MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michael Zelina

O nemožnosti elementární integrace

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu své bakalářské práce doc. RNDr. Daliboru Pražákovi, Ph.D., za ochotu, cenné podněty a připomínky i čas, který mi během jejího psaní věnoval.

Název práce: O nemožnosti elementární integrace

Autor: Michael Zelina

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Předložená práce je věnována studiu problému (ne)existence elementární primitivní funkce k zadané funkci. V prvé řadě zavedeme strukturu diferenciálního tělesa a najdeme vhodný způsob formalizování pojmu elementární funkce. S tímto aparátem se nám otevře možnost formulovat a dokázat klíčovou větu říkající, v jakém tvaru musí nutně být elementární primitivní funkce, jestliže taková existuje. Následně s její pomocí nalezneme podmínky pro existenci elementárních integrálů ze dvou funkcí v jistém speciálním, ale přesto dosti obecném tvaru. Jejich konkrétní aplikací prokážeme neelementárnost celé řady více či méně známých integrálů.

Klíčová slova: elementární funkce, diferenciální těleso, primitivní funkce, tělesové rozšíření

Title: On impossibility of elementary integration

Author: Michael Zelina

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: This work is devoted to studying of problem of (non)existence an elementary primitive function of a given function. In the first place, we introduce the structure of a differential field and then we find a suitable way of formalizing the concept of the elementary function. This tools opens up the possibility to formulate and prove the crucial theorem which says what form an elemental primitive function must necessarily have if it exists. Then we use it to find the conditions for the existence of an elementary integrals of two functions in a special but still quite general form. By using these conditions, we will show the nonelementarity of a number of more or less known integrals.

Keywords: elementary function, differential field, primitive function, extension field

Obsah

Úvod **2**

1 Základní pojmy **3**
1.1 Abstraktní algebra I . . . 3
1.2 Diferenciální algebra . . . 5
1.3 Tělesová rozšíření . . . 7
1.4 Elementární integrovatelnost . . . 10
1.5 Abstraktní algebra II . . . 11

2 Liouville **13**
2.1 Předehra . . . 13
2.2 Hlavní věta . . . 18

3 Charakterizační věty **20**
3.1 Exponenciální integrály . . . 20
3.2 Logaritmické integrály . . . 27
3.3 Integrál inverzní funkce . . . 31

Závěr **32**

Seznam použité literatury **33**

Úvod

V základních kurzech analýzy, eventuálně i dříve, se nutně setkáme s problémem hledání primitivních funkcí. Celou řadu příkladů se tam naučíme vyřešit pomocí standardních metod. Nicméně dříve či později jistě narazíme na integrály, s nimiž nejsme schopni hnout. Typickým příkladem, který nám vytane na mysli, je integrál z funkce e^{-z^2}, s nímž se obzvláště často setkáváme na kurzech souvisejících s teorií pravděpodobnosti. Následuje přirozená otázka, zda k této a jiným funkcím její primitivní funkci nalézt pouze neumíme, nebo to v jistém smyslu není ani možné.

Primitivní funkci bychom často mohli umět nalézt například ve tvaru mocninné řady, ale přirozeně bychom byli více vděčni za nějaký kompaktnější tvar. To nás dovádí k pojmu elementární funkce. Tedy k tomu, že budeme hledat ne libovolné funkce, ale pouze takové, které je možné vyjádřit konečnou kombinací nějakých základních operací.

Formální definice takovéto třídy funkcí pro nás dosud nebyla v podstatě vůbec nutná. Neboť pokud elementární primitivní funkce existovala a měli jsme štěstí, tak jsme ji pomocí nějakých úprav našli. Pokud ale připustíme možnost, že by hledaná funkce nebyla elementární, pak je zjevně nutné přesně říci, co je tímto pojmem míněno.

První kapitola bude proto v prvé řadě směřovat právě k přesnému a nějakým způsobem použitelnému pojmu elementární funkce. K tomu dojdeme na základě toho, co už umíme integrovat, a tím jsou především racionální funkce, bude tedy rozumné chtít, aby alespoň jejich primitivní funkce byly elementární.

Potom už budeme mít matematicky formulovaný problém. Posláním druhé kapitoly tedy bude podrobně dokázat větu, která bude formulovat v podstatě nutnou podmínku pro to, aby primitivní funkce byla elementární. První výsledek tohoto druhu, byť řešený dosti odlišně, je z poloviny 19. století od Josepha Liouvilla.

V tento moment budeme mít v rukou první nástroj, jenž nás může k něčemu dovést. V poslední třetí kapitole dokážeme tedy dvě věty, které nám charakterizují, za jakých okolností jsou pro racionální funkce R, Q integrály

$$\int R(z)e^{Q(z)}\mathrm{d}z \quad \text{a} \quad \int R(z)\log Q(z)\mathrm{d}z$$

elementárními funkcemi. Potom demonstrujeme jejich aplikaci na řadě více či méně klasických integrálů, kromě už zmíněného uveďme ještě například integrály funkcí

$$\frac{\sin z}{z}, \qquad \frac{e^z}{z}, \qquad \log(\log z), \qquad e^z \log z.$$

Na závěr v krátkosti řekneme, jaká jsou úskalí při řešení integrálů zahrnujících odmocniny (nebo obecněji algebraické funkce), a uvedeme silnější teorii, která se při řešení těchto a dalších problémů dá využít.

1. Základní pojmy

V této úvodní kapitole připomeneme několik základních tvrzení a definic známých z (abstraktní) algebry a zavedeme několik klíčových pojmů, jež nás budou dále provázet. Patří k nim především integrovatelnost, pojem, který je základním stavebním kamenem celé této práce. Za známé považujeme poznatky nabyté v základních kurzech algebry a ohledně nových pojmů budeme vycházet především z [Chu06].

1.1 Abstraktní algebra I

Definice. Komutativním okruhem s jednotkou $\mathbf{R}$ rozumíme (nosnou) množinu R, na které jsou definovány tři operace $+, -, \cdot$ a dvě různé konstanty $0, 1$ splňující pro libovolná $a, b, c \in R$ tyto podmínky:

$$\begin{aligned} &a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad && a + b = b + a, \quad a + 0 = 0, \qquad && a + (-a) = 0, \\ &a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, && a \cdot b = b \cdot a, \quad a \cdot 1 = a, \\ &a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c). \end{aligned}$$

Jestliže navíc pro $a, b \neq 0$ z R je $a \cdot b \neq 0$, tak $\mathbf{R}$ je obor integrity.

Pokud ještě pro každé $0 \neq a \in R$ existuje $b \in R$ splňující $a \cdot b = 1$, tak $\mathbf{R}$ je těleso. V tomto případě navíc značíme $b = a^{-1}$ a tento prvek nazýváme inverzním prvkem k prvku a. Těleso obvykle budeme značit symbolem $\mathbb{F}$.

Buď $\mathbb{F}$ těleso (okruh). Jestliže existuje G, obsahující $0, 1$, podmnožina nosné množiny $\mathbb{F}$, která je uzavřená vzhledem k operacím na $\mathbb{F}$, potom je G spolu s restrikcemi těchto operací podtěleso (podokruh) $\mathbb{F}$. Toto značíme $\mathbb{G} \leq \mathbb{F}$.

Charakteristikou tělesa rozumíme nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \cdot 1 = 0$, pokud takové existuje, v opačném případě je to 0. Značíme ji char $\mathbb{F}$.

Tvrzení 1 (Vlastnosti oboru a tělesa)**.** Buď $\mathbf{R}$ obor integrity a $a, b, c \in \mathbf{R}$, pak platí

(i) $a + b = a + c \implies b = c$,

(ii) $a \cdot 0 = 0$,

(iii) $-(-a) = a, -(a + b) = (-a) + (-b)$,

(iv) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$,

(v) $a \cdot c = b \cdot c,\ c \neq 0 \implies a = b$.

Pokud k prvku a existuje a^{-1}, tak ten již je určen jednoznačně.

Důkaz. Viz například [Pin10], strany 169–173. ■

Definice. Polynomem P proměnné x nad oborem integrity $\mathbf{R}$ rozumíme výraz

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

který často zkracujeme do tvaru $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, kde $a_0, \ldots, a_n \in R, a_n \neq 0$.

Číslo n nazýváme stupněm polynomu a značíme ho $\deg P$, speciálně v případě $P = 0$ uvažujeme $\deg P = -1$. Přirozeným způsobem na této množině definujeme operace násobení, sčítání a odčítání.

Je-li $a_n = 1$, pak hovoříme o monickém polynomu. Monom je polynom s jediným nenulovým členem.

Obor integrity s těmito symboly a operacemi označíme $\mathbf{R}[x]$.

Tvrzení 2. Jestliže $\mathbf{R}$ je obor integrity, tak i $\mathbf{R}[x]$ je obor integrity.

Důkaz. Viz například [Pin10], strany 242–244. ■

Dále připomeňme základní definici a tvrzení o rozkladu prvku na součin ireducibilních prvků.

Definice. Řekneme, že a dělí b ($a|b$) v oboru integrity $\mathbf{R}$, jestliže existuje $c \in \mathbf{R}$ s vlastností $b = ac$. Prvky a, b jsou asociované ($a||b$), pokud $a|b$ a $b|a$. Prvek a je invertibilní, jestliže $a||1$, tedy existuje $c \in \mathbf{R}$ splňující $ac = 1$. Dělitel prvku je vlastní, pokud není asociován ani s 1, ani s ním samým.

Neinvertibilní prvek $a \in \mathbf{R}$ se nazývá ireducibilní, jestliže nemá vlastní dělitele.

Tvrzení 3. Každé těleso je Gaussovský obor. Tedy každý neinvertibilní a nenulový prvek má jednoznačný rozklad na součin ireducibilních činitelů. Jednoznačností se míní jednoznačnost až na pořadí a asociovanost.

Polynomy nad tělesem jsou také Gaussovský obor.

Důkaz. Dá se nalézt v [Gri07], strana 134, Theorem 8.4 a strana 142, Theorem 10.4. ■

Nyní zopakujeme konstrukci zlomků nad oborem integrity.

Definice. Buď $\mathbf{R}$ obor integrity. Na množině $R \times (R \setminus \{0\})$ definujeme relaci $\sim$ předpisem

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

Zřejmě jde o ekvivalenci. Označme $[(a, b)]_\sim = \frac{a}{b}$ a mějme Q množinu všech bloků dané ekvivalence. Na této množině zavedeme operace sčítání, násobení, odčítání a nulový a neutrální prvek obvyklým způsobem.

Množinu Q s těmito operacemi nazveme podílovým tělesem oboru $\mathbf{R}$.

Tvrzení 4 (O podílovém tělese)**.** Množina Q s právě definovanými operacemi je těleso.

Důkaz. Dá se nalézt v [Gri07], strana 118, Proposition 4.10. ■

Příklad. (i) Podílové těleso oboru $\mathbb{Z}$ je $\mathbb{Q}$.

(ii) Podílové těleso oboru $\mathbb{R}[x]$ jsou racionální funkce nad $\mathbb{R}$.

(iii) Podílové těleso oboru $\mathbb{C}[x]$ jsou racionální funkce nad $\mathbb{C}$. Toto podílové těleso budeme dále značit $\mathbb{C}(z)$.

▽

Na kurzech analýzy se obvykle setkáváme s důkazem rozkladu racionální funkce na parciální zlomky. To je možné formulovat následujícím tvrzením.

Tvrzení 5 (Rozklad na parciální zlomky nad $\mathbb{C}$)**.** Mějme P komplexní polynom ve tvaru $P(z) = a_0(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \dots (z - z_n)^{r_n}$, kde všechna z_k jsou různá a $r_k \in \mathbb{N}$ pro $k = 1, \dots, n$ a $a_0 \in \mathbb{C}$. Buď ještě Q druhý komplexní polynom, který má vyšší stupeň než P a není identicky nulový. Potom existují (komplexní) čísla

$$A^{(1)}_{r_1}, A^{(1)}_{r_1-1}, \dots, A^{(1)}_1; A^{(2)}_{r_2}, A^{(2)}_{r_2-1}, \dots, A^{(2)}_1; \dots; A^{(n)}_{r_n}, A^{(n)}_{r_n-1}, \dots, A^{(n)}_1$$

splňující rovnost

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{Q(z)} = &\frac{A^{(1)}_{r_1}}{(z - z_1)^{r_1}} + \frac{A^{(1)}_{r_1-1}}{(z - z_1)^{r_1-1}} + \dots + \frac{A^{(1)}_1}{z - z_1} + \\ &+ \frac{A^{(2)}_{r_2}}{(z - z_2)^{r_2}} + \frac{A^{(2)}_{r_2-1}}{(z - z_2)^{r_2-1}} + \dots + \frac{A^{(2)}_1}{z - z_2} + \dots + \\ &+ \dots + \frac{A^{(n)}_{r_n}}{(z - z_n)^{r_n}} + \frac{A^{(n)}_{r_n-1}}{(z - z_n)^{r_n-1}} + \dots + \frac{A^{(n)}_1}{z - z_n} .\end{aligned}$$

Jestliže stupeň P není menší než stupeň Q, tak můžeme nalézt rozklad $\frac{P(z)}{Q(z)} = P_1(z) +$ $+ \frac{P_2(z)}{Q(z)}$, kde P_1 je jednoznačně určený polynom a P_2 je buď nula, nebo je to polynom menšího stupně než Q.

Důkaz. Viz [Jar84], strany 87–91, Věta G a Věta 57. ■

Tyto zlomky se vyplatí definovat obecným způsobem.

Definice. Buď $\mathbb{F}$ těleso. Zlomek $\frac{p(z)}{q(z)^r}$ z podílového tělesa $\mathbb{F}$ je parciální zlomek, jestliže q je monický a ireducibilní polynom, $r \in \mathbb{N}$ a $\deg f < \deg q$.

Nicméně kromě této známé věty z analýzy existuje i silnější věta, která říká, že tento rozklad není doménou komplexních čísel, ale že funguje nad libovolným tělesem.

Tvrzení 6 (Parciální zlomky nad $\mathbb{F}$)**.** Každou racionální funkci nad tělesem $\mathbb{F}$ je možné jednoznačně zapsat jako součet polynomu a konečně mnoha parciálních zlomků s různými jmenovateli.

Důkaz. Dá se nalézt v [Gri07], strany 139–141, Theorem 9.1. ■

Toto byly základní poznatky z (abstraktní) algebry, které budeme využívat.

1.2 Diferenciální algebra

Pro další práci bude třeba obohatit strukturu tělesa ještě o jednu operaci.

Definice. Buď $\mathbf{R}$ okruh. Všechna zobrazení (operátory) $' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ splňující

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{a} \quad (f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$$

budeme nazývat derivací nebo diferenciálním operátorem. Okruh (těleso) s derivací je diferenciální okruh (těleso).

Řekneme, že $\mathbb{G}$ je diferenciální podtěleso (podokruh) $\mathbb{F}$, jestliže je to jeho podtěleso (podokruh), které je uzavřené na operaci derivace. $\mathbb{F}$ je naopak nadtěleso (nadokruh).

Věta 1 (Vlastnosti derivace)**.** Buď $\mathbb{F}$ těleso s diferenciálním operátorem $'$, potom platí:

(i) $0' = 1' = 0$.

(ii) $(-f)' = -f', f \in \mathbb{F}$.

(iii) $(f^n)' = nf^{n-1}f', n \in \mathbb{Z}, 0 \neq f \in \mathbb{F}$.

(iv) $(\frac{f}{g})' = \frac{gf' - fg'}{g^2}, f, g \in \mathbb{F}, g \neq 0$.

(v) $\ker \mathbb{F} = \{f \in \mathbb{F}; f' = 0\}$ je diferenciální podtěleso tělesa $\mathbb{F}$. Budeme o něm mluvit jako o jádře $\mathbb{F}$ a jeho prvky budeme, ze zřejmého důvodu, nazývat konstantami.

Důkaz. Důkaz je v podstatě velmi přímočarý. Ohledně prvních částí máme

$$1' = (1 \cdot 1)' = 1 \cdot 1' + 1 \cdot 1' \implies 0 = 1',$$
$$0' = (0+0)' = 0' + 0' \implies 0 = 0'.$$

V tuto chvíli snadno dostáváme, že

$$0 = 0' = (f + (-f))' = f' + (-f)' \implies -f' = (-f)'.$$

Třetí část ukážeme indukcí. Nejdříve pro $n \geq 0$, případ $n = 0$ je triviálně platný. Dále je

$$(f^{n+1})' = (f^n \cdot f)' = f(f^n)' + f^n f' = nf^n f' + f^n f' = (n+1)f^n f'.$$

A nyní totéž pro záporné exponenty. Díky existenci (jediného) inverzního prvku pišme

$$0 = 1' = \left(\frac{f}{f}\right)' = f\left(\frac{1}{f}\right)' + \frac{1}{f}f' \implies \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f^2}f'.$$

Za použití indukce a právě nalezeného vztahu dostáváme (iii) pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Čtvrtá část je okamžitým důsledkem předchozího bodu, jelikož platí

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f\left(\frac{1}{g}\right)' + \frac{1}{g}f' = -\frac{f}{g^2}g' + \frac{1}{g}f' = \frac{gf' - fg'}{g^2}\ .$$

Část (v) plyne z (i) a snadného ověření uzavřenosti na sčítání, násobení a invertování. ■

Příklad. (i) Každé těleso je diferenciální, vezmeme-li za $'$ identicky nulové zobrazení.

(ii) Rovněž triviálně je těleso $\mathbb{C}(z)$ spolu s $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ diferenciální těleso a navíc $\ker \mathbb{C}(z) = \mathbb{C}$. Pro libovolnou $f \in \mathbb{C}(z)$ je $f' \in \mathbb{C}(z)$. ▽

Skrze předešlý příklad tedy víme, že nám známé racionální funkce (ať už nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) tvoří těleso. Spolu se standardní derivací tvoří strukturu, kterou jsme nazvali diferenciálním tělesem, a derivace libovolné racionální funkce je opět racionální.

V této práci nás bude zajímat v jistém smyslu opačný proces. Dostaneme funkci a budeme k ní chtít nalézt její primitivní funkci, ale otázka je, jestli zůstaneme v témže tělese. Pokud ne, tak jestli se ocitneme alespoň v něčem „rozumném“.

Definice. Buď $\mathbb{F}$ diferenciální těleso a $f \in \mathbb{F}$. Řekneme, že $F \in \mathbb{G}$, kde $\mathbb{F} \leq \mathbb{G}$, je primitivní k f, jestliže $F' = f$. Budeme používat (přirozené) značení $\int f(z)\mathrm{d}z = F(z)$ a říkat, že F je integrálem funkce f. Integrační proměnnou budeme mnohdy vynechávat, a psát tedy pouze $\int f = F$. Z vlastností derivace vyplývá, že integrál je ve známém smyslu lineárním operátorem, tj. lineárním až na aditivní konstantu.

Věta 2. Neexistuje $f \in \mathbb{C}(z)$ taková, že $f' = \frac{1}{z}$, a tedy těleso $\mathbb{C}(z)$ není uzavřené na operaci integrování.

Důkaz. Nechť pro spor existuje $f = \frac{p}{q} \in \mathbb{C}(z)$ taková, že $f' = \frac{1}{z}$. Bez újmy na obecnosti uvažujme, že p, q jsou nesoudělné prvky z $\mathbb{C}[z]$ (jinak je zkrátíme). Potom platí

$$\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'q - pq'}{q^2} = \frac{1}{z}\ .$$

Vynásobením a úpravou dostáváme, že

$$-zpq' = q(q - zp').$$

Jelikož q je s p nesoudělný, pak má-li q kořen $z_0 \neq 0$ násobnosti $r > 0$, tak pravá strana má tento kořen násobnosti alespoň r, zatímco levá nejvýše $r - 1$, neboť derivace má vícenásobný kořen v násobnosti o jedna menší (potřeba je $\operatorname{char} \mathbb{C} = 0$). Tedy jediný možný kořen q je nula, a proto můžeme psát $q = z^n, n \in \mathbb{N}$. Dosazením dostáváme, že

$$\begin{aligned} -nz^n p(z) &= z^n(z^n - zp'(z)) \\ -np(z) &= z(z^{n-1} - p'(z)). \end{aligned}$$

Tato rovnost říká, že v rozkladu p je člen z, to ale nelze, jelikož ten byl již v rozkladu q a předpokládali jsme, že tyto jsou nesoudělné. Proto taková funkce f neexistuje.

Fakt, že těleso $\mathbb{C}(z)$ není uzavřené na integrování, plyne z dokázaného protipříkladu. Případným rozepsáním racionální funkce pomocí parciálních zlomků ale navíc získáváme i přesný tvar primitivní funkce, avšak v tuto chvíli to formálně udělat nemůžeme, neboť nemáme žádný prvek, který by hrál roli logaritmu funkce. ■

1.3 Tělesová rozšíření

Zjistili jsme tedy, že ani v základním případě racionálních funkcí není primitivní funkce opět ve stejném tělese. Dá se tudíž očekávat, že v obecném případě bude rozumné hledat primitivní funkci alespoň v jakémsi tělesovém rozšíření. Z praxe víme, že integrací racionálních funkcí můžeme získat kromě samotných racionálních funkcí ještě logaritmy. Něco takového jsme v naší abstraktní teorii zatím nevybudovali, avšak díky předchozí větě je rozumné takové prvky chtít zavést.

Definice. Buď $\mathbf{R}$ obor integrity, $\mathbf{S}$ jeho podobor a $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Potom definujeme $\mathbf{S}[a_1, \ldots, a_n]$ jako nejmenší podobor oboru $\mathbf{R}$ obsahující nosnou množinu $\mathbf{S}$ a prvky $a_1, \ldots, a_n$. Jde o rozšíření oboru $\mathbf{S}$ o prvky $a_1, \ldots, a_n$.

Analogicky řekneme, že pokud je $\mathbb{F} \leq \mathbb{G}$, pak $\mathbb{F}(a_1, \ldots, a_n)$ je nejmenší podtěleso $\mathbb{G}$ obsahující $\mathbb{F}$ a prvky $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{G}$.

Definice. Buď $\mathbb{F}$ těleso a $\mathbb{G}$ jeho rozšířené těleso, $t \in \mathbb{G}$. Řekneme, že t je algebraický prvek nad $\mathbb{F}$, jestliže existuje $p \in \mathbb{F}[x]$ takový, že $p(t) = 0$. V opačném případě říkáme, že je t transcendentní.

Pokud je každý prvek $\mathbb{G}$ algebraický nad $\mathbb{F}$, tak říkáme, že jde o algebraické rozšíření, jinak jde o transcendentní rozšíření.

Věta 3 (O rozšiřování derivace)**.** Mějme těleso $\mathbb{F}$ charakteristiky 0 s derivací.

(i) Jestliže je $\mathbb{F}(t)$ (netriviální) algebraické rozšíření, pak existuje jediné rozšíření derivace na celé těleso $\mathbb{F}(t)$.

(ii) Jestliže je $\mathbb{F}(t)$ (netriviální) transcendentní rozšíření a $f \in \mathbb{F}(t)$, pak existuje jediné rozšíření derivace na celé těleso $\mathbb{F}(t)$ splňující $t' = f$.

Důkaz. Jedná se o delší důkaz technického rázu, a proto ho vynecháme. Detailní důkaz je možno nalézt v [Chu06], strany 13–17, Theorem 3.4. ■

Poznámka. *Jelikož derivace je zde rozšířením, tak nutně je* $\ker \mathbb{F} \leq \ker \mathbb{F}(t)$.

Úmluva. *Budeme-li mít diferenciální těleso a nějaké jeho rozšíření na nadtěleso, můžeme nyní automaticky uvažovat, že jde i o diferenciální nadtěleso.*

V další části práce bude veskrze potřebná podmínka, aby konstanty (diferenciálního) tělesa i jeho rozšíření byly stejné. V tuto chvíli si ukážeme snadný příklad, který ilustruje, že se množina konstant může změnit.

Příklad. Označme $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ a vezměme rozšíření $\mathbb{G} = \mathbb{F}(i)$, kde i je komplexní jednotka.

Zjevně se jedná o algebraické rozšíření. Z předchozí věty víme, že na $\mathbb{G}$ existuje jednoznačně rozšířená derivace. Z vlastností derivace dostáváme

$$0 = (-1)' = (i^2)' = 2ii'.$$

A tedy nutně $i' = 0$, jinými slovy $i \in \ker \mathbb{G}$. Máme tak příklad rozšíření, které nám nezachová konstanty. ▽

V tomto momentě zavedeme dvě speciální tělesová rozšíření, o nichž zakrátko zjistíme, že jsou ohledně integrování velmi přirozená.

Definice. Buď $\mathbb{F}$ diferenciální těleso a $\mathbb{G}$ jeho rozšířené diferenciální těleso. Jestliže pro $t \in \mathbb{G} \setminus \mathbb{F}$ existuje prvek $u \in \mathbb{F}$ takový, že

$$t' = \frac{u'}{u},$$

tak řekneme, že t je logaritmický prvek nad $\mathbb{F}$, a $\mathbb{F}(t)$ je tedy logaritmickým rozšířením $\mathbb{F}$. Můžeme značit $t = \log u$.

Podobně existuje-li $u \in \mathbb{F}$ takové, že

$$t' = tu',$$

tak $\mathbb{F}(t)$ nazveme exponenciálním rozšířením. Můžeme značit $t = e^u$.

Poznámka. *Tato definice vlastně neříká nic nepřirozeného, všimneme-li si, že formálním vyřešením obou rovnic pro neznámou t dostaneme*

$$t = \log u \quad a \quad t = e^u.$$

Odtud tedy pochází názvy těchto rozšíření.

Bohužel ani tato dvě rozšíření obecně nezachovávají konstanty.

Příklad. Mějme těleso $\mathbb{R}$ s konstantně nulovou derivací a jeho podtěleso $\mathbb{Q}$. Toto podtěleso rozšiřme prvkem $t = \log 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a tedy $t' = 0$, jelikož $2' = 0$. Ve smyslu definice výše jde o logaritmické rozšíření a vidíme, že se jádro nezachovalo. Navíc je toto těleso dokonce charakteristiky nula, takže nejde o nějaký jev, který by byl typický třeba pro konečná tělesa. $\triangledown$

Poznámka. *Problém s konstantami nám tedy nemizí a bude nutno si je hlídat. Ve větách to bude zajištěno prostřednictvím předpokladu, nicméně dostaneme se i k aplikacím na konkrétních příkladech. Je tedy třeba si říci, jak bude zachovávání konstant v praxi zajištěno.*

Budeme integrovat komplexní funkce (se standardní derivací), které budou součinem nějakých racionálních funkcí a logaritmů nebo exponenciál. Jakožto funkce budou mít smysl na nějaké (neprázdné) oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. A bude zřejmé, že je budeme moci získat logaritmickým nebo exponenciálním rozšířením nějakými prvky z množiny meromorfních funkcí na té nějaké oblasti (značeno $M(\Omega)$). O této množině s příslušnými operacemi však z komplexní analýzy víme, že tvoří těleso. V praxi se tedy setkáme s tím, že začneme s tělesem $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)$, které budeme uvažovat jako podtěleso tělesa $\mathbb{G} = M(\Omega)$, z něhož budeme získávat příslušná rozšíření, tj. prvky $t \in M(\Omega) \setminus \mathbb{C}(z)$. Avšak je jasné, že konstanty těles $\mathbb{F}$ a $\mathbb{G}$ jsou stejné, a že i jádro uvažovaného rozšíření tělesa $\mathbb{F}$ o prvky t bude stejné, a sice komplexní čísla. Například tedy

$$z^k e^z, k \in \mathbb{Z}$$

je meromorfní funkce na celé komplexní rovině a jde o prvek tělesa $\mathbb{C}(z)(t)$, kde $t = e^z$, tj. $t' = z' \cdot t = t$. Tedy $\ker \mathbb{C}(z)(t) = \mathbb{C}$.

Když pracujeme s rozšířením tělesa, je namístě zjistit, zda je algebraické, nebo transcendentní. Následující věta nám na toto odpoví pro naše dvě speciální rozšíření.

Věta 4 (O transcendentnosti rozšíření)**.** Buď $\mathbb{F}$ diferenciální těleso charakteristiky 0 a $\mathbb{F}(t)$ jeho logaritmické nebo exponenciální rozšíření se stejným jádrem. Jde-li o logaritmické rozšíření, tak je transcendentní. Je-li exponenciální a $t^n \notin \mathbb{F}$ pro všechna přirozená n, je rovněž transcendentní. V opačném případě je (triviálně) algebraické.

Důkaz. Jelikož $t \in \mathbb{F}(t) \setminus \mathbb{F}$ a tato tělesa mají stejné konstanty, tak $t \notin \ker \mathbb{F}$, a tedy $t' \neq 0$. Buď $t = \log u$ logaritmický prvek nad $\mathbb{F}$ a uvažujme, že je algebraický, tj. pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme minimální polynom nad $\mathbb{F}$ a platí

$$t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Jelikož $t \notin \mathbb{F}$, tak nutně $n > 1$. Na obě strany rovnosti aplikujeme derivaci a použijeme definici prvku t

$$nt^{n-1}\frac{u'}{u} + a'_{n-1}t^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2}\frac{u'}{u} + \dots + a'_0 = 0$$
$$\left(n\frac{u'}{u} + a'_{n-1}\right)t^{n-1} + (\dots)t^{n-2} + \dots + a'_0 = 0.$$

Pokud $n\frac{u'}{u} + a'_{n-1} \neq 0$, tak vydělením nalezneme minimální polynom menšího stupně, což nelze. Pokud naopak $n\frac{u'}{u} + a'_{n-1} = 0$, pak platí, že

$$0 = n\frac{u'}{u} + a'_{n-1} = (nt + a_{n-1})' \implies nt + a_{n-1} = c, c \in \ker \mathbb{F}.$$

Tato rovnost ale nemůže nastat, jelikož při vydělení n (charakteristika je 0) dostaneme vyjádření pro t jakožto prvku $\mathbb{F}$, což není možné.

Podobně pro exponenciální prvek $t = e^u$ s podmínkou $t^n \notin \mathbb{F}$ máme minimální polynom s $n > 1$ a platí

$$t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$
$$nt^{n-1} \cdot (tu') + a'_{n-1}t^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} \cdot (tu') + \dots + a'_0 = 0$$
$$nt^n u' + a'_{n-1}t^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-1}u' + \dots + a'_0 = 0.$$

Od nu'-násobku první rovnice odečteme poslední a dostaneme

$$(a_{n-1}u' - a'_{n-1})t^{n-1} + \dots + (na_0u' - a'_0) = 0.$$

Jestliže je koeficient u t^{n-1} nenulový, tak vydělíme a máme spor s minimalitou polynomu. Obdobně pokud $a_{n-1} \in \ker \mathbb{F}\backslash\{0\}$, tak z nenulovosti u' $(\underbrace{t'}_{\neq 0} = \underbrace{t}_{\neq 0} u')$ dostáváme totéž. Pokud to naopak je nula a $a_{n-1} \notin \ker \mathbb{F}$, pak vydělením (nenulovým) t získáváme

$$\frac{a'_{n-1}t}{t^2} - \frac{a_{n-1}tu'}{t^2} = 0$$
$$\frac{a'_{n-1}t - a_{n-1}t'}{t^2} = 0$$
$$\left(\frac{a_{n-1}}{t}\right)' = 0.$$

To znamená, že $\frac{a_{n-1}}{t} \in \ker \mathbb{F}(t) \overset{(i)}{=} \ker \mathbb{F}$. Jelikož v tělese existují inverze, tak nutně $\frac{1}{t} = c \cdot (a_{n-1})^{-1}$, kde $c \in \ker \mathbb{F}$, a proto $t \in \mathbb{F}$. Což není pravda. Pokud $a_{n-1} = 0$, tak stejně postupujeme pro další koeficienty $(n-k)a_{n-k}u' - a'_{n-k}$. Buď jsme tedy narazili na spor, anebo jsou všechny koeficienty až na a_0 nulové (všechny být nemohou, neboť $t \neq 0 \in \mathbb{F}$). Potom máme rovnost $t^n = -a_0 \in \mathbb{F}$, což je výjimka uvedená ve větě. ■

Poznámka. *Speciálně jsou tedy funkce e^z a $\log z$ transcendentní nad tělesem $\mathbb{C}(z)$, což tak nějak očekáváme. Stejně tak jsou takové i exponenciály nebo logaritmy nekonstantních racionálních funkcí. Ale třeba e^{2z} je algebraický prvek nad $\mathbb{C}(z)(e^{3z})$.*

Vidíme tedy, že zavedená dvě rozšíření jsou téměř vždy opravdu transcendentní, čili skutečně dostaneme něco víc než pouhé algebraické rozšíření. Avšak v běžných kurzech algebry se příliš nepracuje s transcendentními rozšířeními, takže na to nemáme vlastně žádné nástroje. Proto je potřeba si si ještě ukázat jedno snadné tvrzení, které nám řekne něco o struktuře takového rozšíření.

Lemma 5 (Struktura transcendentního rozšíření)**.** Transcendentní rozšíření $\mathbb{F}(t)$ je isomorfní podílovému tělesu tělesa $\mathbb{F}[x]$.

Důkaz. Buď t transcendentní prvek nad tělesem $\mathbb{F}$. Potom je definován prvek $\frac{P(t)}{Q(t)}$ pro libovolné polynomy $P, Q \in \mathbb{F}[x]$. Uvažujme zlomky tvaru $\frac{P(x)}{Q(x)}, Q(x) \neq 0$.

Potom zobrazení $\frac{P(x)}{Q(x)} \mapsto \frac{P(t)}{Q(t)}$ je isomorfismus. Z transcendentnosti t se na nulu zobrazí pouze nulový prvek, tím máme prostotu, a triviálně je toto zobrazení i na. ■

Příklad. Pokud víme, že π je transcendentní nad $\mathbb{Q}$, tak prvky $\mathbb{Q}(\pi)$ je možné reprezentovat jako racionální funkce v proměnné π nad racionálními čísly. ▽

Příklad. Na podílovém tělese polynomů $\mathbb{Q}[x]$ získáme uvažováním standardní derivace $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ strukturu diferenciálního tělesa, označme toto těleso $\mathbb{Q}(x)$. Libovolné transcendentní rozšíření $\mathbb{Q}(t)$ je isomorfní tělesu $\mathbb{Q}(x)$. Takže konkrétně $\mathbb{Q}(\pi^2)$ je diferenciální těleso s derivací $'$, která splňuje $a' = 0, a \in \mathbb{Q}, (\pi^2)' = 1, ((\pi^2)^4)' = 4(\pi^2)^3 = 4\pi^6$ a ještě například $\left(\frac{\pi^4+2\pi^2}{\pi^2+1}\right)' = \frac{(2\pi^2+2)(\pi^2+1)-(\pi^4+2\pi^2)}{\pi^4+2\pi^2+1} = \frac{\pi^4+2\pi^2+2}{\pi^4+2\pi^2+1}$. Toto ilustruje, že můžeme získat i velmi nevšední diferenciální tělesa. ▽

1.4 Elementární integrovatelnost

Dosud jsme vůbec neřekli, co budeme rozumět pojmem „elementární funkce“. Intuitivně takový pojem chápeme v tomto smyslu: nějaká funkce je elementární, jestliže ji dokážeme „tak nějak“ reprezentovat pomocí konečně mnoha „algebraických“ operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování a „nealgebraických“ operací, kdy vezmeme logaritmus nebo exponenciálu s nějakými „hezkými“ funkcemi. Záleží tedy v podstatě na nás, jaké funkce budeme považovat za hezké. To nám říká následující definice.

Definice. Buď $\mathbb{F}$ diferenciální těleso. Řekneme, že diferenciální těleso $\mathbb{G}$ je elementárním rozšířením $\mathbb{F}$, jestliže existuje konstrukce

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_0 \leq \mathbb{F}_1 \leq \cdots \leq \mathbb{F}_n = \mathbb{G},$$

taková, že každé $\mathbb{F}_k$ je logaritmickým, exponenciálním nebo algebraickým rozšířením tělesa $\mathbb{F}_{k-1}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$.

Definujme $\mathcal{E}$ jako systém všech elementárních rozšíření tělesa $\mathbb{C}(z)$. Potom prvky diferenciálního tělesa $\mathcal{E}$ nazveme elementární funkcí.

Příklad. Z definice vidíme, že elementární funkcí jsou pro nás funkce s předpisy

$$e^{R(z)}, \qquad \log R(z), \qquad Q(z)e^{R(z)}, \qquad Q(z)\log R(z)$$

pro libovolné racionální funkce R, Q nad $\mathbb{C}$, tím pádem jsou elementární i všechny goniometrické a hyperbolické funkce. Jelikož jejich inverze je možné vyjádřit za pomoci logaritmů, tak i tyto jsou elementární. Toto je z logaritmického a exponenciálního rozšíření.

Jelikož připouštíme ještě algebraická rozšíření, jsou elementární i výrazy typu

$$\sqrt[n]{f}, f \in \mathcal{E}.$$

Protože jde o tělesa, je elementární funkcí i poněkud divočejší kombinace, např.

$$\log \sqrt[7]{\frac{e^{\frac{e^{z^2-7z+\frac{1}{2\log z}}}{\sqrt{z^4+\log\frac{1}{z}}}}}{\log(\sqrt[31]{z^9 - e^{-\sqrt{z}}}) + 1}}.$$

Můžeme tedy říci, že takováto definice dobře vystihuje to, co jsme chtěli vyjádřit. ▽

Z tohoto příkladu také plyne, proč jsme se soustředili právě na komplexní racionální funkce. Kdybychom se omezili na reálné, pak bychom pomocí exponenciály nezískali goniometrické a další funkce. V tuto chvíli můžeme říci, co budeme rozumět pojmem elementárně integrovatelné funkce.

Definice. Buď $\mathbb{F}$ diferenciální těleso. Řekneme, že funkce $f \in \mathbb{F}$ je (elementárně) integrovatelná, jestliže je $\int f$ elementární funkce, tj. primitivní funkce je elementární.

Triviálně tedy jsou integrovatelné polynomy, racionální funkce, lineární kombinace exponenciál, a tím pádem i goniometrické funkce a jejich inverze.

Poznámka. *Z vlastností integrálu přirozeně plyne, že mají-li dvě funkce z nějakého tělesa elementární primitivní funkci, tak ji má i jejich součet či rozdíl. Naproti tomu je jasné, že součet (rozdíl) funkcí, které nemají elementární primitivní funkci, může být elementární (třeba součet opačných prvků).*

Integrál se nechová příliš hezky vzhledem k násobení, takže se dá očekávat, že pro tuto operaci něco takového obecně neplatí. Budeme-li předpokládat, že $\frac{\sin z}{z}$ *nemá elementární primitivní funkci (jak časem ukážeme), tak můžeme pro ilustraci vzít funkce* $\sin z$ *a* $\frac{1}{z}$. *Platí totiž* $\int \sin z \in \mathcal{E}, \int \frac{1}{z} \in \mathcal{E}$, *ale jejich součin není prvkem* $\mathcal{E}$.

Nakonec je-li $F = \int f \in \mathcal{E}$, *tak potom* $F' = f$, *a jelikož* $\mathcal{E}$ *je diferenciální těleso, tak i* $F' \in \mathcal{E}$, *a tedy* $f \in \mathcal{E}$. *Tedy neelementární funkce nemůže mít elementární integrál.*

Následující fakt jsme už zmínili, protože je přirozeným důsledkem dosud zavedených pojmů, ale sám o sobě je podstatný, takže si zaslouží být formulován jako věta.

Věta 6 (Integrovatelnost racionálních funkcí)**.** Libovolná $f \in \mathbb{C}(z)$ je integrovatelná.

Důkaz. Plyne z předešlé diskuse a věty o rozkladu na parciální zlomky nad $\mathbb{C}$. ■

Tento fakt nám byl vlastně celou dobu nějakým způsobem znám, ale dosud jsme nedovedli korektně přiřadit význam pojmu „integrovatelnosti“.

1.5 Abstraktní algebra II

Na závěr ještě připomeneme dvě věci, které jsou obsahem základního kurzu algebry. První je netriviální problematika související s kořeny polynomů, a sice rozkladová tělesa.

Definice. Řekneme, že $\mathbb{G} \geq \mathbb{F}$ je rozkladové nadtěleso polynomu $p \in \mathbb{F}[x]$, jestliže je možné p rozložit na lineární činitele v tělese $\mathbb{G}[x]$. Navíc kdykoliv je $\mathbb{G} > \mathbb{H} \geq \mathbb{F}$, tak se p na takovéto činitele v $\mathbb{H}[x]$ nerozkládá. Jde tedy vlastně o nejmenší takové těleso.

Toto definovat můžeme vždy, ten netriviální výsledek je, že cosi takového existuje.

Tvrzení 7 (Existence rozkladového nadtělesa)**.** Buď $\mathbb{F}$ těleso a $p \in \mathbb{F}[x]$ stupně alespoň jedna. Potom

(i) existuje rozkladové nadtěleso polynomu p a

(ii) každá dvě rozkladová tělesa polynomu p jsou $\mathbb{F}$-isomorfní.

Kde isomorfismus je $\mathbb{F}$-isomorfní, jestliže jeho restrikce na nosnou množinu $\mathbb{F}$ je identita.

Důkaz. Viz třeba [Gri07], strana 192, Proposition 1.2. ■

Druhá věc souvisí s technickým obratem, který se užívá i během důkazu Základní věty algebry. Nejdříve uvedeme modelový příklad a potom tuto ideu zobecníme.

Příklad. Uvažujme monický polynom p nad tělesem $\mathbb{F}$ proměnné x a stupně 3. Předpokládejme dále, že kořeny tohoto polynomu jsou prvky x_1, x_2, x_3 z nějakého nadtělesa. Má tedy tvar

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}.$$

Z Vietových vztahů je známo (nebo se to přímo dopočte), že

$$a_0 = -x_1x_2x_3, a_1 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, a_2 = -(x_1 + x_2 + x_3).$$

Je tedy zjevné, že zatímco kořeny obecně nejsou prvky tělesa $\mathbb{F}$, tak tyto jejich kombinace se v něm nalézají. Tohoto faktu v obecnější formě využijeme v situaci, kdy právě bude třeba ukázat, že něco je prvkem samotného tělesa a ne až jeho rozšíření. $\triangledown$

Definice. Polynomem proměnných $x_1, \dots, x_n$ nad oborem integrity $\mathbf{R}$ rozumíme výraz

$$\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{N} a_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n},$$

jehož koeficienty $a_{k_1,\dots,k_n}$ jsou prvky $\mathbf{R}$ a $N \in \mathbb{N}$.

Polynom p nazveme symetrickým, jestliže pro každou permutaci π na množině $\{1, \dots, n\}$ platí, že

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Elementárními symetrickými polynomy rozumíme výrazy

$$s_1 = \sum_i x_i, s_2 = \sum_{i_1<i_2} x_{i_1}x_{i_2}, \dots, s_n = x_1 \cdots x_n.$$

Tvrzení 8 (O symetrických polynomech)**.** Buď $\mathbf{R}$ obor integrity. Pak platí:

(i) Polynomy v proměnných $x_1, \dots, x_n$ nad $\mathbf{R}$ tvoří obor integrity. Budeme ho značit $\mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$.

(ii) Buď $p \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ symetrický polynom, pak existuje právě jeden polynom $q \in \mathbf{R}[y_1, \dots, y_n]$ takový, že $p = q(s_1, \dots, s_n)$.

Buď $\mathbb{F}$ těleso, p monický polynom z $\mathbb{F}[x]$ stupně $n \geq 1$ a $u_1, \dots, u_n$ jeho kořeny (včetně násobnosti) v nějakém nadtělese. Pak pro každý symetrický polynom $q \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ platí $q(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{F}$.

Důkaz. Důkaz je možno nalézt v [FR97], strany 90–91, Theorem 6.4.2 a Lemma 6.4.3. ■

Máme-li tedy symetrický polynom v n proměnných a dosadíme do něj všech n kořenů nějakého polynomu nad $\mathbb{F}$, tak obdržíme prvek v $\mathbb{F}$.

V této kapitole jsme, kromě přípravy základních tvrzení algebry, která jsme o něco rozšířili, v prvé řadě řekli, co znamená, že funkce (ne)má elementární primitivní funkci (či integrál). Toho jsme dosáhli pomocí konstrukce využívající tři možné způsoby tělesového rozšíření, tj. logaritmické, exponenciální a klasické algebraické. Poté jsme se ještě více zabývali příkladem komplexních racionálních funkcí – ukázali jsme, že tvoří diferenciální těleso $\mathbb{C}(z)$ a navíc jsou integrovatelné. Tím je vyřešena nejjednodušší třída funkcí, kterými se chceme zabývat.

2. Liouville

V této kapitole budeme směřovat k důkazu fundamentální věty celé teorie elementární integrovatelnosti. Budeme vycházet v prvé řadě z článku [Ros72], podobně zpracováno ještě v [GCL92], kapitola 12.4. V předchozí části jsme, mimo jiné, integrovali racionální funkce. Víme, že primitivní funkce k $R \in \mathbb{C}(z)$ je elementární a je možné ji zapsat v kompaktním tvaru jako

$$\int R = v + \sum_{i=1}^{n} c_i \log u_i,$$

kde $v \in \mathbb{C}(z), c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}(z)$. Pokud $n = 0$, tak rozumíme, že suma je nulová. Tato primitivní funkce tedy leží v nějakém konečném rozšíření $\mathbb{C}(z)(u_1, \ldots, u_n)$. Některá z nich mohou být triviální (případně i všechna), ale vždy má takovýto tvar. Tento vztah také můžeme ekvivalentně vyjádřit rovností

$$R = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}.$$

Ukazuje se, že tento zápis je velice silný. Mějme diferenciální těleso $\mathbb{F}$ a nějaké drobné předpoklady, které zatím vynecháme, a funkci $f \in \mathbb{F}$. Pokud totiž má f elementární integrál, tak se ukazuje, že je možné ji rozložit do tvaru

$$f = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i},$$

kde analogicky jako dříve jsou $v, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}, c_1, \ldots, c_n \in \ker \mathbb{F}$.

2.1 Předehra

Než tento fakt dokážeme, je vhodné ukázat ještě jednu pomocnou větu zabývající se logaritmickými a exponenciálními rozšířeními. K jejímu důkazu a nakonec i k další diskusi bude vhodné zjednodušit značení.

Úmluva. *Mějme diferenciální těleso $\mathbb{F}$ a $\mathbb{F}(t)$ jeho rozšíření, které je logaritmické, exponenciální nebo algebraické, a $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in \mathbb{F}[t]$. Na takovýto polynom bude často potřeba aplikovat derivaci (z uvažovaného tělesa). Dostaneme tak výraz*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k' t^k + t' \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1},$$

který by se striktně vzato měl označit symbolem $(f(t))'$. Nicméně tento zápis by nás nutil k opakování velkého množství závorek, a posléze by se tak ledacos spíše zatemnilo. Budeme proto popsanou aplikaci derivace na polynom značit pouze symbolem $f'(t)$.

Je poněkud nešťastné, že se stejné značení často využívá v abstraktní algebře pro formální derivaci. Nicméně my ji nebudeme vůbec potřebovat, abychom o ni ale tímto přeznačením nepřišli, mohli bychom ji zapisovat například jako $Df(t)$ nebo $\dot{f}(t)$.

V našem kontextu je to vlastně i docela přirozené ve chvíli, když si představíme, že například výraz

$$\frac{1}{z^2} e^{8z} + \frac{z^3}{z-1} e^{2z} + 3 \in \mathbb{C}(z)(e^{2z})$$

chceme standardně zderivovat. Použijeme obvyklou derivaci složené funkce a jiná varianta by byla vlastně dost „neintuitivní“. Symbol $f'(t)$ tedy znamená použití derivace z tělesa na celý výraz $f(t)$ a ne derivace dle proměnné t, jak by se typicky mínilo.

Lemma 7 (Charakterizace logaritmického a exponenciálního rozšíření)**.** Buď $\mathbb{F}$ diferenciální těleso a $\mathbb{F}(t)$ jeho transcendentní diferenciální rozšíření takové, že $\ker \mathbb{F} = \ker \mathbb{F}(t)$. Pak platí

(a) Nechť $t' \in \mathbb{F}$ a $f(t) \in \mathbb{F}[t]$ má kladný stupeň. Potom $f'(t) \in \mathbb{F}[t]$

  (i) a $\deg f(t) = \deg f'(t)$, právě tehdy, když vedoucí koeficient $f(t)$ není konstanta

  (ii) a $\deg f(t) = \deg f'(t) + 1$, pokud je vedoucí koeficient $f(t)$ konstanta.

(b) Nechť $\frac{t'}{t} \in \mathbb{F}$.

  (i) Potom pro všechna $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ a $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ existuje nenulový prvek $h \in \mathbb{F}$ splňující $(at^n)' = ht^n$.

  (ii) Jestliže má navíc $f(t) \in \mathbb{F}[t]$ kladný stupeň, pak $\deg f(t) = \deg f'(t)$.

  (iii) Nakonec je $f'(t) = cf(t)$, pro $c \in \mathbb{F}$, právě tehdy, když je $f(t)$ monom.

Důkaz. Budeme především využívat faktu, že jestliže je $x' = 0, x \in \mathbb{F}$, tak potom je $x = c \in \ker \mathbb{F}$, tj. c je konstanta.

Dokazujme (a). Mějme $t' \in \mathbb{F}$ a $f(t) \in \mathbb{F}[t], \deg f > 0$. Pro $f(t)$ a $f'(t)$ obecně platí

$$\begin{aligned} f(t) &= a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \\ f'(t) &= a_n' t^n + a_n n t' t^{n-1} + a_{n-1}' t^{n-1} + a_{n-1}(n-1)t't^{n-2} + \cdots + a_1' t + a_1 t' + a_0' \\ &= (a_n')t^n + (a_n n t' + a_{n-1}')t^{n-1} + \cdots + (a_1 t' + a_0'). \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $f'(t) \in \mathbb{F}[t]$. Pokud je $a_n \notin \ker \mathbb{F}$, tak rovnost stupňů jistě platí. Naopak jestliže jsou stejné stupně, tak zjevně nesmí být a_n konstanta, a máme tedy (i).

Ať $a_n \in \ker \mathbb{F}$. Podívejme se, jestli se může vynulovat člen u t^{n-1}. Jestliže $a_n n t' + a_{n-1}' = 0$, tak nutně je $a_n n t + a_{n-1} = c \in \ker \mathbb{F}$. To však znamená, že jsme nalezli algebraickou rovnici, jejímž řešením je t. To je ale spor, jelikož t je transcendentní nad $\mathbb{F}$. Proto pokud je a_n konstantní, tak je $\deg f(t) = \deg f'(t) + 1$ a část (ii) je dokázána, a tím pádem celý bod (a).

Dokazujme (b). Buď tedy $\frac{t'}{t} \in \mathbb{F}$, a nenulový prvek z $\mathbb{F}$ a $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Pak máme

$$(at^n)' = a't^n + ant't^{n-1} = a't^n + an\frac{t'}{t}t^n = \left(a' + an\frac{t'}{t}\right)t^n.$$

Kdyby $a' + an\frac{t'}{t} = 0$, potom by existovala konstanta $c \in \ker \mathbb{F}$ taková, že $at^n = c$, a podobně jako výše bychom měli algebraickou rovnici pro t, takže je $a' + an\frac{t'}{t} \neq 0$. Jinými slovy existuje nenulový prvek h z $\mathbb{F}$, který splňuje rovnost $(at^n)' = ht^n$, a máme tak (i).

To znamená, že derivování zachovává stupeň polynomu, takže ihned dostáváme rovnost stupňů z části (ii). Za okamžik to ale přece jen využijeme, takže rozepíšeme

$$f'(t) = \left(a_n' + a_n n\frac{t'}{t}\right)t^n + \left(a_{n-1}' + a_{n-1}(n-1)\frac{t'}{t}\right)t^{n-1} + \cdots + (a_0').$$

Je-li $f(t) = at^n$ (tedy monom), tak dle předchozího je $f'(t) = ht^n$, a proto

$$f'(t) = cf(t)\ ,\ c := \frac{h}{a} \in \mathbb{F}.$$

Naopak pokud je $f'(t) = cf(t), c \in \mathbb{F}$ a f není monom, tak (viz rozepsané $f(t), f'(t)$) pro různé nenulové a_p, a_q, kde $p, q = 1, \ldots, n$, musí být

$$\frac{a_p p\frac{t'}{t} + a_p'}{a_p} = c = \frac{a_q q\frac{t'}{t} + a_q'}{a_q}\ ,$$

což je ekvivalentní s rovností

$$\frac{a_p'}{a_p} + p\frac{t'}{t} = \frac{a_q'}{a_q} + q\frac{t'}{t} \ .$$

S použitím tohoto vztahu dostáváme, že

$$\left(\frac{a_p t^p}{a_q t^q}\right)' = \frac{1}{a_q^2 t^{2q}} \left(\frac{a_p'}{a_p} + p\frac{t'}{t} - \left(\frac{a_q'}{a_q} + q\frac{t'}{t}\right)\right) = 0,$$

takže opět získáme polynom, jehož řešením je transcendentní prvek t. Jelikož to nelze, zbývá jediná možnost, a to, že $f(t)$ má jediný nenulový člen, a tedy je to monom. Tím je dokázán i bod (b). ■

Nyní budou následovat dvě věty řešící dvě speciální situace, které nastanou v důkazu Liouvilleovy věty, k níž v této kapitole směřujeme. Samy o sobě moc neřeknou, ale snad vyjasní celkový postup.

Lemma 8 (Algebraický případ)**.** Buď $\mathbb{F}$ diferenciální těleso charakteristiky 0 a $\mathbb{F}(t)$ je jeho algebraické rozšíření zachovávající konstanty. Mějme $n \in \mathbb{N}_0$, $c_1, \ldots, c_n \in \ker \mathbb{F}$ a $v, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}(t)$ takové, že pro $w \in \mathbb{F}$ platí vztah

$$w = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \ .$$

Potom $v, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}$.

Důkaz. Nechť je prvek t algebraický nad $\mathbb{F}$. Jelikož prvky $v, u_1, \ldots, u_n$ jsou prvky algebraického rozšíření $\mathbb{F}(t)$, tak každý z nich je určen hodnotou nějakého polynomu, takže existují nenulové polynomy nad $\mathbb{F}[t]$ takové, že $u_i = U_i(t), i = 1, \ldots, n, v = V(t)$. Díky Tvrzení 7 existuje těleso obsahující všechny (třeba $m \in \mathbb{N}$) kořeny minimálního polynomu, který určuje prvek t (a tedy t je jeho kořenem). Řekněme, že to jsou prvky $\tau_1 := t, \tau_2, \ldots, \tau_m$ (jsou tedy konjugované), potom $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ je algebraické rozšíření $\mathbb{F}$, a díky Větě 3 máme jím jednoznačně určené diferenciální těleso.

V minulé kapitole jsme avizovali, že symetrické polynomy mohou být užitečné k prokázání toho, že nějaká kombinace je prvek tělesa. K tomu tedy budeme směřovat.

Existuje isomorfismus z $\mathbb{E}$ na $\mathbb{E}$ (tj. automorfismus), který zachovává $\mathbb{F}$ a zobrazuje $\tau_1 = t$ na $\tau_j, j \in \{1, \ldots, m\}$. Jinými slovy se jedná o permutace kořenů. Označme tato zobrazení σ_j. Jelikož $w \in \mathbb{F}$, tak máme $w = \sigma_j(w)$. Koeficienty polynomů $V, U_1, \ldots, U_n$ jsou rovněž prvky $\mathbb{F}$, takže uvažovaný vztah můžeme rozepsat

$$w = \sigma_j \left(V'(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{U_i'(t)}{U_i(t)}\right) = V'(\tau_j) + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{U_i'(\tau_j)}{U_i(\tau_j)} \ .$$

Sečteme všechna tato vyjádření pro w přes j, a jelikož jsme v tělese charakteristiky 0, tak můžeme vydělit celkovým počtem všech těchto vyjádření (což je m). Takto dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} w = w &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(V'(\tau_j) + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{U_i'(\tau_j)}{U_i(\tau_j)}\right) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} V'(\tau_j) + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{U_i'(\tau_j)}{U_i(\tau_j)} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} V'(\tau_j) + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} \frac{U_i'(\tau_j)}{U_i(\tau_j)} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{V'(\tau_j)}{m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{m} \cdot \frac{(U_i(\tau_1)\cdots U_i(\tau_m))'}{U_i(\tau_1)\cdots U_i(\tau_m)} \ .
\end{aligned}$$

Poslední rovnost jsme získali pro $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}[t]$ ze vztahu

$$\frac{a_1'}{a_1} + \dots + \frac{a_m'}{a_m} = \frac{a_1'(a_2 \cdots a_m) + \dots + a_m'(a_1 \cdots a_{m-1})}{a_1 \cdots a_m} = \frac{(a_1 \cdots a_m)'}{a_1 \cdots a_m} \ .$$

Avšak výrazy

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} V'(\tau_j) \ , \ \frac{1}{m} \cdot \frac{(U_i(\tau_1) \cdots U_i(\tau_m))'}{U_i(\tau_1) \cdots U_i(\tau_m)}, i = 1, \dots, n$$

jsou jistě symetrické vůči proměnným $\tau_1, \dots, \tau_m$. Dle Tvrzení 8 musí být hodnoty těchto výrazů už v tělese $\mathbb{F}$. Stačí tedy položit

$$v := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} V(\tau_j) \ , \ u_i := \prod_{j=1}^{m} U_i(\tau_j), i = 1, \dots, n,$$

a dostáváme tak tvrzení věty. ■

Lemma 9 (Transcendentní případ)**.** Uvažujme diferenciální těleso $\mathbb{F}$ charakteristiky 0 a $\mathbb{F}(t)$ jeho logaritmické nebo exponenciální rozšíření, které zachovává konstanty a je transcendentní. Buď $n \in \mathbb{N}_0$, $c_1, \dots, c_n \in \ker \mathbb{F}$ a $v, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{F}(t)$ takové, že pro $w \in \mathbb{F}$ platí vztah

$$w = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \ .$$

Potom $v, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{F}$.

Důkaz. Nechť je prvek t transcendentní nad $\mathbb{F}$ a máme $v, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{F}(t)$. Všechny prvky takového rozšíření jsou dle Lemmatu 5 ve tvaru

$$\left\{ \frac{p(t)}{q(t)}; 0 \neq q(t), p(t) \in \mathbb{F}[t] \right\}.$$

Jelikož jsme v tělese, tak z Tvrzení 3 lze každý prvek u_i zapsat jednoznačně ve tvaru

$$b \cdot a_1^{k_1}(t) \cdots a_l^{k_l}(t),$$

kde $b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, pro všechna $j = 1, \dots, n$ jsou $a_j(t) \in \mathbb{F}[t]$ (což je Gaussovský obor) monické a ireducibilní prvky a $k_j \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Stejně jako už dříve dostáváme vztah

$$\begin{aligned} \frac{(b \cdot a_1^{k_1}(t) \cdots a_l^{k_l}(t))'}{b \cdot a_1^{k_1}(t) \cdots a_l^{k_l}(t)} &= \frac{b'}{b} + \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j a_j'(t) \cdot [a_1^{k_1}(t) \cdots a_j^{k_j - 1}(t) \cdots a_l^{k_l}(t)]}{a_1^{k_1}(t) \cdots a_j^{k_j}(t) \cdots a_l^{k_l}(t)} \\ &= \frac{b'}{b} + k_1 \frac{a_1'(t)}{a_1(t)} + \dots + k_m \frac{a_m'(t)}{a_m(t)} \ . \end{aligned}$$

Takže si můžeme usnadnit práci, když budeme předpokládat, že všechna u_i jsou buď prvky samotného $\mathbb{F}$, nebo monické a ireducibilní prvky z $\mathbb{F}[t]$ (kdyby nebyly, tak přidáme další členy právě na základě uvedeného rozkladu). Navíc zjevně můžeme uvažovat, že jsou všechna po dvou různá (jinak sečteme koeficienty u těch stejných). Na tento obrat se budeme odvolávat ještě v příští kapitole.

Pro prvek $v \in \mathbb{F}(t)$ použijeme něco jiného (nevyskytuje se totiž takový podíl). Avšak opět můžeme zkonstruovat rozklad (značení jako výše)

$$v = b \cdot a_1^{k_1}(t) \cdots a_l^{k_l}(t).$$

Jelikož jsme v tělese, tak dle Tvrzení 6 dostáváme rozklad

$$v = (\text{prvek } \mathbb{F}[t]) + \text{prvky tvaru } \frac{g(t)}{f^r(t)} \ ,$$

kde $r \in \mathbb{N}, f(t) \in \mathbb{F}[t]$ je monický, ireducibilní a nenulový $g(t) \in \mathbb{F}[t]$ takový, že $\deg g(t) < \deg f(t)$. Nyní se podíváme na dva podpřípady, které vyřešíme separátně.

Logaritmické rozšíření. Uvažujme, že $\mathbb{F}(t)$ je logaritmické rozšíření. To znamená, že existuje nějaký prvek $a \in \mathbb{F}$ takový, že $t' = \frac{a'}{a} \in \mathbb{F}$.

Použijeme Lemma 7 část (a), takže pro monický, ireducibilní $f(t) \in \mathbb{F}[t]$ dostáváme $\deg f(t) = \deg f'(t) + 1$ a $f'(t) \in \mathbb{F}$. Jelikož je $f(t)$ ireducibilní, tak musí být nesoudělný s polynomem $f'(t)$ (neboť jediní dělitelé f jsou 1 a f, ale stupně f, f' jsou různé). Protože už víme, že zlomky v rozkladu v jsou ve tvaru $\frac{g(t)}{f^r(t)}$, podíváme se nyní na jejich derivaci (v rovnosti v tvrzení je totiž v'). Platí

$$\left(\frac{g(t)}{f^r(t)}\right)' = \frac{g'(t)f^r(t) - rg(t)f'(t)f^{r-1}(t)}{f^{2r}(t)} = \frac{g'(t)}{f^r(t)} - r\frac{g(t)f'(t)}{f^{r+1}(t)} \ .$$

Víme, že je $\deg f(t) = \deg f'(t) + 1$, a tedy $\deg g(t) < \deg f(t) = \deg f'(t) + 1$. Takže stupeň $f'(t)$ i $g(t)$ je menší než stupeň $f(t)$, a jelikož ten je ireducibilní, tak nedělí ani $g(t)$, ani $f'(t)$.

To znamená, že v parciálním rozkladu v' je člen, který má ve jmenovateli $f^{r+1}(t)$. Takže ho ve svém zápise má i w. Ale z předpokladů věty je $w \in \mathbb{F}$, a tedy se musí tento zlomek odečíst s nějakým členem z $\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}$. To ale nelze, protože tato suma by měla $f(t)$ ve jmenovateli nejvýše v první mocnině. Jelikož v' nemůže obsahovat zlomky, tak mu zbyla pouze polynomiální část, tj. $v =: V(t) \in \mathbb{F}[t]$. Toto f tedy také nemůže být obsaženo ani v žádném u_i, protože by se muselo s něčím odečíst, ale už není s čím. Tedy všechna u_i jsou nutně prvky z $\mathbb{F}$.

Zatím tedy máme, že

$$w = V'(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}$$

pro $w, c_i, u_i, u_i' \in \mathbb{F}, i = 1, \ldots, n$. Takže nutně $V'(t) \in \mathbb{F}$. Jelikož V je polynom, tak nutně

$$V(t) = bt + c, b, c \in \mathbb{F}.$$

Jelikož však $V'(t) \in \mathbb{F}$, tak jistě $\deg V'(t) = 0$, a tedy $b \in \ker \mathbb{F}$. Potom je

$$V'(t) = (bt)' + c' = b \cdot \frac{a'}{a} + c', a, c \in \mathbb{F}, b \in \ker \mathbb{F}.$$

Celkově jsme získali

$$w = \underbrace{b \cdot \frac{a'}{a} + c'}_{\in \mathbb{F}} + \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\frac{u_i'}{u_i}}_{\in \mathbb{F}} \ ,$$

což je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

Exponenciální rozšíření. Uvažujme, že $\mathbb{F}(t)$ je exponenciální rozšíření. To znamená, že existuje nějaký prvek $a \in \mathbb{F}$ takový, že $a' = \frac{t'}{t} \in \mathbb{F}$.

Nyní použijeme Lemma 7 část (b) a pro monický, ireducibilní $f(t) \in \mathbb{F}[t]$ dostáváme $\deg f(t) = \deg f'(t)$ a ještě $f'(t) = cf(t) \iff f(t)$ je monom (tedy $f(t) = t$, jelikož f je monický a ireducibilní).

Pokud tedy $f(t) \neq t$, pak $f(t)$ není násobkem $f'(t)$. Pak ovšem můžeme rozepsat $\frac{f'(t)}{f(t)}$ jako polynom plus zlomek (z nesoudělnosti nenulový) s f ve jmenovateli a stejně jako v předchozí části s logaritmickým rozšířením vyplývá, že situace $f(t) \neq t$ nemůže nastat, neboť bychom opět dostali člen se jmenovatelem ve tvaru $f^{r+1}(t)$. Takže $f(t) = t$.

Víme tedy, že v je polynom v t plus potenciálně členy se jmenovatelem coby mocninou t, takže můžeme psát

$$v =: V(t) = \sum_{i \in M} k_i t^i, k_i \in \mathbb{F},$$

kde M je konečná podmnožina $\mathbb{Z}$. Připomeňme, že $u_i, i = 1, \ldots, n$, byly buď prvky pouze v $\mathbb{F}$, nebo to byly zlomky s prvky z $\mathbb{F}[t]$ v čitateli i jmenovateli. Protože vyšší mocniny identity by se ve členu $\frac{u_i'}{u_i}$ zredukovaly na případ $u_i = t$ pro nějaké i a jelikož jsou všechna u_i různá, tak bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $u_1 = t$. Ostatní u_i jsou opět jako dříve pouze z $\mathbb{F}$ (tento případ se tedy liší tím, že V není čistě polynom, a proto připouští další možnost na u_i). Celkově dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} = c_1 \frac{t'}{t} + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} = \underbrace{c_1 a'}_{\in \mathbb{F}} + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}}_{\in \mathbb{F}} .$$

Podobně jako v předchozím případě jsme dospěli k vyjádření

$$w = V'(t) + c_1 a' + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} ,$$

a opět je $V'(t) \in \mathbb{F}$. Ale v lemmatu, které jsme použili, také je, že $(at^n)' = ht^n$ pro nějaký prvek $h \in \mathbb{F}$. Tedy aby $V'(t) \in \mathbb{F}$, tak nezbytně musí být $V(t) = bt^0 = b \in \mathbb{F}$. Tentokrát jsme došli k

$$w = V'(t) + c_1 a' + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} = b' + c_1 a' + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} = (b + c_1 a)' + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} ,$$

což je opět hledaný tvar. ■

Poznámka. *Analogii právě použitého postupu ohledně tvaru u_i a v uvidíme ještě v příští kapitole. Rozdíl bude v tom, že na levé straně zkoumané rovnosti nebude prvek z $\mathbb{F}$, ale velmi speciální prvek z $\mathbb{F}(t)$.*

2.2 Hlavní věta

Nyní už máme všechny potřebné ingredience k rychlému důkazu Liouvilleovy věty.

Věta 10 (Liouville)**.** Nechť je $\mathbb{F}$ diferenciální těleso charakteristiky 0, $w \in \mathbb{F}$ a $\mathbb{G}$ je elementární rozšíření $\mathbb{F}$ se stejným jádrem. Jestliže je y řešením rovnice $y' = w$ v $\mathbb{G}$, pak existují $c_1, \ldots, c_n \in \ker \mathbb{F}$ a $v, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}$ splňující

$$w = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} .$$

Důkaz. Předpokládejme, že řešením rovnice $y' = w$, kde $w \in \mathbb{F}$, je funkce $y = \int w$, která je elementární nad $\mathbb{F}$. To podle definice znamená, že existuje posloupnost

$$\mathbb{F} \leq \mathbb{F}(t_1) \leq \cdots \leq \mathbb{F}(t_1, \ldots, t_N) = \mathbb{G},$$

kde N je nejmenší přípustné číslo z množiny $\mathbb{N}_0$, přičemž jestliže $N = 0$, tak rozumíme, že řešení y je prvkem samotného $\mathbb{F}$, a každé $t_i, i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ je algebraické, exponenciální nebo logaritmické nad $\mathbb{F}(t_1, \ldots t_{i-1})$. Nabízí se postupovat indukcí dle N, tj. délky posloupnosti rozšíření.

Případ $N = 0$ je snadný. Máme $y, w \in \mathbb{F}$ a platí $y' = w$. Když položíme $n := 0$ a $v := y$, tak dostáváme přesně tvrzení věty. Předpokládejme dále, že tvrzení platí pro pevné $N - 1 \in \mathbb{N}$.

Víme, že konstanty $\mathbb{F}$ i $\mathbb{G}$ jsou stejné, takže musí být stejné i v celé posloupnosti $\mathbb{F} \leq \mathbb{F}(t_1) \leq \cdots \leq \mathbb{F}(t_1, \ldots, t_N)$ (víme, že mezi jádry jsou inkluze $\subset$ a na krajích je, dle předpokladu, rovnost). Jelikož $w \in \mathbb{F}$, je samozřejmě i $w \in \mathbb{F}(t_1)$. Nyní dle indukčního předpokladu použitého na posloupnost rozšíření

$$\mathbb{F}(t_1) \leq \cdots \leq \mathbb{F}(t_1, \ldots, t_N) = \mathbb{G}$$

víme, že existuje $n \in \mathbb{N}_0$ a k němu (konstanty) $c_1, \ldots, c_n \in \ker \mathbb{F}$ a (funkce) $v, u_1, \ldots, u_n$ z tělesa $\mathbb{F}(t_1)$ takové, že

$$w = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \ .$$

Naším cílem bude ukázat, že $v, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}$.

Dále postupujme rozborem možných druhů rozšíření t. Je-li algebraické, tak tvrzení platí dle Lemmatu 8. Zbývá transcendentní rozšíření, a to platí z Lemmatu 9 (proto nám nevadilo v něm navíc předpokládat transcendentnost), a věta je tedy dokázána. ∎

Poznámka. *Názornější přeformulování rovnosti, o které byla v tvrzení řeč, je*

$$\int w = v + \sum_{i=1}^{n} c_i \log u_i,$$

pro $w, v, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}$. *Takže jsme zjistili, že pokud má funkce* w *z nějakého tělesa elementární integrál, pak ten je nutně ve tvaru součtu funkce a lineární kombinace logaritmů funkcí, kde tyto jsou nad týmž tělesem. Což jsme viděli i v „triviálním“ případě integrálu racionální funkce.*

Tato věta nám nicméně nedává žádný zjevný způsob, jak najít elementární primitivní funkci, pokud existuje. Pokud ale neexistuje, můžeme zkusit předpokládat, že je možné ji zapsat v uvedeném tvaru, a následně doufat v nalezení sporu. Tomu se budeme věnovat v následující kapitole.

3. Charakterizační věty

Nejraději bychom nalezli nějaké reálně ověřitelné kritérium integrovatelnosti zadané funkce. V takto obecné rovině se asi obtížně dostaneme k něčemu konkrétnímu. Integrál, který by nás přirozeně mohl velmi zajímat, je třeba

$$\int e^{-z^2} \mathrm{d}z,$$

vyskytující se napříč statistikou, a tak nějak neoficiálně tušíme, že nepůjde vyřešit (tj. najít elementární primitivní funkci). Potom si člověk dovede představit asi i řadu podobných příkladů s všelijakými drobně modifikovanými exponenty a takové asi budou mnohdy též neřešitelné. Naproti tomu příklady jako

$$\int f(z)e^{f'(z)}\mathrm{d}z,\ f \text{ cokoli} \quad \text{nebo} \quad \int P(z)e^z \mathrm{d}z,\ P \text{ polynom}$$

jsou triviálně integrovatelné. Ve světle takovýchto předběžných úvah a toho, že už dávno máme vyřešenu problematiku racionálních funkcí, zkusíme obecně vyřešit rovnou integrandy tvaru

$$R(z)e^{Q(z)} \quad \text{a} \quad R(z)\log Q(z),$$

kde R, Q jsou racionální funkce, a to ne jen komplexní, ale ještě obecnější. Dále pomocí úprav integrálu vyřešíme poměrně obecně i případy, které jsou na tyto převoditelné, například složeniny jako $e^{e^{e^z}}$. V této kapitole budeme vycházet z už zmíněného [Chu06] a z článku [MZ94].

3.1 Exponenciální integrály

V této části si nejprve ukážeme větu říkající, za jakých okolností mají funkce ve tvaru $R(z)e^{Q(z)}$ elementární primitivní funkci. Potom vyřešíme řadu konkrétních příkladů ilustrujících její použití.

Věta 11 (Charakterizace integrovatelnosti exponenciálních integrálů)**.** Mějme $\mathbb{F}$ diferenciální těleso charakteristiky 0 a $\mathbb{F}(t)$ je jeho exponenciální rozšíření, pomocí prvku $t = e^Q, Q \in \mathbb{F}$ (tj. platí $t' = t \cdot Q'$), zachovávající konstanty. Předpokládejme navíc, že t je nad $\mathbb{F}$ transcendentní. Je-li $R \in \mathbb{F}$ libovolný prvek, tak potom je

$$\int Re^Q$$

elementární právě tehdy, když diferenciální rovnice

$$R = y' + Q'y$$

má řešení $y \in \mathbb{F}$.

Poznámka. *Při prvním čtení je vhodné uvažovat pouze $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)$. Dle poznámky před Větou 4 se v tomto případě konstanty zachovávají a dle Věty 4 víme, že podmínka na transcendentnost prvku t je splněna právě tehdy, když Q není konstantní funkce.*

Důkaz. Je-li R nulový prvek, tak tvrzení triviálně platí, neboť integrál je elementární a triviální řešení je řešením uvažované diferenciální rovnice.

Víme, že $\mathbb{F}(t)$ je exponenciální rozšíření a konstanty $\mathbb{F}, \mathbb{F}(t)$ jsou stejné. Nejdříve dokážeme implikaci zleva doprava. Předpokládejme tedy, že $\int tR$ je elementární. To znamená, že tento prvek leží v nějakém elementárním rozšíření $\mathbb{G}$ tělesa $\mathbb{F}(t)$. Podle Liouvilleovy věty (Věta 10) dostáváme, že pro nějaké přirozené n existují jakési prvky $v, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}(t)$ a $c_1, \ldots, c_n \in \ker \mathbb{F}$ taková, že platí

$$Re^Q = tR = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \ .$$

Stejně jako v důkaze Lemmatu 9 bez újmy na obecnosti předpokládejme, že u_i, která nejsou prvky tělesa $\mathbb{F}$, jsou vyjádřena jakožto monické, ireducibilní a po dvou různé prvky z $\mathbb{F}[t]$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

Z téhož důkazu také víme, že v můžeme nad $\mathbb{F}[t]$ rozložit na parciální zlomky (tj. může mít i polynomiální část). Uvažujme tedy, že tento rozklad obsahuje nějaký (nenulový) prvek tvaru $\frac{a}{b^r}$, kde $a, b \in \mathbb{F}[t]$ jsou (nesoudělné) takové, že $\deg a < \deg b$ (což je princip parciálních zlomků), b ireducibilní, monický a $r \in \mathbb{N}$.

Ve vyjádření integrandu tR, který zkoumáme, je člen v'. Zajímá nás proto výraz

$$\left(\frac{a}{b^r}\right)' = \frac{a'b^r - rab^{r-1}b'}{b^{2r}} = \frac{a'}{b^r} - r\frac{ab'}{b^{r+1}} \ .$$

Z rovnosti

$$tR = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}$$

je jasné, že na pravé straně musí zbýt pouze nějaký násobek t. Jelikož předpokládáme, že všechny jmenovatele v sumě jsou ireducibilní, a vidíme, že se vyskytují pouze v první mocnině, tak musí nastat buď $r = 1$ (vyšší mocnina se ve jmenovateli nevyskytne), nebo $\left(\frac{a}{b^r}\right)' = 0$.

Předpokládejme nejdříve, že $r = 1$, pak pracujeme s výrazem

$$\left(\frac{a}{b^r}\right)' = \frac{a'}{b} - \frac{ab'}{b^2} \ .$$

Nutně se musí ve druhém zlomku snížit exponent jmenovatele, jinak by se totiž celý člen neměl s čím sečíst na nulu (protože suma neobsahuje ve jmenovateli vyšší než první mocninu). Proto ab' je možno vydělit b. Předpokládali jsme ale, že b je ireducibilní, takže nastává $b|a$ nebo $b|b'$.

Ale víme, že $\deg a < \deg b$, takže zbývá pouze druhá možnost, neboť b je ireducibilní. Podle Lemmatu 7 část (b) ale platí, že $\deg b = \deg b'$, a tedy $b' = cb, c \in \mathbb{F}$. Dle téhož lemmatu zjišťujeme, že b je monom. Dohromady je b monický, ireducibilní monom, tj. $b = t$.

V tuto chvíli se podívejme na druhou situaci, tedy má platit $\left(\frac{a}{b^r}\right)' = 0$, což znamená, že $a'b^r - rab^{r-1}b' = 0$. Čili platí rovnost

$$a'b = rab'.$$

Opět tedy $b|rab'$ a stejně jako výše je nutně $b = t$.

Zjistili jsme tedy, že jediné možné jmenovatele parciálního rozkladu v jsou mocniny t. Takže pro konečnou $M \subset \mathbb{Z}$ můžeme kompaktně psát, že

$$v = \sum_{j \in M} a_j t^j, a_j \in \mathbb{F}, j \in M.$$

Zbývá vyšetřit sumu, máme

$$tR - v' = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \ .$$

Víme, že pro $i = 1, \dots, n$ je u_i buď prvek z $\mathbb{F}$, nebo jde o ireducibilní a monický prvek z $\mathbb{F}[t]$. Jelikož tR je lineární polynom v $\mathbb{F}[t]$, je z tvaru v' jasné, že jediným zlomkem (tj. $u_i \notin \mathbb{F}$) na pravé straně může být pouze $\frac{t'}{t}$ (a protože u_i jsou navzájem různá, neopakuje se). Jelikož jde ale o exponenciální rozšíření, víme, že $\frac{t'}{t} \in \mathbb{F}$. Neboť ostatní u_i jsou prvky z $\mathbb{F}$, tak to dohromady znamená, že $U := \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \in \mathbb{F}$.

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} tR &= \left(\sum_{j \in M} a_j t^j \right)' + U = \sum_{j \in M} a_j' t^j + \sum_{j \in M} j a_j t^{j-1} t' + U \\ &= \sum_{j \in M} \left(a_j' + j a_j \frac{t'}{t} \right) t^j + U = \sum_{j \in M} \left(a_j' + j a_j Q'(z) \right) t^j + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}}_{\in \mathbb{F}} . \end{aligned}$$

Nyní už jen porovnáme koeficienty polynomů na pravé a levé straně. Speciálně pro koeficient u t^1 máme rovnost

$$R = a_1' + a_1 Q' .$$

Jelikož $a_1 \in \mathbb{F}$, tak položením $y := a_1$ dostáváme hledaný vztah. Takže pokud je uvažovaný integrál elementární, pak platí rovnost

$$R = y' + Q'y, y \in \mathbb{F}.$$

Zbývá ukázat druhou implikaci.

Ať je nyní $R = y' + yQ', y \in \mathbb{F}$. Až na konstantu dostáváme

$$\int Re^Q = \int (y' + yQ')e^Q = ye^Q,$$

což je elementární funkce a důkaz je kompletní. ∎

Tato věta nám nebude nic platná v případě, kdybychom chtěli ukázat, že nějaký integrál je integrovatelný. Protože, jak je zřejmé z důkazu, bylo by potřeba najít řešení diferenciální rovnice, které vede právě na neznámý integrál. Je to vidět třeba na triviálním případě (o kterém je známo, že je řešitelný)

$$\int P(z) e^z \mathrm{d}z,$$

potom bychom měli rovnici

$$P(z) = y'(z) + y(z),$$

jejíž řešení pro metodu integračního faktoru vyžaduje právě hledaný integrál. Jinak ji můžeme využít při „opačném“ postupu. Pro ilustraci položme $Q = e^{z^2+1}, y = \log z$, můžeme dopočítat, že $R = \frac{1}{z} + 2ze^{z^2+1} \log z$, a tedy

$$\int \left(\frac{1}{z} + 2ze^{z^2+1} \log z \right) e^{e^{z^2+1}} \mathrm{d}z$$

je elementární. Toto ale není příliš užitečná metoda.

Nicméně tato věta je efektivním nástrojem k dokázání neřešitelnosti. A nyní už jsme konečně připraveni se podívat na několik příkladů exponenciálního typu. Zatím v nich budeme pracovat s $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)$.

Příklad. Ukažte, že není elementární Gaussův integrál

$$\int e^{-z^2} \mathrm{d}z.$$

Řešení. Z poznámky za Větou 11 víme, že e^{-z^2} je transcendentní nad tělesem $\mathbb{C}(z)$. Na základě právě dokázané věty nyní víme, že e^{-z^2} má elementární primitivní funkci právě tehdy, když má diferenciální rovnice

$$1 = y'(z) - 2zy(z)$$

racionální řešení.

Pro spor tedy uvažujme, že takové řešení $y(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \in \mathbb{C}(z)$ existuje. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že polynomy p a q jsou nesoudělné, jinak bychom zlomek totiž upravili na základní tvar. Dosazením do rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} 1 &= y'(z) - 2zy(z) \\ 1 &= \frac{p'q - pq'}{q^2} - 2z\frac{p}{q} \\ q^2 &= p'q - pq' - 2zpq \\ -p(z)q'(z) &= q(z)(q(z) - p'(z) + 2zp(z)). \end{aligned}$$

Zjevně $y = 0$ není řešením, tedy $p \neq 0$. Víme, že p, q jsou nesoudělné polynomy, takže pokud má q kořen, řekněme v bodě z_0 násobnosti $m \in \mathbb{N}$, tak $p(z_0) \neq 0$. Potom má ale RHS ve svém rozkladu člen $(z - z_0)^m$, a tedy tentýž člen musí být i v rozkladu LHS. To ale není možné, jelikož q' má tento kořen pouze s násobností $m - 1$. Takže q nemá kořen, tedy jde o konstantní polynom $q(z) = c \in \mathbb{C}$. Navíc $c \neq 0$, aby měl zlomek smysl. Po vydělení tedy dostáváme rovnici ve tvaru

$$0 = c - p'(z) + 2zp(z).$$

Zbývá pouze porovnat stupně polynomů. Zjevně je stupeň levé strany roven -1, ale

$$\deg(c - p'(z) + 2zp(z)) = 1 + \deg p(z) \neq -1.$$

Protože se neshodují stupně levé a pravé strany, došli jsme ke sporu, a proto řešením rovnice není racionální funkce, a tedy k zadané funkci neexistuje elementární primitivní funkce. $\triangledown$

Příklad. Exponenciální integrál $\int \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z$ není elementární.

Řešení. Analogickým způsobem jako dříve zkoumáme řešení rovnice

$$\frac{1}{z} = y'(z) + y(z).$$

Opět budeme předpokládat, že existuje racionální řešení, a při stejném značení dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} q^2 &= zp'q - zpq' + zpq \\ -zpq' &= q(z)(q(z) - zp'(z) - zp(z)). \end{aligned}$$

Když budeme opět předpokládat, že q má kořen z_0 násobnosti $m \in \mathbb{N}$, tak aby znovu souhlasily kořeny levé a pravé strany, ihned zjistíme, že musí být $q(z) = az^m, a \in \mathbb{C}$. Dosadíme do rovnice a máme ($m \geq 1$)

$$\begin{aligned} -maz^m p(z) &= az^m(az^m - zp'(z) - zp(z)) \\ mp(z) &= -az^m + zp'(z) + zp(z) \\ mp(z) &= z(az^{m-1} + p'(z) + p(z)). \end{aligned}$$

To znamená, že nula je kořenem polynomu p, to ale nelze, jelikož 0 je kořenem q a tyto jsou nesoudělné. Tedy $\int \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z$ není elementární. $\triangledown$

V těchto dvou příkladech jsme použili přímo předchozí větu. Pomocí posledního příkladu ale můžeme pomocí metody per partes vyvodit, že

$$\int \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z = \frac{e^z}{z} + \int \frac{e^z}{z^2} \mathrm{d}z.$$

Jelikož nutně $\int \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z - \frac{e^z}{z} \notin \mathcal{E}$, tak není $\int \frac{e^z}{z^2} \mathrm{d}z$ elementárním integrálem. Induktivně vyplývá, že integrály $\int \frac{e^z}{z^n} \mathrm{d}z, n \in \mathbb{N}$ nejsou elementární.

Stejnou metodou dostaneme derivováním funkce $\log z$ následující:

$$\int e^z \log z \mathrm{d}z = e^z \log z - \int \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z \notin \mathcal{E}.$$

Zatím jsme vždy přímo použili tvrzení věty a došli jsme ke sporu s racionalitou řešení. Další spektrum integrálů pochopitelně můžeme rozřešit pomocí substitucí.

Příklad. Logaritmický integrál $\int \frac{1}{\log z} \mathrm{d}z$ není elementární.

Řešení. Použitím substituce $\log z = y$, a tedy $\mathrm{d}z = e^y \mathrm{d}y$ máme

$$\int \frac{1}{\log z} \mathrm{d}z = \int \frac{e^y}{y} \mathrm{d}y,$$

který není elementární dle předchozího příkladu. $\triangledown$

Pomocí substituce $e^z = e^{e^u}$ vyplývá, z druhého příkladu, že

$$\int \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z = \int \frac{e^u e^{e^u}}{e^u} \mathrm{d}u = \int e^{e^u} \mathrm{d}u$$

není elementární funkce.

Jelikož $e^z \log z$ nemá elementární integrál, tak analogickou substitucí $z = \log u$ dostáváme

$$\int e^z \log z \mathrm{d}z = \int u \log(\log u) \cdot \frac{1}{u} \mathrm{d}u = \int \log(\log u) \mathrm{d}u,$$

a tedy ani složenina $\log \log z$ nemá elementární primitivní funkci.

Indukcí vyplývá, že funkce ve tvarech

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^z}}}}} \quad \text{a} \quad \log(\log(\ldots \log(z)))$$

nemají elementární primitivní funkci.

V následujícím příkladě ukážeme neintegrovatelnost funkcí $\frac{\sin z}{z}$ a $\frac{\cos z}{z}$. Dosáhneme toho modifikací důkazu předchozí věty.

Příklad. Sinový integrál $\int \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z$ ani cosinový integrál $\int \frac{\cos z}{z} \mathrm{d}z$ nejsou elementární.

Řešení. Zde postupujme stejně jako v důkaze implikace zleva doprava z Věty 11, pro $\mathbb{G} = \mathbb{C}(z)$. Máme opět exponenciální rozšíření, neboť $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, tj. $t = e^{iz}$ (v rozšířeném tělese tedy bude i prvek $t^{-1} = e^{-iz}$). Pro naše integrály tedy zkoumáme

$$\int \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z = \int \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz} \mathrm{d}z = \frac{1}{2i} \int \frac{t^2 - 1}{tz} \mathrm{d}z,$$
$$\int \frac{\cos z}{z} \mathrm{d}z = \int \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2z} \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 1}{tz} \mathrm{d}z.$$

Čili v obecné rovině nás může rovnou zajímat integrál tvaru

$$\int R(z)\left(t+\frac{\sigma}{t}\right)\mathrm{d}z, \sigma \in \{\pm 1\}.$$

Stejně jako ve zmíněné větě vyplývá, že všechna u_i musí být v $\mathbb{C}(z)$ až na jedno jediné, které je rovno t, a tedy $\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \in \mathbb{C}(z)$. A také $v = \sum_{j\in M} a_j t^j$, kde M je konečná podmnožina celých čísel.

Porovnáme koeficienty v rovnosti

$$R(z)\left(t+\frac{\sigma}{t}\right) = \left(\sum_{j\in M} a_j t^j\right)' + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}}_{\in \mathbb{F}}.$$

Opět musí platit analogická podmínka (zde vlastně máme $Q = iz$, a tedy $Q' = i$)

$$R(z) = a_1' + ia_1.$$

Stejně jako v příkladu s $\frac{e^z}{z}$ vyplývá, že tato diferenciální rovnice nemá racionální řešení, a tedy integrály $\int \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z, \int \frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$ nejsou elementární. $\triangledown$

Jelikož nyní víme, že $\int \frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$ není elementární, tak použitím známých sčítacích vztahů $\cos^2 z = \frac{1+\cos 2z}{2}, \sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}$ vyplývá neelementarita integrálů (jelikož $\int \frac{1}{z}$ elementární je)

$$\int \frac{\cos^2 z}{z}\mathrm{d}z \quad \text{a} \quad \int \frac{\sin^2 z}{z}\mathrm{d}z$$

a triviální substitucí i neelementárnost primitivních funkcí k $\frac{\sinh z}{z}, \frac{\cosh z}{z}$.

Podívejme se ještě na příklad, kde nejsme v přímém rozšíření pouze tělesa $\mathbb{C}(z)$. Takové příklady jsme sice přísně vzato měli ($\int e^{e^z}$), ale výsledek vyplynul substitucí z jednoduššího případu.

Příklad. Funkce $(e^z + z^2)e^{e^{2z+1}}$ nemá elementární primitivní funkci.

Řešení. Budeme postupovat stejně jako v příkladě s e^{-z^2}. Tentokrát máme hodnoty $R(z) = e^z + z^2, Q(z) = e^{2z+1}$, které vystupují v charakterizační větě, v tělese $\mathbb{C}(z)(e^z)$ a $t = e^{e^{2z+1}}$. Mějme tedy dva nesoudělné polynomy nad $\mathbb{C}(z)(e^z)$ označené p, q a q je navíc nenulový. A předpokládejme, že funkce $y(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ řeší rovnici

$$e^z + z^2 = y'(z) + 2e^{2z+1}y(z).$$

Jako dříve dosadíme, vynásobíme a dáme k sobě členy obsahující q, dostáváme tak rovnost

$$-p(z)q'(z) = q(z)[q(z)(e^z + z^2) - p'(z) - 2p(z)e^{2z+1}].$$

Z nesoudělnosti opět máme, že $q = c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (rovnice nemá nulové řešení, tj. $p \neq 0$). Stupeň levé strany je -1, zatímco stupeň pravé strany je $2 + \deg p > -1$. Zkoumaná rovnice tedy nemá řešení v příslušném oboru a integrál tedy není elementární. $\triangledown$

Příklad. Rozhodněte, pro jaké hodnoty parametrů $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ je integrál

$$\int z^n e^{\frac{a}{m} z^m}\mathrm{d}z$$

elementární pro nenulové $a \in \mathbb{C}$.

Řešení. Případ $m = 1, n \in \mathbb{N}_0$ je triviálně řešitelný a pro záporná n jsme už dokázali, že to je neelementární integrál. Omezme se tedy na $m > 1$.

Jako dříve zkoumáme existenci racionálního řešení rovnice

$$q^2 z^n = p'q - pq' + az^{m-1}pq.$$

Už klasickým způsobem ji přepíšeme do tvaru

$$q(z)[q(z)z^n - p'(z) - az^{m-1}p(z)] = -p(z)q'(z)$$

a z nesoudělnosti je opět q konstantní polynom. Bez újmy na obecnosti uvažujme, že $q(z) = 1$ (jinak zlomek $\frac{p}{q}$ přenásobíme). Je tedy potřeba zanalyzovat, kdy nastává rovnost

$$z^n = az^{m-1}p(z) + p'(z).$$

Jelikož p je polynom a $m - 1 > 0$, tak případ s $n < 0$ není elementární, neboť rovnost nemůže být splněna. Zjevně musí být $\deg p = n - m + 1$, potom totiž na pravé straně dostaneme součet polynomu stupně n a polynomu nižšího stupně. Zároveň nutně je $n \geq m - 1$, v opačném případě by totiž na pravé straně byl polynom vyššího stupně (tj. ty vyšší koeficienty by byly nenulové, neboť $a \neq 0$). Tím pádem

$$m \in \mathbb{N}, n < m - 1 \implies \text{není elementární.}$$

Případ $n = m - 1$ je naproti tomu triviálně integrovatelný substitucí $z^m = u$ (polynom je konstantní).

Pokračujme dále pro $m - 1 < n \leq 2m - 2$. Ukážeme, že polynom p má všechny koeficienty nulové, to bude znamenat neelementárnost. Zkoumanou rovnost přepíšeme

$$\begin{aligned} z^n = az^{m-1}[A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_{n-m}z^{n-m} + A_{n-m+1}z^{n-m+1}]+ \\ + [A_1 + 2A_2 z + \cdots + (n-m)A_{n-m}z^{n-m-1} + (n-m+1)A_{n-m+1}z^{n-m}]. \end{aligned}$$

Nyní budeme porovnávat koeficienty. Nutně je vždy $A_1 = 0$ a $A_{n-m+1} = \frac{1}{a}$. Stupně polynomů p pro n z uvedené množiny jsou postupně $1, 2, \ldots, m - 1$.

Je-li $n = m$, tak $A_1 = 0$ a zároveň $A_1 = \frac{1}{a}$, což nelze.

Je-li $n = m + 1$ a $m > 2$, tak $A_1 = 0, A_2 = \frac{1}{a}$. Zároveň však $2A_2 = 0$, což nelze. Atd. až do $n = 2m - 2$ (tj. do stupně $m - 1$). Všechno to plyne z toho, že členy první závorky jsou v exponentu posunuté a začínají $()z^{m-1}$, ale druhý začíná absolutním členem, takže tyto příslušné členy musí být samy nulové, neboť není jiný koeficient, se kterým by se mohly odečíst.

Tedy pro $m > 2$ je $A_1 = \cdots = A_{m-1} = 0$ (to, že jsme nic neřekli o A_0, není chyba). To znamená, že všechny tyto případy spadají mezi neintegrovatelné, neboť vedoucí člen je nulový, a tedy neodpovídá stupeň.

Mějme nyní $n = 2m - 1$ pro $m \geq 2$ (hraniční případ $m = 2$ z minulého kroku se přelévá sem). Opět vycházejí $A_1 = \cdots = A_{m-1} = 0$. Avšak nyní spolu s podmínkou $A_m = \frac{1}{a}$ máme ještě druhou $mA_m + aA_0 = 0$. V tomto případě jsme tedy nedošli ke sporu, neboť jsme získali podmínku s A_0, která není nulová. Toto tedy je integrovatelné.

Je-li $n = 2m$, tak $(m + 1)A_{m+1} + aA_1 = 0$, a tedy opět spor s tím, že $A_{m+1} = \frac{1}{a}$.

Stejně jako v případě $m < n \leq 2m - 2$ zjistíme, že situace $2m < n \leq 3m - 2$ odpovídá pro $m > 2$ neintegrovatelným funkcím, zatímco $n = 3m - 1$ je integrovatelné pro $m \geq 2$. Analogicky vyplývají všechny další případy.

Celkově to znamená, že pouze pro $n = km - 1, k \in \mathbb{N}$ jsou integrály

$$\int z^n e^{\frac{a}{m}z^m} \mathrm{d}z$$

elementární. Tato situace je však opět snadno řešitelná pomocí substituce $z^m = u$. Zjistili jsme tedy, že v těchto případech je elementárním integrálem pouze ten, který umíme triviálně vyřešit. $\bigtriangledown$

Tímto příkladem jsme rozlouskli celou řadu dalších integrálů a opět je možné zkoušet rozličné další substituce a získávat další a další příklady neelementárních integrálů.

3.2 Logaritmické integrály

V této části dokážeme obdobnou větu pro integrály ve tvarech $\int R(z) \log Q(z) \mathrm{d}z$. Tedy rovnou přistupme k větě, která tentokrát bude méně obecná než v předchozí části.

Věta 12 (Charakterizace integrovatelnosti logaritmických integrálů)**.** Nechť R, Q jsou nenulové funkce z $\mathbb{C}(z)$ a Q je navíc nekonstantní, pak

$$\int R(z) \log Q(z) \mathrm{d}z$$

je elementární právě tehdy, když

$$R(z) = c\frac{Q'(z)}{Q(z)} + T'(z)$$

pro nějaké $c \in \mathbb{C}$ a $T \in \mathbb{C}(z)$. Navíc pokud je tento elementární, tak platí

$$\int R(z) \log Q(z) \mathrm{d}z = \frac{c}{2} \log^2 Q(z) + T(z) \log Q(z) + S(z) + \sum_{j=1}^{N} k_j \log(a_j z + b_j),$$

kde $k_j, a_j, b_j \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, N$, $N \in \mathbb{N}_0$ a $S \in \mathbb{C}(z)$.

Důkaz. Nejprve dokážeme těžší implikaci zleva doprava.

Označme $\mathbb{F} := \mathbb{C}(z)$ a $t := \log Q(z)$, a tedy $\mathbb{F}(t)$ je dle definice logaritmické rozšíření, neboť Q není konstantní. Podle Liouvilleovy věty (Věta 10) dostáváme, že je-li daný integrál elementární, tak integrand je nutně ve tvaru

$$R(z) \log Q(z) = tR(z) = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \ ,$$

kde $n \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{C}, v, u_i \in \mathbb{F}(t), i = 1, \ldots, n$.

Naprosto stejně (rozdíl totiž bude až při použití Lemmatu 7) jako v důkaze z předchozího oddílu dojdeme k tomu, že v rozkladu na parciální zlomky v vystupuje člen $\frac{a}{b^r}$, pro který platí buď $r = 1$, nebo $a'b = rab'$.

Pokud $r = 1$, tak opět je

$$\left(\frac{a}{b^r}\right)' = \frac{a'}{b} - \frac{ab'}{b^2}$$

a opět musí $b|b'$. V tuto chvíli použijeme zmíněné lemma část (a). Jelikož je vedoucí koeficient b konstanta, tak dle (ii) dostáváme, že $\deg b = \deg b' + 1$. Spolu s ireducibilitou b plyne, že nemůže platit $b|b'$.

Pokud nastane $a'b = rab'$, tak opět musí $b|rab'$, ale r je pouze číslo, a je nesoudělné s b a $b|b'$ nemůže nastat, jak plyne z předchozího odstavce. To dohromady znamená, že v neobsahuje žádné zlomky, a tedy existuje $m \in \mathbb{N}_0$ takové, že

$$v = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j, a_j \in \mathbb{F}, j = 0, \ldots, m.$$

Zaměřme se na sumu

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} = tR(z) - v' \ .$$

Předpokládali jsme, že každé u_i je buď prvkem $\mathbb{F}$, nebo jde o monický, ireducibilní polynom nad $\mathbb{F}$ (a všechny jsou po dvou různé). Jelikož na pravé straně rovnosti vystupuje polynom v t, tak nutně musí být všechna $u_i \in \mathbb{F}$, potom i $U := \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \in \mathbb{F}$.

Opět chceme porovnat koeficienty polynomů na pravé a levé straně, pišme

$$\begin{aligned} tR(z) = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} &= \left(\sum_{j=0}^{m} a_j t^j \right)' + U = \sum_{j=0}^{m} a_j' t^j + \sum_{j=1}^{m} j a_j t^{j-1} t' + U \\ &= a_m' t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j' t^j + \sum_{j=1}^{m} j a_j t^{j-1} t' + U \\ &= a_m' t^m + \sum_{j=1}^{m} \left(j a_j t' + a_{j-1}' \right) t^{j-1} + U. \end{aligned}$$

Postupným dosazováním za j a porovnáním koeficientů (pozor na dva členy mimo sumu) dostáváme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= U + a_1 t' + a_0' \\ R(z) &= 2a_2 t' + a_1' \\ 0 &= 3a_3 t' + a_2' \\ \vdots &\quad \vdots \\ 0 &= m a_m t' + a_{m-1}' \\ 0 &= a_m'. \end{aligned}$$

Podstatné je, že o všech koeficientech a_j víme, že jsou to prvky z $\mathbb{F}$, takže jsme nalezli soustavu, která musí mít řešení v $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)$, aby byl daný integrál elementární (zatímco v předchozí větě jsme takto řešili pouze jedinou rovnici).

Budeme postupovat od poslední rovnice. Dle ní je a_m konstanta C_m. Uvažujme, že $C_m \neq 0$, potom z rovnosti $0 = m a_m t' + a_{m-1}'$ dostáváme

$$a_{m-1} = -C_m m \int t' = -C_m m \log Q(z) + C_{m-1}, C_{m-1} \in \mathbb{C} \ .$$

Tím jsme ale nalezli $a_{m-1} \in \mathbb{F}(t) \setminus \mathbb{F}$ (jelikož Q je nekonstantní), což nelze (musí jít o racionální funkci). Jediná možnost tedy je, že

$$a_m = C_m = 0.$$

Naprosto stejným postupem dojdeme až k tomu, že

$$a_m = \cdots = a_3 = 0.$$

To ze třetí rovnice implikuje $a_2 = c \in \mathbb{C}$. Zbývají nám tedy rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= U + a_1 t' + a_0' \\ R(z) &= 2ct' + a_1'. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice plyne rovnost

$$a_1 = \int \left(R(z) - 2ct' \right) \mathrm{d}z \in \mathbb{C}(z).$$

Integrand $R(z) - 2ct'$ tedy musí být taková funkce, jejíž primitivní funkce je racionální.

Víme, že $t' = \frac{Q'(z)}{Q(z)} \in \mathbb{C}(z)$. Vidíme, že například $R(z) = 0$ řešením není, jelikož $t \notin \mathbb{F}$. Naproti tomu $R(z) = 2c\frac{Q'(z)}{Q(z)}$ je řešením triviálně, protože jinak bychom integrovali nulu. Takže rovnice

$$R(z) = 2ct' + a_1'$$

bude mít racionální řešení, když

$$R(z) = 2c\frac{Q'(z)}{Q(z)} + \text{funkce z } \mathbb{C}(z), \text{ jejíž integrál je racionální.}$$

Formálněji: Rovnice má racionální řešení, jestliže existuje funkce $T \in \mathbb{C}(z)$ (víme, že $T' \in \mathbb{C}(z)$) taková, že

$$R(z) = 2c\frac{Q'(z)}{Q(z)} + T'(z).$$

Vyplynulo tedy, že jestliže je daný integrál elementární, tak R musí být v žádaném tvaru, to znamená, že je tato implikace hotova. K dokázání ekvivalence nám zbývá ověřit snazší implikaci zprava doleva. Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned}\int R(z)\log Q(z)\mathrm{d}z &= \int \left(c\frac{Q'(z)}{Q(z)} + T'(z)\right)\log Q(z)\mathrm{d}z\\ &= c\int \frac{Q'(z)}{Q(z)}\log Q(z)\mathrm{d}z + \int T'(z)\log Q(z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Oba integrály umíme snadno vyřešit, neboť máme

$$\begin{aligned}c\int \frac{Q'(z)}{Q(z)}\log Q(z)\mathrm{d}z \quad \begin{vmatrix} y = \log Q(z) \\ \mathrm{d}y = \frac{Q'(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z \end{vmatrix} &= c\int y\mathrm{d}y\\ &= \frac{c}{2}y^2 + K = \frac{c}{2}\log^2 Q(z) + K, K \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int T'(z)\log Q(z)\mathrm{d}z \quad &\begin{vmatrix} u = \log Q(z) & u' = \frac{Q'(z)}{Q(z)} \\ v' = T'(z) & v = T(z) \end{vmatrix}\\ &= T(z)\log Q(z) - \int \underbrace{T(z)\frac{Q'(z)}{Q(z)}}_{\text{racionální funkce}}\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

což je elementární funkce, jelikož racionální funkce nad $\mathbb{C}$ integrovat umíme. Tím je dokázána ekvivalence v tvrzení.

Zbývá ukázat dodatek, který říkal, jak taková elementární funkce, pokud existuje, vypadá. V tuto chvíli již víme, v jakém tvaru musí být racionální funkce R. Na základě výpočtu výše plyne (zahrnutím konstanty K do neurčitého integrálu)

$$\begin{aligned}\int R(z)\log Q(z)\mathrm{d}z &= \frac{c}{2}\log^2 Q(z) + T(z)\log Q(z) - \int T(z)\frac{Q'(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z\\ &= \frac{c}{2}\log^2 Q(z) + T(z)\log Q(z) + S(z) + \sum_{j=1}^{N} k_j \log(a_j z + b_j),\end{aligned}$$

kde $S \in \mathbb{C}(z), a_j, b_j, k_j \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, N$ a N je nějaké vhodné číslo z $\mathbb{N}_0$. Toto plyne pouze použitím rozkladu na parciální zlomky nad $\mathbb{C}$.

Alternativně je možné dopočítat nalezenou soustavu rovnic a nakonec určit u_i právě jako jisté lineární polynomy ze jmenovatelů z rozkladu na parciální zlomky. ■

Poznámka. *Při dokazování implikace zprava doleva jsme použili argumentu, že racionální funkce jsou integrovatelné. Tato část tedy způsobuje, že jsme větu uvedli pouze pro funkce z $\mathbb{C}(z)$ a ne z nějakého obecnějšího tělesa jako ve větě z předchozí části, neboť racionální funkce nad jiným tělesem nejsou obecně integrovatelné.*

Pro logaritmické rozšíření jsme získali větu, která nám dává mnohem více než v exponenciálním případě. Tam jsme museli zkoumat, zda má diferenciální rovnice jistý typ řešení. Tady nám v principu stačí rozložit racionální funkce na parciální zlomky (byť to je obecně obtížná úloha). Pak už víme, zda elementární řešení existuje, či nikoliv. Pokud takové řešení existuje, tak nám věta dává, ale i jeho tvar, který jsme schopni algoritmicky nalézt. Tento postup ilustrujeme na následujících příkladech.

Příklad. Jestliže existuje, tak nalezněte elementární primitivní funkci k $\log \frac{3z+5}{z(z+5)}$.

Řešení. Označme $Q(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z+5}$, a tedy $Q'(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{(z+5)^2}$, jelikož $R = 1$, tak chceme ověřit, zda existuje $T \in \mathbb{C}(z) : 1 = T'(z) + c\frac{Q'(z)}{Q(z)}$, kde c je nějaká vhodná konstanta. Jelikož $\frac{Q'(z)}{Q(z)} = -\frac{1}{z} + \frac{3}{3z+5} - \frac{1}{z+5}$, tak by platilo

$$T(z) = z + c\log z + c\log(z+5) - c\log(3z+5),$$

položením $c = 0$ získáváme racionální funkci $T(z) = z$ (a případně ještě aditivní konstanta). Tedy elementární primitivní funkce existuje.

Nyní spočtěme neznámý integrál z $T(z)\frac{Q'(z)}{Q(z)}$, dostáváme

$$\begin{aligned}\int z\frac{Q'(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z &= \int \left(\frac{3z}{3z+5} - \frac{z}{z+5} - 1\right)\mathrm{d}z\\ &= \int \left(1 - \frac{5}{3z+5} - 1 + \frac{5}{z+5} - 1\right)\mathrm{d}z\\ &= -z + 5\log(z+5) - \frac{5}{3}\log(3z+5).\end{aligned}$$

Tím pádem až na konstantu získáváme výsledek, a sice

$$\begin{aligned}\int \log\frac{3z+5}{z(z+5)}\mathrm{d}z &= z\log\frac{3z+5}{z(z+5)} - \int z\frac{Q'(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z\\ &= z\log\frac{3z+5}{z(z+5)} + z - 5\log(z+5) + \frac{5}{3}\log\left(3z+5\right).\end{aligned}$$

Derivováním se snadno ověří, že toto je primitivní funkce. $\triangledown$

Příklad. Označme $Q(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1+2i)z - 1 = (z+1)(z-i)2$ a $R(z) = \frac{Q'(z)}{Q(z)} + \frac{6}{(z+2)^2}$. Jestliže existuje, tak nalezněte elementární primitivní funkci k $R(z)\log Q(z)$.

Řešení. Elementární primitivní funkci zřejmě má, neboť R je už zapsána v žádaném tvaru, neboť $T(z) = -\frac{6}{z+2}$ a $c = 1$. Spočítáme opět potřebný integrál, konkrétně

$$\begin{aligned}\int \frac{6}{z+2}\cdot\frac{Q'(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z &= \int \left(\frac{6}{z+1} - \frac{\frac{54}{5} - \frac{12}{5}i}{z+2} + \frac{\frac{24}{5} - \frac{12}{5}i}{z-i}\right)\mathrm{d}z\\ &= 6\log(z+1) - \left(\frac{54}{5} - \frac{12}{5}i\right)\log(z+2) + \left(\frac{24}{5} - \frac{12}{5}i\right)\log(z-i).\end{aligned}$$

Tím pádem pro hledaný integrál platí

$$\begin{aligned}\int R(z)\log Q(z)\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\log^2 Q(z) - \frac{6}{z+2}\log Q(z) + \int \frac{6}{z+2}\cdot\frac{Q'(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2}\log^2 Q(z) - \frac{6}{z+2}\log Q(z) + 6\log(z+1)+\\ &\quad + \left(\frac{24}{5} - \frac{12}{5}i\right)\log(z-i) - \left(\frac{54}{5} - \frac{12}{5}i\right)\log(z+2).\end{aligned}$$

Poznamenejme, že jiný tvar získáme vyjádřením $\log(z-i)$ pomocí arctan a log. $\triangledown$

Příklad. Rozhodněte o integrovatelnosti funkce $\left(\frac{a}{z} + \frac{b}{(z-z_0)^n}\right)\log z$ v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{C}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Řešení. Zde je $Q(z) = z, Q'(z) = 1$, a tudíž nás zajímá rovnost

$$\frac{a}{z} + \frac{b}{(z-z_0)^n} = \frac{c}{z} + T'(z),$$

kde $T \in \mathbb{C}(z)$ a c je konstanta, kterou hledáme. Odtud je již vidět, že je-li $b = 0$, tak je integrál elementární vždy, volme totiž $c = a$ a $T \in \mathbb{C}$. V této situaci dostaneme

$$\int \frac{a}{z}\log z\mathrm{d}z = \frac{a}{2}\log^2 z + k, k \in \mathbb{C}.$$

Jestliže $b \neq 0$ a $n = 1$, tak je

$$\int \left(\frac{a}{z} + \frac{b}{z-z_0}\right)\log z\mathrm{d}z$$

neelementární pro všechny parametry. Pokud $b \neq 0, n > 1$, je integrál elementární, jelikož volíme $c = a$, a obdržíme tak rovnost

$$\int \left(\frac{a}{z} + \frac{b}{(z-z_0)^n}\right)\log z\mathrm{d}z = \frac{a}{2}\log^2 z - \frac{b\log z}{(n-1)(z-z_0)^{n-1}} + \frac{b}{n-1}\int \frac{1}{z(z-z_0)^{n-1}}\mathrm{d}z,$$

kde poslední integrál je obyčejný integrál z racionální funkce, a tedy elementární. $\triangledown$

3.3 Integrál inverzní funkce

V tomto krátkém oddíle zmíníme ještě poslední drobnou aplikaci, kterou už nebudeme hlouběji rozebírat. Využijeme pozorování týkající se hledání neurčitého integrálu funkce, umíme-li integrovat její inverzní funkci. Poznamenejme, že v tělesech, se kterými jsme dosud pracovali, není zaručena existence inverzní funkce ve smyslu skládání.

Máme-li $U, V \subset \mathbb{C}$ otevřené množiny, jejichž doplňky v $\overline{\mathbb{C}}$ jsou souvislé množiny (pro Cauchyovu větu), a bijektivní, holomorfní funkci $f : U \to V$, jejíž inverzní funkce f^{-1} je rovněž holomorfní, tak naprosto triviálně mají obě dvě primitivní funkci (řekněme po řadě F a G) a navíc snadno pomocí komplexního derivování splňují vztah

$$G(z) = zf^{-1}(z) - F(f^{-1}(z)) + c, z \in V, c \in \mathbb{C}.$$

Je-li f^{-1} elementární funkce, je z tohoto vztahu ihned vidět, že její primitivní funkce je elementární funkce právě tehdy, když je primitivní funkce k f elementární.

Příklad. Rozhodněte, zda je $\int f$ elementární, je-li $f(z) = y$ řešením rovnice $z = y^{11}e^{y^8}$.

Řešení. Vezmeme-li funkci $f^{-1}(y) = y^{11}e^{y^8}$, tak ta je holomorfní dokonce na $\mathbb{C}$ a podle známé věty z komplexní analýzy jsme schopni k ní lokálně nalézt inverzní holomorfní funkci f (řešící zadanou implicitní rovnici) na nějakém okolí, kde je f prostá. Navíc je f^{-1} elementární a už víme, že integrál $\int y^{11}e^{y^8}\mathrm{d}y$ není elementární, neboť platí $11 \neq 8k-1, k \in \mathbb{N}$ dle jednoho z příkladů. To podle řečené ekvivalence znamená, že funkce f nemá elementární integrál. $\triangledown$

Závěr

Na počátku naší cesty jsme formalizovali dosud pouze intuitivně chápaný koncept elementárních funkcí a zavedli jsme dvě speciální rozšíření, o nichž jsme dokázali jistá fakta o jejich (ne)transcendentnosti (tj. i transcendenci exponenciály) a zachovávání konstant. Potom jsme do detailu dokázali základní větu, která nám dala nutnou podmínku pro to, aby byl integrál elementární funkcí.

To nás dovedlo k její aplikaci na dva základní typy integrandů. Jeden obsahoval exponenciálu a druhý logaritmus z racionální funkce, kde ve druhém případě jsme došli dokonce k silnějšímu výsledku (a jiným způsobem) než v [MZ94]. Posléze jsme obě věty aplikovali na řadu funkcí, o kterých jsme tušili, že nebudou mít elementární primitivní funkci, případně jsme v některých případech klasifikovali, kdy daná funkce (ne)má elementární integrál. V podstatě jsme viděli, že ty integrály, které lze nalézt ve tvaru elementárních funkcí, tvoří opravdu jenom malou část všech.

Naskýtá se otázka, zda jsme vyřešili všechno, co nás v této problematice mohlo zajímat. Je tu samozřejmě zjevná možnost využívat nejrůznější transformace neelementárních integrálů, a dostávat tak další a další integrály, které nebudou elementární. Další věc je, že jsme se důsledně vyhnuli algebraickým rozšířením. Ukazuje se totiž na první pohled zarážející věc, a to ta, že naše dvě nová rozšíření (která bývají transcendentní) jsou snadněji řešitelná než klasická algebraická rozšíření. Na druhý pohled to už tak překvapivé není, neboť už z početní praxe je nám dobře známo, že integrály zahrnující odmocniny bývají nepříjemné.

Problematika integrování algebraických funkcí se nicméně řešit dá, je však potřeba teorie navíc, která v podstatě pokrývá ten problém, že tyto funkce nejsou tak docela jednoznačné. Proto se zde široce pracuje s pojmem Riemannových ploch. Potom můžeme postupovat třeba jako [Rit48] na stranách 35–39 a použitím v podstatě zobecněných mocninných řad dojít k neřešitelnosti eliptických integrálů 1. a 2. druhu a k charakterizaci (ne)řešitelnosti integrálů

$$\int z^p (a + bz^r)^q \mathrm{d}z.$$

Jiný přístup spočívá ve využití komplexních diferenciálních forem. Jak je naznačeno na straně 8 v [Con16], ohledně zmíněných eliptických integrálů bychom v případě jejich elementárnosti došli k jisté rovnosti meromorfních a holomorfních forem a diferenciálů. Avšak z teorie vyplyne, že tato rovnost nemůže nastat, neboť na levé straně by bylo reziduum funkcí nulové a na pravé nikoli. Otázka eliptických integrálů 3. druhu je však už opět výrazně komplikovanější, a tak snadno se zřejmě shrnout nedá.

Asi posledním problémem, jímž bychom se mohli zabývat, je ten, který námi dosud řešený problém přirozeně zobecňuje, tedy (ne)existence elementárního řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Jeden takový příklad (Riccatiho rovnice) je řešen v již zmíněném [Rit48] na stranách 69–76.

Seznam použité literatury

[Chu06] R. C. Churchill. Liouville's theorem on integration in terms of elementary functions. Department of Mathematics, Hunter College and the Graduate Center, September 2006. Kolchin Seminar on Differential Algebra.

[Con16] B. Conrad. Impossibillity theorems for elementary integration. Department of Mathematics, University of Michigan, 2016. Viz odkaz `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/elemint.pdf` aktivní k 1. 4. 2018.

[FR97] B. Fine and G. Rosenberger. *The Fundamental Theorem of Algebra.* Second Edition. Springer-Verlag, New York, 1997.

[GCL92] K. O. Geddes, S. R. Czapor, and G. Labahn. *Algorithms for Computer Algebra.* Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 1992.

[Gri07] P. A. Grillet. *A Book of Abstract Algebra.* Second Edition. Springer-Verlag, New York, 2007.

[Jar84] V. Jarník. *Integrální počet I.* 6. vydání. Academia, Praha, 1984.

[MZ94] E. A. Marchisotto and G. Zakeri. An invitation to integration in finite terms. *The College Mathemtics Journal*, 25(4):295–308, 1994.

[Pin10] Ch. C. Pinter. *A Book of Abstract Algebra.* Second Edition. Dover Publications, Mineola, New York, 2010.

[Rit48] J. F. Ritt. *Integration in Finite Terms: Liouville's Theory of Elementary Methods.* First Edition. Columbia Univ. Press, New York, 1948.

[Ros72] M. Rosenlicht. Integration in finite terms. *The American Mathematical Monthly*, 79(9):963–972, 1972.