

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Kincl

Konformní zobrazení a Laplaceova rovnice

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.

Studijní program: Matematika (B1101)

Studijní obor: MOM (1101R023)

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Děkuji svému vedoucímu, panu Rokytovi, za velikou ochotu a trpělivost.

Název práce: Konformní zobrazení a Laplaceova rovnice

Autor: Ondřej Kincl

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Tato práce se zabývá konformními funkcemi nad oborem komplexních čísel s velkým důrazem na aplikace ve fyzice. V prvních dvou částech, převážně teoretických, zavedeme matematické pojmy a tvrzení, které potom ve třetí a čtvrté části aplikujeme při řešení Laplaceovy parciální diferenciální rovnice v různých zajímavých oblastech v \mathbb{R}^2 . Ukážeme, jak se dají využít metody komplexní analýzy při zkoumání indukovaného náboje na vodičích a jak v aerodynamice umožňují vysvětlit, proč vlastně fungují křídla letadel.

Klíčová slova: konformní zobrazení, harmonické funkce, Laplaceova rovnice

Title: Conformal mapping and the Laplace equation

Author: Ondřej Kincl

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: This paper studies conformal maps over the field of complex numbers with an emphasis on physical applications. In the first two parts (which are mostly theoretic) we shall introduce mathematical terms and theorems which will allow us to solve the Laplace partial differential equation in various regions with an interesting geometry in \mathbb{R}^2 (parts 3 and 4). We will show how methods of the complex analysis can be applied to describe the induced charge on a conductor. In the field of aerodynamics, we will use these methods to explain the underlying principle behind the function of wings.

Keywords: conformal mapping, harmonic function, Laplace equation

Obsah

1 Úvod	2
2 Konformně ekvivalentní množiny	3
3 Harmonické funkce	10
4 Elektrické pole	15
5 Potenciálové proudění	20

1 Úvod

Konformní zobrazení je téma, které elegantně spojuje pěknou abstraktní matematiku (komplexní analýzu) s různými aplikacemi ve fyzice a inženýrství. Nejprve si ukážeme, jak se holomorfní funkce s nenulovou derivací dají vnímat jako zobrazení mezi dvourozměrnými oblastmi, které zachovávají úhly všech křivek. V části o harmonických funkcích vysvětlíme, jak to vše souvisí s Laplaceovou rovnicí, což posléze použijeme pro analytické řešení vybraných úloh elektrostatiky a proudění tekutin.

Pro pochopení textu se předpokládá základní znalost komplexní analýzy – používat budeme Cauchy-Goursatovu větu, Cauchy-Riemannovy podmínky, větu o otevřeném zobrazení, větu o derivaci inverzní funkce, Laurentovy řady a klasifikaci izolovaných singularit. Tato látka je pokryta v řadě učebnic komplexní analýzy, viz např. [R]. Neobejdeme se pochopitelně ani bez některých topologických pojmů, jako je oblast, jednoduše souvislá množina, hranice, homeomorfismus, apod. Naopak předchozí znalost teorie parciálních diferenciálních rovnic (PDR) není potřeba.

Protože se nejedná o příliš obtížnou matematiku, výsledky, ke kterým dospějme, jsou již známé – původní je zpracování tématu a některé důkazy. Hlavním zdrojem je učebnice [MAF5], kniha [R] a poznámky [O].

Co se značení týče, budeme všude ztotožňovat \mathbb{R}^2 s \mathbb{C} . Např. bude-li $A = (x, y)$, pak také budeme psát $A = x + yi$. Bude-li $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplexní funkce, pak ji budeme současně chápat jako zobrazení $f(x + iy) = f(x, y)$, které můžeme parciálně derivovat podle x nebo y . Účelem tohoto pohodlného (a trochu nepořádného) značení je snaha vyhnout se příliš velkému množství symbolů ve větách a příkladech, v nichž se transformují řešení PDR pomocí komplexních zobrazení z jedné oblasti do druhé. Dále bude-li u spojitá funkce definovaná v $\Omega \subset \mathbb{C}$, pak pro body $z_0 \in \text{clo } \Omega \cup \{\infty\}$, které neleží v Ω , budeme někdy značit

$$u(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} u(z)$$

(pokud pravá strana má smysl). Kromě toho budeme používat symboly uvedené v následující tabulce:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	standardní skalární součin v \mathbb{R}^2
$\text{int } \Omega$	vnitřek množiny Ω
$\text{clo } \Omega$	uzávěr Ω
$\partial\Omega$	hranice Ω
$\text{Re } f, \text{Im } f$	reálná a imaginární část f
u^1, u^2	první a druhá složka u
u_x, u_y	parciální derivace podle x resp. y
$\nabla\varphi$	gradient (skalární) funkce φ
$\text{div } u = u_x^1 + u_x^2$	divergence funkce u (v \mathbb{R}^2)
$\text{rot } u = u_x^2 - u_y^1$	rotace funkce u (v \mathbb{R}^2)
$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$	horní polorovina
$U = \{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$	otevřený jednotkový kruh
$S = \partial U$	jednotková kružnice
$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$	propíchnutá komplexní rovina
$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Riemannova sféra
$\ln x$	logaritmus v \mathbb{R}^+
$\log z$	hlavní část komplexního logaritmu

2 Konformně ekvivalentní množiny

Definice. Necht $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Zobrazení $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se nazývá *konformní* v Ω , jestliže je holomorfní v Ω a platí

$$f'(z) \neq 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Mimo oblast komplexní analýzy se konformní zobrazení může definovat jako funkce, která zachovává úhly regulárních křivek \square . O konzistenci těchto definic hovoří následující tvrzení.

Věta 1. Necht f je konformní v otevřené $\Omega \subset \mathbb{C}$. Předpokládejme, že $\phi, \psi : I \rightarrow \Omega$ jsou regulární křivky, které v čase $t_0 \in I$ procházejí bodem $z_0 \in \mathbb{C}$ a svírají zde úhel γ . Pak $f \circ \phi, f \circ \psi$ jsou regulární křivky, které v čase t_0 procházejí bodem $f(z_0)$ a svírají zde tentýž úhel γ .

Důkaz. Označme $\hat{\phi} = f \circ \phi, \hat{\psi} = f \circ \psi$. Regularita plyne ihned z pravidla pro derivování složené funkce:

$$\hat{\phi}' = (f' \circ \phi)\phi' \neq 0, \quad \forall t \in I$$

(analogicky pro ψ). Připomeňme, že γ je definováno jako číslo z intervalu $[0, \pi]$ splňující

$$\cos \gamma = \frac{\langle \phi'(t_0), \psi'(t_0) \rangle}{|\phi'(t_0)||\psi'(t_0)|}.$$

Použijeme následující trik: skalární součin lze napsat v komplexním tvaru:

$$\langle a, b \rangle = \operatorname{Re}(a\bar{b}), \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

Tedy v čase t_0 lze spočítat:

$$\frac{\operatorname{Re}(\hat{\phi}'\overline{\hat{\psi}'})}{|\hat{\phi}'||\hat{\psi}'|} = \frac{\operatorname{Re}(f'\phi'\overline{f'\psi'})}{|f'\phi'|\overline{|f'\psi'|}} = \frac{\operatorname{Re}(\phi'\overline{\psi'})}{|\phi'|\overline{|\psi'|}} = \cos \gamma.$$

Tím je důkaz dokončen. \square

Za předpokladu dostatečné hladkosti f lze dokázat i opačnou implikaci, tedy že zobrazení zachovávající (orientované) úhly křivek je konformní ve smyslu nenulové komplexní derivace - důkaz nalezneme v Rudinově knize \square . Toto obrácené tvrzení však nebudeme v tomto textu potřebovat. Na holomorfní funkce lze alternativně nahlížet jako na zobrazení z \mathbb{R}^2 , jejichž totální diferenciál působí na vektory v \mathbb{R}^2 (komplexní čísla) jako násobení komplexním skalárem, tedy jako kombinace škálování a rotace. Odtud je pak vlastnost zachovávání úhlů (pro nenulovou derivaci) zřejmá.

Příklad 1. Následující příklad ukazuje, proč je předpoklad nenulové derivace důležitý: Zvolme $f(z) = z^2$. Pak f je holomorfní v komplexní rovině a s výjimkou počátku má všude nenulovou derivaci. Zvolme

$$\phi(t) = t, \quad \psi(t) = it, \quad t \in (-1, 1).$$

Tyto křivky evidentně svírají v čase 0 pravý úhel. Po transformování funkcí f ovšem

$$f \circ \phi(t) = t^2, \quad f \circ \psi(t) = -t^2, \quad t \in (-1, 1).$$

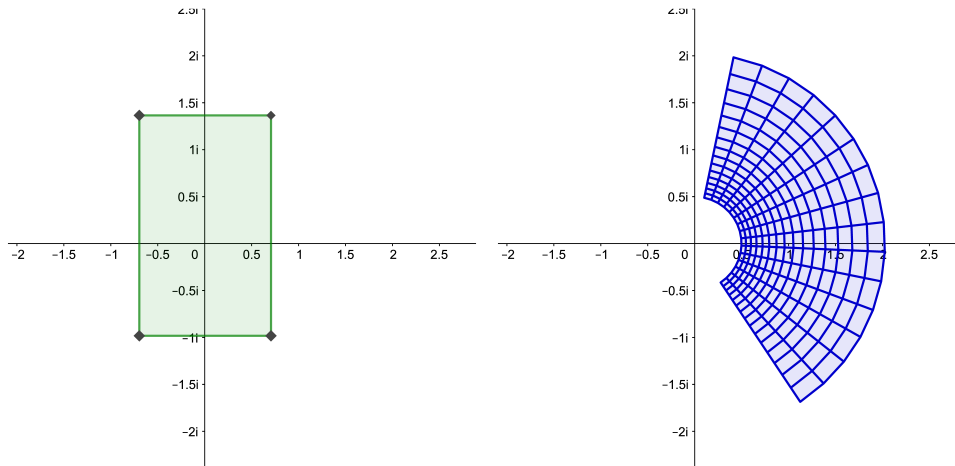
I když pomineme, že tyto křivky nejsou v čase 0 regulární, jejich obrazem jsou úsečky, jež se střetávají pod úhlem 180° - o zachování úhlu nemůžeme vůbec hovořit.

Podobně jako v analýze funkcí jedné reálné proměnné, i pro komplexní funkce existuje souvislost mezi invertovatelností a nenulovostí derivace. Pro nás bude zvláště důležitá následující věta.

Věta 2. Necht $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f holomorfní a prostá funkce v Ω . Pak $f'(z) \neq 0$ pro všechna $z \in \Omega$. Dále $f(\Omega)$ je otevřená množina, inverzní funkce g k funkci f je holomorfní v $f(\Omega)$ a pro každé $\zeta = f(z) \in f(\Omega)$ platí:

$$g'(\zeta) = \frac{1}{f'(z)}.$$

¹Pod pojmem regulární křivka rozumíme spojitě diferencovatelnou funkci $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$, jejíž derivace je nenulová ve všech bodech intervalu I , který může být otevřený nebo uzavřený. V případě uzavřeného intervalu pak v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace.



Obrázek 1: Příklad obdélníku a jeho obrazu podle exponenciály

Důkaz. Toto tvrzení je jedním z důsledků věty o otevřeném zobrazení. Jeho důkaz lze nalézt v [R] (kap. 10). \square

Pokud pro holomorfní funkci f ukážeme, že je prostá na jisté množině Ω , na základě předchozí věty již budeme vědět, že f je konformní, aniž bychom potřebovali vyšetřovat nulové body její derivace. Poznamenejme ještě, že opačná implikace obecně neplatí. Jeden příklad za všechny je komplexní exponenciála $f(z) = e^z$, která je konformní v \mathbb{C} , ale není prostá – má totiž periodu $2\pi i$.

Definice. Oblasti $\Omega, \hat{\Omega} \subset \mathbb{C}$ jsou *konformně ekvivalentní*, jestliže existuje vzájemně jednoznačné konformní zobrazení f z Ω na $\hat{\Omega}$.

Definice výše zavádí relaci ekvivalence na množině oblastí v \mathbb{C} . Symetrie je důsledkem věty [2], transitivita plyne z věty o derivování složené funkce a reflexivita je zřejmá.

Příklad 2. Každé afinní zobrazení $f(z) = az + b$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, které je regulární ($a \neq 0$) je konformní a prosté v \mathbb{C} . Afinní zobrazení je libovolná kombinace translace, rotace a škálování. Lze tedy tvrdit, že přímo podobné oblasti [2] jsou konformně ekvivalentní.

Příklad 3. O něco zajímavější je výše zmíněná exponenciála $f(z) = e^z$, která je konformní a prostá, omezíme-li se na pás

$$\Omega = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi).$$

Rozepíšeme-li z do algebraického tvaru $z = x + yi$, pak $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$. Odtud je patrné, že f zobrazí konformně obdélník

$$B = (a, b) \times (c, d) \subset \Omega$$

na výše z mezikruží

$$e^B = \{z \in \mathbb{C} : e^a < |z| < e^b, c < \arg z < d\}.$$

Speciálně:

1. $B_1 := (-\infty, \infty) \times (-\pi, \pi)$ je konformně ekvivalentní komplexní rovině bez polopřímky $(-\infty, 0]$.
2. $B_2 := (-\infty, 0) \times (-\pi, \pi)$ je konformně ekvivalentní otevřenému jednotkovému kruhu bez úsečky $[-1, 0]$.
3. $B_3 := \mathbb{R} \times (0, \pi)$ je konformně ekvivalentní horní polorovině $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

Příklad 4. Mějme $\lambda \in (0, 2]$ a uvažujme funkci

$$f_\lambda(z) = z^\lambda = \exp(\lambda \log(z)), \quad z \in \Omega = \{\operatorname{Re} z > 0\}.$$

²ty, jež jsou vztaženy afinní transformací

Zobrazení f_λ je holomorfní v Ω a platí pro něj polární předpis:

$$f_\lambda : z = re^{i\theta} \mapsto r^\lambda e^{i\lambda\theta}$$

pro každé $r > 0$ a $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Odtud lze vidět, že díky volbě $\lambda \leq 2$ je f prosté na Ω a jeho obrazem je množina

$$\hat{\Omega} = \left\{ re^{i\theta} : r > 0, \theta \in \left(-\frac{\lambda\pi}{2}, \frac{\lambda\pi}{2} \right) \right\}$$

Dostáváme tak konformní ekvivalenci různých úhlů, neboli oblastí vymezených dvěma polopřímkami. Inverzní funkcí je

$$g(\zeta) = \zeta^{1/\lambda}, \quad \zeta \in \hat{\Omega}.$$

Definice. Pojem *zobecněná kružnice* souhrnně označuje kružnice a přímky v \mathbb{C} .

Věta 3 (Rovnice pro zobecněnou kružnici). $Z \subset \mathbb{C}$ je *zobecněná kružnice*, právě když je popsána rovnicí:

$$a|z|^2 + bz + \bar{b}z + c = 0, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

kde $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ jsou parametry splňující $|b|^2 > ac$.

Důkaz. Víme, že kružnice se středem s a poloměrem $r > 0$ je dána rovnicí:

$$r^2 = |z - s|^2 = (z - s)\overline{(z - s)} = |z|^2 - \bar{s}z - s\bar{z} + |s|^2$$

což je rovnice tvaru (1) při zavedení $a = 1$, $b = -\bar{s}$, $c = |s|^2 - r^2$. Podmínka $|b|^2 > ac$ zde odpovídá požadavku $r^2 > 0$. Postup lze invertovat za předpokladu, že v rovnici (1) můžeme dělit číslem $a \neq 0$. V případě $a = 0$ stačí nahlédnout, že rovnice

$$bz + \bar{b}z + c = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

je při značení $z = x + yi$, $b = u + vi$ ekvivalentní rovnici:

$$2ux - 2vy + c = 0,$$

což je rovnice přímky. Podmínka $|b|^2 > ac = 0$ zde odpovídá požadavku nenulovosti alespoň jednoho z členů u, v , což vylučuje právě degenerované případy, kdy rovnice $2ux - 2vy + c = 0$ popisuje celou rovinu nebo prázdnou množinu. \square

Definice. *Möbiova transformace* ³ je komplexní zobrazení tvaru:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

přičemž $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ jsou libovolné parametry splňující $ad - bc \neq 0$. Množinu všech Möbiových transformací budeme značit \mathcal{M} .

Věta 4 (Vlastnosti Möbiových transformací). *Platí:*

1. Každá $f \in \mathcal{M}$ je prostá a holomorfní na svém definičním oboru, který obsahuje všechny body \mathbb{C} s výjimkou nejvýše jednoho bodu.
2. \mathcal{M} je grupa s operací skládání generovaná množinou regulárních afinních zobrazení $z \mapsto az + b$ a inverzí $z \mapsto z^{-1}$.
3. Obor hodnot $f \in \mathcal{M}$ je komplexní rovina s výjimkou nejvýše jednoho bodu, a sice limity $f(\infty)$.
4. Každá $f \in \mathcal{M}$ zobrazuje části zobecněných kružnic na části zobecněných kružnic.

³též lineární lomená funkce

Důkaz. Z podmínky $ad - bc \neq 0$ plyne, že alespoň jedno z čísel c, d musí být nenulové, a tedy

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

je dobře definovaná a holomorfní všude až na nejvýše jeden bod $-d/c$. Všimněme si, že podmínka $ad - bc$ odpovídá požadavku nekonstantnosti f . Snadno tedy nahlédneme, že je-li

$$g \in \mathcal{M},$$

$$g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

pak

$$f(g(z)) = \frac{a \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + b}{c \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + d} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$$

je nekonstantní funkce správného tvaru, tedy $f \circ g \in \mathcal{M}$ ⁴. Zřejmě regulární afinní zobrazení a inverze jsou speciální případy Möbiových transformací. Necht $f \in \mathcal{M}$ je tvaru:

$$f(z) = \frac{az + b}{z + d}.$$

Pak f lze rozložit na dílčí transformace:

$$z \mapsto z + d \mapsto \frac{1}{z + d} \mapsto \frac{b - ad}{z + d} \mapsto \frac{b - ad}{z + d} + a = f(z),$$

kde první krok je posunutí, druhý inverze, třetí vynásobení konstantou $b - ad \neq 0$ a čtvrtý opět posunutí. Tím jsme dokázali, že každé $f \in \mathcal{M}$ lze vyjádřit jako složení regulárních afinních transformací a inverze (v případě $c = 0$ je f přímo afinní, pro $c \neq 0, 1$ lze krácením převést na předchozí případ). Protože každá z těchto transformací je prostá a má inverzi v \mathcal{M} , je také f prostá a má inverzi v \mathcal{M} (z již dokázané uzavřenosti vůči skládání). Obor hodnot f je tak celé \mathbb{C} až na možnou singularitu f^{-1} , kterou lze (z věty o limitě složené funkce) spočítat jako $f(\infty)$. Zbývá dokázat, že Möbiovy transformace zobrazují zobecněné kružnice do zobecněných kružnic, což stačí ověřit pro generující množinu. Případ afinních zobrazení je zřejmý. Pro inverzi $f : z \mapsto 1/z$ použijeme větu³. Necht zobecněná kružnice Z je popsána rovnicí:

$$a|z|^2 + bz + \bar{b}z + c = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

a necht $z \in Z \setminus \{0\}$. Dosadíme-li do této rovnice

$$z = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2},$$

dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{a}{|w|^2} + b \frac{\bar{w}}{|w|^2} + \bar{b} \frac{w}{|w|^2} + c &= 0, \\ a + b\bar{w} + \bar{b}w + c|w|^2 &= 0, \end{aligned}$$

což je opět rovnice zobecněné kružnice. □

Příklad 5. Jako příklad na použití věty⁴ lze uvést analytický důkaz věty *o úhlu vepsaném v kružnici*, která tvrdí, že ze všech bodů na daném kruhovém oblouku, jsou jeho okraje viděny pod stejným úhlem. Uvažujme pevné $\theta \in (0, \pi)$ a množinu

$$O = \{z \in \mathbb{H} : \angle(-1, z, 1) = \theta.\}$$

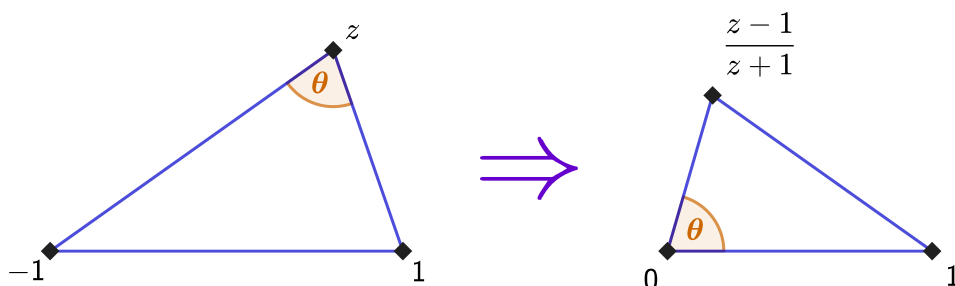
Pro fixní $z \in \mathbb{H}$ lze použít (konformní) afinní transformaci

$$w \mapsto \frac{z - w}{z + 1},$$

⁴Formálně vzato může být nutné dodefinovat $f \circ g$ v bodě $-\delta/\gamma$, ale to je trivialita.

která zobrazí z na nulu, -1 na 1 a

$$1 \mapsto \frac{z-1}{z+1} = \frac{(|z|^2 - 1) + 2i \operatorname{Im} z}{|z+1|^2} \in \mathbb{H},$$



přičemž úhel θ je zachován a lze tedy změřit jako

$$\theta = \arg \left(\frac{z-1}{z+1} \right).$$

Tato podmínka je i postačující a můžeme tedy psát:

$$O = \left\{ z \in \mathbb{H} : \arg \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \theta \right\}.$$

Nyní je již vidět, že O je zobrazena Möbiovou transformací

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

na polopřímku $\{\arg z = \theta\} = \{re^{i\theta}, r > 0\}$. Z věty 4 tak můžeme odvodit, že O je kruhový oblouk v horní polorovině, který jako limitní body obsahuje $f^{-1}(0) = 1$ a $f^{-1}(\infty) = -1$.

Příklad 6. Uvažujme Möbiovou transformaci danou předpisem:

$$f(z) = \frac{1-iz}{z-i}.$$

Dosazením ověříme, že $f(0) = i$, $f(1) = 1$ a $f(i) = \infty$. Podle věty 4 tedy f zobrazuje jednotkovou kružnici S bez bodu i na část reálné přímky 9. Obor hodnot funkce f je komplexní rovina bez $f(\infty) = -i$. Odtud plyne, že f je konformní bijekce z $\mathbb{C} \setminus S$ na $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \{-i\})$. Protože f zachovává komponenty souvislosti a $f(0) = i$, zobrazuje f otevřený jednotkový kruh U na horní polorovinu \mathbb{H} . Množiny U , \mathbb{H} jsou proto konformně ekvivalentní.

Möbiovy transformace se dají také uvažovat na Riemannově sféře $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, čímž získají některé hezké vlastnosti: Möbiovy transformace jsou bijekce $\hat{\mathbb{C}}$ na $\hat{\mathbb{C}}$, jsou všude konformní a zobrazují zobecněné kružnice na zobecněné kružnice. V kontextu Riemannově sféry se přímky interpretují jako kružnice procházející komplexním nekonečnem. Bohužel, každá pěkná vlastnost s sebou nese určité omezení. Chceme-li najít konformní zobrazení z kruhu či poloroviny na jiné zajímavé oblasti, s Möbiovými transformacemi si nevystačíme.

Definice. Komplexní funkce

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

se nazývá *Žukovského zobrazení*.

⁵Jedná se vlastně o klasickou stereografickou projekci ve 2D.

Věta 5 (Vlastnosti Žukovského zobrazení). *Nechť f je definována jako výše. Pak platí:*

1. f je holomorfní na \mathbb{C}^* a konformní na $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$
2. f zobrazuje jednotkovou kružnici S na úsečku $[-2, 2]$ a množinu $\mathbb{C} \setminus \text{clo } U$ na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.
3. Nechť K je uzavřený kruh obsahující body $-1, 1$. Pak f je prostá v oblasti $\mathbb{C} \setminus K$.

Důkaz. Pro každé $z \in \mathbb{C}^*$ platí:

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2},$$

tedy f je holomorfní na \mathbb{C}^* a $f'(z) = 0$ právě jen v bodech ± 1 . Nechť $z = e^{it}$. Potom

$$f(z) = e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t.$$

Necháme-li tedy t procházet \mathbb{R} , body $f(z)$ vyplní úsečku $[-2, 2]$. Uvažujme nyní $w \in \mathbb{C}$ a zabývejme se řešením rovnice:

$$w = f(z) = z + \frac{1}{z},$$

kde $z \in \mathbb{C}$ je neznámá. Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$z^2 - wz + 1 = 0,$$

o níž víme, že má kořeny:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(w \pm \sqrt{w^2 - 4}).$$

Tato řešení jsou ve vztahu $z_1 z_2 = 1$. Pro $w = \pm 2$ neexistuje jiné řešení než $z = w/2$ a pro $w \in (-2, 2)$ obě řešení leží na jednotkové kružnici (ta jsme již našli při hledání obrazu S). Máme tedy $f(\mathbb{C} \setminus \text{clo } U) \subset \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Nechť $w \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Pak z_1 ani z_2 neleží na jednotkové kružnici a $|z_1| |z_2| = 1$. Právě jedno z těchto čísel tedy splňuje $|z| > 1$. Odtud plyne, že f je prosté zobrazení $\mathbb{C} \setminus \text{clo } U$ na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

Zajímavé je, že f definuje prosté zobrazení i na vnějšku jiného uzavřeného kruhu K , který obsahuje body 1 a -1 . Toto tvrzení dokažme nejprve pro kruh, jehož hranice body ± 1 protíná. Nechť tedy

$$K = \{|z - bi| \leq r\},$$

kde $r, b \in \mathbb{R}$ a

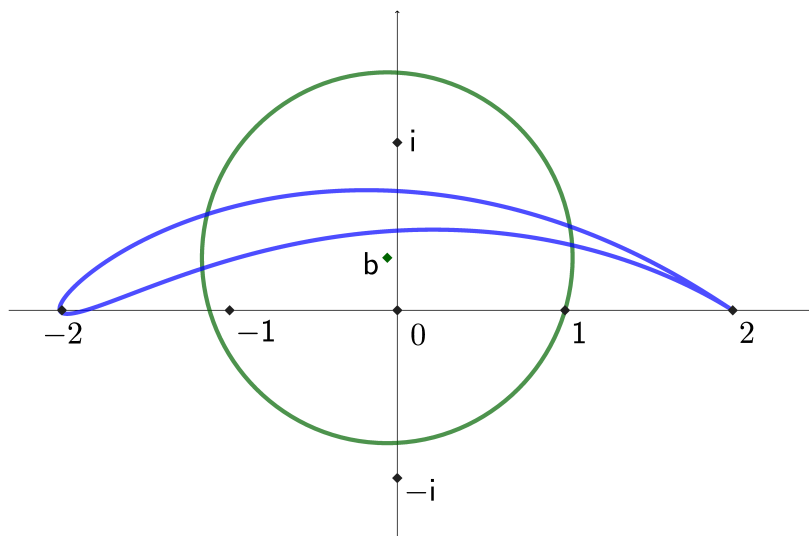
$$b^2 + 1 = r^2.$$

Pak $-1, 1, (b+r)i, (b-r)i \in \partial K$ a

$$(b+r)i (b-r)i = r^2 - b^2 = 1.$$

Z věty 4 tak plyne, že inverze $g(z) = 1/z$ zobrazuje kružnici ∂K na zobecněnou kružnici obsahující body $-1, 1, (b+r)i, (b-r)i$. Tedy inverze zachovává celou kružnici ∂K . Funkce g tak definuje homeomorfismus zobrazující prostor $\mathbb{C}^* \setminus \partial K$ sám na sebe. Vnitřek $\text{int } K \setminus \{0\}$ je souvislá komponenta tohoto prostoru obsahující okolí nuly. Pak je nutně $g(\text{int } K \setminus \{0\})$ neomezená komponenta množiny $\mathbb{C}^* \setminus \partial K$, což je právě $\mathbb{C} \setminus K$. Odtud plyne, že pro každé $w \in \mathbb{C}$ může $\mathbb{C} \setminus K$ obsahovat nejvýše jedno řešení rovnice $f(z) = w$ (neboť vždy alespoň jedno z čísel $z, 1/z$ leží v K).

Pro obecný kruh K obsahující oba body ± 1 situaci jednoduše převedeme na předchozí případ. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že K má střed $a + bi$, kde $a \leq 0$. Pak existuje bod μi , kde $\mu \in \mathbb{R}$ na úsečce mezi $a + bi$ a 1 . Nechť L je uzavřený kruh se středem μi a poloměrem $|\mu i + 1|$. Snadno se ověří, že ∂L protíná body ± 1 a zároveň $L \subset K$. Z předchozího kroku je f prostá na $\mathbb{C} \setminus L$ a tedy tím spíš je prostá na $\mathbb{C} \setminus K$. \square



Obrázek 2: Kružnice se středem b (zeleně) a její obraz při Žukovského transformaci (modře). Protože zvolený uzavřený kruh obsahuje body ± 1 , jsou vnější oblasti ohraničené zelenou a modrou křivkou konformně ekvivalentní.

Žukovského transformace se používá v aerodynamice. Při experimentování zjistíme, že různě umístěné kružnice s různými poloměry se zobrazí na tvary, které připomínají profily idealizovaných křídel. Žukovského zobrazení tak umožňuje převést problém potenciálového proudění vzduchu kolem křídla na oblast v doplňku kruhu, kterou je možné snadno vyřešit. K tomu ale budeme nejprve potřebovat jistou netriviální dávku teorie.

3 Harmonické funkce

Definice. Laplaceova rovnice je parciální diferenciální rovnice tvaru

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad \forall z = x + iy \in \Omega,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast [\[6\]](#), u je neznámá funkce $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a Δ označuje Laplaceův operátor:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

Funkce $u \in C^2(\Omega)$, která řeší Laplaceovu rovnici se nazývá *harmonická funkce* [\[7\]](#).

Ukazuje se, že mezi holomorfními a harmonickými funkcemi existuje těsná souvislost. Řadu důležitých výsledků z komplexní analýzy, které platí pro holomorfní funkce, lze totiž dokázat i pro třídu harmonických funkcí. Klíčem k tomuto poznatku bude následující věta:

Věta 6. *Nechť $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní. Pak $u = \operatorname{Re} f$ je harmonická v Ω . Naopak je-li $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ harmonická a je-li navíc Ω jednoduše souvislá, pak existuje holomorfní $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ taková, že $u = \operatorname{Re} f$, kde f je určena jednoznačně až na ryze imaginární konstantu.*

Důkaz. První část věty je jednoduchý důsledek Cauchy-Riemannových podmínek. Holomorfní funkci f můžeme rozdělit na reálnou a imaginární část:

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad z = x + iy \in \Omega.$$

Pak u, v jsou nekonečně diferencovatelné a platí:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, & u_y &= -v_x, \\ u_{xx} + u_{yy} &= v_{yx} - v_{xy} = 0, \end{aligned}$$

ze záměnnosti parciálních derivací. Naopak je-li u harmonická, pak platí:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -u_{yy}, \\ u_{xy} &= u_{yx}, \end{aligned}$$

což jsou přesně C-R podmínky pro funkci $\overline{\nabla}u = (u_x, -u_y)$, která je tedy holomorfní. Je-li Ω jednoduše souvislá, dle Cauchy-Goursatovy věty má $\overline{\nabla}u$ primitivní funkci f . Použijeme-li opět C-R podmínky, dostaneme:

$$\nabla(\operatorname{Re} f) = (\operatorname{Re} f)_x + i(\operatorname{Re} f)_y = (\operatorname{Re} f)_x - i(\operatorname{Im} f)_x = \overline{f'} = \nabla u.$$

Zvolíme-li f tak, že $\operatorname{Re} f = u$ v alespoň jednom bodě Ω pak ze souvislosti a rovnosti derivací $\operatorname{Re} f = u$ v celém Ω . Nutné podmínky $\operatorname{Re} f = u$, $f' = \overline{\nabla}u$ určují f jednoznačně, až na imaginární konstantu. \square

Protože pro každý bod lze nalézt jednoduše souvislé okolí (kruh), důsledkem věty [\[6\]](#) je, že harmonické funkce jsou nekonečně diferencovatelné. V důkaze jsme také odvodili užitečný vzoreček pro holomorfní funkci:

$$\nabla(\operatorname{Re} f) = \overline{f'},$$

který stojí za to si zapamatovat, protože jej budeme používat často.

Příklad 7. Centrálním příkladem harmonické funkce, již nelze globálně vyjádřit jako reálnou složku holomorfní funkce je

$$u(z) = \ln |z|, \quad z \in \mathbb{C}^*,$$

kterou lze též vyjádřit ve tvaru:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Tato funkce je třídy $C^\infty(\mathbb{C}^*)$ a přímým výpočtem můžeme ověřit, že splňuje Laplaceovu rovnici. Avšak k u nelze najít holomorfní funkci f z věty [\[6\]](#) kdyby existovala, až na imaginární konstantu by musela být rovna komplexnímu logaritmu $f(z) = \log z$ v jednoduše souvislé oblasti $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Ale $\log z$ nelze spojitě rozšířit na \mathbb{C}^* .

⁶Rovnici lze samozřejmě uvažovat i ve vyšších dimenzích. Potom již není k dispozici přirozená struktura komutativního tělesa, jako je tomu v \mathbb{R}^2 .

⁷Uvedená definice se týká jen tzv. *klasických řešení*. Existuje i *slabá formulace* Laplaceovy rovnice, jež umožňuje hledat řešení v daleko větších prostorech funkcí. Tím se zde nebudeme zabývat.

Věta 7 (O odstraňování singularit). *Nechť u je harmonická funkce v mezikruží*

$$\Omega = \{r < |z - a| < R\},$$

kde $0 < r < R \leq \infty$, $a \in \mathbb{C}$. Pak existuje reálné číslo γ a holomorfní funkce f taková, že

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) + \gamma \ln |z - a|, \quad z \in \Omega.$$

Dále pokud $r = 0$ a

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{u(z)}{\ln |z - a|} = 0,$$

pak existuje harmonická funkce \tilde{u} , která je rozšířením u na $U(a, R)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat $a = 0$. Stejně jako při důkazu předchozí věty platí, že $\overline{\nabla u}$ je holomorfní na Ω a lze tedy vyjádřit Laurentovou řadou:

$$\overline{\nabla u} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = f'(z) + \frac{\gamma}{z},$$

kde $\gamma = c_{-1}$ a

$$f(z) = \sum_{n \neq -1} c_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Nechť nyní Γ je kladně orientovaná kružnice se středem 0 a poloměrem $\rho \in (r, R)$. Pak platí

$$\operatorname{Re}(2\pi i \gamma) = \operatorname{Re} \left(\int_{\Gamma} \overline{\nabla u} \, d\Gamma \right) = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} (\overline{\nabla u} \circ \Gamma' \Gamma') \, dt = \int_0^{2\pi} \langle \nabla u \circ \Gamma, \Gamma' \rangle \, dt = 0.$$

(Integrál gradientu po uzavřené křivce je nulový). Tedy γ je reálné číslo. Dostáváme pak

$$\nabla u = \nabla (\operatorname{Re} f(z) + \gamma \ln |z|)$$

a protože Ω je souvislá, případným posunutím f o konstantu dostaneme požadovanou rovnost.

Předpokládejme nyní $r = 0$ a

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{u(z)}{\ln |z|} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} f(z)}{\ln |z|} + \gamma = 0.$$

Pro existenci rozšíření u na $U(0, R)$ stačí ukázat, že f má odstranitelnou singularitu v 0, neboť potom f je omezená v okolí 0 a tedy nutně $\gamma = 0$. Můžeme pak zvolit $\tilde{u} = \operatorname{Re} \tilde{f}$, kde \tilde{f} je holomorfní rozšíření f na $U(0, R)$.

Zvolme $N \in \mathbb{Z}$ tak velké (v absolutní hodnotě), že

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} \left(\frac{f}{N} \right)}{\ln |z|} = -\frac{\gamma}{N} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Pak existuje $\delta > 0$ tak malé, že pro $|z| < \delta$ platí:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f}{N} \right) \leq -\frac{1}{2} \ln |z|,$$

$$\left| \exp \left(\frac{f}{N} \right) \right| = \exp \left[\operatorname{Re} \left(\frac{f}{N} \right) \right] \leq \exp \left(-\frac{1}{2} \ln |z| \right) = |z|^{-1/2},$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \exp \left(\frac{f}{N} \right) = 0.$$

Tedy holomorfní funkce $\exp(f/N)$ má odstranitelnou singularitu v 0 a existuje limita

$$\lim_{z \rightarrow 0} \exp \left(\frac{f}{N} \right) = c \in \mathbb{C}.$$

Protože analogie platí i pro N nahrazené za $-N$, musí být $c \neq 0$. Pak f má vlastní limitu v 0, neboť exponenciála je lokálně invertovatelná a f je spojitá. Podrobněji, existuje okolí $U(c) \subset \mathbb{C}^*$ bodu c a holomorfní funkce l taková [\[8\]](#), že

$$\exp(l(z)) = z, \quad z \in U(c).$$

Uvažujme nyní, že $\Delta > 0$ je tak malé, že

$$\exp\left(\frac{f}{N}\right) \in U(c), \quad \forall z \in P := U(0, \Delta) \setminus \{0\}.$$

Pak pro každé $z \in P$ platí:

$$l\left[\exp\left(\frac{f}{N}\right)\right] - \frac{f}{N} \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Levá strana je však spojitá a množina P souvislá, takže existuje konstanta $k \in \mathbb{Z}$ taková, že

$$l\left[\exp\left(\frac{f}{N}\right)\right] - \frac{f}{N} = 2\pi i k,$$

pro všechna $z \in P$. Limitním přechodem dostaneme:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = N(l(c) - 2\pi i k) \in \mathbb{C}.$$

Odtud již plyne, že f má v 0 odstranitelnou singularitu a tím je důkaz dokončen. \square

Věta 8 (Vlastnost průměru). *Nechť u je harmonická v oblasti Ω a nechť $K = \text{clo } U(a, r) \subset \Omega$, $r > 0$. Pak*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial K} u(z) dz = \frac{1}{\pi r^2} \int_K u(z) dz.$$

Důkaz. Funkci u vyjádříme s pomocí věty [\[6\]](#) jako reálnou část holomorfní funkce f na K . Věta pak plyne ihned porovnáním reálných částí z analogického tvrzení pro holomorfní funkce. \square

Věta 9 (Princip maxima). *Nechť u je harmonická v oblasti Ω . Nabývá-li u lokálního maxima v Ω , pak je u konstantní. Speciálně, je-li Ω omezená a u spojitě rozšířitelná na $\text{clo } \Omega$, pak u nabývá svého maxima na $\partial\Omega$. Analogie platí i pro minimum.*

Následující důkaz je převzat z Evansovy knihy [\[E\]](#).

Důkaz. Předpokládejme, že M je lokální maximum funkce u na Ω . Pak pro každé $z \in \{u = M\}$ existuje $r > 0$ takové, že $K = \text{clo } U(a, r) \subset \Omega$ a tedy z vlastnosti průměru

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_K M dz = M = u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_K u(z) dz.$$

Protože $u(z) \leq M$ pro všechna $z \in M$ a protože u je spojitá, rovnost integrálů může nastat jen pro $u(z) = M$ pro každé $z \in K$. Protože z bylo libovolné, plyne odtud, že množina $\{u = M\}$ je otevřená. Ze spojitosti u je však také relativně uzavřená v Ω , protože $\{u = M\} = \Omega$, neboť Ω je souvislá množina. \square

Jako jednoduchý důsledek dostáváme následující tvrzení o jednoznačnosti Laplaceovy úlohy s okrajovou podmínkou. Protože máme lineární rovnici, stačí dokázat, že pro nulová vstupní data je jediné řešení nulové.

Věta 10 (O jednoznačnosti). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, funkce u je harmonická na Ω , má spojitě rozšíření na $\partial\Omega$ splňující $u(z) = 0$ pro všechna $z \in \partial\Omega$. Dále nechť oblast Ω je buď omezená nebo $u(z) \rightarrow 0$ pro $z \rightarrow \infty$. Pak $u = 0$ v celém Ω .*

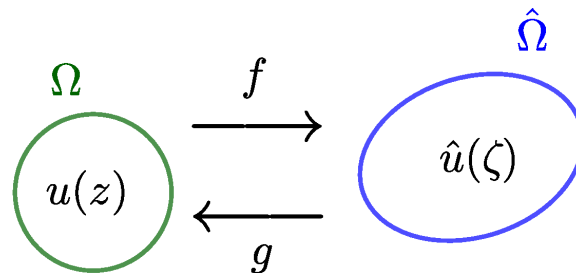
Důkaz. Pro spor nechť například $u(p) > 0$ pro nějaké $p \in \Omega$. Z předpokladů lze zvolit $R > 0$ tak velké, že

$$u(z) < u(p), \quad \forall z \in \partial(U(p, R) \cap \Omega).$$

To je ale spor s větou [\[9\]](#), podle níž u musí nabývat maxima na hranici. \square

⁸vždy lze zvolit $\log z$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ anebo $i\pi + \log(-z)$ na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$

Na následujících stránkách budeme v oblastech se zajímavými geometriemi hledat řešení Laplaceovy úlohy $\Delta u = 0$ tak, že složitější oblast konformně převedeme na jednodušší množinu (např. kruh nebo horní polorovinu), kde již bude umět najít explicitní řešení. Protože ztratit se v transformačních identitách nebývá vůbec těžké, budeme pro přehlednost používat konzistentní značení. Proto Ω bude vždy výchozí oblast, v níž je řešení úlohy známé, $\hat{\Omega}$ bude transformovaná oblast, f bude *přímá transformace*, tj. konformní prosté zobrazení z Ω na $\hat{\Omega}$, k němu příslušnou inverzní funkci budeme značit g a nazývat *zpětnou transformací*. Dále je výhodné zavést odlišná značení pro prvky v Ω resp. $\hat{\Omega}$. Body v oblasti Ω budeme označovat standardně z , zatímco pro body v $\hat{\Omega}$ budeme používat řecké písmeno ζ a bude-li h nějaká funkce (veličina) definovaná v Ω , pak analogickou funkci v $\hat{\Omega}$ budeme vždy značit \hat{h} .



Věta 11 (Transformace řešení Laplaceovy rovnice). *Nechť $\Omega, \hat{\Omega}$ jsou oblasti v komplexní rovině, $f : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}$, $g : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ vzájemně inverzní konformní prostá zobrazení a $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonická. Pak platí:*

1. Funkce $\hat{u}(\zeta) := u(g(\zeta))$ je harmonická v $\hat{\Omega}$,
2. Je-li dále $v = \nabla u$, $\hat{v} = \nabla \hat{u}$, pak

$$\hat{v}(\zeta) = \overline{g'(\zeta)} v(g(\zeta)), \quad \zeta \in \hat{\Omega}.$$

3. Je-li $c : I \rightarrow \Omega$ diferencovatelná křivka a $\hat{c} = f \circ c$, pak v každém bodě $t \in I$:

$$(\bar{v} \circ c) \frac{dc}{dt} = (\bar{\hat{v}} \circ \hat{c}) \frac{d\hat{c}}{dt}.$$

Speciálně: je-li c všude rovnoběžné s polem v , pak \hat{c} je všude rovnoběžné s \hat{v} .

4. Nechť $\zeta_0 \in \partial \hat{\Omega}$, předpokládejme, že g má spojitě rozšíření⁹ na $\hat{\Omega} \cup \{\zeta_0\}$ a označme $z_0 = g(\zeta_0)$. Pak $z_0 \in \partial \Omega$ a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \hat{u}(\zeta),$$

*má-li levá strana smysl.*¹⁰

Důkaz. První část plyne téměř okamžitě z věty 6. Pro každý bod $\zeta = f(z) \in \hat{\Omega}$ lze najít jednoduše souvislé okolí $G \subset \Omega$ bodu z a holomorfní $\mu : G \rightarrow \mathbb{C}$ tak, že $u = \text{Re } \mu$ na G . Pak také

$$\hat{u} = u \circ g = \text{Re}(\mu \circ g)$$

je reálná část holomorfní funkce na otevřené množině $f(G)$, která je okolím bodu ζ a tedy \hat{u} splňuje Laplaceovu rovnici v bodě ζ . Derivováním složené funkce pak dostaneme:

$$\hat{v}(\zeta) = \nabla \hat{u}(\zeta) = \overline{(\mu \circ g)'(\zeta)} = \overline{g'(\zeta)\mu'(g(\zeta))} = \overline{g'(\zeta)} v(g(\zeta)).$$

Tím byly dokázány první dvě části. Třetí část plyne ihned dosazením

$$\frac{d\hat{c}}{dt}(t) = f'(c(t)) \frac{dc}{dt}(t)$$

⁹ne nutně konformní

¹⁰Tedy za předpokladu spojitosti na hranici se okrajová podmínka pro u přenáší na \hat{u} .

a s použitím transformační identity

$$\hat{v}(\hat{c}(t)) = \frac{1}{f'(c(t))} v(c(t)),$$

která plyne z druhého tvrzení. Podmínka rovnoběžnosti c, v lze vyjádřit ve tvaru:

$$0 = \left\langle \frac{dc}{dt}, iv \circ c \right\rangle = \operatorname{Re} \left(-i(\bar{v} \circ c) \frac{dc}{dt} \right) = \operatorname{Im} \left((\bar{v} \circ c) \frac{dc}{dt} \right),$$

na intervalu I , která je vzhledem k již dokázané rovnosti splněna i pro \hat{c}, \hat{v} . Zbývá poslední, čtvrtá část. Předpokládejme, že g je spojitá na $\hat{\Omega} \cup \{\zeta_0\}$. Ukážeme nejprve $z_0 := g(\zeta_0) \in \partial\Omega = \operatorname{clo}\Omega \setminus \Omega$. Ze spojitosti musí být $z_0 \in \operatorname{clo}\Omega$. Pro spor předpokládejme $z_0 \in \Omega$. Pak f je spojitá v z_0 a tedy

$$\zeta_0 = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} f(g(\zeta)) = f(g(\zeta_0)) = f(z_0) \in \hat{\Omega},$$

což je spor. Rovnost

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \hat{u}(\zeta) = \lim_{z \rightarrow z_0} u(z)$$

plyne z věty o limitě složené funkce, jejíž předpoklady jsou splněny, neboť

$$g(\zeta) \rightarrow g(\zeta_0), \quad \text{pro } \zeta \rightarrow \zeta_0$$

ze spojitosti a $g(\zeta) \neq g(\zeta_0)$ pro každé $\zeta \in \hat{\Omega}$, neboť $g(\zeta_0)$ je hraničním bodem, zatímco $g(\zeta)$ leží uvnitř Ω . □

4 Elektrické pole

V této sekci se pokusíme aplikovat vybudovanou teorii pro modelování elektrického pole. Přitom samozřejmě narážíme na jeden zásadní problém: metody komplexní analýzy se dají využít pro dvourozměrné úlohy, zatímco náš vesmír má tři prostorové dimenze. Musíme se tedy omezit jen na ty fyzikální problémy, které mají translační symetrii a stačí se u nich proto zabývat rovinou řezu, která je na příslušnou translaci kolmá. Vyjdeme z diferenciálního tvaru Gaussova zákona, jenž pro elektrickou intenzitu E ve vakuu dává [\[11\]](#):

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon},$$

(kde ρ je hustota náboje a ϵ je permitivita). Ve statickém případě lze E vyjádřit pomocí elektrického potenciálu jako $E = -\nabla\varphi$. Dosazením dostaneme

$$-\Delta\varphi = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Nyní přidáme předpoklad elektrické neutrality ($\rho = 0$) a translační symetrie ve směru osy z ($\varphi_{zz} = 0$), což nás dovádí k Laplaceově rovnici:

$$\Delta\varphi = 0$$

na dvourozměrné oblasti Ω . Předpokládáme rovněž, že máme pevně zvolenou jednotku délky, která nám umožňuje vyjádřit body v Ω bezrozměrně pomocí komplexních čísel. Díky této úmluvě nemusíme být rozpačití kvůli výrazům typu

$$z + \frac{1}{z},$$

kteřé by neměly smysl, pokud bychom interpretovali z jako fyzikální veličinu s jednotkou 1 metr. Další problém, který musíme vyřešit, je otázka, jak formálně pracovat s bodovými náboji (pojem bodový náboj zde ovšem chápeme ve dvou dimenzích po aplikování translační symetrie – ve skutečnosti by bylo správnější mluvit o elektricky nabitých tyčích zanedbatelného průměru, které jsou vedeny kolmo ke zkoumané rovině). Bodový náboj umístěný do z_0 indukuje logaritmický potenciál

$$\varphi(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln |z - z_0|; \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\},$$

kde q je konstanta úměrná náboji [\[12\]](#). Potenciál φ lze interpretovat jako slabé řešení nehomogenní rovnice

$$-\Delta\varphi = q \delta_{z_0},$$

kde δ_{z_0} značí tzv. Diracovu delta distribuci. Tento přístup vyžaduje znalost slabých řešení ve smyslu distribucí, což patří k pokročilejším partiím matematiky. Tomu se naštěstí můžeme vyhnout, když budeme φ interpretovat jako klasické řešení Laplaceovy rovnice

$$\Delta\varphi(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

s předepsanou singularitou

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\ln |z - z_0|} = -\frac{q}{2\pi}.$$

Toto pozorování (s využitím linearity) nám umožní matematicky formulovat různé problémy s bodovými náboji skrze klasickou teorii partiálních diferenciálních rovnic.

Příklad 8. Necht $z_0 \in \mathbb{H}$. Budeme hledat řešení Laplaceovy rovnice v oblasti $\mathbb{H} \setminus \{z_0\}$ splňující

$$\lim_{z \rightarrow w} \varphi(z) = 0, \quad w \in \partial\mathbb{H} \cup \{\infty\},$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\ln |z - z_0|} = -\frac{q}{2\pi}.$$

¹¹Nebudeme vektory odlišovat tučným písmem od skalárů, jak je ve fyzice obvyklé. Záhy totiž budeme na dvourozměrné vektory nahlížet jako na komplexní skaláry, takže by dodržování této konvence nemělo valný smysl.

¹²To je jedna z těch úloh, již lze kompletně vyřešit pomocí integrálního Gaussova zákona s použitím symetrie. Zde odkazujeme na slavné Feynmanovy přednášky: [Feyn](#)

Tedy řešíme úlohu bodového náboje (nabitě tyče) v blízkosti vodivé (tudíž ekvipotenciální) desky s hranicí $\partial\mathbb{H}$. Řešení lze uhádnout trikem, který se nazývá *metoda obrazů*. Odmyslíme si hranici $\partial\mathbb{H}$ a do protějšího bodu \bar{z}_0 umístíme opačný náboj, čímž dostaneme potenciál

$$\varphi(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln |z - z_0| + \frac{q}{2\pi} \ln |z - \bar{z}_0| = -\frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|.$$

Myšlenka je, že takto zformovaná funkce díky linearitě řeší Laplaceovu rovnici na $\mathbb{H} \setminus \{z_0\}$ a díky své hezké reflexivní symetrii splňuje i okrajovou podmínku na $\partial\mathbb{H}$, což se dá dokázat jednoduchým dosazením:

$$z \in \partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \implies |z - z_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - \bar{z}_0| \implies \varphi(z) = 0.$$

Stejně snadno se ověří také podmínka v ∞ . Protože jsme řešení pouze uhádli, může nás nyní trápit otázka jednoznačnosti, tedy zda náhodnou neexistují také jiná řešení. Odpověď je, že nikoliv. Je-li totiž ψ jiné řešení, pak $\psi - \varphi$ má podle věty [7](#) odstranitelnou singularitu v z_0 a podle věty [10](#) je pak po dodefinování $\psi - \varphi$ identicky nulová. Teď když máme k dispozici jednoznačně určené řešení, můžeme jej vykreslit. Ideálně bychom chtěli znázornit siločáry pole $E = -\nabla\varphi$. K tomu je obvykle zapotřebí vyřešit obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{dc}{dt}(t) = E(c(t)).$$

V tomto případě však můžeme vytáhnout z rukávu další trik. Všimneme si, že na \mathbb{H} bez bodů z přímky $P = \{\operatorname{Re}(z - z_0) = 0\}$ lze φ vyjádřit jako reálná část holomorfní funkce

$$F(z) = -\frac{q}{2\pi} \log \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right)$$

a položíme $\eta = \operatorname{Im} F$. Pak z C-R podmínek dostaneme ortogonální vztah:

$$0 = \langle \nabla\eta, \nabla\varphi \rangle = \langle \nabla\eta, E \rangle$$

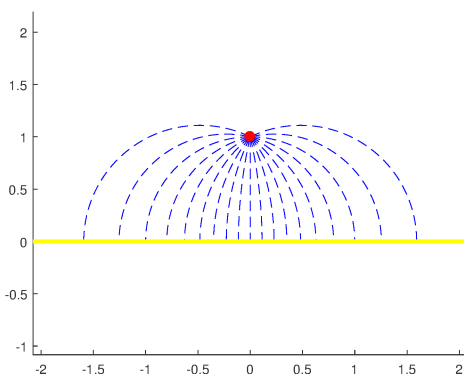
a tedy každá siločára c splňuje v bodech $c(t) \notin P$:

$$\frac{d}{dt}(\eta(c)) = \left\langle \nabla\eta, \frac{dc}{dt} \right\rangle = \langle \nabla\eta, E \rangle = 0.$$

Požadavek konstantního η dává implicitní rovnici pro siločáry:

$$\arg \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right) = \theta = \text{konst.}$$

Podobně jako v příkladu [5](#) se řešení této rovnice liší od polopřímek $\arg z = \theta$ o Möbiovu transformaci, jež je zobrazuje na části zobecněných kružnic s koncovými body z_0, \bar{z}_0 .



Obrázek 3: Znázornění siločár pro $z_0 = i$.

Elektrickou intenzitu můžeme kvantitativně vyjádřit s využitím $-E = \nabla\varphi = \overline{F'}$ (což trochu ušetří práci s derivováním):

$$\overline{E} = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right).$$

Tato rovnost samozřejmě musí platit i na bodech z vyloučené přímkou P , díky spojitosti. Dále by nás mohlo zajímat rozložení náboje, jež se indukuje na hranici. Pro nábojovou hustotu σ na povrchu vodiče obecně platí ^[13]

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\langle E, \nu \rangle,$$

kde ν je vnější jednotková normála, což v našem případě dává (po několika algebraických úpravách):

$$\sigma(x) = -\operatorname{Im} \bar{E}(x) = -\frac{q}{\pi} \frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $z_0 = x_0 + iy_0$ je algebraický tvar komplexního čísla z_0 . Všimněme si, že integrál σ přes celou reálnou osu je $-q$, tedy na hranici se indukuje přesně opačný náboj, než je ten, který jej vyvolal. ^[14]

Nyní můžeme získat řešení v jiných oblastech tím, že celou úlohu přetransformujeme pomocí konformního zobrazení. Nejprve budeme ale chtít ověřit, že bodový náboj se při konformní transformaci zachovává.

Věta 12 (Zachování bodového náboje). *Nechť $\Omega, \hat{\Omega}$ jsou konformně ekvivalentní oblasti a f, g příslušná přímá resp. zpětná transformace (tj. stejná situace jako ve větě ^[11]). Nechť $z_0 \in \Omega$, q je reálné číslo, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce splňující*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\ln |z - z_0|} = -\frac{q}{2\pi}.$$

Označíme-li $\hat{\varphi} = \varphi \circ g$, $\zeta_0 = f(z_0)$, pak platí:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\hat{\varphi}(\zeta)}{\ln |\zeta - \zeta_0|} = -\frac{q}{2\pi}.$$

Důkaz. Důkaz dostaneme přímým výpočtem s použitím věty o limitě složené funkce (předpoklady jsou splněny, protože f je prostá a spojitá):

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\hat{\varphi}(\zeta)}{\ln |\zeta - \zeta_0|} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\ln |f(z) - f(z_0)|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\ln |z - z_0| + \ln \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\ln |z - z_0|} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(1 + \frac{\ln \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|}{\ln |z - z_0|} \right)^{-1} = -\frac{q}{2\pi} \left(1 + \frac{\ln |f'(z_0)|}{-\infty} \right)^{-1} = -\frac{q}{2\pi}. \end{aligned}$$

Je dobré si povšimnout, že jsme v důkaze potřebovali $f'(z_0) \neq 0$. □

Příklad 9. Nechť $\lambda \in (0, 2]$ je pevné a mějme zobrazení:

$$f(z) = z^\lambda, \quad z \in \Omega := \{\operatorname{Re} z > 0\}.$$

V příkladu ^[4] jsme již ukázali, že se jedná o konformní a prosté zobrazení z pravé poloroviny Ω na úhel o velikosti $\lambda\pi$, který můžeme značit Ω^λ . Inverzní funkcí je $g(\zeta) = \zeta^{1/\lambda}$. Náš plán je nyní vyřešit úlohu v Ω a posléze ji přetransformovat pomocí funkce f resp. g . V analogii předchozího příkladu je řešením Laplaceovy úlohy na Ω s nábojem q v bodě 1 potenciál, který je dán superpozicí s opačným nábojem v "zrcadlovém bodě" -1 :

$$\varphi(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right|, \quad z \in \Omega \setminus \{1\}.$$

Na základě vět ^[11] a ^[12] víme, že funkce

$$\hat{\varphi}(\zeta) = -\frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{\zeta^{1/\lambda} - 1}{\zeta^{1/\lambda} + 1} \right|, \quad \zeta \in \Omega^\lambda \setminus \{1\}$$

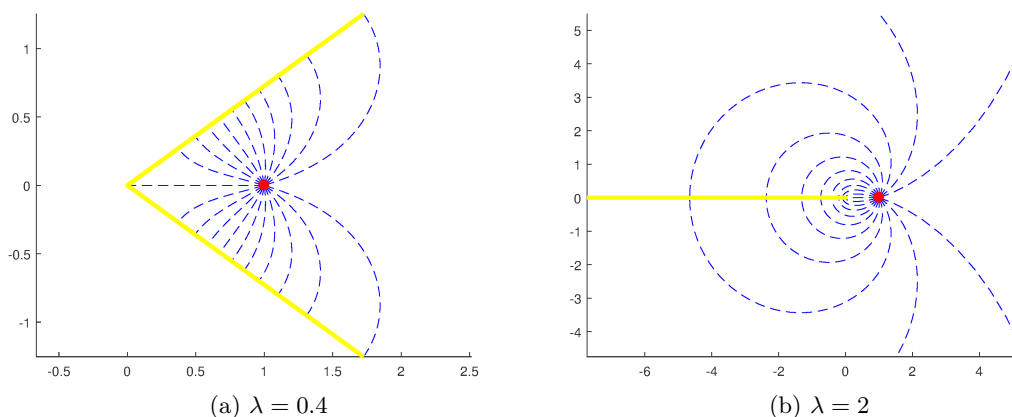
je řešením Laplaceovy rovnice na Ω^λ s bodovým nábojem q v 1. Komplexní odmocnina g je spojitá na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ takže pro $\lambda < 2$ je podmínka $\hat{\varphi} = 0$ na hranici zachována. Pro $\lambda = 2$ se ve skutečnosti nic nepokazí, jenom je třeba provést diskuzi, kdy se k hraničnímu bodu $\zeta_0 < 0$ můžeme blížit buď z horní

¹³ což lze odvodit z integrálního Gaussova zákona - viz ^[Feyn]

¹⁴ Ve skutečnosti když přiblížíme elektrický nabitý objekt k neutrálnímu vodiči, ze zákona zachování se kromě náboje $-q$ musí na jiné části povrchu indukovat opačný náboj $+q$, který zde zamlčujeme, protože předpokládáme, že se po ustálení nachází velmi daleko. Toho se dá prakticky docílit pomocí uzemnění.

poloroviny – pak $\hat{\varphi}(\zeta) \rightarrow \varphi(\sqrt{\zeta_0}) = 0$ anebo z dolní poloroviny – potom $\hat{\varphi}(\zeta) \rightarrow \varphi(-\sqrt{\zeta_0}) = 0$. Je patrné, že $\hat{\varphi}(\zeta) \rightarrow 0$, pro $\zeta \rightarrow \infty$.

K vykreslení siločár na počítači stačí použít kruhové oblouky v Ω a zobrazit je pomocí přímé transformace f (viz třetí část věty [11](#)).



Obrázek 4: Znázornění siločár pro různé hodnoty λ

Elektrická intenzita v Ω je dána předpisem:

$$\bar{E}(z) = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) = \frac{q}{\pi} \frac{1}{z^2-1}, \quad z \in \Omega \setminus \{1\}.$$

Po transformaci dostáváme:

$$\bar{\hat{E}}(\zeta) = g'(\zeta)\bar{E}(g(\zeta)) = \frac{q}{\pi\lambda\zeta} \frac{\zeta^{1/\lambda}}{\zeta^{2/\lambda}-1}, \quad \zeta \in \Omega^\lambda \setminus \{1\}.$$

Pro $\lambda < 2$ lze \hat{E} dodefinovat spojitě na hranici bez počátku. Protože konformní zobrazení nezmění úhel mezi siločárou a hraničními polopřímkami, pro indukovaný náboj platí:

$$\sigma(re^{\pm i\lambda\pi/2}) = -\operatorname{sgn} q |\hat{E}(re^{\pm i\lambda\pi/2})| = -\frac{q}{\pi\lambda r} \frac{r^{1/\lambda}}{|r^{2/\lambda}e^{i\pi} - 1|} = -\frac{q}{\pi\lambda r} \frac{r^{1/\lambda}}{r^{2/\lambda} + 1}, \quad r > 0.$$

Je zajímavé, že pro $\lambda < 1$ je náboj v blízkosti počátku nulový, zatímco pro $\lambda > 1$ diverguje (je-li q nenulové) k $\pm\infty$. Nicméně celková velikost indukovaného náboje zůstává $-q$, což můžeme ověřit integrací se substitucí $\rho = r^{1/\lambda}$. V mezním případě $\lambda = 2$ obě polopřímky splývají a indukovanému náboji tak odpovídá:

$$\sigma(-r) = -2 \frac{q}{2\pi r} \frac{\sqrt{r}}{r+1} = -\frac{q}{\pi\sqrt{r}} \frac{1}{r+1}, \quad r > 0.$$

Příklad 10. Budeme nyní řešit Laplaceovu rovnici uvnitř jednotkového kruhu U s počáteční podmínkou $\hat{\varphi}(\zeta) = 0$ na ∂U a s nábojem q v bodě $i\eta_0$, kde $\eta_0 \in (-1, 1)$. Použijeme Möbiovu transformaci z příkladu [6](#), tj.

$$g(\zeta) = \frac{1-i\zeta}{\zeta-i} = -i + \frac{2}{\zeta-i}, \quad \zeta \in U.$$

Tato funkce zobrazí kruh U na horní polorovinu \mathbb{H} . Inverzní zobrazení je

$$f(z) = i + \frac{2}{z+i} = \frac{iz+1}{z+i}, \quad z \in \mathbb{H}.$$

Při tomto zobrazení bod $i\eta_0$ odpovídá bodu iy_0 , kde

$$i\eta_0 = f(iy_0) = \frac{1-y_0}{i(1+y_0)} = -i \frac{1-y_0}{1+y_0}.$$

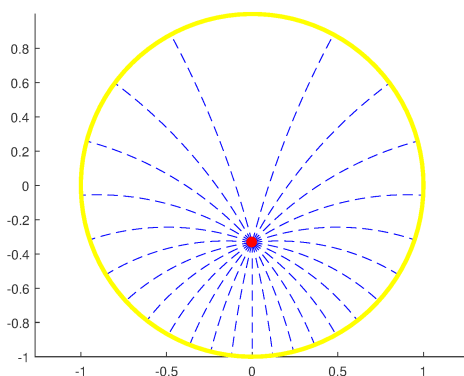
Nyní do známého potenciálu v horní polorovině

$$\varphi(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{z-iy_0}{z+iy_0} \right|, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \{iy_0\}$$

dosadíme $z = g(\zeta)$, čímž získáme "kandidáta" na řešení:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\zeta) &= \varphi(g(\zeta)) = -\frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{(1-i\zeta) - iy_0(\zeta-i)}{(1-i\zeta) + iy_0(\zeta-i)} \right| = \\ &= -\frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{-i\zeta(1+y_0) + (1-y_0)}{-i\zeta(1-y_0) + (1+y_0)} \right| = -\frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{\zeta - i\eta_0}{i\eta_0\zeta + 1} \right|, \quad \zeta \in U \setminus \{i\eta_0\}.\end{aligned}$$

Můžeme si povšimnout, že pro $\eta_0 = 0$ se $\hat{\varphi}$ nepřekvapivě redukuje na logaritmický potenciál bodového náboje a pro $\eta_0 \neq 0$ je výsledek (až na bezvýznamnou konstantu) superpozicí dvou opačných bodových nábojů v $i\eta_0, i/\eta_0$, které jsou navzájem vztaženy kruhovou inverzí. Funkce g má spojitě rozšíření na $\text{clo } U \setminus \{i\}$ a dosazením (s využitím spojitosti logaritmu) lze spočítat limitu $\hat{\varphi}(i) = 0$. To dokazuje, že $\hat{\varphi} = 0$ na hranici ∂U . Siločáry jsou opět části zobecněných kružnic, tentokrát procházejících body $i\eta_0, i/\eta_0$.



Obrázek 5: Náboj uvnitř kruhu.

Na konformní zobrazení a elektrické pole lze vymyslet celou řadu dalších příkladů – některé lze najít v učebnici [MAF5]. Nicméně velké omezení této metody je nutnost najít konformní zobrazení f z nějaké jednoduché oblasti, což se ve složitějších případech většinou nepodaří. Dá se sice dokázat velmi silná *Riemannova věta o zobrazení*, podle které pro každou jednoduše souvislou oblast $\Omega \neq \mathbb{C}$ existuje prosté konformní zobrazení f z otevřeného jednotkového kruhu na Ω . Důkaz této věty však neposkytuje analytický předpis pro f (viz [G]).

5 Potenciálové proudění

Další významná oblast, v níž se vyskytuje Laplaceova rovnice, je aerodynamika. Proudění vzduchu popisujeme rychlostním polem v , jež každému bodu x z oblasti Ω a času $t \in \mathbb{R}^+$ přiřadí okamžitou rychlost fiktivní částice, která se v okamžiku t nachází v bodě x . Množinu Ω si můžeme představit jako vnější oblast kolem tělesa, které se pohybuje v atmosféře a které zkoumáme z jeho klidové soustavy. Opět zavedeme řadu předpokladů. Předně budeme studovat stacionární proudění, tedy takové, kdy pole v se nemění v čase a lze tak popsat jako funkce $v = v(x)$. Dále budeme uvažovat, že během proudění nedochází ke stlačování vzduchu¹⁵, což lze matematicky formulovat požadavkem¹⁶:

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Za třetí budeme předpokládat lokální nevířivost. To je motivováno experimentálním pozorováním, kdy pro nízké rychlosti nedochází k turbulencím – proudění je tzv. *laminární*. Dostáváme tak druhou rovnici:

$$\operatorname{rot} v = 0.$$

Nulová rotace pak přirozeně vede ke snaze namísto v hledat rychlostní potenciál $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, splňující

$$v = \nabla u.$$

Najdeme-li totiž potenciál $u \in C^2(\Omega)$ pak podmínka $\operatorname{rot} v = 0$ je splněna ze záměnnosti parciálních derivací a dosazením do $\operatorname{div} v = 0$ získáme Laplaceovu rovnici

$$\Delta u = 0 \quad \text{na } \Omega.$$

Abychom mohli použít komplexní analýzu, budeme opět studovat úlohy s translační symetrií, kdy všechny derivace podle jedné proměnné kartézské soustavy (řekneme z) jsou identicky nulové a lze tak předpokládat, že Ω je dvourozměrná oblast. Budeme hledat taková řešení, jež splňují nulovou *Neumannovu* okrajovou podmínku, kterou lze interpretovat jako požadavek, že $\partial\Omega$ je neprostupná překážka, a tedy v blízkosti hranice svírá pole v pravý úhel s vnější (resp. vnitřní) normálou.

Definice. Necht $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Řekneme, že pole $v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ splňuje nulovou Neumannovu podmínku na $N \subset \partial\Omega$, jestliže lze spojitě rozšířit na $\Omega \cup N$, existuje regulární křivka $c : I \rightarrow \mathbb{C}$ splňující¹⁷ $c(I) = N$ a pro každé $z_0 = c(t_0)$ (kde $t_0 \in I$) platí:

$$\left\langle v(z_0), i \frac{dc}{dt}(t_0) \right\rangle = 0.$$

Příklad 11. Hledáme potenciálové laminární proudění na vnějšku kruhu $\mathbb{C} \setminus \operatorname{clo} U$ splňující nulovou Neumannovu podmínku na $S = \partial U$ a mající limitu

$$v(\infty) = 1.$$

Tato úloha fyzikálně odpovídá proudění kolem válce, který se pohybuje v atmosféře s konstantní rychlostí 1 (anebo působení větru na statický válec). Ve větě⁵ bylo dokázáno, že Žukovského zobrazení:

$$g(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta}$$

je konformní ekvivalence zobrazující $\mathbb{C} \setminus \operatorname{clo} U$ na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Intuitivně můžeme očekávat, že úsečka nemá žádný efekt na rovnoběžné proudění vzduchu, a tedy řešením analogické úlohy na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ je jednoduše:

$$u(z) = x = \operatorname{Re}(z), \quad z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2].$$

Myšlenka je nyní hledat řešení na $\mathbb{C} \setminus \operatorname{clo} U$ pomocí konformní transformace g ve smyslu věty¹¹. Definujme tedy:

$$\hat{u}(\zeta) := u(g(\zeta)) = \operatorname{Re} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{clo} U.$$

¹⁵Což je přibližně splněno pro subsonické rychlosti, kdy vzduch má "dostatek času obtéci překážku".

¹⁶Lze odvodit z předpokladu konstantní hustoty a zákona zachování hmoty - viz [Feist](#)

¹⁷říkáme pak, že c je *regulární parametrizací* N

Vidíme, že \hat{u} je reálná část holomorfní funkce, tedy je harmonická. Rychlostní pole snadno spočteme s využitím $\nabla \operatorname{Re} g = \overline{g'}$ jako:

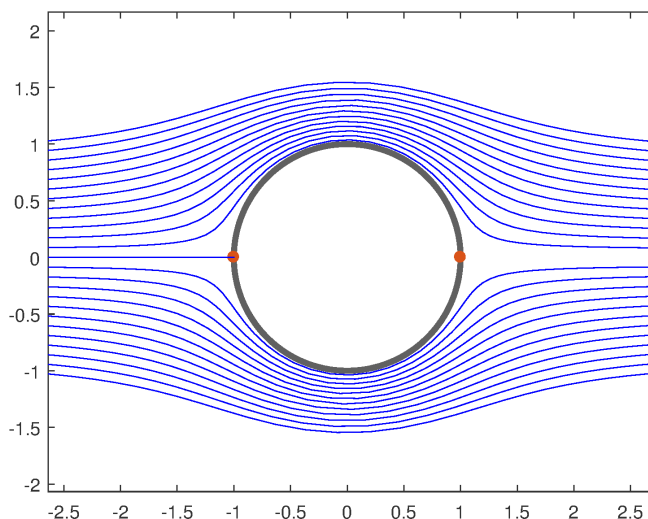
$$\overline{\hat{v}}(\zeta) = g'(\zeta) = 1 - \frac{1}{\zeta^2}.$$

Pak platí $v(\infty) = 1$. Je také zřejmé, že v lze spojitě rozšířit na hranici. Vnější normála jednotkové kružnice $S = \partial U$ v bodě $\zeta_0 \in S$ je (pro libovolnou parametrizaci) rovna ζ_0 , takže nulovou Neumannovu podmínku můžeme ověřit výpočtem:

$$|\zeta_0| = 1 \implies \langle \hat{v}(\zeta_0), \zeta_0 \rangle = \operatorname{Re}(\overline{\hat{v}}(\zeta_0) \zeta_0) = \operatorname{Re}\left(\zeta_0 - \frac{\zeta_0}{\zeta_0^2}\right) = \operatorname{Re}(\zeta_0 - \overline{\zeta_0}) = 0.$$

Vyřešili jsme tak úlohu na $\mathbb{C} \setminus \operatorname{clo} U$. Navíc, stejně jako v příkladu [8](#), dostáváme implicitní rovnici pro proudnice [18](#):

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) &= \text{konst.}, \\ \left(1 - \frac{1}{|\zeta|}\right) \operatorname{Im} \zeta &= \text{konst.} \end{aligned}$$



Obrázek 6: Proudění kolem kruhového profilu (vznačeny jsou stacionární body)

Nyní můžeme použít Žukovského funkci ještě jednou, abychom tak našli řešení Laplaceovy rovnice v různých dalších oblastech. K tomu se nám bude hodit následující tvrzení:

Věta 13. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $N \subset \partial\Omega$ a $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je řešení Laplaceovy rovnice v Ω splňující nulovou Neumannovu podmínku na N . Dále předpokládejme, že V je oblast, $\Omega \cup N \subset V$ a $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ je konformní a prostá, $g = f^{-1}$. Pak $\hat{u} := u \circ g$ je řešením Laplaceovy rovnice v $\hat{\Omega}$ splňující nulovou Neumannovu podmínku na $\hat{N} := f(N)$.*

Důkaz. Z věty [11](#) plyne, že $\Delta \hat{u} = 0$ na Ω a zároveň (značíme-li opět $v = \nabla u$, $\hat{v} = \nabla \hat{u}$):

$$\hat{v}(\zeta) = \overline{g'(\zeta)} v(g(\zeta)), \quad \zeta \in \Omega.$$

Nyní v i g jsou spojitě, $g(\hat{N}) = N$, takže tento vzorec definuje spojitě rozšíření \hat{v} na $\hat{\Omega} \cup \hat{N}$. Předpokládejme nyní, že $c : I \rightarrow \mathbb{C}$ je regulární parametrizace N . Pak, protože f je konformní, $\hat{c} = f \circ c$ je regulární parametrizace \hat{N} a pro každé $\zeta_0 = f(z_0) = f(c(t_0)) \in \hat{N}$ platí:

$$\left\langle \hat{v}(\zeta_0), \frac{d\hat{c}}{dt}(t_0) \right\rangle = \operatorname{Re}\left(\overline{\hat{v}(\zeta_0)} \frac{d\hat{c}}{dt}(t_0)\right) = \operatorname{Re}\left(\overline{g'(\zeta_0)} \overline{v(z_0)} f'(z_0) \frac{dc}{dt}(t_0)\right) =$$

¹⁸tj. křivky, které jsou v každém bodě rovnoběžné s rychlostním polem a tedy, díky stacionaritě, určují trajektorie fiktivních částic vzduchu.

$$= \operatorname{Re} \left(\overline{v}(z_0) \frac{dc}{dt}(t_0) \right) = \left\langle v(z_0), \frac{dc}{dt}(t_0) \right\rangle = 0.$$

□

Příklad 12. Necht $b \in \mathbb{C}$ patří do uzavřené levé poloroviny, tj. $\operatorname{Re} b \leq 0$ a zvolme $\rho > 1$. Pak uzavřený kruh K se středem b a poloměrem $\rho|b-1|$ obsahuje body ± 1 (dokonce ve svém vnitřku). Ve větě [5](#) jsme ukázali, že Žukovského funkce:

$$Z(z) = z + \frac{1}{z}$$

pak definuje prosté konformní zobrazení oblasti $\mathbb{C} \setminus K$ na oblast $Z(\mathbb{C} \setminus K)$, která v praxi může reprezentovat vnější oblast kolem profilu křídla. Protože chceme zkoumat účinky pod různými úhly náběhu, zavedeme další parametr $\alpha \in [0, 2)$ a označíme:

$$a = \rho |b-1| e^{i\pi\alpha},$$

$$f(z) = \frac{1}{a} Z(az+b).$$

Díky rotační symetrii jednotkového kruhu je f prosté a konformní zobrazení z oblasti $\Omega = \mathbb{C} \setminus \operatorname{clo} U$ na $\hat{\Omega} = f(\Omega) = Z(\mathbb{C} \setminus \Omega)$. Necht $g: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ je inverzní transformace k f . Protože f má konformní a prosté rozšíření na

$$V = \rho^{-1}\Omega = \mathbb{C} \setminus (\rho^{-1} \operatorname{clo} U) \supset \operatorname{clo} \Omega,$$

podle věty [13](#) a výsledku předchozího příkladu je

$$\hat{u} = \operatorname{Re} Z \circ g$$

řešením Laplaceovy úlohy na $\hat{\Omega}$ s nulovou Neumannovou podmínkou na celé hranici. Transformované rychlostní pole lze vyjádřit jako

$$\overline{\hat{v}(\zeta)} = g'(\zeta) \overline{v(z)} = \frac{\overline{v(z)}}{f'(z)} = \frac{1-z^{-2}}{1-(az+b)^{-2}}, \quad z = g(\zeta), \quad \zeta \in \hat{\Omega}.$$

Na vyjádření \hat{v} pomocí z můžeme nahlížet jako na jistou přirozenou volbu souřadnic v $\hat{\Omega}$. Z tvaru inverzní funkce Z_K^{-1} pro Žukovského funkci [19](#) na $\mathbb{C} \setminus K$:

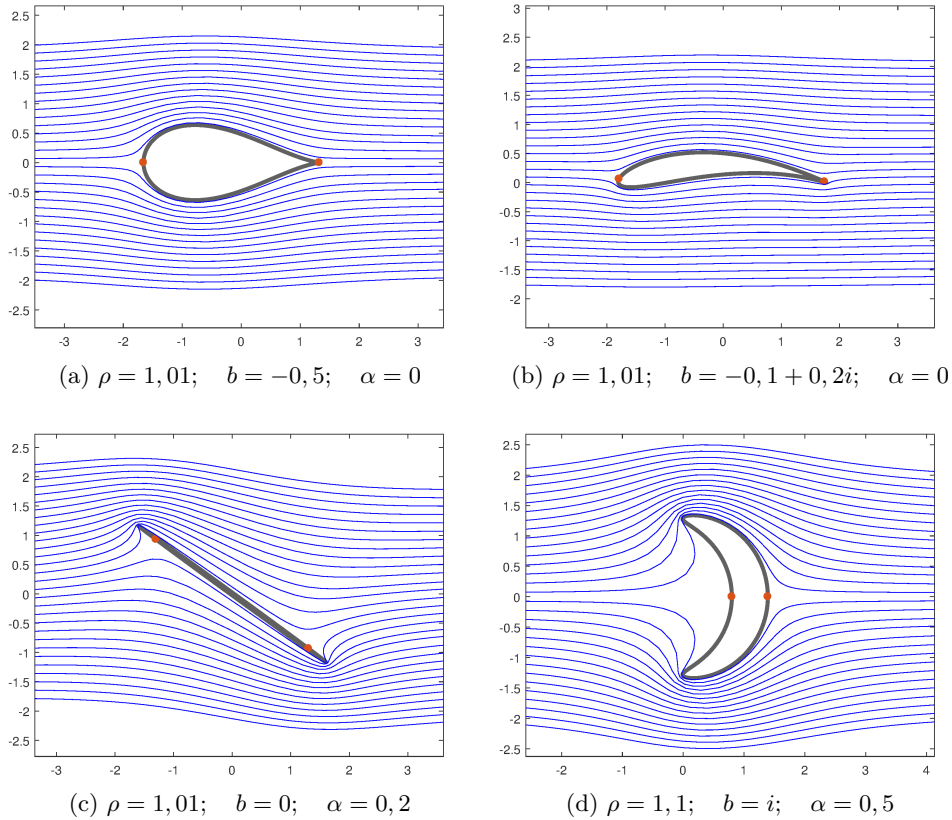
$$Z_K^{-1}(\zeta) = z, \quad z = \frac{1}{2}(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 4}), \quad \text{pod. } z \notin K$$

můžeme vidět, že $Z_K^{-1}(\infty) = \infty$. Zpětnou transformaci g lze vyjádřit jako:

$$g(\zeta) = \frac{Z_K^{-1}(a\zeta) - b}{a}, \quad \zeta \in \hat{\Omega}.$$

Odtud vidíme $g(\infty) = \infty$, a tedy po dosazení do vzorce $\hat{v}(\infty) = 1$. Můžeme konstatovat, že transformace zachovala směr i intenzitu proudění. Pro vykreslení proudnic stačí použít přímou transformaci f na (implicitně zadané) proudnice v oblasti $\mathbb{C} \setminus \operatorname{clo} U$.

¹⁹předpis závisí na volbě K



Obrázek 7: Řešení pro vybrané hodnoty parametrů.

Nutno říct, že uvedená řešení mají dva nedostatky: za prvé jsme se všude museli omezovat volbou $\rho > 1$. Pokud totiž zkusíme dosadit $\rho = 1$, dostaneme tvary s ostrými hranami a v blízkosti neregulárních hraničních bodů pak absolutní hodnota rychlosti může divergovat do $+\infty$, což jistě neodpovídá fyzikální realitě. Druhým nedostatkem je nejednoznačnost řešení. To, že potenciál u lze libovolně posunout o konstantu nám nevadí, protože nás přirozeně zajímá více $v = \nabla u$. Problematictější je samotná otázka existence potenciálu. Z rovnosti

$$\operatorname{rot} v = 0$$

na oblasti Ω totiž obecně *neplyne*, že v musí mít potenciál. V oblastech Ω , které nejsou jednoduše souvislé²⁰, i lokálně nevířivé proudění může cirkulovat, což znamená, že integrál v podél uzavřených křivek (kolem profilu křídla) může být nenulový. Kombinace těchto poznatků vede ke Kuttuovu modelu proudění, což je asi nejjednodušší teoretický model, který lze použít k objasnění principu fungování křídel.

Příklad 13. Vraťme se nyní k diferenciální rovnici

$$\operatorname{div} v = v_x^1 + v_y^2 = 0,$$

$$\operatorname{rot} v = v_x^2 - v_y^1 = 0$$

na vnější oblasti jednotkového kruhu $\Omega = \mathbb{C} \setminus \operatorname{clo} U$ s nulovou Neumannovou podmínkou na hranici S a s podmínkou v nekonečnu $v(\infty) = 1$. V příkladu [11](#) jsme našli řešení s potenciálem:

$$u(z) = \operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Tutéž rovnici ale řeší také rychlostní pole

$$v = \nabla u - \frac{i\gamma z}{|z|^2},$$

²⁰což je přesně náš případ

kde $\gamma \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. To plyne ze skutečnosti, že v má lokální harmonické potenciály:

$$u_1(z) = \operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z} + i\gamma \log z \right), \quad \text{na } \Omega \setminus \mathbb{R}^-,$$

$$u_2(z) = \operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z} + i\gamma \log(-z) \right), \quad \text{na } \Omega \setminus \mathbb{R}^+.$$

Dále je jasné, že v lze spojitě rozšířit na hranici, splňuje $v(\infty) = 1$ a pro každé $z \in S$ je splněna i nulová Neumannova podmínka:

$$\operatorname{Re} \left[\left(\nabla u - \frac{i\gamma z}{|z|^2} \right) \bar{z} \right] = \operatorname{Re}(\nabla u \bar{z}) - \operatorname{Re}(i\gamma) = 0,$$

neboť ∇u ji splňuje a číslo γ reálné. Zvolme nyní $b \in \mathbb{C}$ tak, že $\operatorname{Re} b < 0$. Necht $\alpha \in [0, 2)$ a definujme:

$$a = |b - 1| e^{i\pi\alpha},$$

$$f(z) = \frac{1}{a} Z(az + b),$$

kde Z opět značí Žukovského funkci. Necht g je inverzní transformace k f . Na $\hat{\Omega} = f(\Omega)$ uvažujme transformované rychlostní pole \hat{v} definované rovnicí:

$$\bar{\hat{v}}(\zeta) = g'(\zeta) \overline{v(z)} = \frac{\overline{v(z)}}{f'(z)} = \frac{1 - z^{-2} + i\gamma z^{-1}}{1 - (az + b)^{-2}}, \quad z = g(\zeta), \quad \zeta \in \hat{\Omega}.$$

Množina $\hat{\Omega}$ modeluje oblast kolem profilu křídla s ostrou odtokovou hranou v bodě:

$$\zeta_0 = f(z_0), \quad \text{kde } z_0 = \frac{1 - b}{a} \in S.$$

Nyní lze aplikovat větu [13](#) na potenciály u_1, u_2 , abychom odvodili, že \hat{v} řeší rovnici

$$\operatorname{div} \hat{v} = 0$$

$$\operatorname{rot} \hat{v} = 0$$

v $\hat{\Omega}$ a splňuje nulovou Neumannovu podmínku na regulární části hranice $\partial\hat{\Omega} \setminus \{\zeta_0\}$ [21](#). Kuttouvo proudění pak odpovídá speciální volbě

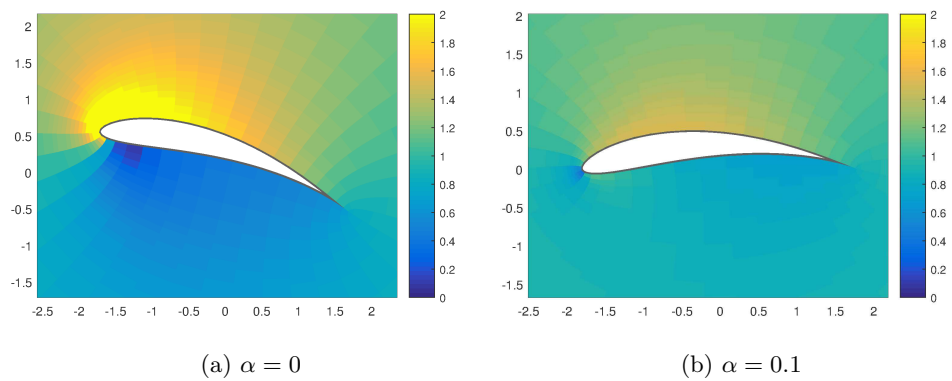
$$\gamma = -2 \operatorname{Im} z_0 = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{b - 1}{a} \right),$$

která umožňuje vyjádřit \hat{v} ve tvaru:

$$\begin{aligned} \bar{\hat{v}}(\zeta) &= \frac{(az + b)^2}{z^2} \frac{z^2 - 1 + i\gamma z}{(az + b)^2 - 1} = \frac{(az + b)^2}{z^2} \frac{(z + \bar{z}_0)(z - z_0)}{(az + b - 1)(az + b + 1)} = \\ &= \frac{(az + b)^2}{az^2} \frac{z + \bar{z}_0}{az + b + 1}, \quad z = g(\zeta), \quad \zeta \in \hat{\Omega}. \end{aligned}$$

Tím dojde k odstranění singularity funkce $\hat{v}(\zeta)$ pro hodnoty $z = g(\zeta)$ blízko z_0 . Fyzikální zdůvodnění spočívá v myšlence, že třecí síly neumožňují proudění s příliš vysokými rychlostmi v blízkosti odtokové hrany ζ_0 , čímž si vynutí nenulovou cirkulaci kolem křídla, která je určena koeficientem γ . Tato cirkulace se v případě dobře zvoleného profilu projevuje tak, že proudění vzduchu nad křídlem je *rychlejší* než pod ním. Vyšší rychlost je provázána nižším tlakem, a tedy rozdílné rychlosti proudění umožňují křídlo vytvářet dynamický vztlak (viz [Feistl](#)).

²¹Jako množinu V zde můžeme volit vnější oblast kolem uzavřeného kruhu, který leží uvnitř clo U , dotýká se jednotkové kružnice v bodě z_0 a obsahuje bod $-(1 + b)/a \in U$.



Obrázek 8: Profil určený parametrem $b = -0,1 + 0,2i$ pro dva různé úhly náběhu α . Barva vyznačuje absolutní velikost rychlosti proudění.

Reference

- [MAF5] ČIHÁK, Pavel a kol.: *Matematická analýza nejen pro fyziky (V)*. Vydání třetí. Praha: Matfyzpress, 2016. ISBN 978-80-7378-302-0.
- [E] EVANS, Lawrence C.: *Partial differential equations*. 2nd ed. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2010. Graduate studies in mathematics, v. 19. ISBN 0821849743.
- [Feist] FEISTAUER, Miloslav: *Mathematical methods in fluid dynamics*. New York: Longman Scientific Technical, 1993. ISBN 0582209889.
- [Feyn] FEYNMAN, Richard P.: *The Feynman lectures on physics*. 2010.
<http://www.feynmanlectures.caltech.edu>
- [G] GREENE, Robert E. a Kang-Tae KIM: *The Riemann mapping theorem from Riemann's viewpoint [online]*. 2016 [cit. 2018-04-29].
- [O] OLVER, Peter J.: *Complex Analysis and Conformal Mapping*. 2017.
http://www-users.math.umn.edu/~olver/ln_/cml.pdf
- [Rans] RANSFORD, Thomas: *Potential theory in the complex plane*. Cambridge University Press, 1995. ISBN 0521461200.
- [R] RUDIN, Walter: *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Praha: Academia, 1977.