Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Markéta Peterková

Modelování rizikové prémie pro úvěrové produkty finančních a kapitálových trhů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Gabriel Marosi
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Děkuji na tomto místě Mgr. Gabrielu Marosimu za volbu zajímavého tématu, cenné připomínky, ochotu ke konzultacím a pomoc při řešení problémů souvisejících s tvorbou této práce, jakožto i za poskytnutí potřebné literatury.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 10.4.2007

Markéta Peterková

Markéta Peterková

Obsah

Název práce: Modelování rizikové prémie pro úvěrové produkty finančních a kapitálových trhů
Autor: Markéta Peterková
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Gabriel Marosi
E-mail vedoucího: gmarosi@csas.cz

Abstrakt: Tato práce se zabývá měřením (modelováním) velikosti úvěrového rizika portfolia úvěrů a možnostmi jeho zajištění. V první části jsou popsány základní druhy a vlastnosti úvěrových derivátů. V další části je představen nástroj na měření úvěrového rizika portfolia, model CreditMetrics. Následující část je věnována oceňovacímu modelu pro swap úvěrového selhání (CDS). V poslední části jsou modely aplikovány na vzorek historického úvěrového portfolia České spořitelny, a.s. Části portfolia se na základě různých scénářů zajišťují pomocí CDS. Nakonec je z hlediska výnosnosti a rizikovosti porovnáván vliv jednotlivých strategií na velikost úvěrového rizika.
Klíčová slova: úvěrový derivát, swap úvěrového selhání, CreditMetrics

Title: Modeling of the risk premie for the credit products of financial and capital markets
Author: Markéta Peterková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Gabriel Marosi
Supervisor's e-mail address: gmarosi@csas.cz

Abstract: This work aims to deal with the measurement (modelling) of the portfolio credit risk and risk protection possibilities. The first section introduces the basic credit derivative types and characteristics. The next section presents a device for portfolio credit risk measurement, the CreditMetrics model. This is followed by a section concerned with the model for valuation of the credit default swap (CDS). In the last section, the models obtained are applied to a sample of historical credit portfolio of Česká spořitelna, a.s. Parts of the portfolio are secured by means of CDS, using different scenarios. Lastly, the effect of hedging on the amount of credit risk is observed, based on income and risk.
Keywords: credit derivative, credit default swap, CreditMetrics

1 Úvod

Úvěrové (kreditní) riziko je jednou z největších hrozeb, kterým čelí subjekty působící ve finančním sektoru. Aby mohla být finanční instituce z dlouhodobého hlediska úspěšná, musí umět toto riziko efektivně řídit. Jednou z možností, jak toho docílit, je zamezit možným ztrátám formou zajištění svých pohledávek. Relativně novým trendem ve světovém bankovnictví je zajišťování pohledávek pomocí kreditních derivátů. Tyto produkty vznikaly až v průběhu 90. let minulého století v USA a mohou být vhodným doplňkem ke klasickým metodám řízení úvěrového rizika jako je např. preventivní credit scoring a diverzifikace portfolia.

Tato práce je rozčleněna do sedmi kapitol. Ve druhé kapitole je vymezen pojem úvěrového rizika a jsou zmíněny možnosti jeho měření. Měření rizika je totiž jedním ze základních předpokladů pro jeho úspěšné řízení.

Ve třetí kapitole se seznámíme se základními vlastnostmi, výhodami a nevýhodami různých typů úvěrových derivátů, které jsou jedním z nástrojů pro redukci kreditního rizika.

Kapitola 4 je věnována popisu modelu CreditMetrics (od společnosti J.P. Morgan), což je nástroj sloužící k měření rizikovosti portfolia dluhových nástrojů z pohledu kreditního rizika.

Pátá kapitola obsahuje popis oceňovacího modelu pro zřejmě nejužívanější kreditní derivát - swap úvěrového selhání (CDS). Je zde předveden základní model pro stanovení kreditní přirážky pro CDS (CDS spreadu) bez zahrnutí úvěrového rizika protistrany. Tento model je dále rozšířen tak, aby úvěrové riziko protistrany zahrnoval.

V šesté kapitole je popsán způsob, kterým byly modely popsané v kapitolách 4 a 5 aplikovány na reálná data, a to na část historického portfolia České spořitelny, a.s. pro korporátní a malou a střední podnikovou klientelu. Je zde zvoleno několik scénářů, na jejichž základě je vždy zajištěna část portfolia pomocí CDS. Modelem CreditMetrics je pak vypočtena forwardová hodnota portfolia a zkoumá se tak vliv zajištění na velikost úvěrového rizika.

2 Úvěrové riziko

Aby bylo možné úvěrové riziko měřit, musíme nejprve pojem úvěrového rizika vymezit, zároveň je také nutné určit způsob, jakým budeme riziko měřit.

2.1 Vymezení pojmu

Pro vymezení pojmu úvěrového rizika uvažujme finanční kontrakt, z nějž vyplývá v nějakém budoucím okamžiku plnění dlužníka (zavázaného) vůči věřiteli (držiteli pohledávky).
Úvěrové riziko pak můžeme definovat jako riziko ztráty věřitele způsobené tím, že dlužník selže, tedy že nedostojí včas a v plné výši svým závazkům a tím způsobí věřiteli ztrátu. Přitom nezáleží na příčině selhání.

Úvěrovému riziku čelí subjekty, které drží pohledávky plynoucí z úvěrových aktivit, obchodních a investičních aktivit, z platebního styku a vypořádání cenných papírů při obchodování na vlastní i cizí účet.
Obecně lze tedy říci, že úvěrové riziko s sebou přinášejí všechny transakce očekávající v nějaké fázi kontraktu platbu od druhého subjektu.

2.2 Způsoby měření úvěrového rizika

Metod pro měření rizika existuje široká škála. Většina z nich vychází ze statistického rozdělení zisku či ztráty.
Intuitivně je vhodným kvantifikátorem pro měření rizika rozptyl, resp. směrodatná odchylka. Tento ukazatel udává, jak budoucí výsledek kolísá kolem jeho očekávané střední hodnoty. Větší rozptyl vypovídá o větším riziku. Tato míra je ovšem vhodná zejména pro symetrická rozdělení pravděpodobnosti.
Rozdělení pravděpodobnosti velikosti ztráty plynoucí z vystavení se kreditnímu riziku není zpravidla symetrické. Pro asymetrická rozdělení se užívají kvantifikátory rizika jako citlivost na změnu parametru (testuje se pomocí rizikových scénářů) nebo kvantily pravděpodobnostního rozdělení.
Speciálním případem posledně jmenovaného kvantifikátoru je Value at Risk (VaR, hodnota v riziku). Protože tento kvantifikátor bude pro měření úvěrového rizika v této práci použit, proto nyní tento pojem definuji:

Definice 2.1. Označme velikost ztráty jako L. Value at Risk na hladině pravděpodobnosti α pro časový interval délky T je hodnota, která splňuje:

$$P(L \leqq VaR_\alpha(T)) = 1 - \alpha$$

Pokud má rozdělení velikosti ztráty distribuční funkci F, lze psát:

$$P(L \leqq VaR_\alpha(T)) = F(VaR_\alpha(T)) = 1 - \alpha$$

Odtud dostáváme vztah:

$$VaR_\alpha(T) = F^{-1}(1 - \alpha)$$

$VaR_\alpha(T)$ je tedy $(1 - \alpha)$-kvantil rozdělení velikosti ztráty.

3 Úvěrové (kreditní) deriváty

Tato část diplomové práce slouží především k zavedení a objasnění základních pojmů. Zejména se zde seznámíme s podstatou kreditních derivátů, jejich výhodami i nevýhodami a také s jejich základními typy, které jsou obchodovány na kapitálových trzích.

3.1 Podstata úvěrových derivátů

Úvěrový derivát je finanční nástroj, který se skládá z jednoho či více podkladových úrokových, popř. akciových či komoditních nástrojů. Jeho reálná hodnota je ovlivněna rizikovou úrokovou mírou určité, tzv. referenční jednotky.
S pomocí kreditních derivátů je převáděno úvěrové riziko spojené s úvěry či jinými nástroji z jednoho partnera, tzv. prodávajícího kreditního rizika (někdy také kupující zajištění), na jiného partnera, tzv. kupujícího kreditního rizika (někdy také prodávající zajištění).
Významný je fakt, že k převodu úvěrového rizika mezi subjekty může dojít bez převodu podkladových nástrojů. Převod rizika může být sjednán na celou dobu do splatnosti referenčního závazku nebo na kratší období, může pokrývat celou částku závazku nebo pouze jeho část. Jako podkladový nástroj kreditního derivátu může být samostatný referenční závazek nebo portfolio referenčních závazků jediného dlužníka popř. několika dlužníků.

V následujících odstavcích budou podrobněji vysvětleny základní pojmy, které se v souvislosti s úvěrovými deriváty používají, většina z nich už byla použita v úvodu této podkapitoly:

Prodávající úvěrového rizika (kupující zajištění) se obvykle prostřednictvím kreditních derivátů zajišťuje proti kreditnímu riziku vyplývajícímu z vlastněného aktiva či portfolia aktiv (zejména úvěrů nebo obligací). Může ovšem být také spekulantem.
Kupující úvěrového rizika (prodávající zajištění) prostřednictvím úvěrového derivátu na sebe převádí úvěrové riziko. Kontrakt ve většině případů uzavírá jako spekulativní investici.
Referenční aktivum - jedná se o aktivum věřitele, které je pro referenční jednotku referenčním závazkem.
Referenční závazek je to podkladový nástroj, jímž je tvořen kreditní derivát. Obvykle je jím dluhový cenný papír, úvěr nebo jiný finanční nástroj. Na refe-

renční závazek je navázána *kreditní událost* a s ní spojená *platba z úvěrového derivátu*. Prodávající úvěrového rizika nemusí referenčním závazkem vůbec disponovat.
Zajišťovaný (podkladový) nástroj je finanční nástroj, který prodávající úvěrového rizika vlastní a prostřednictvím kreditního derivátu ho zajišťuje, může být různý od referenčního aktiva.
Podkladový kolaterál je aktivum zajišťující závazky vyplývající z úvěrového derivátu. Má zpravidla formu hotovosti nebo cenných papírů. Kolaterál obvykle skládá kupující úvěrového rizika, zejména v případech, kdy má nižší kreditní kvalitu než prodávající. V případě defaultu kupujícího má na kolaterál prioritní nárok prodávající.
Úvěrová událost - událost definovaná v kontraktu, na jejímž základě dochází k plnění z úvěrového derivátu ze strany kupujícího úvěrového rizika prodávajícímu. Kromě defaultu referenční jednotky může jít také např. o pokles úvěrového hodnocení referenční jednotky.
Reálná hodnota úvěrového derivátu - tato hodnota je rozdílem reálné hodnoty podkladové pohledávky a podkladového závazku. Pro prodávajícího úvěrového rizika jde o rozdíl reálné hodnoty pohledávky za protistranou v derivátovém kontraktu a reálné hodnoty referenčního aktiva. Pro kupujícího jde o rozdíl reálné hodnoty referenčního aktiva a reálné hodnoty závazku vůči protistraně v derivátovém kontraktu.
Reálná hodnota úvěrového derivátu je závislá na následujících ukazatelích:

- pravděpodobnosti selhání (PD) referenční jednotky
- velikosti ztráty při selhání (LGD) referenční jednotky
- velikosti expozice při selhání (EAD) vůči referenční jednotce
- úvěrové kvalitě kupujícího úvěrového rizika
- korelaci mezi selháním referenční jednotky a kupujícího úvěrového rizika
- výčtu úvěrových událostí v kontraktu

Některé metody výpočtu reálné hodnoty preferují před používáním PD, LGD a EAD užití *úvěrového rozpětí*, což udává rozdíl výnosů různých cenných papírů v závislosti na jejich úvěrové kvalitě. Nejčastěji se uvažuje rozdíl

vzhledem k bezrizikovému výnosu. Vzhledem k velikosti trhu s kreditními deriváty je však takových dat nedostatek.
Nyní blíže popíšeme dva možné *způsoby vypořádání úvěrového derivátu v případě kreditní události:*
Při *fyzickém vypořádání* v určené lhůtě od kreditní události musí prodávající úvěrového rizika dodat kupujícímu tzv. *dodatelný závazek referenční jednotky*, což může být referenční závazek, ale také jiný závazek splňující podmínky dohodnuté v kontraktu. Nejčastěji dodatelným závazkem bývá jakýkoli přednostní nezajištěný dluhový závazek referenční jednotky. Za dodatelný závazek kupující kreditního rizika vyplatí prodávajícímu tzv. referenční částku, která je dohodnuta při sjednání CDS; nejčastěji referenční hodnotou bývá nominální hodnota referenčního aktiva nebo tržní hodnota jiného obchodovatelného aktiva, které má shodné parametry s parametry referenčního aktiva v nějakém předem stanoveném okamžiku před kreditní událostí. Pokud prodávající úvěrového rizika dodatelným závazkem nedisponuje, může mít s jeho koupí problémy, protože po kreditní události se po dodatelných závazcích zvyšuje potávka a může jich být na trhu nedostatek.
Při *hotovostním vypořádání* vyplatí kupující úvěrového rizika předem stanovenou částku ve lhůtě uvedené v kontraktu prodávajícímu úvěrového rizika. Zaplacená částka bývá často nominální hodnotou referenčního aktiva sníženou o jeho zůstatkovou hodnotu, která se obvykle stanoví k datu do tří měsíců od úvěrové události, nebo předem ujednaná pevná částka. Pokud není předem dohodnuta pevná částka pro vypořádání, pak tuto částku stanovuje tzv. kalkulační agent, který je v kontraktu uveden. Metoda stanovení této částky je také vždy určena v kontraktu.

3.2 Obchodování s úvěrovými deriváty a jejich použití

Úvěrové deriváty se začaly objevovat na světových kapitálových trzích počátkem devadesátých let dvacátého století. Trhy s kreditními deriváty mají dnes stále rostoucí tendenci, ovšem v porovnání s trhy ostatních finančních nástrojů se zde obchodují poměrně malé objemy. Zároveň se zde angažuje malý počet subjektů.
S úvěrovými deriváty obchodují zejména banky a jiné velké finanční instituce. Přičemž nejčastějšími referenčními jednotkami jsou podniky, následovány státy. Asi největším problémem obchodování s kreditními deriváty je fakt, že v porovnání s ostatními druhy derivátů je velmi obtížné je přesně ocenit.

Nyní se zaměříme na výhody i nevýhody úvěrových derivátů z pohledu obou zúčastněných stran kontraktu:

Prodávající úvěrového rizika:
Pokud subjekt disponuje nějakým finančním nástrojem nesoucím s sebou úvěrové riziko, např. úvěrem, a požaduje přenesení tohoto rizika na jiný subjekt, může úvěr prodat, vzít si na něj záruku nebo jej může zajistit úvěrovým derivátem.
V případě prodeje úvěru musí tuto informaci předat dlužníkovi, což může ovlivnit jejich vzájemné vztahy. Sjednáním záruky na úvěr bude plnění vyplaceno pouze v případě, že subjekt opravdu utrpí ztrátu z úvěru vyplývající.
V případě zajištění kreditním derivátem nemusí, stejně jako u záruky, subjekt dlužníka informovat; je zde ovšem další výhoda v tom, že za určitých podmínek může subjekt obdržet plnění i v případě, že neutrpí ztrátu z úvěru. Tyto podmínky ovšem musí být obsaženy v kontraktu, může jít např. o změnu ratingu, restrukturalizaci referenční jednotky a podobně.
Zároveň mohou být úvěrové deriváty nápomocny při segmentaci portfolia. Subjekty obvykle mají stanoveny limity pro zastoupení určitých kategorií dlužníků v portfoliu (např. podle geografického rozložení, podle odvětví). Pokud je limit pro určitou skupinu dlužníků vyčerpán, má subjekt možnost pomocí úvěrového derivátu zmírnit angažovanost této kategorie v portfoliu, aniž by došlo k prodeji daných aktiv.
Prodávající úvěrového rizika může na trh vstupovat také s tím, že referenční aktivum nevlastní; pak se z jeho strany jedná o spekulaci. Prodávající tak spekuluje na zhoršení úvěrové kvality referenční jednotky.
U finančních institucí jako jsou banky, kde je regulátorem stanoven kapitálový požadavek, který musí banka držet k pokrytí svých závazků, může být úvěrový derivát nástrojem pro snížení kapitálového požadavku, např. převedením úvěrového rizika z držených úvěrů s rizikovou vahou 100% na jiný subjekt, což vede ke snížení rizikové váhy.

Kupující úvěrového rizika:
Tím, že subjekt koupí prostřednictvím úvěrového derivátu úvěrové riziko, bere na sebe toto riziko třetího subjektu, aniž by měl v rozvaze jeho aktiva. V tomto případě jde o spekulační derivát, přičemž riziko i výnosy jsou shodné s případem, kdy subjekt aktiva vlastní. Tímto způsobem se subjekt může vyhnout legislativním opatřením, opatřením regulátora apod., které by mohly subjektu bránit ve vlastnictví takových aktiv.
Koupí úvěrového derivátu je možné se vystavit expozici vůči referenční jed-

notce, aniž by to bylo zachyceno v rozvaze. Nominální hodnota derivátů je totiž zachycena pouze v podrozvaze. Do rozvahy je uváděna pouze reálná hodnota derivátů.

3.3 Úvěrové deriváty a základní rizika s nimi spojená

Úvěrové riziko spojené s kreditními deriváty lze rozdělit na dvě samostatná rizika: *kreditní riziko referenční jednotky*, jehož realizací je úvěrová událost a *kreditní riziko protistrany* v drivátovém kontraktu, které pro kupujícího úvěrového rizika představuje nesplnění závazků z kontraktu vyplývajících ze strany prodávajícího a naopak pro prodávajícího úvěrového rizika znamená nesplnění závazků ze strany kupujícího.
Důležitým faktorem je zde také korelace mezi úvěrovou kvalitou obou stran kontraktu.

Bazické riziko se u úvěrových derivátů může objevovat v případě, že úvěrový derivát slouží jako nástroj zajištění a zejména pokud referenční aktivum a zajišťovaný nástroj jsou vzájemně různé.
Prodávající úvěrového rizika v takovém případě může utrpět ztrátu ze zajišťovaného nástroje, která není zcela kompenzována ziskem z úvěrového derivátu; nebo obráceně, může utrpět ztrátu z úvěrového derivátu, která není plně kompenzována ziskem ze zajišťovaného nástroje.
Jde zejména o případy, kdy se liší měna, ve které jsou oba nástroje vedeny, splatnost obou nástrojů nebo pokud definice úvěrové události plně nepokrývá možné příčiny ztráty ze zajišťovaného nástroje. Posledně jmenovaná příčina se může projevit i v případě shody referenčního aktiva se zajišťovaným nástrojem.
Bazické riziko tedy velmi významně ovlivňuje efektivitu zajištění.

Úrokové a měnové riziko: Na velikosti úrokového a z části také měnového rizika závisí hodnota podkladových nástrojů. Zejména výše úrokových sazeb často ovlivňuje výši plnění z kreditního derivátu, a to na obou stranách kontraktu.

Riziko likvidity se u úvěrových derivátů projevuje velice silně, neboť likvidita takových nástrojů je nízká, což potvrzuje také velký rozdíl cen mezi stranami nabídky a poptávky.

Obrázek 1: Schéma swapu úvěrového selhání

3.4 Typy úvěrových derivátů

Základní typy úvěrových derivátů jsou: úvěrový forward, úvěrový futures, úvěrový swap a úvěrová opce. Od svých úrokových variant se všechny typy liší v tom, že proměnlivá platba je vždy závislá na rizikové úrokové míře referenční jednotky. V případě úvěrového forwardu je platba odvozena od úvěrového rozpětí v určitém budoucím časovém okamžiku. S úvěrovými futures se na kapitálových trzích téměř vůbec neobchoduje. Úvěrovým swapům a opcím se budeme dále podrobněji věnovat.

Swap úvěrového selhání (Credit Default Swap, CDS)

I přes název se jedná o konkrétní případ úvěrové opce. CDS je bilaterální kontrakt vázaný na úvěrové riziko spojené se závazkem referenční jednotky, závazků může být i více.
Prodávající úvěrového rizika platí kupujícímu úvěrového rizika pravidelné platby (prémie), které jsou stanovené jako percentuální podíl z nominální hodnoty referenčního nástroje. Prémie by měla být rovna rozdílu výnosu do splatnosti rizikového referenčního aktiva a bezrizikového aktiva o jinak stejných parametrech; tento rozdíl se nazývá báze úvěrového rozpětí.
Kupující úvěrového rizika se v případě úvěrové události referenčního nástroje, která je přesně definovaná v kontraktu, buď hotovostně, nebo fyzicky vypořádá s prodávajícím úvěrového rizika.
Úvěrovou událostí a následným vypořádáním končí platnost kontraktu. Pokud k úvěrové události nedojde, platnost úvěrového derivátu skončí jeho

splatností aniž by kupující úvěrového rizika prodávajícímu cokoli platil. Prodávající úvěrového rizika tak prostřednictvím CDS převedl na dobu trvání kontraktu nebo do úvěrové události úvěrové riziko plynoucí z referenčního závazku na kupujícího úvěrového rizika, přičemž nedošlo k převedení samotného referenčního aktiva.
Prémie, kterou platí prodávající úvěrového rizika kupujícímu, závisí na shodných faktorech jako reálná hodnota úvěrového derivátu, což bylo zmíněno výše. Blíže se stanovování prémií a oceňování CSD budeme věnovat v kapitole 5.

Často používané speciální případy swapů úvěrového selhání:

Košový (portfoliový) swap úvěrového selhání
Referenčním aktivem pro tento swap je více referenčních závazků (i více referenčních jednotek) určených v kontraktu. Nemusí jít o přesně jmenované závazky, ale např. může být stanoven pouze celkový počet a charakteristika zahrnutých závazků.
Nejčastější variantou košového swapu je tzv. *košový swap úvěrového selhání s n-tým selháním*, kterým se převádí úvěrové riziko právě n referenčních závazků, přestože celý koš jich může obsahovat více. Na základě tohoto swapu je vypořádáno prvních n úvěrových událostí, jeho platnost končí v okamžiku, kdy dojde k n-té úvěrové události; následně ještě dojde k jejímu vypořádání. S rostoucím n roste také prémie placená prodávajícím úvěrového rizika.
Další užívanou variantou košového swapu je *košový swap úvěrového selhání s procentem ztráty* nebo *s hodnotou ztráty*, kdy kupující úvěrového rizika je povinen hradit plnění z úvěrových událostí až do určitého procenta z nominální hodnoty všech referenčních závazků nebo až do výše předem stanovené částky. Po dosažení těchto hodnot platnost kontraktu končí.

Digitální swap úvěrového selhání
U tohoto druhu CDS po úvěrové události hradí kupující kreditního rizika prodávajícímu pevnou předem stanovenou částku nebo pevně stanovené procento z nominální hodnoty referenčního aktiva.

Swap veškerých výnosů (Total Return Swap, TRS)

TRS je opět vázán na referenční závazek referenční jednotky vymezený v kontraktu.
Základní schéma TRS je následující:
Prodávající úvěrového rizika (v případě TRS se také nazývá *plátcem veškerých výnosů*) platí kupujícímu (v případě TRS se také nazývá *příjemce veškerých*

Swap veškerých výnosů

Obrázek 2: Schéma swapu veškerých výnosů

výnosů) periodické platby odpovídající všem peněžním tokům plynoucím z referenčního aktiva (např. kupóny) a v případě zvýšení reálné hodnoty referenčního aktiva platí rovněž částku odpovídající tomuto zvýšení.
Ve stejných okamžicích platí kupující úvěrového rizika prodávajícímu úroky odvozené ve většině případů od výše dohodnuté referenční úrokové sazby (např. LIBOR + x b.p.).
Pokud navíc dojde k poklesu reálné hodnoty referenčního nástroje, platí prodávajícímu rovněž částku tomuto poklesu odpovídající.
V případě úvěrové události platnost swapu obvykle končí, přičemž se realizuje poslední platba, která bývá vztažena ke dni úvěrové události. V rámci této platby bude realizováno vypořádaní úrokových plateb z obou stran kontraktu a také platba odrážející snížení hodnoty referenčního závazku.
Na rozdíl od CDS převádějí TRS zároveň s úvěrovým rizikem také tržní riziko spojené s referenčním aktivem. Obdobně jako u CDS i v případě TRS může být podkladovým aktivem koš referenčních závazků. V takovém případě hovoříme o *košovém (portfoliovém) swapu veškerých výnosů*. Platnost tohoto swapu obvykle končí v případě, že dojde k první úvěrové události. TRS může být rovněž vztažen k některému indexu namísto jednotlivého referenčního závazku, pak se jedná o tzv. *indexový swap veškerých výnosů*.

Úvěrový dluhopis (Credit Linked Note, CLN)
Tento finanční nástroj je kombinací střednědobého dluhopisu a vloženého úvěrového derivátu, většinou swapu úvěrového selhání.
Je to financovaný derivát, tj. kupující úvěrového rizika poskytne platbu na

Obrázek 3: Schéma úvěrového dluhopisu

krytí rizika předem. Prodávající CLN většinou pro investora (kupujícího úvěrového rizika) emituje dluhopis (může také jít o dluhopis emitovaný jiným subjektem) s pevným či plovoucím kupónem, přičemž splácení závazků z dluhopisu vyplývajících (nominální hodnoty a kupónů) je odvozeno od úvěrové kvality referenčního závazku referenční jednotky.

Pokud nedojde ke kreditní události na referenčním nástroji, prodávající úvěrového rizika platí kupujícímu pravidelně úroky z nominální hodnoty, které zohledňují rizikovost prodávajícího, plus prémii x bazických bodů, která odpovídá prémii swapu úvěrového selhání, a v okamžiku splatnosti dojde k navrácení nominální hodnoty úvěrového dluhopisu.

V případě kreditní události odkoupí prodávající úvěrového rizika úvěrový dluhopis zpět za jeho tržní hodnotu; načež dojde k hotovostnímu vypořádání jako u klasického swapu úvěrového selhání a případně také k fyzické dodávce referenčního aktiva. K vypořádání dochází většinou bezprostředně po vzniku úvěrové události.

K emisi úvěrového dluhopisu přistupuje prodávající v případě, že jeho úvěrová kvalita je vyšší v porovnání s úvěrovou kvalitou referenční jednotky. Pokud by tomu bylo naopak, prodávající by zřejmě přistoupil k emisi obyčejného dluhopisu. Výhodou pro prodávajícího úvěrového rizika je, že v případě úvěrového dluhopisu není vystaven kreditnímu riziku investora. Nevýhodu pro něj představují vyšší úroky, které investorovi kompenzují úvěrové riziko referenční jednotky.

Obdobně jako u úvěrových swapů, existují také úvěrové dluhopisy v několika variantách: *úvěrový dluhopis veškerých výnosů* (vloženým derivátem je zde swap veškerých výnosů), *košový úvěrový dluhopis* (referenčním aktivem je koš referenčních závazků).

Opce úvěrového rozpětí (Credit Spread Option, CSO)
Tato opce je uplatněna, pokud realizační úvěrové rozpětí dvou přesně specifikovaných finančních nástrojů klesne pod určitou hodnotu nebo ji přesáhne. Obvykle jde o rozdíl výnosů do splatnosti konkrétního finančního nástroje referenční jednotky a bezrizikového nebo nízkorizikového finančního nástroje se stejnou splatností. Opce úvěrového rozpětí nepatří k běžně obchodovaným úvěrovým derivátům.

4 Model CreditMetrics

V této kapitole bude popsán model CreditMetrics, který se užívá k simulaci rizikovosti portfolia dluhových nástrojů.

Model CreditMetrics vychází z Mertonova modelu z roku 1974. Merton závazky společnosti považoval za bezkupónový dluhopis s nominální hodnotou D a dobou splatnosti T. Merton pak kapitál společnosti považuje za evropskou call opci na aktiva společnosti s realizační cenou D a datem platnosti opce v čase T. K selhání dochází v případě, že v čase T není opce realizována, tedy pokud hodnota aktiv společnosti poklesne pod hodnotu D.
Přímo z Mertonova modelu vycházejí tzv. dvoustavové portfoliové modely, např. CreditRisk+ od společnosti Credit Suisse First Boston, který rozlišuje pouze dva stavy dlužníka: stav selhání (nesplácení dluhu, také defaultní stav) a stav splácení, kdy dlužník své závazky plní.
Model CreditMetrics patří mezi vícestavové portfoliové modely úvěrového rizika, při modelování tedy zohledňuje změny kreditní kvality dlužníka vyjádřené změnami ratingu.

4.1 Základní myšlenka modelu CreditMetrics

Model CreditMetrics měří velikost úvěrového rizika pro portfolio úvěrů pomocí Value at Risk. Základním cílem je tedy zjistit forwardové rozdělení hodnoty portfolia a odtud rozdělení ztráty v daném časovém horizontu plynoucí ze změny kreditní bonity dlužníků.
Model CreditMetrics předpokládá tyto vstupní informace:

- informaci o dlužníkově kreditní bonitě v podobě přiděleného ratingového stup- ně
- matici pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými ratingovými stupni (včetně defaultu) pro daný časový horizont
- míru návratnosti úvěrů pro případ selhání dlužníka
- výši kreditní přirážky pro jednotlivé ratingové stupně
- korelace mezi dlužníky

Výpočet Value at Risk pomocí modelu CreditMetrics si nejprve ukážeme pro případ portfolia tvořeného pouze jedním úvěrem, pak pro dva úvěry a nakonec pro libovolné množství úvěrů.

4.2 Value at Risk pro jeden úvěr

Před samotným výpočtem je potřeba provést následující kroky:

- Určit ratingový systém, ratingové stupně a určit matici pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými ratingovými stupni během určitého časového horizontu. Model CreditMetrics předpokládá, že všichni dlužníci zařazení do jednoho ratingového stupně mají stejnou pravděpodobnost defaultu a pravděpodobnosti přechodu do ostatních ratingových stupňů.
- Zvolit si časový horizont, k němuž budeme výpočet Value at Risk vztahovat. Nejčastěji se jedná o jeden rok, protože k jiným časovým horizontům je obtížnější získat ostatní potřebná data, zejména pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými ratingovými stupni.
- Určit pro každý ratingový stupeň forwardovou diskontní křivku vztaženou ke zvolenému časovému horizontu. Stejně jako v případě pravděpodobností přechodu také při výpočtu forwardových zero křivek uvažujeme homogenitu dlužníků, pokud jsou zařazeni ve stejném ratingovém stupni.
- Na základě seniority dluhového závazku určit míru návratnosti.

Na základě těchto informací se určí rozdělení hodnoty úvěru.

Postup výpočtu bude předveden na příkladu, který byl uveden v CreditMetrics - Technical Document [7]:

Pro příklady výpočtů v *CreditMetrics - Technical Document* autoři zvolili ratingovou stupnici od společnosti S&P, který rozděluje dlužníky do sedmi nedefaultních ratingových stupňů (sestupně podle kreditní bonity: AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC), v případě selhání je dlužník zařazen do defaultního stavu. Od stejné společnosti byla převzata také matice pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými stavy; tato matice je uvedena v následující tabulce:

Tabulka 4.1: Matice pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými ratingovými stupni. Řádky představují výchozí rating, sloupce ratingové hodnocení na konci roku. Hodnoty pravděpodobností jsou uvedeny v procentech.

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Def
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0,00	0,00	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	0,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79

Zdroj: Standard&Poor's, CreditWeek (1996)

Matice pravdpodobností přechodu jsou ratingovými společnostmi získávány prostřednictvím dlouholetých historických pozorování firem působících v různých průmyslových odvětvích. Sledují se změny jejich kreditní bonity a jimi způsobené přesuny na ratingové škále. Většina dat, která jsou v tomto ohledu k dispozici je získávána pozorováním firem působících v USA, tedy odlišném ekonomickém prostředí s jinými hospodářskými cykly. Proto by ideálně banky měly pro vlastní výpočty používat vlstní ratingový systém založený na vlastních historických datech.

Časový horizont byl zvolen jednoletý, protože tomuto období odpovídá zvolená matice přechodu mezi ratingovými stupni.
Pro některá delší časová období jako např. 5 let jsou matice pravděpodobností přechodu uveřejňovány. Často se však také užívá předpokladu, že náhodný proces určující zařazení dlužníka do ratingové kategorie je markovský a stacionární. Potom matici pravděpodobností přechodu pro n-leté období dostaneme jako n-tou mocninu matice pro jednoleté období.

Nyní přistoupíme k výpočtu úvěrové Value at Risk pro obligaci (pro úvěr se VaR spočítá podobně, zohledněním případných rozdílných peněžních toků) s nominální hodnotou 100$ s maturitou 5 let, která byla zařazena do ratingové kategorie BBB a nese roční kupón ve výši 6%. Podřízenost (seniorita) této obligace je "senior unsecured".
Aby bylo možno získat rozdělení hodnoty této obligace za 1 rok, je nutné vypočítat hodnotu obligace za rok za předpokladu, že kreditní bonita dlužníka za rok bude odpovídat i-té ratingové kategorii, kde $i \in \{AAA, AA, ..., Def\}$.

Tento výpočet provedeme pro všechny ratingové stupně. K tomu potřebujeme jednoleté forwardové zero křivky na dobu 4 let pro všechny ratingové stupně:

Tabulka 4.2: Jednoleté forwardové zero křivky na dobu 4 let pro všechny nedefaultní ratingové stupně. Hodnoty jsou vyjádřeny v procentech.

Rating	Rok 1	Rok 2	Rok 3	Rok 4
AAA	3,60	4,17	4,73	5,12
AA	3,65	4,22	4,78	5,17
A	3,72	4,32	4,93	5,32
BBB	4,10	4,67	5,25	5,63
BB	5,55	6,02	6,78	7,27
B	6,05	7,02	8,03	8,52
CCC	15,05	15,02	14,03	13,52

Zdroj: CreditMetrics - Technical Document

Pro případ, že dlužník selže, potřebujeme znát míru návratnosti úvěru odpovídající jeho senioritě, což vyjadřuje skutečnost, že v případě selhání není ztracena celá hodnota dluhopisu, ale pouze procentní podíl. Pro případ senior unsecured dluhopisu je odhadována míra návratnosti 51,13%.

Za podmínky, že za rok bude obligace v ratingové kategorii BBB, je její forwardová cena rovna:

$$FV_{BBB} = 6 + \frac{6}{1,0410} + \frac{6}{(1,0467)^2} + \frac{6}{(1,0525)^3} + \frac{106}{(1,0563)^4} = 107,53$$

Stejným způsobem se vypočtou hodnoty pro ostatní ratingové stupně.
Pro defaultní stupeň bude:

$$FV_{Def} = 100 \cdot 0,5113 = 51,13$$

Pro všechny ratingové stupně jsou forwardové hodnoty spolu s odpovídajícími pravděpodobnostmi, které lze vyčíst z tabulky 4.1 v řádku odpovídajícímu ratingu BBB, uvedeny v následující tabulce:

Tabulka 4.3: Forwardové hodnoty obligace odpovídající všem ratingovým stupňům.

Rating na konci roku	**Pravděpodobnost v %**	**Forwardová hodnota, v $**
AAA	0,02	109,40
AA	0,33	109,17
A	5,95	108,64
BBB	86,93	107,53
BB	5,30	102,01
B	1,17	98,10
CCC	0,12	83,63
Def	0,18	51,13

Střední hodnota forwardové hodnoty dluhopisu tedy je:

$$E(FV) = \sum_{i=Def}^{AAA} p_i \cdot FV_i = 107,07\$$$

Směrodatnou odchylku spočítáme jako:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=Def}^{AAA} p_i \cdot (FV_i - E(FV))^2} = 2,99\$$$

Value at Risk na hladině 0,997 pro jednoleté období tedy je:

$$VaR_{0,997}(1) = 83,63\$$$

a tedy $E(FV) - VaR_{0,997} = 23,44\$$.

Hladina 0,997 byla vypočtena jako rozdíl $1 - (p_{Def} + p_{CCC})$. Obdobně lze získat hodnoty Var i pro jiné hladiny.

Ve srovnání s normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 0$ a směrodatnou odchylkou rovnou $\sigma = 2,99$ je pozorované rozdělení forwardové hodnoty obligace hodně odlišné, jak ukazuje následující tabulka, která porovnává hodnoty kvantilů pro obě rozdělení:

Tabulka 4.4: Srovnání kvantilů získaného rozdělení forwardové ztráty a normálního rozdělení se stejnými parametry.

Hladina pravděpodobnosti α**, v %**	$VaR_\alpha(1)$ **pro vypočtené rozdělení**	$VaR_\alpha(1)$ **pro normální rozdělení**
0,02	-2,10	-10,59
0,35	-1,57	-8,06
6,3	-0,46	-4,57
93,23	5,06	4,46
98,53	8,97	6,51
99,7	23,44	8,21
99,82	55,94	8,70

Rozdíly hodnot VaR pro dvě rozdělení z tabulky 4.4 jsou dány šikmostí rozdělení forwardové hodnoty obligace, což je rozdělení s významným těžkým chvostem.

4.3 Value at Risk pro dva úvěry

V této podkapitole ukážeme na portfoliu složeném ze dvou obligací výpočet sdruženého rozdělení forwardové hodnoty tohoto portfolia zohledňující korelace mezi obligacemi.
Klíčovým problémem při výpočtu sdruženého rozdělení je určení sdružené matice pravděpodobnosti přechodu.
Pro názornost výpočet přiblížíme na příkladu dvou úvěrů s počátečními ratingy BB a A, příklad je opět převzat z CreditMetrics - Technical Document [7].
Nechť $s_i^j(t)$ je jev, že se dlužník s počátečním ratingem i za dobu t přesune do ratngové kategorie j pro $i, j \in \{AAA, AA, ..., Def\}$. Použijeme-li opět matici pravděpodobností přechodu uvedenou v tabulce 4.1 a předpokladu, že dlužníci jsou nezávislí, lze sdruženou pravděpodobnost počítat jako:

$$P[s_A^i(1), s_{BB}^j(1)] = P[s_A^i(1)] \cdot P[s_{BB}^j(1)]$$

kde $i, j \in \{AAA, AA, ..., Def\}$.

Pro $i = A$ a $j = BB$ dostáváme:

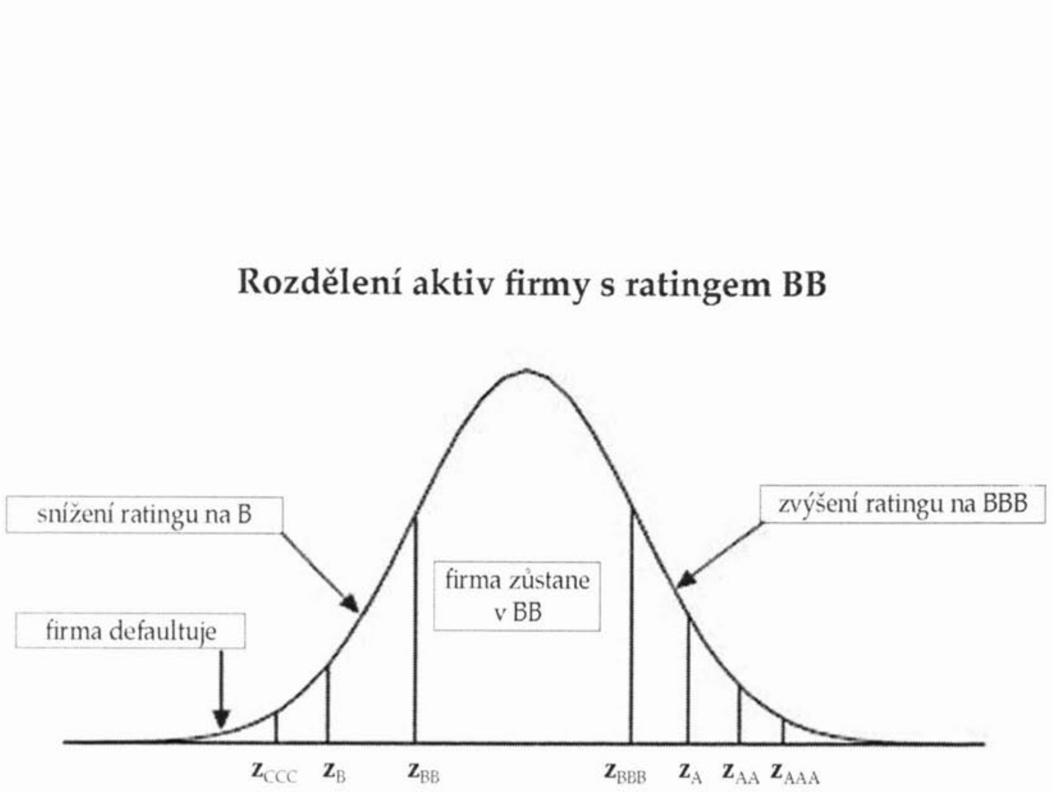
$$P[s^i_A(1), s^j_{BB}(1)] = 91,05\% \cdot 80,53\% = 73,32\%$$

V praxi ovšem předpoklad nezávislosti dlužníků neodpovídá výsledkům empirických pozorování. Korelace kreditní bonity dlužníků je způsobena tím, že dlužníci jsou vystaveni daným makroekonomickým podmínkám, korelaci také ovlivňuje např. ekonomická provázanost průmyslových odvětví, ve kterých dlužníci působí.
Korelace se mění v závislosti na fázi ekonomického cyklu; v recesi korelace rostou (stejně jako pravděpodobnosti zhoršení kreditní bonity), v konjunktuře je tomu naopak. Proces změny kreditní bonity dlužníků tedy není stacionární. Pro modelování tedy bylo potřeba nalézt veličiny, jejichž korelace jsou v čase stabilní.
Vhodným řešením se ukázal být Mertonův opční model z roku 1974, který byl již zmíněn v úvodu této kapitoly. Podkladovými veličinami zde jsou hodnoty aktiv jednotlivých společností a korelace mezi nimi.
Předpokládá se, že vývoj hodnoty aktiv v čase je procesem Brownova pohybu, tedy:

$$S_t = S_0 exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z_t\right\} \quad (4.3.1)$$

kde S_t označuje hodnotu aktiv v čase t, μ a σ jsou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou míry výnosnosti aktiv společnosti $\frac{dS_t}{S_t}$, Z_t je pro každé t náhodná veličina se standardizovaného normálního rozdělení. S_t má logaritmicko-normální rozdělení, v čase t má střední hodnotu $E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$.

K defaultu v době maturity dluhového závazku dojde, pokud hodnota aktiv společnosti poklesne pod hodnotu závazku S_{Def}. V modelu CreditMetrics jsou kromě možnosti defaultu dluhu v době jeho maturity uvažovány také možnosti přesunu kreditní bonity dlužíka mezi nedefaultními ratingovými stupni. Pravděpodobnostní rozdělení forwardové hodnoty aktiv firmy se rozdělí do pásem tak, aby pásma odpovídala pravděpodobnostem přechodu mezi jednotlivými stupni, což ilustruje obrázek 4:



Obrázek 4: Stanovení mezí pro jednotlivé ratingové kategorie.

Meze pro jednotlivé ratingové stupně odpovídají pravděpodobnostem přechodu pro dlužníka s ratingem BB uvedeným v tabulce 4.1. Např. pravděpodobnost, že rating dlužníka se nezmění, je 80,53%, stejný procentní podíl z plochy pod křivkou je ohraničený mezemi Z_{BB} a Z_{BBB}. Přičemž hodnoty mezí Z_i pro $i \in \{AAA, AA, ..., Def\}$ jsou násobky směrodatné odchylky míry výnosnosti aktiv firmy σ.
Hranice mezi sousedními ratingovými stupni se určí následujícím postupem:

Mertonův model předpokládá, že normalizované logaritmické výnosy Z_t mají normované normální rozdělení. Pokud označíme S_{Def} takovou hodnotu aktiv společnosti, že pokles pod tuto hodnotu znamená default společnosti, platí vztah:

$$p_{Def} = P[S_t \leq S_{Def}]$$

kde p_{Def} je pravděpodobnost defaultu.
Hodnotu S_t nyní chceme transfomovat na hodnotu meze Z_{CCC}. Dosazením výrazu z rovnice (4.3.1) za S_t dostáváme:

$$p_{Def} = P\left[Z_t \leq \frac{\ln(S_{Def}/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right], \tag{4.3.2}$$

kde normalizovaný výnos

$$r = \frac{\ln(S_t/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

má normované normální rozdělení. Plocha pod křivkou rzdělení nalevo od meze Z_{CCC} má obsah právě $p_{Def}\%$ obsahu celé této plochy. A tedy:

$$P\left[Z_t \leq \frac{\ln(S_{Def}/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right] = N(Z_{CCC}) \qquad (4.3.3)$$

Obdobným způsobem lze vypočítat i meze pro ostatní ratingové stupně, jejich hodnoty jsou pro oba úvěry uvedeny v následující tabulce:

Tabulka 4.5: Meze pro jednotlivé ratingové stupně pro dlužníky s počátečním ratingem A a BB.

Rating za rok	Meze Z pro rating A	Meze Z pro rating BB
AAA	3,12	3,43
AA	1,98	2,93
A	-1,51	2,39
BBB	-2,30	1,37
BB	-2,72	-1,23
B	-3,19	-2,04
CCC	-3,24	-2,30
Def	-	-

Nyní předpokládejme, že známe korelaci mezi výnosy aktiv dvou dlužníků s ratingem A a BB a označme ji ρ. Pak sdružené rozdělení normalizovaných výnosů má hustotu:

$$f(r_A, r_{BB}, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(r_A^2 - 2\rho r_A r_{BB} + r_{BB}^2)\right]$$

Za předpokladu, že $\rho = 0,2$, bude sdružená pravděpodobnost toho, že oba dlužníci zůstanou v původních ratingových kategoriích (A a BB):

$$P[s_A^i(1), s_{BB}^j(1)] = P[-1,51 < r_A \leq 1,98; -1,23 < r_{BB} \leq 1,37]$$
$$= \int_{-1,51}^{1,98} \int_{-1,23}^{1,37} f(r_A, r_{BB}, \rho) dr_A dr_{BB} = 0,7365$$

Obdobně se spočítá dalších 63 možností sdružených pravděpodobností přechodu.
Abychom dostali rozdělení forwardové hodnoty portfolia složeného ze dvou úvěrů, musíme pro všech 64 možných budoucích stavů (kombinací ratingových stupňů, ve kterých se budou dlužníci za rok nacházet) vypočítat forwardové hodnoty.
Tento výpočet se provede stejně jako v minulé podkapitole s pomocí forwardových zero křivek z tabulky 4.2 zvlášť pro každý z úvěrů. Pro každou z 64 možných kombinací ratingových stupňů je forwardová hodnota portfolia daná součtem hodnot pro jdnotlivé úvěry, v našem případě dlužníci mají ratingy A a BB:

$$FV_{i,j} = FV_i^A + FV_j^{BB}$$

pro $i, j \in \{AAA, AA, ..., Def\}$
Pak už stejným způsobem jako v případě jednoho úvěru můžeme určit střední hodnotu a Value at Risk.

4.4 Value at Risk pro portfolio složené z více úvěrů

Teoreticky by bylo možné počítat Value at Risk pro libovolně velké portfolio způsobem uvedeným v předchozí podkapitole. Prakticky to ovšem díky časové náročnosti není efektivní, protože pro portfolio složené z N úvěrů by matice sdružených pravděpodobností přechodu měla 8^N hodnot.
Proto metoda CreditMetrics využívá simulační metodu Monte Carlo, což umožňuje generovat celkové rozdělení forwardových hodnot portfolia na konci zvoleného časového horizintu (u nás jeden rok).
Výpočet můžeme rozdělit do následujících šesti kroků:

1. Výpočet mezí výnosů aktiv pro všechny ratingové stupně.

2. Odhad vzájemných korelací mezi všemi dlužníky.

3. Generování scénáře pro výnosy aktiv. V každém scénáři je pro každého dlužníka je na základě znalosti parametrů sdruženého normálního rozdělení vygenerován výnos.

4. Pro každého dlužníka je na základě hodnoty výnosů aktiv určena nová ratingová kategorie, do které bude na konci roku zařazen.

5. Bude určena forwardová hodnota portfolia pomocí forwardových zero křivek a měr návratnosti v případě defaultu.

6. Kroky 3. - 5. se mnohokrát zopakují. Z výsledných hodnot je pak možné určit Value at Risk jako vybraný percentil z forwardové hodnoty portfolia.

Nyní se blíže zaměříme na jednotlivé kroky:

Krok 1: Meze hodnot výnosů aktiv Z_i^j, $i, j \in \{AAA, AA, ..., CCC\}$, i představuje vstupní rating, j rating na konci roku, určíme na základě známých pravděpodobností přechodu z tabulky 4.1 postupem uvedeným v minulé podkapitole. Předpokládáme tedy, že normalizované výnosy z aktiv jednotlivých dlužníků mají rozdělení N(0,1). Pokud si očíslujeme jednotlivé ratingové stupně jako:

$$Def = 1, CCC = 2, ..., AAA = 8$$

Pak mez Z_i^j pro $i, j \in \{AAA, AA, ..., CCC\}$ vypočítáme jako:

$$Z_i^j = N^{-1}\left(\sum_{k=1}^{j-1} p_{i,k}\right),$$

kde $p_{i,k}$ je pravděpodobnost přechodu z ratingové kategorie i do kategorie k.

Krok 2: Pokud bychom odhadovali korelace mezi všemi dvojicemi dlužníků způsobem, který byl nastíněn dříve pro případ dvou úvěrů, byl by výpočet pro několikatisícová portfolia, jaká se obvykle v praxi vyskytují, velice časově náročný. Protože pro portfolio o N dlužnících je potřeba odhadnout $\frac{N(N-1)}{2}$ korelací.
Jednou z možností, jak se tomuto problému vyhnout, je uvažovat pro všechny dvojice dlužníků konstantní korelaci. Podle CreditMetrics - Technical Document [7] empirické výzkumy ukazují, že průměrné korelace mezi dvojicemi

dlužníků v portfoliu kolísají mezi 20-35%. Za předpokladu konstantní korelace se výpočet velmi zjednoduší, ovšem pokud je portfolio vystaveno riziku plynoucímu z nadměrné koncentrace (např. mnoho dlužníků působí ve stejné zemi a stejném odvětví průmyslu), toto riziko nebude simulací odhaleno.
V modelu CreditMetrics je proto použita metoda, která počítá korelace mezi dlužníky na základě korelací mezi průmyslovými indexy v jednotlivých zemích. Pokud pro některé průmyslové odvětví není v dané zemi průmyslový index pozorovatelný, použije se pro jeho odhad hodnota celkového indexu burzy a světového průmyslového indexu pro dané odvětví.
V praxi se nejčastěji odhadují korelace z informací o týdenních výnosech (případně měsíčních) indexů za období T týdnů. Pak se spočítá průměrný týdenní výnos i-tého indexu jako:

$$\overline{R}^i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t^i$$

kde R_t^i je výnos i-tého indexu v týdnu t. Odhad směrodatné odchylky týdenních výnosů pak je:

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t^i - \overline{R}^i\right)^2}$$

Nyní se spočítá kovariance týdenních výnosů pro všechny páry indexů:

$$cov(i,j) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t^i - \overline{R}^i\right)\left(R_t^j - \overline{R}^j\right)$$

Odtud vypočítáme korelaci jako:

$$\rho_{i,j} = \frac{cov(i,j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

Nyní na základě těchto korelací vypočteme korelace mezi dvojicemi dlužníků. Ukážeme to na následujícím příkladě:
Uvažujeme dva dlužníky:

1. Dlužník X podniká pouze v českém dřevařském průmyslu. Jeho výnosy z aktiv jsou z 80% vysvětleny výnosy indexu českého dřevařského průmyslu. Zbylých 20% jsou výnosy specifické pro dlužníka (jsou také nezávislé na specifických výnosech ostatních dlužníků).

2. Dlužník Y podniká z 60% v rakouském pojišťovnictví, z 15% v rakouském bankovnictví a z 25% v českém pojišťovnictví. 15% jeho výnosů jsou výnosy specifické pro dlužníka.

Následující tabulka ukazuje směrodatné odchylky a korelace průmyslových indexů relevantních pro dlužníky X a Y:

Tabulka 4.6: Směrodatné odchylky a korelace mezi průmyslovými indexy. Směrodatné odchylky jsou uvedeny kurzívou za názvem průmyslu v každém řádku.

Index *směrodat. odch.*	**Dřev prům. CZ**	**Poj. CZ**	**Poj. AT**	**Bank. AT**
Dřev. prům. CZ *2,00%*	1,00	0,10	0,05	0,05
Poj. CZ *1,7%*	0,10	1,00	0,35	0,20
Poj. AT *1,1%*	0,05	0,35	1,00	0,40
Bank. AT *1,2%*	0,05	0,20	0,40	1,00

Protože výnosy z aktiv dlužníka X jsou vysvětleny z 80% průmyslovým indexem a z 20% jsou specifické pro dlužníka, uvažujeme dvě nezávislé náhodné veličiny z normovaného normálního rozdělení, kde $r^{(X)}_{CZd}$ představuje stadardiozované výnosy z českého dřevařského průmyslu a $r^{(X)}_s$ výnosy specifické pro dlužníka X. Standardizované výnosy pro dlužníka X tedy můžeme psát jako:

$$r^{(X)} = w_1 r^{(X)}_{CZd} + w_2 r^{(X)}_s$$

Výnosy dlužníka X jsou z 80% vysvětleny průmyslovým indexem, $w_1 = 0,8$. Protože zde předpokládáme, že výnos je normalizovaný, musí tedy platit, že celková směrodatná odchylka výnosů $\sigma = 1$ proto, $w_2 = \sqrt{1 - w_1^2} = 0,6$.

Výnosy aktiv dlužníka Y jsou vázány na tři průmyslové indexy, výpočet je tedy o něco složitější. Nejprve je nutné vypočítat směrodatnou odchylku pohybu relevantních indexů:

$$\begin{aligned}\sigma = (&0,60^2 \cdot \sigma^2_{ATp} + 0,25^2 \cdot \sigma^2_{CZp} + +0,15^2 \cdot \sigma^2_{ATb} \\ &+2 \cdot 0,60 \cdot 0,25 \cdot \rho_{ATp,CZp} \cdot \sigma_{ATp} \cdot \sigma_{CZp} \\ &+2 \cdot 0,60 \cdot 0,15 \cdot \rho_{ATp,ATb} \cdot \sigma_{ATp} \cdot \sigma_{ATb} \\ &+2 \cdot 0,25 \cdot 0,15 \cdot \rho_{CZp,ATb} \cdot \sigma_{CZp} \cdot \sigma_{ATb})^{1/2}\end{aligned}$$

Tedy $\sigma = 0,012$. Protože průmyslové indexy vysvětlují výnosy dlužníka Y z 85%, váhy rakouského pojišťovnictví a bankovnictví a českého pojišťovnictví jsou:

$$\tilde{w}_1 = 0,85 \cdot \frac{0,60 \cdot \sigma_{ATp}}{\sigma} = 0,71$$

$$\tilde{w}_2 = 0,85 \cdot \frac{0,15 \cdot \sigma_{ATb}}{\sigma} = 0,12$$

$$\tilde{w}_3 = 0,85 \cdot \frac{0,25 \cdot \sigma_{CZp}}{\sigma} = 0,19$$

Nakonec dopočítáme váhu výnosů specifických pro dlužníka Y:

$$\tilde{w}_3 = \sqrt{1 - 0,85^2} = 0,53$$

Výnosy z aktiv pro dlužníky X a Y lze tedy zapsat jako:

$$r^{(X)} = 0,80 r^{(X)}_{CZd} + 0,6 r^{(X)}_s$$

a

$$r^{(Y)} = 0,71 r^{(Y)}_{ATp} + 0,12 r^{(Y)}_{ATb} + 0,19 r^{(Y)}_{CZp} + 0,530 r^{(Y)}_s.$$

Protože výnosy specifické pro jednotlivé dlužníky jsou zcela nezávislé na všech ostatních výnosech, je korelace mezi dlužníky X a Y rovna:

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) =& 0,80 \cdot 0,71 \cdot \rho_{CZd,ATp} + 0,80 \cdot 0,25 \cdot \rho_{CZd,CZp} \\ &+ 0,80 \cdot 0,15 \cdot \rho_{CZd,ATb} = 0,07\end{aligned}$$

Nyní zobecníme výpočet vah w pro dlužníka, jehož výnos z aktiv je ovlivněn n průmyslovými indexy. Uvažujme, že dlužník podniká podílem $\tilde{w}_i$ v i-tém průmylovém odvětví pro $i \in \{1, ..., n\}$, přitom $(1-\alpha)$-podíl výnosů je specifický pro daného dlužníka. Potom vypočítáme obdobně jako v předchozím příkladě směrodatnou odchylku pohybu indexů:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{w}_i^2 \sigma_i^2) + \sum_{i,j=1}^{n} (2\tilde{w}_i \tilde{w}_j \rho(i,j) \sigma_i \sigma_j)}$$

$$\bar{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} & & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \mathcal{C} & & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Obrázek 5: Korelační matice $\bar{C}$

Protože α podíl pohybu výnosů dlužníka je vysvětlený průmyslovými indexy, musíme váhy $\tilde{w}_i$ upravit:

$$w_i = \alpha \cdot \frac{\tilde{w}_i \sigma_i}{\sigma},$$

kde $i \in \{1, ..., n\}$. Váha pro specifický výnos dlužníka je dána vztahem: $w_s = \sqrt{1 - \alpha^2}$

V následujících odstavcích ukážeme zobecnění výpočtu pro n dlužníků, s váhami na m indexech. Korelaci výnosů z aktiv mezi těmito společnostmi vypočítáme následujícím způsobem:
Nechť C je korelační matice průmyslových indexů s rozměry $m \times m$. Matici C nyní musíme rozšířit o členy, které zajišťují zohlednění specifického výnosu dlužníků. Dostaneme tak matici $\bar{C}$ (viz. obrázek 5).
Matici $\bar{C}$ tvoří v horní levé části matice C, na ni diagonálně navazuje dolní levá matice, kterou tvoří jednotková matice o rozměrech $n \times n$, která reprezentuje členy specifické pro jednotlivé společnosti. Tyto dvě matice se doplní nulovými naticemi na čtvercovou matici $(m + n) \times (m + n)$.
Dále vytvoříme matici W o rozměrech $(m+n) \times n$, v níž sloupce reprezentují jednotlivé dlužníky, řádky reprezentují jednotlivé indexy a členy specifické pro firmu.
Ukážeme si konstrukci matice $\bar{C}$ a W na příkladu dlužníků ABC a XYZ:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0,16 & 0,08 & 0 & 0 \\ 0,16 & 1 & 0,34 & 0 & 0 \\ 0,08 & 0,34 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$W = \begin{pmatrix} 0,90 & 0 \\ 0 & 0,74 \\ 0 & 0,15 \\ 0,44 & 0 \\ 0 & 0,60 \end{pmatrix}.$$

Matici korelací mezi všemi dvojicemi dlužníků o rozměrech $n \times n$ dostaneme ze vztahu: $W^T\bar{C}W$.

Krok 3: Ve třetím kroku je v rámci jednoho scénáře pro portfolio složené z n úvěrů vygenerováno n náhodných čísel se sdruženého normálního rozdělení s korelační maticí $W^T\bar{C}W$ vypočtenou v předchozím kroku.

Krok 4: Na základě vygenerovaných hodnot z minulého kroku je každému dlužníkovi přidělen nový rating podle toho, kterou mez vypočítanou v kroku 1 jeho standardizovaný výnos překročil.

Krok 5: Nakonec se přepočítá hodnota portfolia na konci zvoleného horizontu (1 rok) s pomocí forwardových zero křivek a měr návratnosti.

Nyní uvedeme příklad, který shrne postup popsaný v předchozích krocích, příklad byl opět převzat z CreditMetrics - Technical Document [7]:

Uvažujeme portfolio složené ze tří dluhopisů, všechny vyplácejí kupóny ročně, jsou "senior unsecured", budeme je značit Dluh 1-3. Dluh 1 je pětiletý dluhopis s ratingem BBB a nominální hodnotou 4 mil. \$ a kupónem 6% p.a. Dluh 2 je tříletý dluhopis s ratingem A, nominální hodnotou 2 mil. \$ a kupónem 5% p.a. Dluh 3 je dvouletý s ratingem CCC, nominálem 1 mil. \$ a kupónem 10% p.a. Pravděpodobnosti přechodu jsou opět převzaty z tabulky 4.1, shrnuje je následující tabulka:

Tabulka 4.7: Pravděpodobnosti přechodu pro dlužníky s ratingy BBB, A a CCC.

Rating	**Dluh 1**	**Dluh 2**	**Dluh 3**
AAA	0,02	0,09	0,22
AA	0,33	2,27	0,00
A	5,95	91,05	0,22
BBB	86,93	5,52	1,30
BB	5,30	0,74	2,38
B	1,17	0,26	11,24
CCC	0,12	0,01	64,86
Def	0,18	0,06	19,79

Těmto pravděpodobnostem přechodu odpovídají meze uvedené v tabulce 4.8:

Tabulka 4.8: Meze výnosů aktiv pro dlužníky s ratingy BBB, A a CCC.

Mez	**Dluh 1**	**Dluh 2**	**Dluh 3**
Z_{AAA}	3,54	3,12	2,86
Z_{AA}	2,78	1,98	2,86
Z_{A}	1,53	-1,51	2,63
Z_{BBB}	-1,49	-2,30	2,11
Z_{BB}	-2,18	-2,72	1,74
Z_{B}	-2,75	-3,19	1,02
Z_{CCC}	-2,91	-3,24	-0,85

Protože výpočtu korelací jsme se v kroku 2 věnovali podrobně včetně konkrétního příkladu, nyní budeme předpokládat, že korelace mezi dlužníky jsou předem dány:

Tabulka 4.9: Korelace mezi dlužníky.

	Dluh 1	Dluh 2	Dluh 3
Dluh 1	1,0	0,3	0,2
Dluh 2	0,3	1,0	0,2
Dluh 3	0,1	0,2	1,0

Nyní vygenerujeme 10 scénářů pro výnosy aktiv těchto tří dlužníků. Výsledky vygenerovaných hodnot spolu se zařazením do ratingových kategoriií na základě mezí z tabulky 4.8 je v tabulce 4.10:

Tabulka 4.10: Scénáře pro výnosy aktiv a jim odpovídající ratingové kategorie.

Scénář	Dluh 1	Dluh 2	Dluh 3	Rating 1	Rating 2	Rating 3
1	-0,7769	-0,8750	-0,6874	BBB	A	CCC
2	-2,1060	-2,0646	0,2996	BB	BBB	CCC
3	-0,9276	0,0606	2,7068	BBB	A	A
4	0,6454	-0,1532	-1,1510	BBB	A	Def
5	0,4690	-0,5639	0,2832	BBB	A	CCC
6	-0,1252	-0,5570	-1,9479	BBB	A	Def
7	0,6994	1,5191	-1,6503	BBB	A	Def
8	1,1778	-0,6342	-1,7759	BBB	A	Def
9	1,8480	2,1202	1,1631	A	AA	CCC
10	0,0249	-0,4642	0,3533	BBB	A	CCC

Stejným postupem jako v podkapitolách 4.2 a 4.3 provedeme přecenění portfolia s pomocí forwardových zero křivek uvedených v tabulce 4.2. Pokud dojde k defaultu dlužníka, je forwardová hodnota závazku určena pomocí míry návratnosti. Míry návratnosti však v čase poměrně výrazně kolísají, proto jsou modelovány pomocí beta rozdělení, což způsobuje pokaždé jinou hodnou hodnotu dluhu 3 v případě defaultu, což ukazuje následující tabulka. Pro případ senior unsecured závazků uvažujeme průměrnou míru návratnosti 51,13% se směrodatnou odchylkou 25,45%.

Tabulka 4.11: Forwardové rozdělení hodnoty jednotlivých obligací a celého portfolia.

Scénář	Dluh 1	Dluh 2	Dluh 3	Portfolio
1	4,302	2,126	1,056	7,484
2	4,081	2,063	1,056	7,200
3	4,302	2,126	1,161	7,589
4	4,302	2,126	0,657	7,085
5	4,302	2,126	1,056	7,484
6	4,302	2,126	0,754	7,182
7	4,302	2,126	0,269	6,697
8	4,302	2,126	0,151	6,579
9	4,346	2,130	1,137	7,613
10	4,302	2,126	1,056	7,484

Chceme-li nyní určit hodnotu Value at Risk na hladině 10%, najdeme takovou hodnotu, pro kterou je 10% pozorování menších než tato hodnota a 90% je větších. Taková hodnota se nachází mezi hodnotami 6,697 mil.$ a 6,579 mil.$. Pokud uvažujeme konzervativně, bude $VaR_{0,1}(1) = 6,579 mil.\$$. Jinak bychom museli zvolit nějakou formu aproximace.
Střední hodnota forwardové hodnoty portfolia za 1 rok je $E(FV) = 7,2397$ mil.$ a směrodatná odchylka $\sigma = 0,365$ mil.$.
Odtud tedy dostáváme velikost neočekkávané ztráty: $E(FV) - VaR_{0,1}(1) = 0,66$ mil.$

5 Oceňování CDS

V této kapitole bude popsán jeden z modelů, které jsou používané pro oceňování CDS. Jde o Hull-Whiteův model uvedený v Hull, White [4] a dále rozšířený v Hull, White [5]. První část pojednává o oceňování CDS v případě, že bereme v úvahu pouze kreditní riziko ze strany referenční jednotky. Druhá část zahrnuje rovněž úvěrové riziko protistrany v kontraktu.

Při popisu modelu budeme uvažovat, že dluhovým nástrojem je obligace. Pro ostatní dluhové nástroje budou jednotlivé modely obdobné. Rozdíly budou pouze v předpokládaných peněžních tocích z nástroje plynoucích, model je pak potřeba o tyto toky opravit.
Předpokládáme, že prodávající úvěrového rizika je zároveň držitelem referenčního aktiva (v tomto případě obligace).

Nejprve se zaměříme na ocenění CDS v případě, že nebereme v úvahu riziko selhání protistrany. Pak lze oceňování CDS rozdělit do dvou kroků:

1. Výpočet rizikově neutrální pravděpodobnosti selhání referenční jednotky v různých budoucích okamžicích.

2. Výpočet současné hodnoty očekávaných budoucích peněžních toků z CDS vyplývajících.

Z těchto údajů lze stanovit cenu aktuálně prodávaného CDS nebo spread pro oceňování nového obchodu.

5.1 Modely pro odhad pravděpodobnosti selhání referenční jednotky

Odhad rizikově neutrální pravděpodobnosti selhání referenční jednotky vychází z předpokladu, že důvodem nižší ceny obligací emitovaných referenční jednotkou oproti bezrizikovým obligacím (za bezrizikové jsou považovány např. státní dluhopisy) je právě riziko jejího selhání. Platí tedy, že rozdíl cen bezrizikové a rizikové obligace je roven současné hodnotě nákladů v případě selhání.
Užitím tohoto principu na větší množství obligací emitovaných referenční jednotkou a vytvořením předpokladu o míře návratnosti v případě defaultu lze odhadnout pravděpodobnost selhání referenční jednotky v různých budoucích okamžicích.

V praxi je potřeba dostatek pozorování. Pokud tedy referenční jednotka emituje relativně málo aktivně obchodovaných oblligací, k výpočtům se používají obligace jiného emitenta, u kterého se v každém budoucím okamžiku předpokládá stejné riziko selhání jako u referenční jednotky. Za společnosti se stejným rizikem selhání jsou považovány subjekty se stejným ratingem a ideálně také působící ve stejném průmyslovém odvětví a geografické oblasti jako referenční jednotka.
V následujících odstavcích bude uveden model pro výpočet rizikově neutrální pravděpodobnosti selhání. Nejprve předvedeme diskrétní model, který poté zobecníme na spojitý případ.

Uvažujeme N obligací emitovaných referenční jednotkou nebo subjektem se stejným rizikem selhání, proto pravděpodobnost selhání všech obligací je v každém budoucím okamžiku shodná. Předpokládáme, že k selhání může dojít pouze v okamžicích splatnosti jednotlivých dluhopisů. Okamžik splatnosti i-tého dluhopisu označíme jako t_i a platí: $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$. Dále definujeme:

b_j : Současná hodnota j-té obligace

G_j : Cena bezrizikové obligace se stejnými očekávanými peněžními toky jako v případě j-té obligace

$F_j(t)$: Budoucí hodnota j-tého dluhopisu v čase t za předpokladu, že nedošlo k selhání, $(t < t_j)$

$v(t)$: Bezriziková diskontní míra

$C_j(t)$: Pohledávka prodávajícího úvěrového rizika v případě selhání j-té obligace v čase $t < t_j$

$R_j(t)$: míra návratnosti j-tého dluhopisu v případě selhání v čase $t < t_j$

α_{ij} : současná hodnota ztráty v případě selhání j-té obligace v čase t_i

p_i : rizikově neutrální pravděpodobnost selhání obligací v čase t_i

Pokud jsou míry návratnosti nenulové, je nutné učinit předpoklad týkající se pohledávky prodávajícího úvěrového rizika v případě defaultu j-té obligace. Můžeme předpokládat, že výše pohledávky je rovna ceně obligace v případě, že nedošlo k defaultu. Ale nejlepším předpokladem podle Hulla a Whitea [4] je, že pohledávka při defaultu je rovna nominální hodnotě obligace plus úrok nahromaděný od předchozí kupónové platby. (Dále budeme při výpočtech tento předpoklad používat.)

Nejprve budeme pro výpočet pravděpodobnosti selhání předpokládat, že úrokové míry jsou deterministické a že míry návratnosti a výše pohledávek jsou pevně dány.
Vzhledem k předpokladu konstantních úrokových měr je cena j-té obligace v čase t $F_j(t)$. Pokud v čase t dojde k selhání, prodávající úvěrového rizika obdrží podíl $R_j(t)$ z pohledávky $C_j(t)$. Platí tedy vztah:

$$\alpha_{ij} = v(t_i)[F_j(t_i) - R_j(t_i)C_j(t_i)] \tag{5.1.1}$$

Pravděpodobnost ztráty α_{ij} je p_i. Současná hodnota budoucí ztráty z j-té obligace je tedy:

$$G_j - B_j = \sum_{i=1}^{j} p_i \alpha_{ij} \tag{5.1.2}$$

Pro $j = 1$ tedy máme:

$$p_1 = \frac{G_1 - B_1}{a_{11}}$$

Vyjádřením z rovnice (5.1.2) a ze vztahu pro p_1 lze postupně dopočítat p_j pro $j \in \{2, ..., N\}$:

$$p_j = \frac{G_j - B_j - \sum_{i=1}^{j-1} p_i \alpha_{ij}}{\alpha_{jj}}$$

Při obou výše zmíněných předpokladech o výši pohledávky prodávajícího úvěrového rizika v případě defaultu lze za předpokladu vzájemné nezávislosti bezrizikových úrokových měr, měr návratnosti a událostí selhání zobecnit výše uvedený model také pro stochastické úrokové míry, proměnlivé míry návratnosti a proměnlivé pravděpodobnosti selhání. (Platí tedy rovnice (5.1.1) a (5.1.2).)
V dalším textu budeme zároveň předpokládat, že všechny obligace mají v okamžiku selhání stejnou senioritu (tj. prioritu při vyrovnávání závazků referenční jednotky) a že očekávaná míra návratnosti je nezávislá na čase. $R_j(t)$ je tedy nezávislá na j i t a dále ji budeme označovat $\tilde{R}$.

Nyní ukážeme, jak lze model pro odhad rizikově neutrální pravděpodobnosti selhání rozšířit pro případ, kdy selhání může nastat v kterémkoli okamžiku.

Definujeme hustotu pravděpodobnosti selhání $q(t)$ tak, že $q(t)\Delta t$ je pravděpodobnost selhání mezi t a $t + \Delta t$ odhadovaná v čase 0.
Předpokládáme, že $q(t)$ je po částech konstantní a rovna q_i pro $t_{i-1} < t < t_i$.
Obdobně jako v (5.1.1) položíme:

$$\beta_{ij} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(t)[F_j(t) - \tilde{R}C_j(t)]dt \tag{5.1.3}$$

A podobnou úvahou jako v diskrétním případě dostáváme vztah:

$$q_j = \frac{G_j - B_j - \sum_{i=1}^{j-1} q_i\beta_{ij}}{\beta jj} \tag{5.1.4}$$

Pro výpočet parametrů β_{ij} se v praxi užívají numerické metody pro výpočet určitých integrálů.
Protože hustota pravděpodobnosti selhání $q(t)$ musí být vždy větší nebo rovna 0, z rovnice (5.1.4) dostáváme nerovnost

$$B_j \leq G_j - \sum_{i=1}^{j-1} q_i\beta_{ij}. \tag{5.1.5}$$

Zároveň pro kumulativní pravděpodobnost selhání musí platit, že je menší nebo rovna 1. Proto:

$$\sum_{i=1}^{j} q_i(t_i - t_{i-1}) \leq 1$$

Vyjádřením q_j z tohoto vztahu a dosazením do rovnice (5.1.4) dostáváme další nerovnost:

$$B_j \geq G_j - \sum_{i=1}^{j-1} q_i\beta_{ij} - \frac{\beta_{jj}}{t_j - tj - 1}\left[1 - \sum_{i=1}^{j-1} q_i(t_i - t_{i-1})\right] \tag{5.1.6}$$

Pomocí nerovností (5.1.5) a (5.1.6) získáváme horní i dolní mez pro cenu j-té obligace a odtud lze také získat omezení pro výnos do splatnosti obligace v čase t_j. Pokud nerovnosti neplatí, může to indikovat buď neplatnost předpokladu, že reálně pozorované míry návratnosti jsou rizikově neutrální, nebo že obligace není oceněná spravedlivou cenou.

5.2 Hull-Whiteův strukturální model

V praxi jsou často CDS obchodovány aktivněji než samotné obligace emitované referenční jednotkou. Proto namísto toho, aby byl CDS spread počítán z rizikově neutrálních pravděpodobností selhání a očekávaných měr návratnosti, jsou tedy rizikově neutrální pravděpodobnosti selhání odhadovány z CDS spreadů a očekávaných měr návratnosti. Toto se pak používá pro oceňování něktrých nestandardních finančních nástrojů.
Ke stanovování rizikově neutrálních pravděpodobností selhání ze strany referenční jednotky se tak používají např. strukturání modely, které, jak už jsme uvedli v kapitole věnované modelu CreditMetrics, vycházejí z Mertonova strukturálního modelu.
V této podkapitole tedy uvedeme jeden ze strukturálních modelů uvedený v Hull, White [5]. Pomocí tohoto modelu je možné simulovat pravděpodobnosti selhání pro mnoho referenčních jednotek najednou s využitím mnohorozměrného normálního rozdělení.
Tento model je narozdíl od většiny ostatních strukturálních modelů konzistentní s rizikově neutrálními pravděpodobnostmi selhání získanými z cen korporátních obligací nebo CDS spreadů.

Nejprve předpokládejme, že máme odhadnuty rizikově neutrální hustoty pravděpodobnosti selhání $q(t)$ pro N společností buď z cen obligací nebo CDS spreadů.
Zavedeme úvěrový index - náhodnou veličinu $X_j(t)$ popisující úvěrovou bonitu j-té společnosti v čase t $(1 \leq j \leq N)$. Obecně si $X_j(t)$ můžeme představit jsko funkci hodnoty aktiv j-té společnosti.
Předpokládáme, že $X_j(0)=0$. Vývoj úvěrového indexu X_j v čase budeme modelovat pomocí Wienerova procesu $\{X_j(t), t \geq 0\}$.

Definice 5.1. Wienerův proces $W = \{W(t), t \geq 0\}$ je stochastický spojitý proces, pro který platí:

1. W(0)=0 s pstí 1
2. přírůstky jsou nezávislé (tj. náhodné veličiny $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1)$, ... ,$W(t_n) - W(t_{n-1})$ jsou nezávislé náhodné veličiny pro libovolnou konečnou posloupnost $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$)
3. rozdělení přírůstků $W(t+s) - W(t)$ je N(0,s) $s>t$

K selhání j-té společnosti dochází tehdy, když hodnota úvěrového indexu poprvé poklesne pod určenou hranici selhání. Hodnota této hranice musí být nastavena tak, aby pravděpodobnostní rozdělení doby do prvního překročení hranice odpovídalo hustotě pravděpodobnosti selhání $q(t)$.

Budeme předpokládat, že selhání může nastat pouze v časech t_i $(1 \leq i \leq n)$. Položíme $t_0=0$ a $\delta_i = t_i - t_{i-1}$ pro $1 \leq i \leq n$.
Definujeme:

q_{ij} rizikově neutrální pravděpodobnost selhání společností j v čase t_i $(1 \leq i \leq n; 11 \leq j \leq N)$

K_{ij} hodnota, při jejímž překročení dojde k selhání j-té společnosti v čase t_i

$f_{ij}(x)\Delta x$ pravděpodobnost, že $X_j(t_i)$ leží mezi x a $x + \Delta x$, za podmínky, že do času t_i nedošlo k selhání

Z těchto definic plyne, že kumulativní pravděpodobnost, že do času t_i dojde k selhání, je:

$$1 - \int_{K_{ij}}^{\infty} f_{ij}(x)dx$$

Obě veličiny, K_{ij} i $f_{ij}(x)$, mohou být postupně vypočítány z hodnot rizikově neutrálních pravděpodobností selhání q_{ij}:

Podle definice 5.2 Wienerova procesu má náhodná veličina $X_j(t_1)$ rozdělení $\mathrm{N}(0, t_1)$, $f_{1j}(x)$ lze tedy vyjádřit vztahem:

$$f_{1j}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \exp\left[-\frac{x^2}{2t_1}\right]$$

Pro q_{1j} platí:

$$q_{1j} = N\left(\frac{K_{1j}}{\sqrt{t_1}}\right)$$

kde N je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení. Odtud lze již snadno vyjádřit K_{1j}:

$$K_{1j} = \sqrt{t_1} N^{-1}(q_{1j})$$

Pro $i \in \{2, ..., n\}$ nejprve počítáme K_{ij}. Mezi q_{ij} a K_{ij} platí vztah:

$$q_{ij} = \int_{K_{i-1,j}}^{\infty} f_{i-1,j}(u) N\left(\frac{K_{ij} - u}{\sqrt{t_i}}\right) du \qquad (5.2.1)$$

Hodnota $f_{ij}(x)$ pro $x > K_{ij}$ je:

$$f_{ij} = \int_{K_{i-1,j}}^{\infty} f_{i-1,j}(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi t_i}} exp\left[-\frac{(x-u)^2}{2t_i}\right] du \qquad (5.2.2)$$

Rovnice (5.2.1) a (5.2.2) se řeší užitím metod numerické matematiky. Pro každé i uvažujeme M hodnot $X_j(t_i)$ z rozmezí K_{ij} a $5\sqrt{t_i}$, M je vhodné volit v řádech stovek. Definujeme tedy x_{ijm} jako m-tou hodnotu $X_j(t_i)$ pro $m \in \{1, ..., m\}$ a π_{ijm} jako pravděpodobnost, že $X_j(t_i) = x_{ijm}$ a do času t_i nedošlo k selhání.

Diskrétní verze rovnic (5.2.1) a (5.2.2) jsou:

$$q_{ij} = \sum_{m=1}^{M} \pi_{i-1,j,m} N\left(\frac{K_{ij} - x_{i-1,j,m}}{\sqrt{t_i}}\right)$$

a

$$\pi_{ijn} = \sum_{m=1}^{M} \pi_{i-1,j,m} p_{ijmn},$$

kde p_{ijmn} je pravděpodobnost, že X_j přejde z hodnoty $x_{i-1,j,m}$ v čase t_{i-1} do hodnoty x_{ijn} v čase t_i.

Pro $1 < n < M$ položíme:

$$p_{ijmn} = N\left[\frac{0,5(x_{ijn} + x_{i,j,n+1}) - x_{i-1,j,m}}{\sqrt{t_i}}\right] - N\left[\frac{0,5(x_{ijn} + x_{i,j,n-1}) - x_{i-1,j,m}}{\sqrt{t_i}}\right],$$

pro $n = M$:

$$p_{ijmM} = 1 - N\left[\frac{0,5(x_{ijM} + x_{i,j,M-1}) - x_{i-1,j,m}}{\sqrt{t_i}}\right]$$

a pro $n = 1$:

$$p_{ijm1} = N\left[\frac{0,5(x_{ij1} + x_{i,j,2}) - x_{i-1,j,m}}{\sqrt{t_i}}\right] - N\left[\frac{K_{ij} - x_{i-1,j,m}}{\sqrt{t_i}}\right]$$

Mez selhání není obecně horizontální, tedy K_{ij} nejsou stejná pro všechna i. Tento fakt způsobuje konzistenci modelu s rizikově neutrálními pravděpodobnostmi selhání získanými z cen obligací nebo CDS spreadů.

5.3 Oceňování CDS bez zahrnutí úvěrového rizika protistrany

V této části popíšeme základní oceňovací model pro CDS. Budeme předpokládat, že hrozí úvěrové riziko pouze ze strany referenční jednotky. Dále předpokládáme, že bezrizikové úrokové míry, míry návratnosti a události selhání jsou vzájemně nezávislé, že výše pohledávky prodávajícího úvěrového rizika v případě selhání je rovna nominální hodnotě obligace plus úrok nahromaděný od předchozí kupónové platby a že referenční obligace má jednotkovou nominální hodnotu.

Definujeme:

T : Doba platnosti kontraktu

$q(t)$: Rizikově neutrální hustota pravděpodobnosti selhání v čase t

$\hat{R}$: Očekávaná rizikově neutrální míra návratnosti v případě selhání referenčního závazku

$u(t)$: Současná hodnota ročních jednotkových plateb (v datech splatnosti kupónů) mezi časy 0 a t

$e(t)$: Současná hodnota úroku nahromaděného od předchozí pravidelné platby; uvažujeme jednoduché úročení (v čase t je hodnota nahromaděného úroku od času t^* rovna $t - t^*$)

$v(t)$: Bezriziková diskontní míra

w : Celková výše ročních plateb ze strany prodávajícího úvěrového rizika

s : CDS spread, tj. hodnota w, při které je cena CDS rovna 0

π : Rizikově neutrální pravděpodobnost, že v době platnosti kontraktu nedojde ke kreditní události

$A(t)$: Nahromaděný úrok z referenčního závazku od poslední kupónové platby vyjádřený jako procento z jeho nominální hodnoty

Rizikově neutrální pravděpodobnost π, že v době platnosti kontraktu nedojde ke kreditní události, lze vyjádřit vztahem:

$$\pi = 1 - \int_0^T q(t)dt$$

Očekávanou současnou hodnotu plateb ze strany prodávajícího úvěrového rizika lze vyjádřit následujícím vzorcem:

$$w \int_0^T q(t)[u(t) + e(t)]dt + w\pi u(T)$$

První člen vzorce vyjadřuje současnou hodnotu očekávaných plateb prodávajícího úvěrového rizika v případě, že dojde v době platnosti kontraktu ke kreditní události. Člen $w\pi u(T)$ naopak vyjadřuje současnou hodnotu budoucích plateb ze strany prodávajícího v případě, že k úvěrové události nedojde.
Jak již bylo zmíněno dříve, budeme užívat předpoklad o výši pohledávky v případě selhání referenční jednotky, že pohledávka při defaultu je rovna nominální hodnotě obligace plus úrok nahromaděný od předchozí kupónové platby.
V případě selhání v čase t je tedy rizikově neutrální platba kupujícího úvěrového rizika prodávajícímu:

$$1 - [1 + A(t)]\tilde{R} = 1 - \tilde{R} - A(t)\hat{R}$$

Současná hodnota očekávaného plnění z CDS tedy je:

$$\int_0^T [1 - \tilde{R} - A(t)\tilde{R}]q(t)v(t)dt$$

Hodnota CDS pro prodávajícího úvěrového rizika je pak dána jako rozdíl současné hodnoty očekávaného plnění ze strany kupujícího a očekávané současné hodnoty vlastních plateb kupujícímu:

$$PV_{CDS} = \int_0^T [1 - \tilde{R} - A(t)\tilde{R}]q(t)v(t)dt - w \int_0^T q(t)[u(t) + e(t)]dt - w\pi u(T)$$

Položíme-li $PV_{CDS} = 0$, dostaneme vztah pro výpočet hodnoty CDS spreadu, což vyjadřuje roční úhrn plateb prodávajícího úvěrového rizika jako procento z nominální hodnoty referenční obligace pro nově uzavřený CDS:

$$s = \frac{\int_0^T [1 - \tilde{R} - A(t)\tilde{R}]q(t)v(t)dt}{\int_0^T q(t)[u(t) + e(t)]dt + \pi u(T)} \tag{5.3.1}$$

5.4 Oceňování CDS se zahrnutím úvěrového rizika protistrany

Model pro výpočet CDS spreadu lze jednoduchou úvahou rozšířit na případ, kdy se do výpočtu zahrnuje také riziko selhání protistrany; např. z pohledu prodávajícího úvěrového rizika to tedy znamená, že kupující nedostojí svým závazkům.

Pokud zachováme značení pro případ bez zahrnutí rizika protistrany, lze kreditní spread pro CDS s délkou trvání T vyjádřit vztahem (referenční obligace má opět jednotkovou nominální hodnotu):

$$s = \frac{\int_0^T [1 - \tilde{R} - A(t)\tilde{R}]\theta(t)v(t)dt}{\int_0^T [\theta(t)u(t) + \theta(t)e(t) + \phi(t)u(t)]dt + \pi u(T)}, \tag{5.4.1}$$

kde $\theta(t)\Delta(t)$ je rizikově neutrální pravděpodobnost, že referenční jednotka mezi časy t a $t + \Delta t$ selže a zároveň dříve nedošlo k defaultu protistrany. $\phi(t)\Delta t$ je rizikově neutrální pravděpodobnost, že k selhání protistrany dojde mezi časy t a $t + \Delta t$ a zároveň dříve nedošlo k selhání referenční jednotky. π v tomto případě vyjadřuje sdruženou pravděpodobnost, že během platnosti CDS nedošlo k selhání referenční jednotky ani protistrany.

Čitatel rovnice (5.4.1) vyjadřuje stejně jako u rovnice (5.3.1) současnou očekávanou hodnotu platby ze strany kupujícího úvěrového rizika. K té dochází v případě selhání referenční jednotky. Opět zde byl použit předpoklad o výši pohledávky v případě selhání referenční jednotky, že pohledávka při defaultu je rovna nominální hodnotě obligace plus úrok nahromaděný od předchozí kupónové platby.

Na jmenovatel rovnice (5.4.1) lze nahlížet jako na současnou očekávanou hodnotu plateb ze strany prodávajícího úvěrového rizika.

Jestliže totiž referenční jednotka selže v čase t a zároveň pokud do té doby neselhala protistrana, současná hodnota plateb ze strany prodávajícího kreditního rizika je $w[u(t) + e(t)]$. Jestliže v čase t zdefaultuje protistrana a zároveň do času t neselhala referenční jednotka, je současná hodnota platby prodávajícího $wu(t)$. Kde w je opět celková výše ročních plateb ze strany prodávajícího úvěrového rizika.

Rozdílem očekávaných hodnot plateb ze strany kupujícího úvěrového rizika a plateb ze strany prodávajícího úvěrového rizika dostáváme:

$$\int_0^t [1-\tilde{R}-A(t)\tilde{R}]\theta(t)v(t)dt - w\int_0^T [\theta(t)u(t)+\theta(t)e(t)+\phi(t)u(t)]dt + w\pi u(T)$$

CDS spread dostaneme vyjádřením w z předchozího výrazu za podmínky, že je celý výraz roven 0.

Kreditní spread pro CDS z rovnice (5.4.1) lze obdobně jako v případě modelu CreditMetrics počítat Monte Carlo simulací, kdy jsou simulovány korelované úvěrové indexy protistrany a referenční jednotky (zavedené v podkapitole 5.2 v rámci Hull-Whiteova strukturálního modelu).
Korelace se zde počítají stejným způsobem jako v případě modelu CreditMetrics, jak bylo uvedeno pro případ dvou dlužníků v podkapitole 4.3. Rozdíl je pouze v tom, že Hull-Whiteův strukturální model je pouze dvoustavový, lze ho ovšem také rozšířit na vícestavový.

Nakonec ještě pro zajímavost uvedeme zjednodušený model pro zahrnutí úvěrového rizika protistrany do výpočtu CDS spreadu za podmínky, že máme spočítaný CDS spread bez rizika protistrany. Tento model přesně neodráží skutečnost, protože zahrnuje mnoho zjednodušujících předpokladů. Je tedy spíše návodem, jak takový výpočet provést.

Tento model vychází z myšlenky, že riziko selhání protistrany snižuje jak očekávané plnění z CDS v případě selhání referenční jednotky, tak i současnou očekávanou hodnotu plateb ze strany prodávajícího úvěrového rizika. Opět uvažujeme dobu trvání kontraktu T. Rovněž předpokládáme, že korelace mezi úvěrovými indexy protistrany a referenční jednotky jsou známy.

Definujeme:

P_r : Pravděpodobnost selhání referenční jednotky v době trvání kontraktu

P_c : Pravděpodobnost selhání protistrany v době trvání kontraktu

P_{rc} : Sdružená pravděpodobnost selhání protistrany a referenční jednotky mezi časy 0 a T (Lze ji spočítat postupem uvedeným v podkapitole 4.3.)

g : Proporcionální snížení současné hodnoty očekávaných plateb z CDS ze strany kupujícího úvěrového rizika plynoucí z rizika selhání protistrany

h : Proporcionální snížení současné hodnoty očekávaných plateb z CDS ze strany prodávajícího úvěrového rizika plynoucí z rizika selhání protistrany

$\tilde{s}$: CDS spread bez započtení rizika selhání protistrany

Zahrnutím rizika selhání protistrany z $\hat{s}$ dostaneme s užitím vztahu:

$$s = \tilde{s}\frac{1-g}{1-h} \tag{5.4.2}$$

Podmíněná pravděpodobnost selhání protistrany za podmínky, že referenční jednotka selže v době trvání kontraktu je $\frac{P_{rc}}{P_r}$. Předpokládejme, že je stejně pravděpodobné, že protistrana selže dříve než referenční jednotka, jako že referenční jednotka selže dříve než protistrana. Odtud tedy plyne, že:

$$g = 0,5\frac{P_{rc}}{P_r}$$

Zároveň s pravděpodobností $P_c - P_{rc}$ protistrana selže a k defaultu referenční jednotky nedojde. V takovém případě předpokládáme, že platby ze strany kupujícího úvěrového rizika jsou poloviční ve srovnání s případem, kdy protistrana neselže.
S pravděpodobností P_{rc} selžou oba subjekty - protistrana i referenční jednotka. Jak bylo zmíněno dříve, předpokládáme, že s pravděpodobností 0,5 protistrana selže dříve než referenční jednotka. Navíc předpokládejme, že pokud oba subjekty selžou a protistrana selže jako první, platby ze strany kupujícího úvěrového rizika jsou o třetinu nižší než v případě bez defaultu protistrany. Odtud dostáváme:

$$h = \frac{P_c - P_{rc}}{2} + \frac{P_{rc}}{6} = \frac{P_c}{2} - \frac{P_{rc}}{3}$$

Dosazením z rovnic pro h a g do rovnice (5.4.2) tedy dostáváme vyjádření pro CDS spread s za pomocí $\hat{s}$:

$$s = \tilde{s}\frac{1 - 0,5P_{rc}/P_r}{1 - P_c/2 + P_{rc}/3}$$

6 Aplikace popsaných modelů na reálná data

V této kapitole budou představeny výsledky aplikace modelů popsaných v kapitolách předchozích. Pomocí modelu CreditMetrics byla vypočtena forwardová hodnota portfolia úvěrů za 1 rok. Pak bylo použito několik scénářů pro zajištění částí portfolia pomocí swapů úvěrového selhání. Jednotlivé varianty pak byly porovnávány z hlediska velikosti podstupovaného úvěrového rizika.

6.1 Data

Pro výpočet byla použita historická data České spořitelny, a.s. (dále jen ČS). Soubor dat je tvořen 2471 expozicemi ČS vůči podnikové klientele, a to jak korporátní, tak i malé a střední. Korporátních expozic je 415, zbylých 2056 jsou expozice vůči malé a střední průmyslové klientele. Portfolio pro výpočet zároveň neobsahuje expozice, kterým nebyl přidělen rating, nebo pokud byl dlužník v době vytváření datového souboru v defaultu. Tyto expozice byly předem vyloučeny.
Pro každou expozici byly k dispozici následující údaje: přidělený interní rating (souhlasí s ratingovými stupni společnosti Moody's), maturita úvěru (jsou zastoupeny úvěry s maturitami 1-10 let), úroková sazba, za kterou byl úvěr poskytnut, rozvahová a podrozvahová výše expozice a průmyslové odvětví, ve kterém dlužník působí. V této práci byla uvažována pouze rozvahová část expozice, protože cílem bylo zjistit, zda a v jakém rozsahu je portfolio vhodné zajistit pomocí swapů úvěrového selhání. Zajištění tohoto typu se obvykle na podrozvahové části expozic nevztahují, z tohoto důvodu byly brány v úvahu pouze rozvahové části expozice (dále jen expozice).

Součet všech expozic je 108 973 989 850 Kč. Z toho na korporátní expozice připadá 75 397 887 223 Kč, na malou a střední průmyslovou klientelu (dále SME) tedy připadá celková expozice ve výši 33 576 102 627 Kč.

Tabulka 6.1: Struktura portfolia vzhledem k průmyslovému odvětví, ve kterém dlužníci působí. Expozice jsou v milionech Kč.

průmyslové odvětví	expozice korporátní	expozice SME	expozice celkem
1	146,64	3 004,90	3 151,54
2	718,63	159,96	878,59
3	11 435,09	14 225,88	25 660,97
4	4 373,31	433,47	4 806,78
5	571,24	1 535,34	2 106,58
6	9 009,31	7 476,45	16 485,76
7	4 871,15	1 060,28	5 877,43
8	17 057,19	1 771,64	18 828,83
9	15 650,07	1 397,50	17 047,57
10	4 383,23	185,29	4 568,53
11	429,49	65,85	495,34
12	1 221,73	826,03	2 047,76
14	5 422,77	1208,88	6631,65
15	162,04	224,63	386,67
celkem	75 397,89	33 576,10	108 973,99

kde názvy průmyslových odvětví pro kódy 1-15 jsou následující:

Tabulka 6.2: Průmyslová odvětví, ve kterých dlužníci působí.

kód	název
1	zemědělství a lesnictví
2	hornictví a těžební průmysl
3	výroba spotřebních produktů
4	energetika
5	stavebnictví
6	obchod, údržba a oprava
7	telekomunikace
8	pojišťovnictví a úvěrové obchody
9	reality
10	veřejný sektor
11	zdravotnictví, veteriární a sociální služby
12	služby
14	ostatní
15	hotelnictví a restaurace

Použité pravděpodobnosti defaultu a pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými ratingovými stupni vycházejí z historických pozorování společnosti Moody's z let 1970 - 2002, jde o jednoleté průměry. Tyto pravděpodobnosti byly převzaty z publikace Hamilton, Varma [8]. Matice pravděpodobností přechodu v této publikaci ovšem kromě sedmi nedefaultních ratingových stupňů a defaultu obsahovala také pravděpodobnosti přechodu pro případ, že pozorované společnosti nebyl přidělen žádný rating. Matici pravděpodobností přechodu tedy bylo potřeba o tento sloupec opravit. Toho bylo dosaženo tak, že pravděpodobnost připadající nepřidělení ratingu byla rovnoměrně rozdělena mezi ostatní ratingové stupně v poměru pravděpodobností přechodu mezi ostatními ratingovými stupni. Původní i upravená matice přechodu jsou uvedeny v tabulkách 6.3 a 6.4:

Tabulka 6.3: Matice pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými ratingovými stupni s možností nezařazení do žádného z ratingových stupňů, což vyjadřuje sloupec WR. Pravděpodobnosti jsou uvedeny v %.

Rating	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Def	WR
Aaa	89,60	7,01	0,72	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,67
Aa	1,16	88,41	7,39	0,26	0,08	0,01	0,00	0,02	2,68
A	0,05	2,33	89,03	4,83	0,49	0,13	0,01	0,02	3,11
Baa	0,05	0,24	5,09	84,42	4,65	0,74	0,15	0,17	4,48
Ba	0,01	0,05	0,46	5,13	79,11	6,46	0,47	1,19	7,12
B	0,01	0,03	0,13	0,41	6,16	77,60	2,69	6,30	6,68
Caa-C	0,00	0,00	0,00	0,55	1,65	3,82	62,87	23,58	7,53

Tabulka 6.4: Upravená matice pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými ratingovými stupni. Pravděpodobnosti jsou uvedeny v %.

Rating	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Def
Aaa	92,06	7,20	0,74	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Aa	1,19	90,84	7,59	0,27	0,08	0,01	0,00	0,02
A	0,05	2,40	91,89	4,99	0,51	0,13	0,01	0,02
Baa	0,05	0,25	5,33	88,39	4,87	0,77	0,16	0,18
Ba	0,01	0,05	0,50	5,52	85,17	6,96	0,51	1,28
B	0,01	0,03	0,14	0,44	6,60	83,15	2,88	6,75
Caa-C	0,00	0,00	0,00	0,59	1,78	4,13	67,99	25,50

Následující tabulka ukazuje strukturu portfolia z pohledu zařazení dlužníků do jednotlivých ratingových stupňů:

Tabulka 6.5: Rozdělení expozice podle ratingových stupňů. Expozice je v milionech Kč.

Rating	expozice korporátní	expozice SME	expozice celkem
Aaa	9,48	16,69	26,17
A	5 600,68	1 034,66	6 635,34
Baa1	3 060,85	2 027,04	5 087,89
Baa2	6 052,63	2 418,78	8 471,41
Baa3	11 535,40	3675,36	15 210,76
Ba1	4 122,96	4 840,47	8 963,43
Ba2	10 254,97	5 064,00	15 318,97
Ba3	12 341,76	3 946,06	16 287,83
B1	6 188,43	2603,46	8 791,90
B2	12 812,86	5 440,19	18 253,05
B3	1 815,68	1 440,12	3 255,80
Caa	1 015,50	386,20	1 401,70
C	586,67	683,06	1 269,73
Celkem	75 397,89	33 576,10	108 973,99

Protože dlužníci ČS byli rozděleni do více ratingových stupňů než má převzatá matice pravděpodobností přechodu, byl učiněn předpoklad, že dlužníci, jimž byl přidělen rating Baa1-Baa3, se chovají stejným způsobem, budou tedy hodnoceni jedním ratingovým stupněm Baa. Stejný předpoklad byl učiněn pro ratingové stupně Ba1-Ba3, B1-B3 a Caa-C, ty byly sjednoceny v Ba, B a Caa-C.

6.2 Výpočet forwardové hodnoty portfolia

Výpočet forwardové hodnoty portfolia můžeme rozdělit na dva případy (se zajištěním a bez zajištění), které se od sebe liší pouze v jednom z kroků. Proto nejprve uvedeme postup výpočtu pro portfolio, ve kterém není žádný z úvěrů zajištěn. V další části pak bude popsáno, jak je zajištění začleněno do výpočtu.

6.2.1 Výpočet forwardové hodnoty nezajištěného portfolia

K výpočtu forwardové hodnoty portfolia byl použit model CreditMetrics. Výpočet proběhl podle postupu uvedeného v kapitole 4.

Před samotným zahájením výpočtu bylo tedy potřeba:

- Zvolit časový horizont, na konci kterého budeme hodnotu portfolia stanovovat.
- Zvolit matici pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými ratingový stupni (včetně defaultu) pro daný časový horizont.
- Vypočítat meze Z pro hodnotu aktiv dlužníka, na jejichž základě bude dlužník zařazen do nové ratingové kategorie.
- Zvolit míry návratnosti pro případ defaultu.
- Vypočítat forwardové zero sazby pro všechny ratingové stupně.
- Zvolit korelační matici mezi průmyslovými indexy.

Horizont pro výpočet forwardové hodnoty portfolia jsme zvolili 1 rok, čemuž také odpovídá zvolená matice pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými ratingovými stupni, která byla popsána v podkapitole 6.1.

Výpočet mezí Z pro hodnoty aktiv dlužníka probíhal na základě postupu uvedeného v podkapitole 4.3. Pokud si očíslujeme ratingvé stupně: $Aaa = 1, Aa = 2, A = 3, ..., Caa - C = 7, Def = 8$, pro každou kombinaci ratingových stupňů se meze Z stanoví ze vztahu:

$$p_{ij} = \Phi(Z_{i,j-1}) - \Phi(Z_{i,j}), i \in \{1, ..., 7\}, j \in \{2, ..., 7\}$$

Pro $j = 1$ položíme: $p_{i,Aaa} = 1 - \Phi(Z_{i,Aaa})$, pro $j = 8$ pak máme: $p_{i,Def} = \Phi(Z_{i,Caa-C})$, kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce:

Tabulka 6.6: Hodnoty mezí $Z_{i,j}$ pro výnosy aktiv dlužníků. V řádcích je uveden vstupní rating, ve sloupcích nově přidělený.

i/j	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C
Aaa	-1,41	-2,44	-	-	-	-	-
Aa	2,26	-1,41	-2,67	-3,05	-3,42	-	-3,53
A	3,28	1,97	-1,58	-2,47	-2,94	-3,42	-3,53
Baa	3,28	2,74	1,59	-1,56	-2,29	-2,71	-2,91
Ba	3,70	3,22	2,54	1,55	-1,36	-2,10	-2,23
B	3,70	3,33	2,91	2,50	1,46	-1,30	-1,49
Caa-C	-	-	-	2,52	1,98	1,51	-0,66

Uvažujme např. dlužníka se vstupním ratingem Baa, pokud jeho normalizovaný výnos z aktiv bude 2,4, bude zařazen do ratingové kategorie A; dlužník by selhal, pokud normalizovaný výnos poklesne pod hodnotu -2,91.

Všechny úvěry v portfoliu mají senioritu Senior Secured. Míra návratnosti má být určena interně na základě historických zkušeností s vymmáháním dlužných částek. Takové údaje však nemáme k dispozici, proto byla použita míra návratnosti pro "senior secured" závazky od společnosti Moody's uvedená v CreditMetrics - Technical Document [7] ve výši 53,8%. Uvažujeme, že tato míra je konstantní.

Při výpočtu nemáme k dispozici informace o tržních forwardových zero sazbách, proto je musíme vypočítat. Výpočet je založen na myšlence, že ztráta vzniklá defaultujícími úvěry musí být pokryta tím, co zaplatí ostatní dlužníci. Očekávánou ztrátu tedy položíme rovnu očekávanému příjmu. Zároveň předpokládáme, že pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými ratingovými stupni se v čase nemění, matici pravděpodobností přechodu na n let dostaneme jako n-tou mocninu jednoleté matice pravděpodobností přechodu.
Vzhledem k volbě horizontu pro výpočet forwardové hodnoty portfolia 1 rok budeme uvažovat i forwardové zero sazby vztažené k tomuto horizintu. Označme i_T^k forwardovou zero sazbu na období délky T, očíslujme opět ratingvé stupně: $Aaa = 1, Aa = 2, A = 3, ..., Caa - C = 7$. Potom:

$$i_T^k = \frac{\sum_{t=1}^{T} E_t^T \Delta PD_t^k (1 - RR)}{\sum_{t=1}^{T} E_t^T (1 - PD_t^k)}, k \in \{1, ..., 7\},$$

kde značíme:

E_t^T celková expozice v čase t (pro k-tý ratingový stupeň)

RR míra návratnosti

ΔPD_t^k jednoletá pravděpodobnost defaultu pro dlužníka s ratingem k pro časový interval od $t-1$ do t

PD_t^k kumulativní pravděpodobnost defaultu mezi časy $t-1$ a t pro dlužníka s ratingem k

Přitom ΔPD_t^k se vypočítá ze vztahu:

$$(1 - PD_t^k) = (1 - PD_t^{k-1})(1 - \Delta PD_t^k)$$

a tedy:

$$\Delta PD_t^k = 1 - \frac{(1 - PD_t^k)}{(1 - PD_t^{k-1})}$$

Pro výpočet vzhledem k maturitám úvěrů (1-10 let) potřebujeme forwardové zero křivky pro $T \in \{1, ..., 9\}$. Jako příklad v následující tabulce uvádíme křivky pro všechny ratingové stupně pro $T \in \{1, ..., 5\}$:

Tabulka 6.7: Forwardové zero sazby. Hodnoty jsou uvedeny v %.

Rating/Rok	1	2	3	4	5
Aaa	0,0008	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011
Aa	0,0104	0,0073	0,0070	0,0072	0,0076
A	0,0215	0,0168	0,0179	0,0200	0,0225
Baa	0,1457	0,1073	0,1075	0,1130	0,1200
Ba	0,8199	0,5797	0,5554	0,5602	0,5733
B	3,6711	2,5326	2,3520	2,3041	2,2975
Caa-C	19,2392	14,0675	13,6314	13,7857	14,0682

Vypočtené hodnoty jsou rizikovou přirážkou k úvěru, proto musíme přičíst ještě bezrizikovou úrokovou míru, kterou uvažujeme konstantní v čase, ve výši 2,53%. Taková byla 30.12.2005 jednoletá hodnota sazby PRIBOR. Toto datum bylo zvoleno proto, že úvěry v portfoliu mají maturity od roku 2006 do roku 2015 (uvažujeme ke konci roku). Pokud má být počítána hodnota portfolia za rok, bylo vhodné posunout se do konce roku 2005. Bezrizikovou úrokovou míru můžeme uvažovat konstantní, protože je v čase velmi stabilní a nedochází u ní k významným výkyvům.

Data poskytnutá ČS obsahují také informace o korelacích mezi jednotlivými průmyslovými indexy. Matice je uložena na přiloženém CD v adresáři `VSTUP` v souboru `matice_korelaci.txt`. Výpočet jsme rovněž provedli za předpokladu, že korelace mezi všemi dvojicemi průmyslových odvětví je 20%. Předpokládáme, 40% volatility aktiv dlužníka je způsobeno volatilitou výnosů daného průmyslového odvětví, zbylých 60% volatility je specifických pro daného dlužníka, můžeme tedy psát:

$$r = \sqrt{0,4} r_p + \sqrt{0,6} r_s,$$

kde r_p je normalizovaný výnos příslušného průmyslového odvětví a r_s je výnos specifický pro dlužníka. Celková volatilita je $\sigma(r) = (\sqrt{0,4})^2 + (\sqrt{0,6})^2 = 1$. Korelace mezi průmyslovými indexy se tedy tímto způsobem přenáší a vytváří tak korelaci mezi dlužníky.

Dále také budeme předpokládat, že dlužníci splácejí úvěr rovnoměrnými splátkami a úrok platí z dosud nesplacené části jistiny.

Výpočet

K výpočtu byl použit software *Mathematica 5.2*, *Microsoft Excel*, *Microsoft Access*, *R* a programovací jazyk *Borland Pascal 7.0*. Samotný výpočet forwardové hodnoty portfolia probíhá spouštěním programu, který je na přiloženém CD uložen v adresáři `PROGRAM`. `program.pas`

V programu *Mathematica 5.2* byla provedena dekompozice korelační matice mezi průmyslovými indexy. To umožnilo generování korelovaných náhodných čísel z normovaného normálního rozdělení.
Dekompozice byla provedena metodou Singular Value Decomposition. Simulaci korelovaných náhodných čísel z N(0,1) by jednodušším způsobem umožňovala také např. Choleského dekompozice, ta však nemohla být použita, protože vstupní korelační matice nebyla pozitivně semidefinitní.
Označme vstupní korelační matici C, nechť je rozměru $N \times N$, potom metoda Singular Value Decomposition rozloží tuto matici na matice U, D a V rozměrů $N \times N$, kde D je diagonální matice a U a V jsou ortogonální, platí tedy, že $U^T U = V^T V = I$, kde I je jednotková matice. Pro matice U, D, V platí vztah:

$$C = UDV^T$$

Pokud pak máme N-složkový vektor n, jehož složkami jsou nekorelovaná náhodná čísla ze standardizovaného normálního rozdělení, potom součin $Q^T n$ je vektor, jehož složkami jsou korelovaná náhodná čísla z normálního rozdělení s korelační maticí C. Matice Q je určena vztahem $Q = D^{1/2}V^T$.
Matice Q byla uložena do textového souboru `maticeQ.txt`, který se používá jako vstup do programu `program.pas`. Zdrojový kód pro dekompozici matice C je uložen na přiloženém CD v adresáři `MATHEMATICA` pod názvem `dekompozice.nb`.

V programu R byla vygenerována náhodná čísla z normovaného normálního rozdělení. Vždy 2,5 milionu takto získaných hodnot bylo uloženo do textového souboru, který pak slouží jako vstup pro program `program.pas`. Takových souborů bylo vytvořeno 10, byly označeny jako `inputXY.txt`, kde XY je pořadové číslo souboru; jeden ze souborů `input01.txt` je jako příklad uložen v adresáři `VSTUP` na přiloženém CD.

Dalšími vstupními soubory do programu jsou: `uvery.txt`, `prechod.txt`, `meze.txt` a `urokove_sazby.txt`; všechny tyto soubory jsou uloženy v adresáři `VSTUP` na přiloženém CD.
Soubor `uvery.txt` obsahuje všechny potřebné údaje o úvěrech, tj. obsahuje o každém úvěru postupně tyto informace:
přidělený rating, průmyslové odvětví, ve kterém dlužník působí, velikost expozice, maturitu úvěru vyjádřenou zbývajícím počtem let do splacení úvěru a kreditní přirážku, ke které se v programu připočítává ještě bezriziková úroková míra.
V souboru `prechod.txt` je uložena matice pravděpodobností přechodu, jak byla uvedena v tabulce 6.4. Soubor `meze.txt` obsahuje matici mezí Z pro výnosy z aktiv dlužníků, která byla uvedena v tabulce 6.6. Do souboru `urokove_sazby.txt` byly uloženy jednoleté forwardové sazby na období délky 9 let, jejichž část ukazuje tabulka 6.7.

Jedna simulace forwardové hodnoty portfolia probíhá v programu `program.pas` v následujících krocích:

1. Jsou načteny vstupní soubory `uvery.txt`, `prechod.txt`, `meze.txt` a `urokove_sazby.txt`, `maticeQ.txt`.

2. Program načte ze vstupního souboru `inputXY.txt` 15 náhodných čísel ze standardizovaného normálního rozdělení. 15 je počet průmyslových odvětví.

3. Program vynásobí 15-ti složkový vektor maticí Q, čímž dostaneme náhodná čísla z korelovaného normálního rozdělení.

4. Pro každý úvěr je ze souboru `inputXY.txt` načteno jedno náhodné číslo r_s z N(0,1). Hodnotu r_p vyčteme z vektoru popsaného v předchozím kroku, je to hodnota odpovídající průmyslovému odvětví, ve kterém dlužník působí. Pak je vypočítán normovaný výnos aktiv dlužníka ze vztahu $r = \sqrt{0,4}r_p + \sqrt{0,6}r_s$. Na základě této hodnoty je dlužníkovi přidělen nový rating porovnáním s příslušnými hodnotami z matice mezí.

5. Jestliže byl dlužník zařazen do defaultního stavu, vypočítá se hodnota expozice na konci roku jako:

$$FV = Exp \cdot RR \cdot (1 + r),$$

kde Exp je velikost expozice, RR je míra návratnosti, $r = i + i_b$, kde i je kreditní přirážka a i_b je bezriziková úroková míra. Tato hodnota je přičtena do proměnné *suma*.

6. Jestliže byl dlužník zařazen do nedefaultního ratingového stupně, je hodnota expozice na konci roku při zachování značení z předchozího kroku dána vztahem:

$$FV = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(1+f_k)^k} \left[\frac{1}{N} Exp + r(N-k) \frac{Exp}{N} \right], \tag{6.2.1}$$

kde N je počet let do splacení úvěru a f_k je součet forwardové sazby na k let pro příslušný rating a bezrizikové úrokové sazby i_b. Pro $k = 0$ jsou pro všechny ratingové stupně $f_k = 0$. Hodnota FV je opět přičtena do proměnné *suma*. Rovnice (6.2.1) odráží předpoklad, že jistina je splácena rovnoměrně a úroky jsou spláceny pouze z nesplacené jistiny.

7. Program takto projde všechny úvěry, výslednou *sumu* pak zapíše do výstupního souboru.

Takových simulací proběhne 10 000. Aby bylo dosaženo 10 000 simulací, musí je program spuštěn opakovaně pro 10 různých vstupních souborů `inputXY.txt`. Pak je z výsledných hodnot v programu Microsoft Excel vypočítána hodnota Value at Risk.

6.2.2 Výpočet forwardové hodnoty portfolia se zajištěním

Předpokládáme, že kupujeme zajištění zvlášť pro všechny zajišťované úvěry, a to na jeden rok, aby bylo na konci roku možné porovnat forwardovou hodnotu portfolia se zajištěním a bez zajištění. Zároveň do výpočtu nezahrnujeme riziko selhání protistrany, protože konkrétní protistrana není známa. Pokud chceme počítat forwardovou hodnotu portfolia, ve kterém jsou některé úvěry zajištěné prostřednictvím CDS, musíme si vytvořit scénáře, kterými udáme kritéria pro výběr úvěrů, které budou zajištěny. Ke každému scénáři je potřeba vytvořit nový vstupní soubor `uveryXY.txt`, kde XY je označení scénáře. Soubor má stejnou strukturu jako soubor `uvery.txt` popsaný v minulé podkapitole. Je zde rozdíl pouze v tom, že úvěry, které chceme zajistit musí být zařazeny na počátek souboru a musíme znát počet souborů, které zajišťujeme.

Při spouštění programu `program.pas` pak proměnné *poc_zajistenych* přiřadíme hodnotu, která je rovna počtu zajištěných úvěrů. Program pak pracuje stejně jako v případě bez zajištění. Rozdíl je pouze v krocích 5 a 6, kdy se rozlišují dva případy - zajištěnost a nezajištěnost úvěru.
V případě, že úvěr nemá být zajištěn, výpočet zůstává stejný jako v krocích 5 a 6. Pokud má být úvěr zajištěn, nejprve se vypočítá CDS spread. Předpokládáme, že se spread platí vždy na konci roku. Na konci roku se také dozvíme, zda referenční jednotka selhala či nikoli, můžeme tedy pro výpočet CDS spreadu použít model s diskrétním časem a použít jednoleté pravděpodobnosti selhání z tabulky 6.4. CDS spread s tedy vypočítáme ze vztahu:

$$s = [1 - RR(1 + i + i_b)] \cdot PD,$$

kde RR je míra návratnosti, i je kreditní přirážka, i_b je bezriziková úroková míra a PD je příslušná pravděpodobnost defaultu, která je načtena z matice pravděpodobností přechodu.
Protože ve výpočtu CDS spreadu s je zahrnuta bezriziková úroková míra, nemá zde s význam pouze kreditní přirážky, ale už v sobě bezrizikovou úrokovou míru zahrnuje, a ke kreditnímu spreadu se tedy nepřipočítává.

Pokud je úvěr zajištěn a na základě hodnoty náhodného čísla z N(0,1) je dlužník zařazen do defaultního stavu, lze forwardovou hodnotu úvěru psát jako:

$$FV = Exp(1 - s)$$

Tu přičteme do proměnné *suma*.

V případě zařazení dlužníka do nedefaultního stavu, počítáme forwardovou hodnou úvěru jako:

$$FV = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{Exp}{(1 + f_k)^k} \left[\frac{1}{N} + r\frac{(N - k)}{N} \right] - Exp \cdot s$$

Hodnota FV je opět přičtena do proměnné *suma*. Když program prošel všechny úvěry, je *suma* zapsána do výstupního textového souboru.
Celý proces se stejně jako v případě bez zajištění mnohokrát opakuje.

Při zajišťování portfolia mohl být použit také model CreditMetrics, protože ke stanovení CDS spreadu, jak bylo posáno v kapitole 5, je potřeba stanovit pravděpodobnost defaultu referenční jednotky, v tomto případě dlužníka. Dle předpokladu sledujeme vždy na konci roku, zda dlužník selhal či nikoli; k tomuto používáme jednoleté pravděpodobnosti defaultu z tabulky 6.4. Zařazování do nových ratingových stupňů v modelu CreditMetrics probíhá na základě porovnávání výnosů dlužníka a mezí vypočtených z jednoleté pravděpodobnosti přechodu mezi ratingovými stupni rovněž z tabulky 6.4. Použitá matice pravděpodobností přechodu je tedy stejná jak pro stanovování CDS spreadu, tak i pro simulování změn kreditní bonity dlužníka. Tyto dva modely jsou tedy vzájemně konzistentní.

6.3 Výsledky

Simulace Monte Carlo byla nejprve provedena pro tři různé scénáře s korelační maticí od ČS (uložena v souboru `matice_korelaci.txt` v adresáři `VSTUP` na přiloženém CD). Poté byl celý proces zopakován za předpokladu konstantních korelací mezi jednotlivými průmyslovými odvětvími ve výši 20%. Pro každý scénář bylo provedeno 10 000 simulací forwardové hodnoty portfolia. Výsledky simulací jsou uloženy v souboru `vysledky10000.xls` na přiloženém CD, v tomto souboru jsou také přímo získané hodnoty zpracovány. Uvažované scénáře jsou následující (v závorce jsou uvedeny počty zajištěných úvěrů dle daného kritéria):

1. Žádný z úvěrů není zajištěn. (0)
2. Jsou zajištěny všechny úvěry. (2471)
3. Jsou zajištěny všechny úvěry s ratingem Caa-C. (104)

Nejprve byla vypočtena hodnota portfolia za 1 rok za předpokladu, že všichni dlužníci zůstanou v původních ratingových kategoriích:

$FV_0 = 119\,893\,008\,830$ Kč

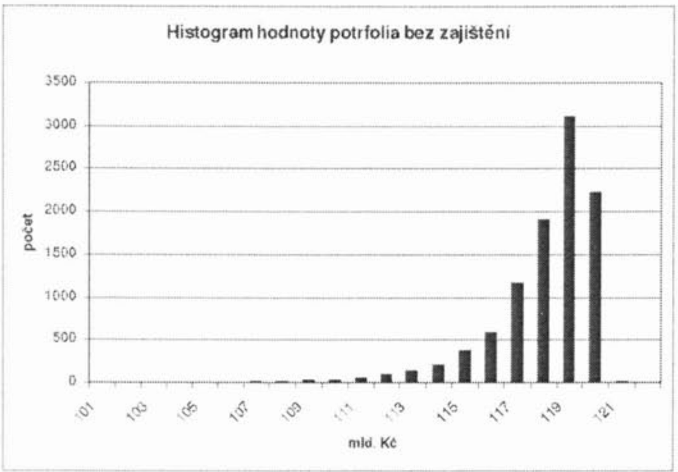
Pro každý ze scénářů byly sledovány tyto údaje:

- střední hodnota $E(FV)$
- očekávaná ztráta $EL = FV_0 - E(FV)$
- Value at Risk na hladině pravděpodobnosti 99,9% $VaR_{0,999}$
- neočekávaná ztráta $UL = E(FV) - VaR_{0,999}$
- směrodatná odchylka σ

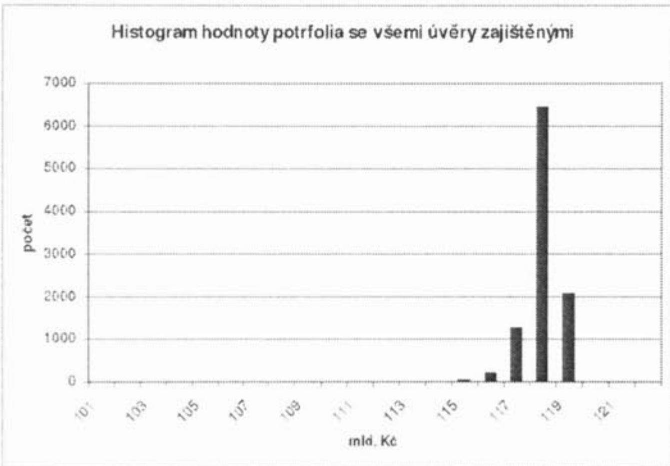
Jak bylo uvedeno v podkapitole 2.2, směrodatná odchylka není nejvhodnější mírou úvěrového rizika, ale přesto je poměrně zajímavým ukazatelem, proto ji zde také uvádíme.
Ke každému scénáři byl pro lepší představu připojen histogram nasimulovaných hodnot portfolia (grafy a)-f) v obrázcích 6 a 7).
Nejprve uvedeme výsledky pro korelační matici ČS, jsou uloženy v následující tabulce:

Tabulka 6.8: Výsledné hodnoty pro korelační matici ČS. Hodnoty jsou v mil. Kč.

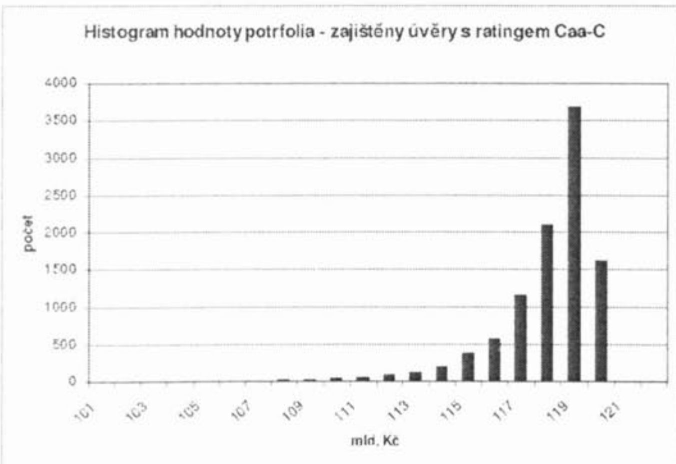
Ukazatel	**Scénář 1**	**Scénář 2**	**Scénář 3**
$E(FV)$	118 057	118 061	118 057
EL	1 837	1 832	1 836
$VaR_{0,999}$	105 776	114 907	106 477
UL	12 280	3 154	11 580
σ	2 015	592	1 859



a)

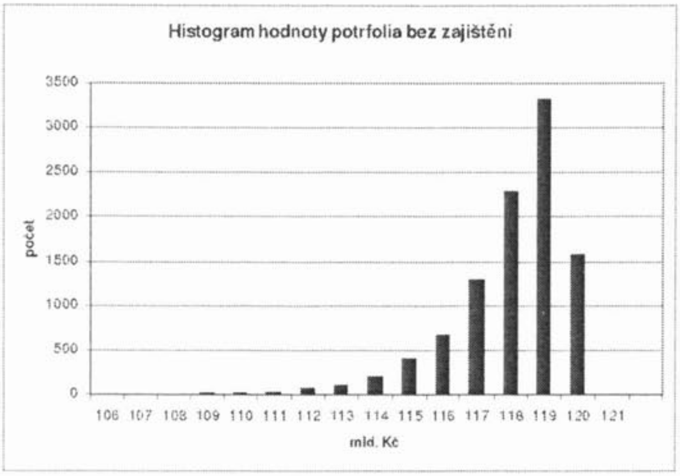


b)

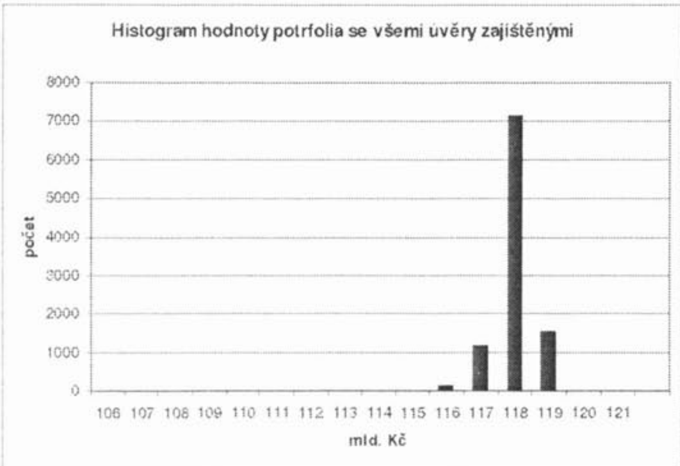


c)

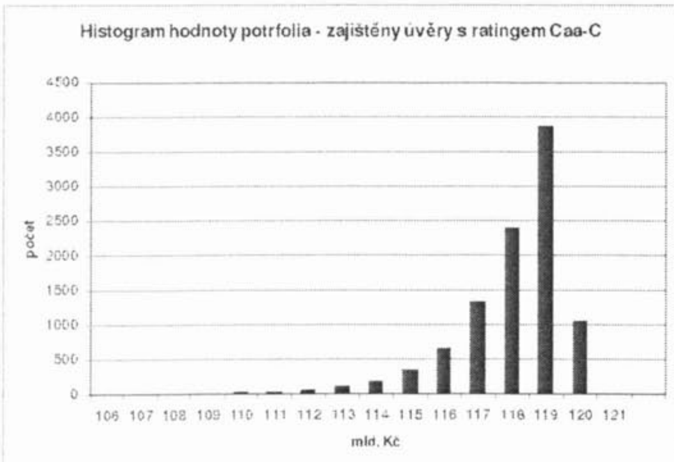
Obrázek 6: Histogram hodnoty portfolia při použití korelační matice ČS: a) kdy žádný z úvěrů není zajištěn, b) kdy jsou zajištěny všechny úvěry, c) kdy jsou zajištěny úvěry s ratingem Caa-C d)



e)



f)



Obrázek 7: Histogram hodnoty portfolia při použití korelací 20% mezi průmyslovými odvětvími: d) kdy žádný z úvěrů není zajištěn, e) kdy jsou zajištěny všechny úvěry, f) kdy jsou zajištěny úvěry s ratingem Caa-C

Nyní uvedeme stejná data získaná simulacemi, u kterých se předpokládala korelace mezi průmyslovými odvětvími 20%:

Tabulka 6.9: Výsledné hodnoty za předpokladu korelace 20% mezi indexy průmyslových odvětví. Hodnoty jsou uvedeny v mil. Kč

Ukazatel	**Scénář 1**	**Scénář 2**	**Scénář 3**
$E(FV)$	118 043	118 049	118 045
EL	1 850	1 844	1 848
$VaR_{0,999}$	108 670	115 668	108 986
UL	9 374	2 380	9 058
σ	1 686	505	1 559

Výsledky potvrzují očekávání. Se zvyšujícím se podílem zajištění se při přibližně stejné střední hodnotě (což je způsobeno oceňováním CDS fér hodnotou) zmenšuje neočekávaná ztráta, spolu s ní také směrodatná odchylka.
Zároveň je z výsledků patrné, že velikost úvěrového rizika poměrně výrazně ovlivňuje použitá korelační matice mezi průmyslovými indexy. Při použití korelační matice ČS dostáváme sice vyšší střední hodnotu (relativně se liší o 0,01%), ale zároveň také vyšší neočekávanou ztrátu i směrodatnou odchylku; podíl $UL_{20\%}/UL_{ČS}$ se pohybuje v rozmezí od 75% do 78%, pro směrodatné odchylky se podíl pohybuje v rozmezí 83% - 85%.
S využitím korelační matice ČS je tedy odhad podstupovaného úvěrového rizika vyšší.

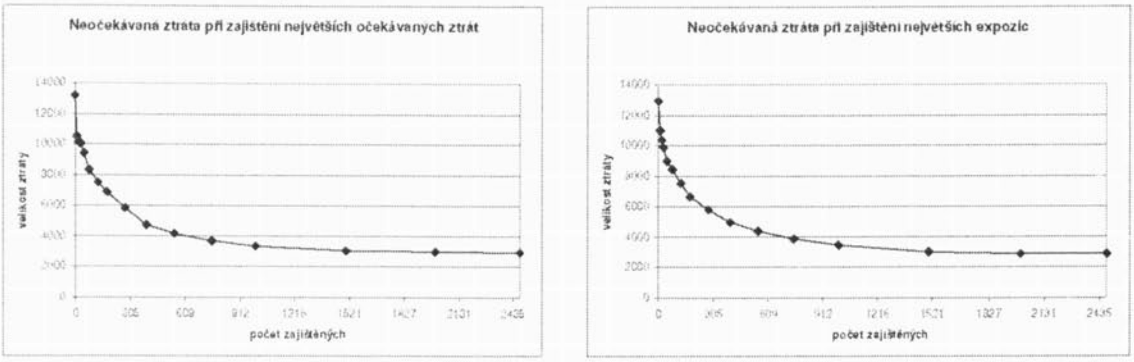
Dále jsme zkoumali, jaký vliv má počet zajištěných úvěrů na velikost neočekávané ztráty. Pro toto zkoumání jsme použili dva různé scénáře:

1. Zajišťovali jsme postupně N největších expozic v portfoliu pro $N \in \{0, 10, 20, 30, 50, 75, 125, 175, 275, 400, 550, 750, 1000, 1500, 2000, 2471\}$.

2. Zajišťovali jsme vždy N úvěrů s největší očekávanou ztrátou pro $N \in \{0, 10, 20, 30, 50, 75, 125, 175, 275, 400, 550, 750, 1000, 1500, 2000, 2471\}$.

Pro každé N pak bylo v obou případech nasimulováno 3 000 forwardových hodnot portfolia. Vše bylo provedeno dvakrát, poprvé pro korelační matici mezi průmyslovými odvětvími ČS a podruhé s konstantními korelacemi mezi průmyslovými indexy ve výši 20%.

A) B)



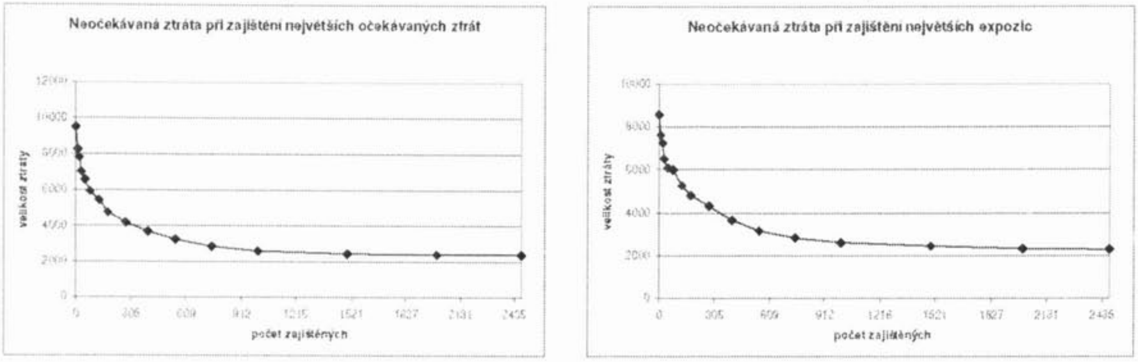
Obrázek 8: Graf vývoje velikosti neočekávané ztráty při zvyšujícím se počtu zajištovaných úvěrů: A) podle velikosti očekávané ztráty s korelační maticí ČS, B) podle velikosti expozice s korelační maticí ČS

Výsledky simulací jsou uloženy v adresari **VYSTUP** v souboru **vysledky.xls** na přiloženém CD. Postup byl pro oba scénáře a obě korelační matice následující:

1. Seřadili jsme úvěry sestupně podle daného kritéria, uložili do textového souboru `input.txt` a `input2.txt`.
2. Soubory `input.txt` a `input2.txt` byly použity jako vstup do programu `program.pas`, který jsme spustili pro každý scénář a každé N třikrát; se stejnými třemi vstupními soubory náhodných čísel z N(0,1): `input01.txt - input03.txt`, aby bylo dosaženo počtu 3 000 simulací a zároveň bylo možné výsledky lépe porovnat.
3. Nakonec jsme vypočítali stejným způsobem jako u prvních tří scénářů neočekávanou ztrátu UL pro všechny scénáře a všechna N. Velikost neočekávané ztráty v tomto případě nejlépe ukazuje velikost podstupovaného úvěrového rizika.

Grafy A) a B) v obrázku 8 zobrazují změnu velikosti neočekávané ztráty se zvětšujícím se počtem zajišťovaných úvěrů při použití korelační matice ČS, grafy C) a D) v obrázku 9 jsou ekvivalentem ke grafům A) a B) při použití 20%-ních korelací mezi indexy průmyslových odvětví.

C) D)

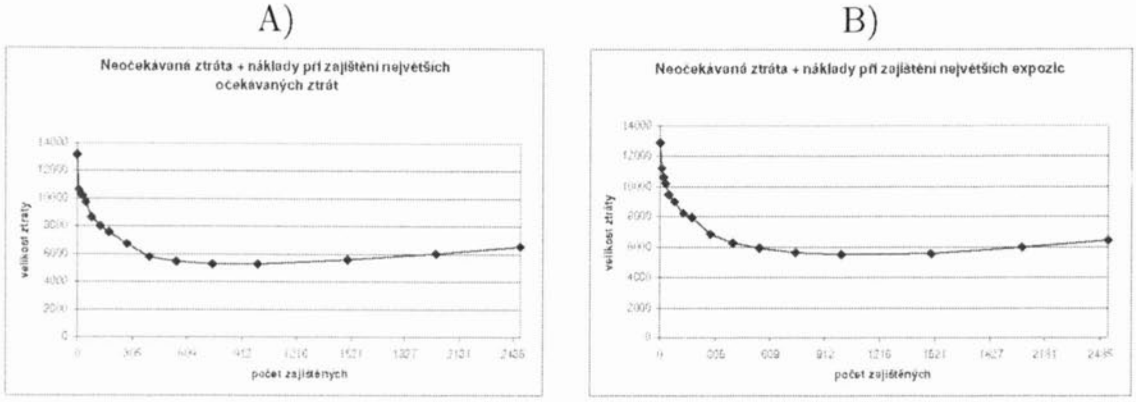


Obrázek 9: Graf vývoje velikosti neočekávané ztráty při zvyšujícím se počtu zajištovaných úvěrů: C) podle velikosti očekávané ztráty s korelacemi 20%, D) podle velikosti expozice s korelacemi 20%

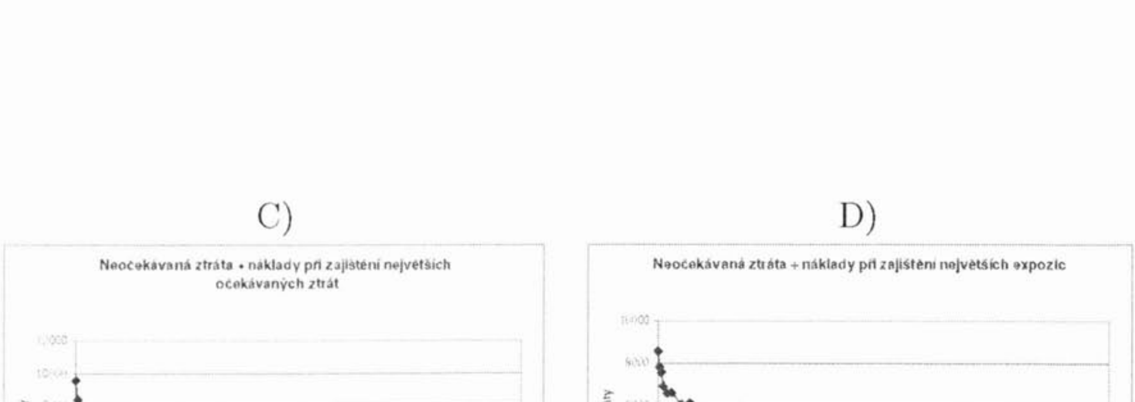
Z grafů lze vyčíst, že pro obě strategie zajišťování pro obě korelační matice se neočekávaná ztráta snižuje s rostoucím počtem zajištěných úvěrů. Rovněž průběh křivek znázorňujících změnu velikosti neočekávané ztráty v závislosti na počtu zajištěných úvěrů je pro všechny čtyři případy téměř shodný.
Aby bylo možné porovnat výhodnost jednotlivých zajišťoavcích strategií, je nutné do výpočtu zahrnout také náklady na pořízení zajištění. Na základě informací poskytnutých ČS uvažujeme právní náklady a náklady za sjednání kontraktu ve výši 1% z velikosti expozice. K tomu je ještě nutné připočítat náklady na získání externího ratingu pro každou ze zajišťovaných expozic, což běžně vyžaduje kupující úvěrového rizika; tyto náklady uvažujeme ve výši 1 mil. Kč na každý zajištěný úvěr.

Jak se změní neočekávaná ztráta, pokud k ní přičteme náklady na zajištění, je pro všechny scénáře vidět na grafech v obrázcích 10 a 11. Je zde patrné, že křivka neočekávané ztráty s rostoucím počtem zajištěných úvěrů nejprve strmě klesá, po dosažení svého minima začne opět pozvolně růst.
Pro zjištění optimálního počtu úvěrů, které je vhodné zajistit, jsme využili obdobu Markowitzova modelu pro konstrukci efektivního portfolia. Pro každé $N \in \{0, 10, 20, 30, 50, 75, 125, 175, 275, 400, 550, 750, 1000, 1500, 2000, 2471\}$ zajištěných úvěrů jsme sledovali míru podstupovaného úvěrového rizika a výnosnost portfolia. Efektivní portfolio podle Markowitze je takové, pro které platí, že neexistuje žádné portfolio:

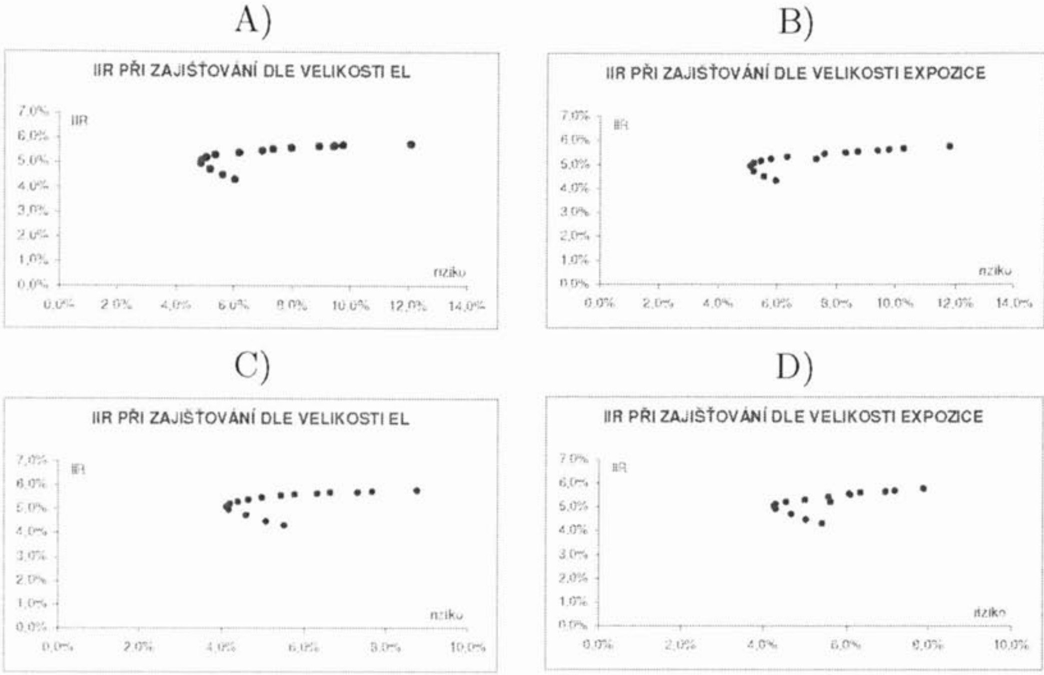
- s vyšším výnosem a shodným rizikem



Obrázek 10: Graf vývoje velikosti součtu neočekávané ztráty a nákladů na zajištění při zvyšujícím se počtu zajišťovaných úvěrů: A) podle velikosti očekávané ztráty s korelační maticí ČS, B) podle velikosti expozice s korelační maticí ČS



Obrázek 11: Graf vývoje velikosti součtu neočekávané ztráty a nákladů na zajištění při zvyšujícím se počtu zajišťovaných úvěrů: C) podle velikosti očekávané ztráty s korelacemi 20%, D) podle velikosti expozice s korelacemi 20%



Obrázek 12: Graf závislosti výnosů z portfolia na velikosti úvěrového rizika při zajišťování: A) podle velikosti očekávané ztráty s korelační maticí ČS, B) podle velikosti expozice s korelační maticí ČS, C) podle velikosti očekávané ztráty s korelacemi 20%, D) podle velikosti expozice s korelacemi 20%

- se shodným výnosem a nižším rizikem
- s vyšším výnosem a nižším rizikem

Jako míru podstupovaného rizika jsme vzhledem k rozdělení forwardových hodnot portfolia, které je značně zešikmené, zvolili poměr velikosti neočekávané ztráty včetně nákladů na pořízení zajištění a velikosti celkové expozice, tedy součtu nominálních hodnot všech úvěrů v portfoliu.
Pro měření výnosnosti portfolia jsme zvolili vnitřní míru výnosnosti (*Internal Interest Rate*, IIR), což je míra zisku, při níž je současná hodnota peněžních toků plynoucích z portfolia rovna nule, tedy v našem případě: diskontované příjmy se rovnají součtu nominálních hodnot úvěrů v portfoliu obsažených.

K výpočtu vnitřní míry výnosnosti byl použit program `program2.pas` naprogramovaný v programu *Turbo Pascal 7.0*, který při každé simulaci forwardové hodnoty portfolia vypisuje do výstupního souboru hodnoty peněžních toků plynoucích z portfolia v jednotlivých letech. (`program2.pas` je rovněž

obsažen na přiloženém CD v adresáři `PROGRAM`.) Tato data byla následneě načtena do softwaru *Microsoft Excel*, kde z nich byla vypočtena IRR pro každou ze simulací, pak pro jednotlivé strategie a jednotlivá N byla hodnota IIR zprůměrována. Tuto průměrnou hodnotu jsme použili jako míru výnosnosti.
Optimální zajištění je takové, které minimalizuje podstupované úvěrové riziko a zároveň maximalizuje výnosnost portfolia.

V obrázku 12 jsou uvedeny grafy zobrazující vnitřní míru výnosnosti odpovídající příslušnému podstupovanému riziku. Z grafů je patrné, že ne pro všechna N dostáváme efektivní portfolio v Markowitzově smyslu (pro některá N můžeme vidět, že lze dosáhnout vyššího výnosu z portfolia při stejném podstupovaném riziku). Z efektivních portfolií se jeví jako nejvýhodnější zajistit to, které minimalizuje riziko (odpovídající "špičce" výsledného obrazce), protože dílčímu nárůstu výnosnosti efektivního portfolia zde odpovídá mnohem větší nárůst rizikovosti. Pro případ našeho portfolia je optimální zajistit relativně velké množství úvěrů. V případě shodných korelací 20% pro všechny dvojice průmyslových indexů je optimální zajištění 750 úvěrů jak v případě zajišťování dle velikosti očekávané ztráty, tak v případě zajišťování dle velikosti expozice. Pro korelační matici ČS je toto číslo ještě vyšší; jako optimální vychází zajištění 1000 úvěrů podle velikosti očekávané ztráty i podle velikosti expozice. Přitom při optimálním počtu zajištěných úvěrů pro obě korelační matice je absolutní hodnota neočekávané ztráty vyšší při zajišťování dle velikosti expozice. Proto se jako výhodnější jeví zajišťovat portfolio dle velikosti očekávané ztráty.

Dále jsme se zabývali důvodem, proč jako optimální vychází zajištění poměrně velkého počtu úvěrů (30%, resp. 40% z celkového počtu úvěrů v portfoliu). Pokusili jsme se ověřit, že optimální počet zajištěných úvěrů ovlivňuje struktura portfolia. Proto jsme si vytvořili dvě fiktivní portfolia, ve kterých se vyskytovaly v různých poměrech expozice 50 mil. Kč, 100 mil. Kč, 500 mil. Kč a 1 mld. Kč. Strukturu těchto portfolií ukazuje následující tabulka:

Tabulka 6.10: Struktura fiktivích portfolií.

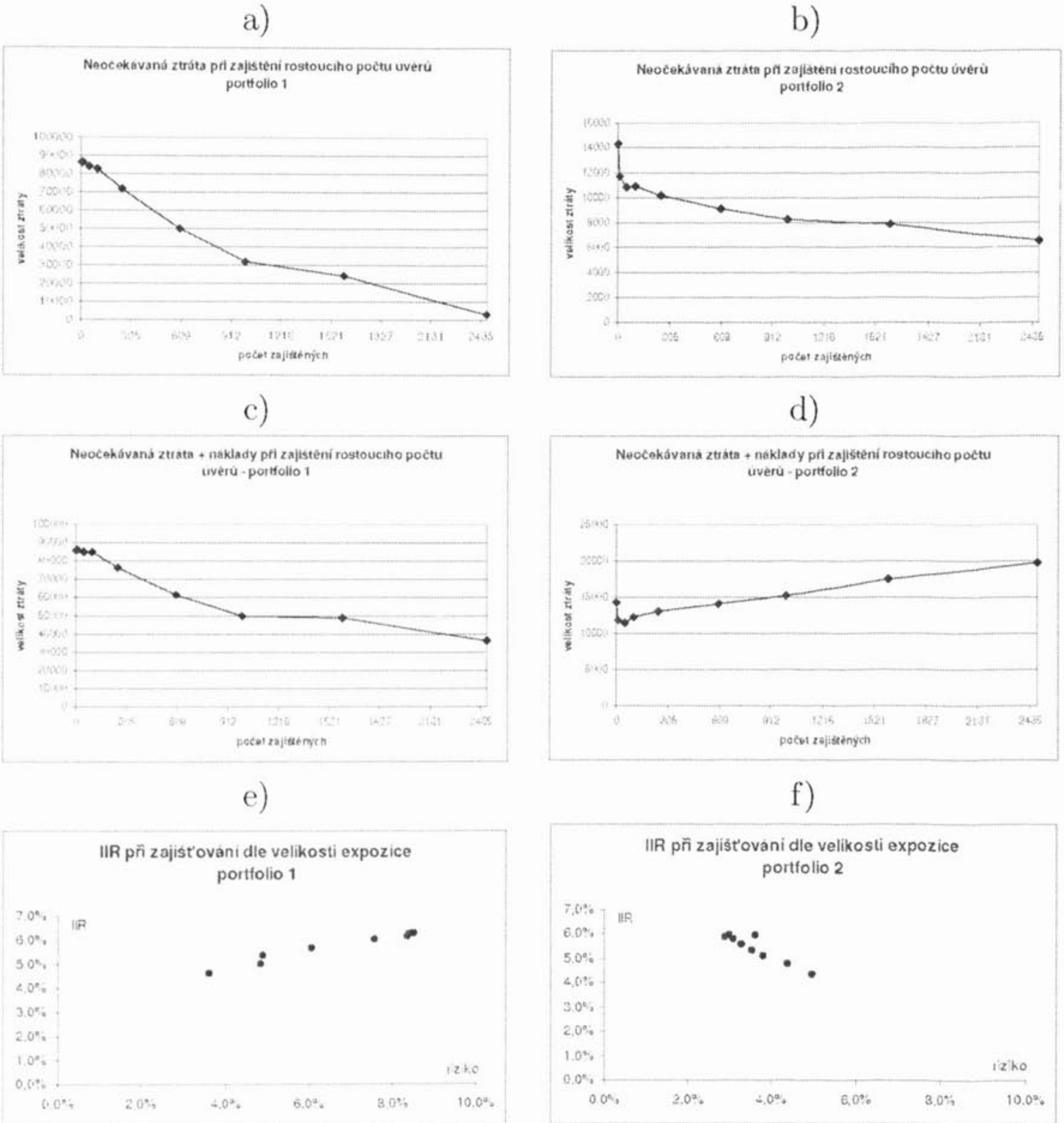
Portfolio	50 mil. Kč	100 mil. Kč	500 mil. Kč	1 mld. Kč
1	25%	25%	25%	25%
2	45%	40%	10%	5%

Protože při použití daných korelací (korelační matice ČS a 20%-ní korelace mezi průmyslovými odvětvími) je optimální počet zajištěných úvěrů vždy stejný pro obě zajišťovací strategie (dle velikosti EL i dle velikosti expozice), zkoumali jsme dvě fiktivní portfolia pouze pro korelace 20% mezi průmyslovými indexy a pro strategii zajišťování dle velikosti expozice. Při konstrukci portfolia jsme tedy postupovali následovně:

1. Seřadili jsme si úvěry v portfoliu sestupně dle velikosti expozice.
2. Postupně jsme původní expozice nahrazovali novými (dle tabulky 6.10; od nejvyšších, tedy miliardových expozic) se zachováním ostatních původních parametrů, tj. ratingu, průmyslového odvětví, ve kterém dlužník působí, a úroků, za které byl úvěr poskytnut.

Součet nominálních hodnot úvěrů pro obě portfolia je různý. Aby výsledky pro tato dvě portfolia byly porovnatelné mezi sebou a také s předchozími výsledky, upravili jsme náklady na externí rating proporcionálně vzhledem k součtu nominálních hodnot úvěrů v portfoliu, tedy fixní náklady na zajištění jednoho úvěru. Ostatní náklady jsou proporcionální, nebylo je tedy třeba upravit.
Pro obě portfolia byly provedeny stejné výpočty jako pro původní portfolio s tím rozdílem, že bylo provedeno pouze 1000 simulací pro každé $N \in \{0, 10, 50, 100, 250, 600, 1000, 1600, 2471\}$; výsledky jsou uloženy na přiloženém CD v souboru `vysledky_fikt.xls`.

Grafy znázorňující změnu velikosti neočekávané ztráty v závislosti na počtu zajištěných úvěrů bez nákladů na zajištění jsou uvedeny v obrázku 13 pod písmeny a) a b), po přičtení nákladů na zajištění neočekávanou ztrátu zobrazují grafy c) a d). Grafy e) a f) v obrázku 12 ukazují velikost vnitřní míry výnosnosti portfolia příslušnou dané relativní velikosti podstupovaného rizika.
Z grafů můžeme vypozorovat, že u portfolia 1 je optimální zajistit všechny expozice, proti tomu u portfolia 2 vychází jako optimální zajištění pouze 50 nejvyšších expozic. Je to zřejmě způsobeno tím, že při zajištění malého počtu expozic v portfoliu 1 by zbývající část portfolia nebyla dostatečně homogenní a mohlo by zde stále docházet ke značným výkyvům foorwardové hodnoty portfolia, zatímco u portfolia 2 je homogenita zbývajících částí lepší.
Také je vidět, že podstupované riziko je pro portfolio 1 celkově větší než pro portfolio 2, což zřejmě vyplývá z většího proporcionálního podílu velkých



Obrázek 13: Grafy nasimulovaných hodnot ukazatelů pro fiktivní portfolia 1 a 2: a) velikost očekávané ztráty pro portf. 1, b) velikost očekávané ztráty pro portf. 2, c) očekávaná ztráta navýšená o náklady na zajištění pro portf. 1, d) očekávaná ztráta + náklady na zajištění pro portf. 2, e) závislosti výnosů z portfolia na velikosti podstupovaného úvěrového rizika pro portf. 1, f) závislosti výnosů z portfolia na velikosti úvěrového rizika pro portf. 2

expozic v portfoliu 1, selhání takového úvěru ovlivní hodnotu VaR výrazněji než v případě úvěru s nižší expozicí. Obdobně by tomu mělo být v případě zajišťování dle velikosti očekávané ztráty.

Následující tabulka ukazuje strukturu našho původního portfolia rozděleného do stejných kategorií expozic jako u dvou fiktivních portfolií:

Tabulka 6.11: Struktura původního portfolia.

Expozice	Procentní podíl
0-10 mil. Kč	55,5%
10-50 mil. Kč	29,0%
50-100 mil. Kč	7,5%
0,1-0,5 mld. Kč	6,5%
0,5-1 mld. Kč	1,0%
$>$ 1 mld. Kč	0,5%

Záměrně jsme ještě rozdělili kategorii velikostí expozice 0-50 mil. Kč na dvě; 0-10 mil. Kč a 10-50 mil. Kč, protože jak je vidět z tabulky, do těchto kategorií spadá téměř 85% ze všech expozic. Jak napovídají výsledky, dobře homogenní je pouze kategorie úvěrů s expozicí přibližně 0-21 mil. Kč, což odpovídá 70% úvěrů, které není potřeba zajistit. (Jestliže uvažujeme korelace mezi průmyslovými indexy ve výši 20%; v případě použití korelační matice ČS se ukazuje jako výhodné zajistit úvěry s expozicí vyšší než 13 mil. Kč.)
Lze předpokládat, že obdobné výsledky bychom dostali, pokud bychom na fiktivní portfolio aplikovali zajištění dle velikosti očekávané ztráty.

7 Závěr

Cílem této práce bylo ukázat některý ze způsobů měření úvěrového rizika a jeho aplikace. V souvislosti s tím byly popsány hlavní nosiče úvěrového rizika ve finančním sektoru - dluhové finanční nástroje. Pro všechny základní typy dluhových nástrojů byly zmíněny jejich vlastnoosti, výhody a nevýhody ze strany věřitele i dlužníka, byly nastíněny možnosti jejich oceňování.

Větší míra pozornosti v tomto směru byla soustředěna na kreditní deriváty, speciálně na swap úvěrového selhání (CDS). Jeho oceňování byla věnována celá kapitola 5. Byl zde předveden model pro výpočet kreditní přirážky za CDS (CDS spreadu) ve variantě bez přihlédnutí k úvěrovému riziku protistrany v kontraktu, který pak byl rozšířen tak, aby bylo úvěrové riziko protistrany zahrnuto. Nakonec byl uveden zjednodušený model pro upravení CDS spreadu bez zahrnutí úvěrového rizika protistrany tak, aby toto riziko zahrnoval.

Jako model pro měření úvěrového rizika byl zvolen model CreditMetrics (od společnosti J.P. Morgan), je to strukturální vícestavový model, který sleduje změnu kreditní bonity dlužníků prostřednictvím zařazovaání do zvoleného počtu ratingových stupňů. Model CreditMetrics umožňuje výpočet forwardové hodnoty portfolia na zvoleném časovém horizontu, využívá k tomu simulaci Monte Carlo.

Popsané modely bylo možno demonstrovat na datech poskytnutých Českou spořitelnou, a.s., šlo o část historického portfolia úvěrů poskytnutých korporátní, malé a střední podnikové klientele. Na tomto portfoliu bylo měřeno podstupované úvěrové riziko. Bylo zároveň zvoleno několik scénářů, na jejichž základě byla vždy část portfolia zajištěna pomocí CDS a byly sledovány změny ve velikosti podstupovaného rizika při jednotlivých zajistných strategiích, zároveň bylo posuzována výhodnost takového zajištění.
Numerické výsledky ukázaly, že pokud chceme u reálného portfolia dosáhnout maximální efektivty zajištění úvěrového rizika pomocí CDS, je vhodné:

- Zajistit poměrně velký počet úvěrů (30-40%).
- Zajišťovat úvěry s největší očekávanou ztrátou.

Vzhledem k potřebě zajistit poměrně velké procento úvěrů by bylo vhodné rovněž zvážit možnost zajištění pomocí strukturovaných nástrojů jako např.

CDO (*Collateralised Debt Obligation*); bylo by tak možné jedním nástrojem zajistit celý segment portfolia (případně celé portfolio), což by mohlo vést ke snížení nákladů na zajištění.

Literatura

[1] Jílek, J. (1997): Kapitálový a derivátový trh *Bankovní institut; Praha*

[2] Jílek, J. (1997): Finanční trhy *Grada Publishing; Praha*

[3] Jílek, J. (2005): Finanční a komoditní deriváty v praxi *Grada Publishing; Praha*

[4] Hull, J., White A. (2000): Valuing Credit Default Swaps I: No Counterparty Default Risk *Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto; Canada*

[5] Hull, J., White A. (2000): Valuing Credit Default Swaps II: Modeling Default Correlations *Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto; Canada*

[6] Hull, J. (2000): Options, Futures and Other Derivatives *Prentice-Hall International; New Jersey, USA*

[7] CreditMetrics - Technical Document (1997) *J.P. Morgan & Co. Incorporated; New York*

[8] Hamilton, D., Varma, P. (únor 2003): Default & Recovery Rates of Corporate Bond Issuers, A Statistical Review of Moody's Ratings Performance, 1920-2002 *Moody's Investors Service Inc.*

[9] The J.P. Morgan Guide to Credit Derivatives With Contributions from the RiskMetrics Group *Risk Publications*