Posudek oponenta bakalářské práce

Název: O nemožnosti elementární integrace
Autor: Michael Zelina

Shrnutí obsahu práce

Autor nejprve zavede pojem diferenciálního tělesa, pak dokáže Liouvillovu větu dávající nutnou podmínku pro existenci elementárního integrálu a následně ji aplikuje na integrály tvaru Re^Q a $R(z)\ln Q(z)$. Práce obsahuje několik vyřešených příkladů a zmiňuje také souvislosti s integrály inverzních funkcí a zmiňuje i možná rozšíření na integrály výrazů s odmocninami.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Téma je zajímavé a o něco těžší než je běžné. Vyžaduje kombinovat znalosti z analýzy a algebry.

Vlastní příspěvek. Zpracování výsledků z více zdrojů, samostatné řešení 10 úloh na existenci elementárního integrálu.

Matematická úroveň. Matematická úroveň je většinou dobrá, ale text se vyznačuje určitou vágností formulací (např. v průměru každá stránka obsahuje jeden výskyt tvaru slova „nějaký“). Tato vágnost je většinou jen stylistická a předkládané důkazy matematicky fungují, ale ve třech případech se autor stal, dle mého názoru, obětí svých vlastních nepřesných formulací a tvrdí něco, co není pravda (viz níže). Naopak oceňuji, že autor krom důkazů a řešení problémů poskytuje i komentář, který vysvětluje, například předpoklady nebo použití vět.

Práce se zdroji. Práce se zdroji je adekvátní úrovni Bc. práce.

Formální úprava. Práce splňuje všechny formální náležitosti. Překlepů jsem našel jenom minimum (ty závažnější uvádím níže). Nepotěšilo mne nekonzistentní číslování různých proklamací: Tvrzení mají vlastní číslování, ale věty a lemmata jsou číslovány podle společného počítadla a definice a řešené příklady nejsou číslované vůbec.

Závažné připomínky

1. Lemmata 8 a 9 neplatí tak, jak jsou zformulována. V práci se píše, že za určitých podmínek (pro každé lemma jiných) platí toto: Pokud $\mathbb{F}$ je diferenciální těleso, $\mathbb{F}(t)$ jeho rozšíření zachovávající konstanty a $w \in \mathbb{F}$ splňuje pro c_i konstanty a $v, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}(t)$ rovnost

   $$w = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i},$$

   tak $v, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}$.

   Protipříklad na Lemma 8 je např. $\mathbb{F} = \mathbb{R}(x)$ (racionální lomené funkce s běžnou derivací) a $t^2 = x$ (tj. $t' = 1/(2t)$). Můžeme totiž zvolit $w = 1/(2x)$, $v = 0$, $n = 1$, $c_1 = 1$, $u_1 = t$ a psát v rozporu s Lemmatem 8

   $$1/(2x) = 0 + t'/t.$$

Protipříklad na Lemma 9 je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ a $t = e^x$. Potom $t' = t$ a volba $w = 1$ $v = 0$, $n = 1$, $c_1 = 1$, $u_1 = t$ dává

$$1 = 0 + t'/t.$$

Ve skutečnosti totiž platí pouze, že za předpokladů Lemmatu 8 resp. 9 *existuje* číslo $m \in \mathbb{N}_0$, konstanty $\overline{c_1}, \ldots, \overline{c_m}$ a prvky $\overline{v}, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m \in \mathbb{F}$ takové, že

$$w = \overline{v}' + \sum_{i=1}^{m} \overline{c}_i \frac{\overline{u}_i'}{\overline{u}_i}.$$

Důkaz obou lemmat i jejich použití dokazuje právě takové tvrzení, takže tento problém je opravitelný, ale rozdíl mezi „tyto prvky jsou z $\mathbb{F}$“ a „existují prvky z $\mathbb{F}$“ by měl být jasný.

2. Řešení předposledního příkladu na str. 25 (že funkce $(e^z + z^2)e^{e^{2z+1}}$ nemá elementární primitivní funkci) obsahuje nepravdivý argument. Při použití Věty 11 volíme $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)(e^z)$ a funkce $y(z)$, která má řešit rovnici $e^z + z^2 = y' + 2e^{2z+1}y$, pak má tvar $y = p/q$, kde p, q jsou nesoudělné polynomy z $\mathbb{C}[z, e^z]$ (a q není nulový polynom). Z rovnosti

$$p(z)q'(z) = q(z)[q(z)(e^z + z^2) - p'(z) - 2p(z)e^{2z+1}]$$

pak autor usuzuje, že $q(z)|q'(z)$ a tedy q je konstanta. To by fungovalo pro $q \in \mathbb{C}[z]$ (na předchozí úvahy pro tento případ se text odvolává), ale už ne například pro $q(z) = e^z$, kde je $q'(z) = q(z)$ a dělitelnost nastává pro nekonstantní q.

Ostatní připomínky

1. Přídavné jméno gaussovský se píše s malým g (str. 4 a 16).

2. První odstavec Tvrzení 3 (str. 4) je triviální. Každé těleso je gaussovské jako obor integrity, protože každý nenulový prvek tělesa je invertibilní. To, co je zajímavé, je nenápadná poslední věta Tvrzení 3, totiž že *polynomy* nad každým tělesem jsou gaussovské.

3. V Tvrzení 5 (rozklad na parciální zlomky, str. 4) došlo k nešťastné záměně polynomů P a Q.

4. Poslední odstavce na str. 6 by dával větší smysl až jako komentář k Větě 2 než jako poslední odstavec důkazu této věty.

5. Na str. 23 se vyskytují anglické zkratky LHS a RHS, přitom práce je v češtině.

6. Na str. 24 autor používá argument typu „Integrál I vznikne z integrálu J tou a tou substitucí a protože integrál J není elementární, není elementární ani I.“ Ačkoli je intuitivně jasné, že by se (ne)elementárnost integrálu měla zachovávat (nepříliš divokou) substitucí, bylo by vhodné zformulovat tento fakt (především povolené substituce) jako tvrzení a buď ho dokázat, nebo uvést odkaz na literaturu.

7. V příkladě řešeném na str. 25 nahoře se používá značka $\mathbb{F}$, ale není jasné, co je těleso $\mathbb{F}$.

8. Značení substituce na str. 29 uprostřed pomocí $|\ldots|$ není nikde vysvětleno. Čtenář se domyslí, co tím chtěl autor říci, ale pokud vím, tak takové značení není standardní a komplikuje porozumění textu.

Závěr

Práce zpracovává téma, které kombinuje matematickou analýzu (integrály a částečně komplexní analýza) s algebrou (rozšíření těles). Autor se úkolu napsat pojednání o elementární integraci zhostil dobře a prokázal své schopnosti, ale bohužel se nevyhnul několika matematickým chybám.

Chyby jsou naštěstí opravitelné a kvalitu práce snižují jen v omezené míře. Proto práci považuji za velmi dobrou a *doporučuji* k uznání coby práci bakalářskou.

Návrh klasifikace sdělí oponent předsedovi zkušební subkomise.

V Praze 13. června 2018
Alexandr Kazda
Katedra algebry
MFF UK