d])$ má bod spojitosti, nemůže se stát, že A_1 i A_2 by byly husté v $P_1 \cap [c,d]$. Proto existuje interval $I_1 \subset [c,d]$ takový, že množina $I_1 \cap P_1$ je neprázdná a na každém intervalu $J \subset I_1$ disjunktním s $I_1 \cap P_1$ platí buď, že $f \leq \alpha_1$ nebo $f \geq \beta_1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že platí druhá nerovnost, tj. $f \geq \beta_1$ na J. Tímto jsme dospěli k následující situaci:

$$\alpha_1 \leq f(x) \leq \beta_1 \text{ pro } x \in I_1 \cap P_1 \text{ a}$$

$$f(x) \geq \beta_1 \text{ pro } x \in I_1 \setminus P_1.$$

Tudíž máme, že na intervalu I_1 je funkce f zdola omezena číslem α_1 a také, že $f \geq \beta_1$ skoro všude.

Dosud jsme pracovali s tím, že $f \in \mathcal{DB}_1(I_0)$, nyní využijeme toho, že $f \in \Delta'(I_0)$. Jestliže platí, že $F' = f$ a $F' \geq \alpha_1$ na I_1, pak F má na I_1 konečnou variaci. Protože F je na I_1 diferencovatelná, je F na I_1 podle Věty 9 i absolutně spojitá. Tudíž platí, že

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f d\lambda \text{ pro každé } x, y \in I_1.$$

Z toho, že $f \geq \beta_1$ skoro všude na I_1, vyplývá, že

$$(F(y) - F(x))/(y - x) \geq \beta_1 \text{ pro všechna } x, y \in I_1.$$

Tedy nerovnost $F' \geq \beta_1$ platí na celém I_1. Ale I_1 obsahuje body z E_1, čímž docházíme ke sporu a důkaz je tímto hotov.

❑

Závěr

V první části práci jsme mimo jiné zadefinovali pojmy Darbouxova vlastnost a funkce první Baireovy třídy. Dokázali jsme, že každá derivace má Darbouxovu vlastnost a je první Baireovy třídy. Dále jsme charakterizovali funkce první Baireovy třídy pomocí Darbouxovy vlastnosti a úrovňových množin. Ve druhé kapitole jsme zavedli pojem Zahorského tříd, abychom poté mohli dokázat Clarksonovu-Denjoyovu větu pojednávající o úrovňových množinách derivace.

Literatura

[1] A. Bruckner, *Differentiation of Real Functions*, Volume 5, American Mathematical Society, 1994.

[2] I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Volume II, Frederick Ungar Publishing, 1961.

[3] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, 1995.

[4] W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru* , Academia, 2003.

[5] J. Lukeš, J. Malý, *Míra a integrál*, Karolinum, 2002.

[6] Z. Zahorski, *Sur la premiére dérivée*, Transaction of American Mathematical Society, 1950.