Univerzita Karlova v Praze
Matematicko–fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Václav Vlasák

Ideály kompaktních množin a borelovské funkce

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.

Studijní program: matematika, matematická analýza

Děkuji vedoucímu diplomové práce, Doc. RNDr. Miroslavu Zelenému, Ph.D., za zajímavé téma a za trpělivou a účinnou spolupráci při tvorbě diplomové práce. Dále bych chtěl poděkovat svému bratrovi, Miloslavu Vlasákovi. V neposlední řadě děkuji i svým rodičům za hmotnou i morální podporu po celou dobu studií.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne Václav Vlasák

Obsah

Název práce: Ideály kompaktních množin a borelovské funkce
Autor: Václav Vlasák
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
e-mail vedoucího: zeleny@karlin.mff.cuni.cz
Abstrakt: Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce. Označme $C(f)$ systém všech kompaktních množin $K \subset X$ takových, že $f_{|K}$ je spojitá. Podobně definujeme $\widetilde{C}(f)$ jako systém všech kompaktních množin $K \subset X$ takových, že $f_{|K}$ je spojitá a K má právě jeden hromadný bod. Zkoumáme souvislost mezi deskriptivními vlastnostmi $C(f)$ nebo $\widetilde{C}(f)$ (vzhledem k Vietorisově topologii na prostoru $\mathcal{K}(X)$) a komplexitou funkce f. Ukážeme, že jestliže $C(f)$ je analytická, pak f je borelovská, což rozšiřuje výsledky Francise Jordana ([J1], [J2]). Dále ukážeme, že $\widetilde{C}(f)$ je borelovská právě tehdy, když f je borelovská. Zabýváme se také otázkou, jaké třídy M funkcí mají tu vlastnost, že je-li funkce $f \in M$ a $C(f) = C(g)$, pak i funkce $g \in M$. Například ukážeme, že je-li funkce f Baireovy třídy α a $C(f) = C(g)$, pak i funkce g je Baireovy třídy α.
Klíčová slova: Baireovy třídy funkcí, ideály kompaktních množin, deskriptivní teorie množin, borelovské funkce.

Title: Ideals of compact sets and Borel functions
Author: Václav Vlasák
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: zeleny@karlin.mff.cuni.cz
Abstract: Let X, Y be Polish spaces and $f : X \to Y$ be a function. Denote $C(f)$ the system of all compact sets $K \subset X$ such that $f_{|K}$ is continuous. Similarly we define $\widetilde{C}(f)$ as the system of all compact sets $K \subset X$ such that $f_{|K}$ is continuous and K has exactly one limit point. We study connections between descriptive properties of $C(f)$ or $\widetilde{C}(f)$ (with respect to the Vietoris topology on $\mathcal{K}(X)$) and complexity of f. We show that if $C(f)$ is analytic then f is Borel. This extends results of Francis Jordan ([J1], [J2]). Further we show that $\widetilde{C}(f)$ is Borel if and only if f is Borel. We also solve the problem, which classes M of functions have the property that if a function $f \in M$ and $C(f) = C(g)$ then $g \in M$. For example, we show that if a function f is of Baire class α and $C(f) = C(g)$ then the function g is of Baire class α.
Keywords: Baire classes of functions, ideals of compact sets, Descriptive set theory, Borel functions.

Kapitola 1

Úvod

Tato diplomová práce se zabývá vztahem vlastností funkce f a systému kompakních množin, na nichž je funkce f spojitá a jenž budeme značit $C(f)$.

V úvodní kapitole zavedeme základní značení a uvedeme výsledky Francise Jordana ([J1], [J2]) týkající se tohoto tématu. V další kapitole uvedeme několik základních tvrzení o prostoru $\mathcal{K}(X)$. V kapitole Pomocná tvrzení si dokážeme některá speciálnější tvrzení, jež budeme potřebovat k dokázání hlavních výsledků. V závěrečné kapitole si uvedeme hlavní výsledky, jež jsou obsaženy v této diplomové práci.

V podkapitole 4.1 dokážeme, že borelovskost množiny $C(f)$ implikuje borelovskost funkce f. Dále v této podkapitole řešíme to, jak velká může být pro určitý ideál kompakních množin $\mathcal{I}$ množina takových funkcí f, že $C(f) = \mathcal{I}$. Nakonec v této podkapitole budeme pracovat s novým pojmem $\widetilde{C}(f)$. Množina $\widetilde{C}(f)$ jednoznačně určuje množinu $C(f)$, tedy je jakousi podstatnou částí této množiny, proto je zajímavé zjistit, zda nám vlastnosti množiny $\widetilde{C}(f)$ nedají nové informace o funkci f. Vlastnostmi množiny $\widetilde{C}(f)$ a funkce f se zabývá Věta 4.5.

V Podkapitole 4.2 se zabýváme otázkou, jaké množiny M funkcí mají tu vlastnost, že jestliže funkce $f \in M$ a $C(f) = C(g)$, tak i funkce $g \in M$.

Nyní si zavedeme základní pojmy a značení, jež budeme dále používat.

Definice 1.1. Nechť X je topologický prostor. Pak řekneme, že X je polský prostor, jestliže X je separabilní, úplně metrizovatelný prostor.

Značení 1.2. Nechť X, Y jsou metrické prostory, $K \subset X$ je kompaktní množina, $r, y, z > 0$, $x \in X$, $G \subset X$ a $f : X \to Y$ je funkce. Pak zavedeme následující pojmy:

- $B(K, r) := \{v \in X : \ \mathrm{dist}(v, K) < r\}$,
- $P(x, y, z) := \overline{B(x, z)} \backslash B(x, y)$,
- $P(K, y, z) := \overline{B(K, z)} \backslash B(K, y), \text{ pokud } K \neq \emptyset$,
- $P(K, y, z) := X, \text{ pokud } K = \emptyset$,

- $\operatorname{osc}(f, G) := \operatorname{diam}(f(G))$,
- $\widehat{f} : 2^X \to 2^Y$, $\widehat{f}(M) := f(M)$,
- $\operatorname{graf}(f) := \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$,
- $\mathcal{U}_{(x)} :=$ systém otevřených okolí bodu x,
- $f_{|G}$ je restrikce funkce f na množinu G.

Značení 1.3. Nechť X a Y jsou množiny. Pak definujeme zobrazení $\Pi^X : X \times Y \to X$ a $\Pi^Y : X \times Y \to Y$ jako projekci z prostoru $X \times Y$ na prostor X, respektive Y. Jestliže bude zřejmé, na jaký prostor projektujeme, tak budeme značit projekci pouze znakem Π.

Značení 1.4. Nechť $\mathbb{N} = \{1, 2, 3...\}$ je prostor přirozených čísel s diskrétní topologií. Pak definujeme Baireův prostor $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jako prostor posloupností přirozených čísel se součinovou topologií.

Nyní si zavedeme značení borelovských a projektivních tříd množin.

Značení 1.5. Nechť X je polský prostor a $\Gamma \subset 2^X$. Pak zavedeme následující pojmy:

- $\mathcal{G}(X) := \{G \subset X : \ G \text{ je otevřená}\}$,
- $\mathcal{F}(X) := \{F \subset X : \ F \text{ je uzavřená}\}$,
- $\Gamma_\sigma := \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ G_n \in \Gamma\}$,
- $\Gamma_\delta := \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ G_n \in \Gamma\}$,
- $\mathbf{\Sigma}^0_1(X) := \mathcal{G}(X)$,
- $\mathbf{\Pi}^0_1(X) := \mathcal{F}(X)$,
- $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) := \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta(X)\right)_\sigma : \ \omega_1 > \alpha > 1$,
- $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) := \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\beta(X)\right)_\delta : \ \omega_1 > \alpha > 1$,
- $\mathcal{B}(X) := \{B \subset X : \ B \text{ je borelovská}\}$,
- $\mathbf{\Sigma}^1_1(X) := \{\Pi^X(A) \subset X : \ A \in \mathcal{B}(X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}})\}$, (analytické množiny)
- $\mathbf{\Pi}^1_1(X) := \{A \subset X : \ X \backslash A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)\}$, (ko-analytické množiny)
- $\mathbf{\Pi}^1_n(X) := \{A \subset X : \ X \backslash A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X)\} : \ n \in \mathbb{N}$,
- $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X) := \{\Pi^X(A) \subset X : \ A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}})\} : \ n \in \mathbb{N}$.

Definice 1.6. Nechť X je polský prostor, Γ je třída podmnožin polských prostorů a $A \subset X$. Pak řekneme, že množina A je Γ-hard, jestliže pro každou $B \in \Gamma(Y)$, kde Y je nuldimenzionální polský prostor, existuje spojitá funkce $f : Y \to X$ taková, že $f^{-1}(A) = B$. Jestliže A je Γ-hard a současně $A \in \Gamma$, pak řekneme, že množina A je Γ-complete.

Nyní uvedeme některá klasická tvrzení týkající se borelovských a projektivních tříd množin.

Věta 1.7. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $f : X \to Y$ je spojitá funkce a $n \in \mathbb{N}$. Pak jestliže $A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X)$, tak $f(A) \in \mathbf{\Sigma}^1_n(Y)$.*

Důkaz je uveden v [K, 37.1].

Věta 1.8. *Nechť X je polský prostor. Pak je systém $\mathbf{\Sigma}^1_n(X)$ uzavřený na spočetné průniky a spočetná sjednocení.*

Důkaz je uveden v [K, 37.1].

Věta 1.9. *Nechť X je polský prostor a $A, B \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ jsou disjunktní. Pak existuje $C \subset X$ borelovská splňující $A \subset C \subset X \backslash B$.*

Důkaz je uveden v [K, 14.7].

Věta 1.10. *Nechť X je polský prostor a $A \subset X$. Jestliže $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ a současně $X \backslash A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$, pak A je borelovská.*

Důkaz. Použijeme Větu 1.9 na množiny A a $X \backslash A$. Tedy existuje borelovská množina $C \subset X$ taková, že $A \subset C \subset A$, z čehož plyne, že $A = C$, a tedy A je borelovská. □

Uveďme ještě další dvě obecně známá tvrzení.

Věta 1.11. *Nechť X je polský prostor a $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$. Pak existuje množina $F \in \mathcal{F}(X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ taková, že $A = \Pi^X(F)$.*

Věta 1.12. *Nechť X je polský prostor. Pak $\mathbf{\Sigma}^1_1(X) \supset \mathcal{B}(X)$.*

Nyní si definujeme prostor $\mathcal{K}(X)$.

Značení 1.13. Nechť X je Hausdorffův topologický prostor a U je jeho libovolná podmnožina, pak označme:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_U &:= \{K \subset U : \ K \text{ je kompaktní}\}, \\ \mathcal{N}_U &:= \{K \subset X : \ K \text{ je kompaktní} \wedge K \cap U \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Definice 1.14. Nechť X je Hausdorffův topologický prostor. Pak definujeme $\mathcal{K}(X)$ jako množinu všech kompaktních podmnožin X opatřenou topologií, jež je generována subbází $\mathcal{W}$, kde

$$\mathcal{W} \;:=\; \{\mathcal{M}_U : U \text{ je otevřená}\} \cup \{\mathcal{N}_U : U \text{ je otevřená}\}.$$

Tuto topologii nazýváme Vietorisovou topologií.

Definice 1.15. Nechť (X, d) je metrický prostor a $d \leq 1$. Pak na množině všech kompaktních podmnožin X definujeme Hausdorffovu metriku d_H následujícím předpisem:

$$\begin{aligned} d_H(K, L) \;&:=\; 0,\; K = L = \emptyset \\ &:=\; 1,\; K = \emptyset \Leftrightarrow L \neq \emptyset \\ &:=\; \max\{\max\{\operatorname{dist}(x, L) :\; x \in K\}, \max\{\operatorname{dist}(x, K) :\; x \in L\}\}. \end{aligned}$$

Tvrzení 1.16. *Nechť (X, τ) je metrizovatelný prostor, $\mathcal{V}$ je Vietorisova topologie generovaná topologií τ, $\rho \leq 1$ je kompatibilní metrika na prostoru (X, τ) a d_H je Hausdorffova metrika generovaná metrikou ρ. Pak platí následující tvrzení:*

(i) $\mathcal{V}$ je topologie na prostoru $\mathcal{K}(X)$.

(ii) d_H je metrika na prostoru $\mathcal{K}(X)$.

(iii) Metrika d_H indukuje topologii $\mathcal{V}$.

Poznámka 1.17. Nechť X je polský prostor, pak z Tvrzení 1.16 plyne, že existuje úplná metrika $\rho \leq 1$ taková, že jí příslušící Hausdorffova metrika d_H indukuje Vietorisovu topologii na prostoru $\mathcal{K}(X)$. V případě, že budeme v budoucnu pracovat s polským prostorem a budeme na tomto prostoru používat metriku ρ, tak budeme předpokládat $\rho \leq 1$ úplnou metriku.

Nyní definujeme baireovské třídy funkcí.

Definice 1.18. Nechť X, Y jsou polské prostory. Pak definujeme $\mathcal{B}_1(X, Y)$ jako množinu všech funkcí $f : X \to Y$ takových, že pro každou V otevřenou podmnožinu Y je $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}_\sigma(X)$. Dále rekursivně pro $1 < \alpha < \omega_1$ definujeme $\mathcal{B}_\alpha(X, Y)$ jako množinu všech funkcí $f : X \to Y$ takových, že existují posloupnost ordinálů $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, jež splňují:

$$\begin{aligned} 1 \leq \;& \beta_n \;< \alpha, \\ f_n \;& \in \;\mathcal{B}_{\beta_n}(X, Y), \\ f_n \;& \overset{\text{bodově}}{\longrightarrow} \; f. \end{aligned}$$

Nyní si uvedeme Lebesque-Hausdorff-Banachovu větu o vztahu mezi baireovskými třídami funkcí a borelovskými třídami množin.

Věta 1.19. *[K, 24.3] Nechť X, Y jsou polské prostory a $1 \leq \alpha < \omega_1$. Pak funkce $f : X \to Y$ je prvkem množiny $\mathcal{B}_\alpha(X,Y)$ právě tehdy, když pro každou $V \subset Y$ otevřenou je $f^{-1}(V) \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X)$.*

Nyní si definujeme třídy funkcí $\mathcal{E}_\alpha$, jež zkoumá Francis Jordan.

Definice 1.20. Nechť X, Y jsou metrické prostory, $f : X \to Y$ je funkce a $2 \leq \alpha < \omega_1$. Jestliže pro každé $x \in X$ a $\epsilon > 0$ existují $U \in \mathcal{U}_{(x)}$, $V \in \mathcal{U}_{(f(x))}$, $1 \leq \beta < \alpha$ a $G \in \Pi^0_\beta(X)$, které splňují $G \supset (f^{-1}(V) \cap U)$ a $\operatorname{osc}(f, G) < \epsilon$, pak řekneme, že $f \in \mathcal{E}_\alpha(X,Y)$.

Poznámka 1.21. Třídy funkcí $\mathcal{E}_\alpha$ jsou nadefinovány na metrických prostorech, ale je snadné si rozmyslet, že se jedná o topologický pojem, neboť $f \in \mathcal{E}_\alpha(X,Y)$ právě tehdy, když pro každé $x \in X$ a každé $W \in \mathcal{U}_{(f(x))}$ existují $U \in \mathcal{U}_{(x)}$, $V \in \mathcal{U}_{(f(x))}$, $1 \leq \beta < \alpha$ a $G \in \Pi^0_\beta(X)$, které splňují $G \supset (f^{-1}(V) \cap U)$ a $f(G) \subset W$.

Nyní definujeme klíčový pojem jehož studiem se tato práce zabývá.

Definice 1.22. Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce. Pak definujeme $C(f)$ jako množinu všech kompaktů, na nichž je restrikce funkce f spojitá.

Nyní uvedeme některé výsledky Francise Jordana, na něž tato diplomová práce navazuje.

Věta 1.23. *[J1, Theorem 1] Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce. Pak funkce f je spojitá právě tehdy, když $C(f) \in \mathcal{G}_\delta(\mathcal{K}(X))$.*

Poznámka 1.24. Předcházející tvrzení triviálně plyne z Tvrzení 2.6 a Věty 4.14.

Poznámka 1.25. Z Věty 4.1 plyne, že následující Jordanova tvrzení platí i bez předpokladu borelovskosti funkce f.

Věta 1.26. *[J1, Theorem 5] Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je borelovská funkce. Pak následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\operatorname{graf}(f) \in \mathcal{G}_\delta(X \times Y)$,

(ii) $C(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}(X))$,

(iii) $C(f_{|A})$ *není* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-hard pro* $A \in \mathcal{K}(X)$.

Věta 1.27. *[J2, Theorem 3] Nechť X, Y jsou polské prostory, $f : X \to Y$ je borelovská funkce a $2 \leq \alpha < \omega_1$. Jestliže $C(f) \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}(\mathcal{K}(X))$, pak $f \in \mathcal{E}_\alpha(X,Y)$.*

Věta 1.28. *[J2, Theorem 6, Theorem 7] Nechť X, Y jsou polské prostory, $f : X \to Y$ je borelovská funkce a $\alpha = 1, 2$. Pak funkce $f \in \mathcal{E}_\alpha(X,Y)$ právě tehdy, když $C(f) \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$.*

Věta 1.29. *[J1, Theorem 3] Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je borelovská funkce. Pak (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii), kde*

(i) $C(f) \in \mathbf{\Pi}^0_3(\mathcal{K}(X))$,

(ii) $f \in \mathcal{B}_1(X,Y)$,

(iii) $C(f) \in \mathbf{\Pi}^0_4(\mathcal{K}(X))$.

Poznámka 1.30. Předcházející věta plyne z Věty 1.28 a Důsledku 4.21.

Kapitola 2

Základní vlastnosti prostoru $\mathcal{K}(X)$

V této kapitole si uvedeme několik základních tvrzení o prostoru $\mathcal{K}(X)$, jež budeme dále používat.

Definice 2.1. Nechť X je polský prostor a A je podmnožina X, pak definujeme $O(A)$ jako množinu všech kompaktů obsažených v A, které mají právě jeden hromadný bod. Dále definujeme $O^{<\omega}(A)$ jako množinu všech konečných podmnožin množiny A.

Definice 2.2. Nechť X je Hausdorffův topologický prostor a $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(X)$. Pak řekneme, že množina $\mathcal{I}$ je ideálem kompaktních množin, jestliže platí následující dvě implikace:

$$\begin{aligned} K, L \in \mathcal{I} \quad &\Rightarrow \quad K \cup L \in \mathcal{I}, \\ K \in \mathcal{I} \wedge L \in \mathcal{K}(K) \quad &\Rightarrow \quad L \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Je snadné nahlédnout, že pro libovolnou funkci f je množina $C(f)$ ideálem kompaktních množin.

Definice 2.3. Nechť X je Hausdorffův topologický prostor a $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(X)$. Pak řekneme, že množina $\mathcal{I}$ je σ-ideálem kompaktních množin, jestliže platí následující dvě implikace:

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}: \ K_n \in \mathcal{I}) \wedge \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \in \mathcal{K}(X) \quad &\Rightarrow \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \in \mathcal{I}, \\ K \in \mathcal{I} \wedge L \in \mathcal{K}(K) \quad &\Rightarrow \quad L \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Následující tvrzení nám ukazuje, že pokud X je polský prostor, tak lze najít spočetnou subbázi $\mathcal{W}$ prostoru $\mathcal{K}(X)$ složenou pouze z množin určitého typu. To nám pak pomáhá, protože pokud dokážeme nějaké tvrzení T pro tento typ množin, pak je tvrzení T pravdivé pro každý prvek subbáze $\mathcal{W}$, čehož pak využijme v Lemmatu 3.8.

Tvrzení 2.4. *Nechť X je Hausdorffův topologický prostor a $\mathcal{D}$ je báze otevřených množin na prostoru X. Označme:*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{D}} \quad &:= \quad \{\bigcup_{s=1}^{n} U_s : \ n \in \mathbb{N}, \ U_s \in \mathcal{D}, \ s = 1, ..., n\}, \\ \mathcal{W} \quad &:= \quad \{\mathcal{M}_U : \ U \in \widetilde{\mathcal{D}}\} \cup \{\mathcal{N}_U : \ U \in \widetilde{\mathcal{D}}\}. \end{aligned}$$

Pak $\mathcal{W}$ je subbáze otevřených množin prostoru $\mathcal{K}(X)$.

Důkaz. Nechť $U \subset X$ je libovolná otevřená množina. Pak triviálně

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_U &= \bigcup_{\{V \in \widetilde{\mathcal{D}}\colon\ V \subset U\}} \mathcal{M}_V,\\ \mathcal{N}_U &= \bigcup_{\{V \in \widetilde{\mathcal{D}}\colon\ V \subset U\}} \mathcal{N}_V.\end{aligned}$$

□

Tvrzení 2.5. *Nechť X je Hausdorffův topologický prostor a množiny $K, K_n \in \mathcal{K}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, jsou takové, že*

$$K_n \quad \rightarrow \quad K. \tag{2.1}$$

Pak množina $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \cup K$ je kompaktní.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}(X)$ je libovolné otevřené pokrytí množiny

$$\widetilde{K} \quad := \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \cup K,$$

pak $\mathcal{U}$ je otevřeným pokrytím kompaktu K. Z tohoto plyne existence $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ konečného podpokrytí kompaktu K. Z tohoto plyne, že množina $M := \mathcal{M}_{\bigcup_{U\in\mathcal{V}} U}$ je otevřeným okolím kompaktu K. Z čehož spolu s (2.1) plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, které splňuje:

$$\bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} K_i \cup K \quad \subset \quad M.$$

Dále si stačí uvědomit, že $\mathcal{U}$ je otevřeným pokrytím kompaktu $\bigcup_{i=1}^{n_0} K_i$, tedy existuje konečné otevřené pokrytí $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ kompaktu $\bigcup_{i=1}^{n_0} K_i$. Nyní si stačí uvědomit, že $\mathcal{V} \cup \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ je konečné otevřené pokrytí množiny $\widetilde{K}$, tedy $\widetilde{K}$ je kompaktní.

□

Tvrzení 2.6. *Nechť X je Hausdorffův topologický prostor. Pak $A \in \mathcal{G}_\delta(X)$ právě tehdy, když $\mathcal{K}(A) \in \mathcal{G}_\delta(\mathcal{K}(X))$.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathcal{G}_\delta(X)$, pak existují $U_n \subset X$ otevřené takové, že $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Z tohoto plyne, že

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(A) &= \mathcal{K}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big),\\ \mathcal{K}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}(U_n) \in \mathcal{G}_\delta(\mathcal{K}(X)).\end{aligned}$$

Nechť naopak $\mathcal{K}(A) \in \mathcal{G}_\delta(\mathcal{K}(X))$. Pak definujme funkci $f : X \to \mathcal{K}(X)$ následovně:

$$f(x) = \{x\} : x \in X.$$

Funkce f je spojitá, tedy

$$A = f^{-1}(\mathcal{K}(A)) \in \mathcal{G}_\delta(X).$$

$\square$

Tvrzení 2.7. *[KLW] Nechť X je polský prostor a $\mathcal{I} \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{K}(X))$ je σ-ideál. Pak $\mathcal{I} \in \mathcal{G}_\delta(\mathcal{K}(X))$ nebo $\mathcal{I} \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{K}(X))$-complete.*

Nyní si uvedeme tvrzení o ideálech kompaktních množin, jež původně dokázal Daugherty.

Tvrzení 2.8. *[K2] Nechť X je polský prostor a $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(X)$ je ideál. Jestliže $\mathcal{I} \in \mathcal{G}_\delta(\mathcal{K}(X))$, pak $\mathcal{I}$ je σ-ideál.*

Tvrzení 2.9. *Nechť X je polský prostor a množina $A \in \mathcal{F}_\sigma(X)\backslash\mathcal{G}_\delta(X)$. Pak množina $\mathcal{K}(A) \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{K}(X))$-complete.*

Důkaz. Množina $\mathcal{K}(A)$ je σ-ideál. Z Tvrzení 2.6 plyne, že $\mathcal{K}(A) \notin \mathcal{G}_\delta(\mathcal{K}(X))$. Tvrzení 2.7 nám tedy dává $\mathcal{K}(A) \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{K}(X))$-complete, pokud $\mathcal{K}(A) \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{K}(X))$. K dokončení důkazu nám tedy stačí ukázat, že $\mathcal{K}(A) \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{K}(X))$. Z definice $\mathcal{K}(A)$ plyne, že

$$\mathcal{K}(X)\backslash\mathcal{K}(A) = \{K \in \mathcal{K}(X) : \exists x \in X\backslash A : x \in K\}. \tag{2.2}$$

Množina $X\backslash A \in \mathcal{G}_\delta(X)$, tedy $X\backslash A$ je polský prostor, tedy prostor $\mathcal{K}(X) \times (X\backslash A)$ je rovněž polský. Definujme množinu:

$$M := \{(K, x) \in \mathcal{K}(X) \times (X\backslash A) : x \in K\}.$$

Z (2.2) plyne, že

$$\mathcal{K}(X)\backslash\mathcal{K}(A) = \Pi^{\mathcal{K}(X)}(M),$$

z čehož spolu s uzavřeností množiny M v polském prostoru $\mathcal{K}(X) \times (X\backslash A)$ plyne $\mathcal{K}(A) \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{K}(X))$.

$\square$

Nyní ukážeme dvě lemmata, jež pak využijeme k důkazu Věty 4.1 a Věty 4.5.

Lemma 2.10. *Nechť X je polský prostor a $M \subset X$ je spočetná množina, pak $\{K \in \mathcal{K}(X) : \overline{K \cap M} = K\}$ je $\mathcal{F}_{\sigma\delta}(\mathcal{K}(X))$.*

Důkaz. X je polský prostor, tedy X má spočetnou bázi otevřených množin $\mathcal{W}$. Pak pro $A, B \subset X$ platí:

$$\overline{A} = \overline{B} \quad\Leftrightarrow\quad \forall V \in \mathcal{W}: \; (A \cap V = \emptyset \Leftrightarrow B \cap V = \emptyset).$$

Což dává:

$$\begin{aligned}\{K \in \mathcal{K}(X) : \overline{K \cap M} = K\} &= \{K \in \mathcal{K}(X) : \forall V \in \mathcal{W}\; ((K \cap V = \emptyset) \vee \\ &\quad (\exists d \in V \cap M : d \in K))\}.\end{aligned}$$

Označme si:

$$\begin{aligned} N^V &:= \{K \in \mathcal{K}(X) : K \cap V = \emptyset\}, \\ N_d &:= \{K \in \mathcal{K}(X) : d \in K\}. \end{aligned}$$

Pak triviálně N_d, N^V jsou uzavřené pro všechna d a V a

$$\{K \in \mathcal{K}(X) : \overline{K \cap M} = K\} = \bigcap_{V \in \mathcal{W}} \left(N^V \cup \bigcup_{d \in V \cap M} N_d \right).$$

Což dává dokazované tvrzení.

□

Lemma 2.11. *Nechť X je polský prostor. Jestliže $\mathcal{V} \subset \mathcal{K}(X)$ je analytická množina, pak je analytická také množina $N := \bigcup_{K \in \mathcal{V}} K$.*

Důkaz. Protože $\mathcal{V} \subset \mathcal{K}(X)$ je analytická množina, tak existuje uzavřená množina $F \subset \mathcal{K}(X) \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taková, že

$$\mathcal{V} = \Pi(F). \tag{2.3}$$

Označme:

$$M := \{(x, K, s) \in X \times \mathcal{K}(X) \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \; x \in K \wedge (K, s) \in F\}.$$

Je snadné nahlédnout, že M je uzavřená množina. Dále si stačí uvědomit, že $x \in N$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathcal{V}$ tak, že $x \in K$, a to je podle (2.3) právě tehdy, když existuje $(K, s) \in F$ splňující $x \in K$. Z definice množiny M je tedy zřejmé, že $N = \Pi^X(M)$, z čehož plyne, že množina N je analytická.

□

Kapitola 3

Pomocná tvrzení

Nyní si uvedeme několik tvrzení, jež pak využijeme v následující kapitole.

Definice 3.1. Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce. Pak definujeme $\widetilde{C}(f)$ jako množinu všech kompaktů s právě jedním hromadným bodem, na nichž je restrikce funkce f spojitá.

Z Heineho věty je zřejmé, že ideál $C(f)$ je jednoznačně určen množinou $\widetilde{C}(f)$.

Definice 3.2. Nechť X je polský prostor a $K \subset X$ je kompaktní množina. Definujme $d(K)$ jako množinu všech hromadných bodů kompaktu K. Zobrazení $d : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ budeme nazývat derivací.

Lemma 3.3. *Nechť X, Y jsou Hausdorffovy topologické prostory a nechť $f : X \to Y$ je spojitá funkce. Pak $\widehat{f}$ zobrazuje $\mathcal{K}(X)$ do $\mathcal{K}(Y)$.*

Důkaz. Tvrzení plyne ze známého faktu, že spojitý obraz kompaktu je kompakt. □

Lemma 3.4. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $B_1 \subset X$, $B_2 \subset Y$ jsou borelovské množiny. Pak množina $B_1 \times B_2 \subset X \times Y$ je také borelovská.*

Lemma 3.5. *Nechť X_1, X_2, Y_1, Y_2 jsou polské prostory a $f_1 : X_1 \to Y_1$ a $f_2 : X_2 \to Y_2$ jsou borelovské funkce, pak funkce $F : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ definovaná předpisem:*

$$F(x, y) \quad := \quad (f_1(x), f_2(y))$$

je také borelovská.

Důkaz. Nechť $\mathcal{V}_i$ je spočetná báze otevřených množin prostoru Y_i, $i = 1, 2$. Označme:

$$\mathcal{W} \quad := \quad \{B_1 \times B_2 : \; B_i \in \mathcal{V}_i, \; i = 1, 2\}.$$

Tedy $\mathcal{W}$ je spočetná báze otevřených množin $Y_1 \times Y_2$, z čehož plyne, že stačí ověřit, že $f^{-1}(B_1 \times B_2)$ je borelovská pro každou $B_1 \times B_2 \in \mathcal{W}$. Nechť je tedy $B_1 \times B_2 \in \mathcal{W}$ libovolná, pak

$$f^{-1}(B_1 \times B_2) \; = \; f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2) \; = \; (f_1^{-1}(B_1) \times X_2) \cap (X_1 \times f_2^{-1}(B_2)),$$

což je borelovská množina.

□

Nyní si uvedeme dvě klasické věty z deskriptivní teorie množin.

Věta 3.6. (Lusinova věta) Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je spojitá funkce. Jestliže $A \subset X$ je borelovská množina a $f_{|A}$ je prostá, pak i množina $f(A)$ je borelovská.

Důkaz. Důkaz je uveden v [K, 15.1].

□

Věta 3.7. (Hurewiczova věta) Nechť X je polský prostor a $B \subset X$ je ko-analytická množina. Jestliže $B \notin \mathcal{G}_\delta(X)$, pak existuje kompaktní množina $C \subset X$ taková, že množina $C \cap A$ je hustá v C a homeomorfní $\mathbb{Q}$.

Důkaz. Důkaz je uveden v [K, 21.18].

□

Následující lemma nám dává nástroj jak zjišťovat borelovskou třídu u funkcí, jejichž cílovým prostorem je prostor $\mathcal{K}(X)$ pro nějaký polský prostor X. Toto lemma pak použijeme při důkazu Lemmatu 3.9 a Lemmatu 3.14.

Lemma 3.8. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $\mathcal{D}$ je spočetná báze otevřených množin na prostoru X a $f : Y \to \mathcal{K}(X)$ je funkce. Pak jestliže pro každou $U \subset X$ otevřenou je $f^{-1}(\mathcal{M}_U) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y)$, tak $f \in \mathcal{B}_\alpha(Y, \mathcal{K}(X))$.*

Důkaz. Nechť množina $\widetilde{\mathcal{D}}$ je definována stejně jako v Tvrzení 2.4, pak z Tvrzení 2.4, spočetnosti báze $\mathcal{D}$ a Věty 1.19 plyne, že stačí ověřit, že pro každou $U \in \widetilde{\mathcal{D}}$ platí:

$$f^{-1}(\mathcal{M}_U) \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(Y), \tag{3.1}$$

$$f^{-1}(\mathcal{N}_U) \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(Y). \tag{3.2}$$

Vztah (3.1) platí podle předpokladu. Stačí tedy ukázat platnost vztahu (3.2). Mějme tedy $U \in \widetilde{\mathcal{D}}$ pevně zvolenou a nalezněme otevřené množiny $V_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že

$$X \backslash U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n.$$

Pak z definic množin $\mathcal{N}_U$ a $\mathcal{M}_{V_n}$ snadno plyne, že

$$\mathcal{N}_U = \mathcal{K}(X) \backslash \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{V_n} \right),$$

z čehož plyne, že

$$f^{-1}(\mathcal{N}_U) = Y \backslash \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\mathcal{M}_{V_n}) \right),$$

z čehož spolu s předpokladem našeho lemmatu již snadno plyne (3.2).

□

Lemma 3.9. *Nechť X je polský prostor a $d : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ je derivace, pak $d \in \mathcal{B}_2$.*

Důkaz. Z Lemmatu 3.8 plyne, že stačí ukázat:

$$\forall U \in \mathcal{G}(X) : \quad d^{-1}(\mathcal{M}_U) \in \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{K}(X)). \tag{3.3}$$

Zvolme pevně $U \subset X$ otevřenou. Pak existuje systém otevřených množin $\{U^i\}_{i=1}^\infty$, splňující:

$$\forall i \in \mathbb{N} : \quad \overline{U^i} \subset U^{i+1}, \tag{3.4}$$

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U^i. \tag{3.5}$$

Označme:

$$\mathcal{M} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{K \in \mathcal{K}(X) : \ \mathrm{card}(K \setminus \overline{U^i}) \leq i\}. \tag{3.6}$$

Nyní ukážeme, že

$$d^{-1}(\mathcal{M}_U) = \mathcal{M}. \tag{3.7}$$

Buď tedy nejprve $K \in d^{-1}(\mathcal{M}_U)$ libovolný, neboli $d(K) \subset U$. Z (3.4), (3.5) a kompaktnosti $d(K)$ plyne, že existuje $i_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$d(K) \subset U^{i_0}.$$

Odtud a z kompaktnosti množiny K plyne, že existuje $s > i_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathrm{card}(K \setminus U^{i_0}) \leq s$. Z čehož spolu s (3.4) plyne:

$$\mathrm{card}(K \setminus \overline{U^s}) \leq s. \tag{3.8}$$

Tedy z (3.6) plyne, že $K \in \mathcal{M}$.

Jestliže $K \in \mathcal{M}$, pak z (3.6) plyne existence $s \in \mathbb{N}$, že platí (3.8), z čehož vyplývá, že $d(K) \subset \overline{U^s} \subset U$, tedy $K \in d^{-1}(\mathcal{M}_U)$, čímž jsme ukázali platnost (3.7).

Dále označíme $H_i := \{K \in \mathcal{K}(X) : \ \mathrm{card}(K \setminus \overline{U^i}) \leq i\}$ a ukážeme, že

$$\forall i \in \mathbb{N} : \quad H_i \in \mathcal{F}(\mathcal{K}(X)). \tag{3.9}$$

Důkaz povedeme sporem. Nechť tedy existují $i \in \mathbb{N}$, $\{K_n \in \mathcal{K}(X) : \ n \in \mathbb{N}\} \subset H_i$ a $K \notin H_i$, které splňují:

$$K_n \to K. \tag{3.10}$$

Z $K \notin H_i$ plyne existence množiny $T \subset K \setminus \overline{U^i}$, která splňuje $\mathrm{card}(T) = i + 1$. Prvky T označme po řadě x_1,..., x_{i+1}. Protože $\overline{U^i}$ je uzavřená a T je konečná množina, tak existuje $r > 0$ takové, že

$$\begin{aligned} B(x_n, r) &\subset X \setminus \overline{U^i} \ : 1 \leq n \leq i+1, \\ B(x_n, r) \cap B(x_m, r) &= \emptyset \ : 1 \leq n < m \leq i+1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Z (3.10) plyne existence $n \in \mathbb{N}$ takového, že $d_H(K, K_n) < r$. Tedy pro každé $1 \leq m \leq i+1$ existuje $y_m \in B(x_m, r) \cap K_n$, z čehož spolu s (3.11) plyne, že

$$\operatorname{card}(K_n \backslash \overline{U^i}) \;\; \geq \;\; \operatorname{card}\{y_m : \; 1 \leq m \leq i+1\} \; = \; i+1.$$

Tedy $K_n \notin H_i$, což je spor.

Z definice H_i, (3.9), (3.6) a (3.7) již plyne (3.3).

□

Lemma 3.10. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce. Pak je funkce f borelovská právě tehdy, když pro každou uzavřenou množinu $F \subset Y$ je $f^{-1}(F)$ analytická množina.*

Důkaz. Jestliže je f borelovská funkce, pak pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je množina $f^{-1}(F)$ borelovská, tím spíše analytická.

Nechť naopak platí, že

$$\forall F \subset Y \text{ uzavřenou}: \;\; f^{-1}(F) \;\; \in \;\; \mathbf{\Sigma}^1_1(X). \tag{3.12}$$

Buď $H \subset Y$ libovolná uzavřená množina, pak pro dokončení důkazu stačí ukázat, že $f^{-1}(H)$ je borelovská množina. Prostor Y je metrizovatelný, tedy existují uzavřené množiny $F_n \subset Y, n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$Y \backslash H \;\; = \;\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Z čehož plyne, že

$$X \backslash f^{-1}(H) \;\; = \;\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(F_n).$$

Z čehož spolu s Větou 1.8 a (3.12) plyne, že $X \backslash f^{-1}(H)$ je analytická množina. Tedy podle Věty 1.10 je $f^{-1}(H)$ borelovská množina.

□

Následující lemma nám ukazuje, že pro každou uzavřenou podmnožinu F prostoru Y existuje spočetná množina, jež spolu s ideálem $C(f)$ jednoznačně generuje vzor množiny F. Toto lemma je klíčové pro celou podkapitolu 4.1.

Lemma 3.11. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce. Jestliže množina $F \subset Y$ je uzavřená a množina $D \subset X \times Y$ je hustou podmnožinou množiny $(\Pi^Y)^{-1}(F) \cap \operatorname{graf}(f)$, pak označíme-li*

$$\mathcal{V} \;\; := \;\; C(f) \cap \{K \in \mathcal{K}(X) : \;\; K = \overline{K \cap \Pi^X(D)}\}, \tag{3.13}$$

tak platí

$$f^{-1}(F) \;\; = \;\; \bigcup_{K \in \mathcal{V}} K. \tag{3.14}$$

Důkaz. Nejprve označme:

$$A \;:=\; (\Pi^Y)^{-1}(F) \cap \mathrm{graf}(f). \tag{3.15}$$

Množina D je hustá v množině A, tedy

$$\overline{\Pi^X(D)} \;\supset\; \Pi^X(A) = f^{-1}(F). \tag{3.16}$$

Nyní ukážeme, že

$$\bigcup_{K \in \mathcal{V}} K \;\subset\; f^{-1}(F). \tag{3.17}$$

Nechť tedy $K \in \mathcal{V}$ a $x \in K$ jsou libovolné, pak z (3.13) plyne, že existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $K \cap \Pi^X(D)$ taková, že $x_n \to x$. Dále víme, že

$$\{x_n : \; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \;\subset\; K \in C(f),$$

tedy $f(x_n) \to f(x)$, což dává

$$(x_n, f(x_n)) \;\to\; (x, f(x)). \tag{3.18}$$

Víme, že

$$(x_n, f(x_n)) \;\in\; D \subset (\Pi^Y)^{-1}(F),$$

což spolu s uzavřeností $(\Pi^Y)^{-1}(F)$ a (3.18) dává

$$(x, f(x)) \;\in\; (\Pi^Y)^{-1}(F).$$

Z čehož spolu s (3.15) plyne, že $(x, f(x)) \in A$, tedy $x \in f^{-1}(F)$, tedy platí (3.17).

Dále ukážeme, že

$$\bigcup_{K \in \mathcal{V}} K \;\supset\; f^{-1}(F). \tag{3.19}$$

Buď tedy $x \in f^{-1}(F)$ libovolný, pak z (3.15) plyne, že $(x, f(x)) \in A$. Protože množina D je hustá v množině A, tak existuje posloupnost $\{(x_n, f(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ v D, která splňuje:

$$(x_n, f(x_n)) \;\to\; (x, f(x)).$$

Z čehož plyne, že $\{x_n : \; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \in \mathcal{V}$, tedy $x \in \bigcup_{K \in \mathcal{V}} K$. Dokázali jsme tedy (3.19). Tvrzení (3.14) již triviálně plyne z (3.17) a (3.19).

□

Nyní si uvedeme vztah mezi ideálem $C(f)$ a množinou $\mathcal{K}(\mathrm{graf}(f))$.

Lemma 3.12. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $f : X \to Y$ je funkce, pak $C(f) = \widehat{\Pi}(\mathcal{K}(\mathrm{graf}(f)))$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že

$$C(f) \quad \subset \quad \widehat{\Pi}(\mathcal{K}(\mathrm{graf}(f))).$$

Nechť tedy $K \in C(f)$ je libovolný prvek, pak

$$K \quad = \quad \Pi((\Pi_{|\mathrm{graf}(f)})^{-1}(K)).$$

Stačí tedy ukázat, že

$$(\Pi_{|\mathrm{graf}(f)})^{-1}(K) \quad \in \quad \mathcal{K}(\mathrm{graf}(f)). \tag{3.20}$$

Nechť je tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost v $(\Pi_{|\mathrm{graf}(f)})^{-1}(K)$ pak $\{\Pi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v K. Tedy existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $y \in K$ takové, že

$$\Pi(x_{n_k}) \quad \to \quad y. \tag{3.21}$$

Odtud a z $K \in C(f)$ plyne, že

$$f(\Pi(x_{n_k})) \quad \to \quad f(y).$$

Z čehož spolu s (3.21) plyne, že

$$(\Pi(x_{n_k}), f(\Pi(x_{n_k}))) \quad \to \quad (y, f(y)) \in (\Pi_{|\mathrm{graf}(f)})^{-1}(K).$$

Tedy $(\Pi_{|\mathrm{graf}(f)})^{-1}(K)$ je kompaktní, z čehož spolu s $(\Pi_{|\mathrm{graf}(f)})^{-1}(K) \subset \mathrm{graf}(f)$ plyne (3.20). Nyní ukážeme, že

$$C(f) \quad \supset \quad \widehat{\Pi}(\mathcal{K}(\mathrm{graf}(f))).$$

Vezměme tedy libovolné $K \in \widehat{\Pi}(\mathcal{K}(\mathrm{graf}(f)))$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v K a $x \in X$ takové, že

$$x_n \quad \to \quad x, \tag{3.22}$$

a ukažme, že

$$x \quad \in \quad K, \tag{3.23}$$

$$f(x_n) \quad \to \quad f(x). \tag{3.24}$$

Množina K je kompaktní, neboť je to spojitý obraz kompaktu, což spolu s (3.22) dává (3.23). Protože

$$(x_n, f(x_n)) \quad \in \quad (\Pi_{|\mathrm{graf}(f)})^{-1}(K) \in \mathcal{K}(\mathrm{graf}(f)),$$

tak pro každou podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ existují podposloupnost $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ a $y \in (\Pi_{|\mathrm{graf}(f)})^{-1}(K)$, které splňují:

$$(x_{n_{k_i}}, f(x_{n_{k_i}})) \quad \to \quad y.$$

Z čehož spolu s $y \in \text{graf}(f)$ a (3.22) plyne, že

$$f(x_{n_{k_i}}) \quad \to \quad f(x).$$

Z každé podposloupnosti posloupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ lze vybrat podposloupnost konvergující k $f(x)$, tedy platí (3.24).

□

Důsledek 3.13. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $f : X \to Y$ je funkce, pak*

$$\widetilde{C}(f) \quad = \quad \widehat{\Pi}(O(\text{graf}(f))). \tag{3.25}$$

Důkaz. Z Lemmatu 3.12 plyne, že

$$C(f) \quad = \quad \widehat{\Pi}(\mathcal{K}(\text{graf}(f))). \tag{3.26}$$

Dále platí, že pro libovolný $K \in O(\text{graf}(f))$ je

$$\widehat{\Pi}(K) \quad \in \quad O(X).$$

Z čehož spolu s (3.26) a definicí $\widetilde{C}(f)$ plyne:

$$\widetilde{C}(f) = O(X) \cap C(f) \quad \supset \quad \widehat{\Pi}(O(\text{graf}(f))). \tag{3.27}$$

Nechť $K \in \widetilde{C}(f)$, pak $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ a

$$(x_n, f(x_n)) \quad \to \quad (x, f(x)).$$

Z čehož plyne, že

$$K \quad = \quad \widehat{\Pi}(\{(x_n, f(x_n)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, f(x))\}) \in \widehat{\Pi}(O(\text{graf}(f))).$$

Z čehož spolu s (3.27) již plyne (3.25).

□

Lemma 3.14. *Nechť X je polský prostor, $v \geq s > 0$ a $f : O(X) \to \mathcal{K}(X)$ je funkce definovaná předpisem:*

$$f(K) \quad := \quad K \cap P(d(K), s, v), \; K \in O(X). \tag{3.28}$$

Pak f je borelovská.

Důkaz. Definujme funkce $l : O(X) \to (O(X))^2$, $t : \{\{x\} \in \mathcal{K}(X) : \; x \in X\} \to X$, $k : (O(X))^2 \to (O(x) \times X)$ a $g : (O(X) \times X) \to \mathcal{K}(X)$ předpisy:

$$\begin{aligned} l(K) &= (K, K), \; K \in O(X), && (3.29)\\ t(\{x\}) &= x, \; x \in X, && (3.30)\\ k(K, L) &= (K, t(d(L))), \; (K, L) \in (O(X))^2, && (3.31)\\ g(K, x) &= K \cap P(x, s, v), \; (K, x) \in (O(X) \times X). && (3.32) \end{aligned}$$

Z (3.29) a (3.30) je zřejmé, že funkce l a t jsou dobře definovány a že jsou spojité. Funkce d zobrazuje prostor $O(X)$ do prostoru $\{\{x\} \in \mathcal{K}(X) : x \in X\}$, tedy složení $t \circ d$ je korektní, tedy je korektní též definice (3.31). Z Lemmatu 3.9, Lemmatu 3.5 a spojitosti t plyne borelovskost funkce k. Protože je množina $P(x, s, v)$ uzavřená pro každé $x \in X$, tak je množina $K \cap P(x, s, v)$ kompaktní pro každé $x \in X$, $K \in O(X)$, z čehož plyne, že g je také definováno korektně. Z (3.28)-(3.32) plyne, že $f = g \circ k \circ l$, tedy k dokončení důkazu stačí ukázat, že funkce g je borelovská.

Z Lemmatu 3.8 plyne, že stačí ukázat, že

$$\forall U \in \mathcal{G}(X) \quad : \quad g^{-1}(\mathcal{M}_U) \quad \in \quad \mathcal{G}(O(X) \times X). \tag{3.33}$$

Důkaz tvrzení (3.33) provedeme sporem. Nechť tedy existuje $(K, x) \in g^{-1}(\mathcal{M}_U)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $(K_n, x_n) \notin g^{-1}(\mathcal{M}_U)$ takové, že

$$(K_n, x_n) \quad \to \quad (K, x). \tag{3.34}$$

Z definice $\mathcal{M}_U$ a (3.32) plyne existence $z_n \in (K_n \cap P(x_n, s, v)) \setminus U$. Z (3.34) plyne, že $K \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n)$ je kompakt, tedy existují $z \in X$ a podposloupnost z_{n_i} takové, že $z_{n_i} \to z$. Z tohoto, volby z_n a (3.34) plyne, že $z \in (K \cap P(x, s, v)) \setminus U$, což je ale spor.

□

Kapitola 4

Nové výsledky

4.1 Vliv borelovskosti množin $\boldsymbol{C}(f)$, respektive $\widetilde{\boldsymbol{C}}(f)$ na složitost funkce f

Nyní si uvedeme větu, jež uvádí souvislost mezi složitostí ideálu $C(f)$ a grafu funkce f. V této větě rozšiřujeme poznatky Francise Jordana obsažené ve Větě 1.26 o implikaci: "(iii) implikuje (iv)" a dále zjednodušujeme důkazy zbylých implikací.

Věta 4.1. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce, pak následující čtyři tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathrm{graf}(f) \in \mathcal{G}_\delta(X \times Y)$,

(ii) $C(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}(X))$,

(iii) $C(f) \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(\mathcal{K}(X))$,

(iv) $C(f) \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(\mathcal{K}(X))$ *a f je borelovská.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že (i) implikuje (ii).
Z Lemmatu 3.12 plyne:

$$C(f) \quad = \quad \widehat{\Pi}(\mathcal{K}(\mathrm{graf}(f))). \tag{4.1}$$

Z (i) a Tvrzení 2.6 plyne, že

$$\mathcal{K}(\mathrm{graf}(f)) \quad \in \quad \mathcal{G}_\delta(\mathcal{K}(X \times Y)). \tag{4.2}$$

Protože $\widehat{\Pi^X}|_{\mathrm{graf}(f)} : \mathcal{K}(X \times Y) \to \mathcal{K}(X)$ je spojitá a prostá funkce, tak z (4.2), (4.1) a Lusinovy věty (Věta 3.6) plyne (ii).

Tvrzení (ii) implikuje tvrzení (iii) triviálně.

Nyní ukážeme, že (iii) implikuje (iv).
Nechť je tedy F libovolná uzavřená podmnožina Y. Podle Lemmatu 3.10 stačí ukázat, že

$$f^{-1}(F) \text{ je analytická.} \tag{4.3}$$

Zvolme množinu $D \subset X \times Y$ jako spočetnou hustou podmnožinu množiny $(\Pi^Y)^{-1}(F) \cap \operatorname{graf}(f)$. Pak z Lemmatu 2.10 a (iii) plyne:

$$\mathcal{V} := C(f) \cap \{K \in \mathcal{K}(X) : \overline{K \cap \Pi(D)} = K\} \quad \in \quad \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{K}(X)). \tag{4.4}$$

Z Lemmatu 3.11 plyne, že

$$f^{-1}(F) \quad = \quad \bigcup_{K \in \mathcal{V}} K.$$

Z čehož spolu s (4.4) a Lemmatem 2.11 již plyne (4.3).

K dokončení důkazu tedy stačí ukázat, že (iv) implikuje (i). Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme tedy:

$$C(f) \quad \in \quad \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{K}(X)) \text{ a } f \text{ je borelovská,} \tag{4.5}$$

$$\operatorname{graf}(f) \quad \notin \quad \mathcal{G}_\delta(X \times Y). \tag{4.6}$$

Funkce f je borelovská, tedy $\operatorname{graf}(f)$ je borelovský, tedy též ko-analytický, což spolu s (4.6) a Hurewiczovou větou (Věta 3.7) implikuje existenci $C \subset X \times Y$ takové, že

$$C \quad \in \quad \mathcal{K}(X \times Y), \tag{4.7}$$

$$\overline{C \cap \operatorname{graf}(f)} \quad = \quad C, \tag{4.8}$$

$$C \cap \operatorname{graf}(f) \quad \text{je homeomorfní} \quad \mathbb{Q}. \tag{4.9}$$

Z (4.5) a (4.7) plyne, že

$$(\widehat{\Pi_{|C}})^{-1}(C(f)) \quad \in \quad \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{K}(X \times Y)).$$

Z čehož spolu s Lemmatem 2.10 a (4.9) plyne:

$$\begin{aligned} M \quad := \quad & (\widehat{\Pi_{|C}})^{-1}(C(f)) \cap \{K \in \mathcal{K}(X \times Y) : \\ & K = \overline{K \cap C \cap \operatorname{graf}(f)}\} \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{K}(X \times Y)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Z (4.9) a Tvrzení 2.9 plyne, že

$$\mathcal{K}(C \cap \operatorname{graf}(f)) \quad \in \quad \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{K}(X \times Y)) \text{ -complete.}$$

Z čehož spolu s (4.10) plyne, že ke sporu stačí ukázat, že

$$\mathcal{K}(C \cap \operatorname{graf}(f)) \quad = \quad M.$$

Nechť tedy nejprve:

$$K \in \mathcal{K}(C \cap \mathrm{graf}(f)). \tag{4.11}$$

Pak z Lemmatu 3.12 plyne, že

$$\begin{aligned} \Pi(K) &\in C(f), \\ K &= K \cap C \cap \mathrm{graf}(f). \end{aligned}$$

Z čehož spolu s (4.11) plyne, že

$$K \in M. \tag{4.12}$$

Dokázali jsme tedy, že (4.11) implikuje (4.12), nyní ukážeme sporem opačnou implikaci. Nechť tedy platí (4.12) a neplatí (4.11), pak existují posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $K \cap C \cap \mathrm{graf}(f)$ a $x \in K$ takové, že

$$\begin{aligned} x_n &\to x, \\ x &\notin \mathrm{graf}(f). \end{aligned}$$

Z čehož plyne, že

$$\begin{aligned} \Pi^X(x_n) &\to \Pi^X(x), \\ f(\Pi^X(x_n)) &\to \Pi^Y(x) \neq f(\Pi^X(x)). \end{aligned}$$

Z čehož plyne, že

$$\{\Pi^X(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\Pi^X(x)\} \notin C(f).$$

Což je ale spor, neboť z (4.12) plyne:

$$\{\Pi^X(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\Pi^X(x)\} \subset \Pi^X(K) \in C(f).$$

□

Následující dva důsledky se zabývají otázkou, jak velká může být množina funkcí z X do Y, jež jsou spojité na stejných kompaktních množinách.

Věta 4.2. *Nechť X a Y jsou polské prostory. Pak existuje zobrazení $\Phi : Y^X \to 2^{X \times Y}$ splňující:*

$$\forall f \in Y^X : \mathrm{card}(\Phi(f)) \leq \aleph_0, \tag{4.13}$$
$$\forall f, g \in Y^X : f = g \Leftrightarrow (C(f) = C(g) \wedge \Phi(f) = \Phi(g)). \tag{4.14}$$

Důkaz. Nechť $\{y_n \in Y : n \in \mathbb{N}\}$ je hustá podmnožina Y. Označme $A^f_{n,m}$ nějakou hustou, spočetnou podmnožinu množiny $(\Pi^Y)^{-1}(\overline{B(y_n, \frac{1}{m})}) \cap \mathrm{graf}(f)$. Nyní definujme zobrazení Φ následovně:

$$\Phi(f) \quad := \quad \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} A^f_{n,m},\, f \in Y^X.$$

Dále ověřme podmínky (4.13) a (4.14).
Z definice Φ je zřejmé, že je splněna podmínka (4.13). Označme:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^f_{n,m} \quad &= \quad C(f) \cap \{K \in \mathcal{K}(X) : \\ &K = K \cap \overline{\Pi^X \left(\Phi(f) \cap (\Pi^Y)^{-1} \left(\overline{B(y_n, \frac{1}{m})} \right) \right)}\},\, f \in Y^X,\ n, m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Z Lemmatu 3.11 plyne, že

$$\forall f \in Y^X,\ n, m \in \mathbb{N} :\ f^{-1} \left(\overline{B(y_n, \frac{1}{m})} \right) \quad = \quad \bigcup_{K \in \mathcal{V}^f_{n,m}} K. \tag{4.15}$$

Tedy jestliže $f = g$, pak triviálně $C(f) = C(g)$ a $\Phi(f) = \Phi(g)$. Pokud naopak $C(f) = C(g)$ a zároveň $\Phi(f) = \Phi(g)$, pak z (4.15) plyne, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N} :\ f^{-1} \left(\overline{B(y_n, \frac{1}{m})} \right) \quad = \quad g^{-1} \left(\overline{B(y_n, \frac{1}{m})} \right).$$

Z tohoto již triviálně plyne, že $f = g$. Ověřili jsme tedy i podmínku (4.14).

□

Důsledek 4.3. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(X)$ je ideál. Označme*

$$M_{\mathcal{I}} \quad := \quad \{f \in Y^X :\ C(f) = \mathcal{I}\}.$$

Pak platí, že

$$\mathrm{card}(M_{\mathcal{I}}) \quad \leq \quad 2^{\aleph_0}. \tag{4.16}$$

Důkaz. Z Věty 4.2 plyne, že existuje prosté zobrazení $\Phi : M_{\mathcal{I}} \to 2^{X \times Y}$ takové, že množina $\Phi(f)$ je spočetná pro každé $f \in M_{\mathcal{I}}$. Tedy mohutnost množiny $M_{\mathcal{I}}$ je menší nebo rovna mohutnosti množiny všech spočetných podmnožin množiny $X \times Y$. Z tohoto již plyne (4.16).

□

Nyní si uvedeme vztah borelovskosti systému $O(A)$ a množiny A, jenž následně použijeme ve Větě 4.5.

Věta 4.4. *Nechť X je polský prostor a A je borelovská podmnožina X. Pak $O(A), O^{<\omega}(A) \subset \mathcal{K}(X)$ jsou borelovské množiny. Speciálně platí, že $O(X) \in \mathcal{F}_{\sigma\delta}(\mathcal{K}(X))$.*

Důkaz. Z definice $O(X)$ plyne:

$$O(X) \quad = \quad d^{-1}(\{\{x\} : x \in X\}).$$

Množina $\{\{x\} : x \in X\}$ je uzavřená, což spolu s Lemmatem 3.9 dává $O(X) \in \mathcal{F}_{\sigma\delta}(\mathcal{K}(X))$.

Dále označme:

$$O^n(A) \quad := \quad \{K \in \mathcal{K}(X) : K \subset A \wedge \operatorname{card}(K) \leq n\}.$$

Z čehož pro $A_i \subset X,\ i \in \mathbb{N}$ jednoduše plyne:

$$\begin{aligned} \forall F \in \mathcal{F}(X) :\ O^n(F) \quad &\in \quad \mathcal{F}(\mathcal{K}(X)), \\ O^{<\omega}(A) \quad &= \quad \bigcup_{n\in\omega} O^n(A), \\ O^n\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \quad &= \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O^n(A_i), \\ O^n\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \quad &= \quad \bigcup_{l\in\mathbb{N}} O^n\left(\bigcup_{i=1}^{l} A_i\right). \end{aligned}$$

Z těchto faktů plyne:

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{B}(X) \forall n \in \omega \ :\ \ O^n(A) \quad &\in \quad \mathcal{B}(\mathcal{K}(X)), \\ \forall A \in \mathcal{B}(X) \ :\ \ O^{<\omega}(A) \quad &\in \quad \mathcal{B}(\mathcal{K}(X)). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Z definice $O(A)$ plyne:

$$O(A) \quad = \quad \{K \in O(X) : d(K) \in A \ \wedge\ K \backslash d(K) \subset A\}.$$

Z čehož plyne:

$$O(A) \quad = \quad \{K \in O(X) :\ d(K) \in A \ \wedge\ \forall s, v \in \mathbb{Q}, v \geq s > 0 :\ K \cap P(d(K), s, v) \subset A\}.$$

Protože $K \cap P(d(K), s, v) \in O^{<\omega}(X)$ pro každé $s, v \in \mathbb{Q}, v \geq s > 0$ a $K \in O(X)$, tak

$$\begin{aligned} O(A) \quad = \quad &\{K \in O(X) : d(K) \in A \wedge \\ &\forall s, v \in \mathbb{Q},\ v \geq s > 0 : K \cap P(d(K), s, v) \in O^{<\omega}(A)\}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Pro každé $v \geq s > 0$ definujme funkci $f_{s,v} : O(X) \to \mathcal{K}(X)$ předpisem:

$$f_{s,v}(K) \quad := \quad K \cap P(d(K), s, v) \ \ : K \in O(X).$$

Z tohoto a (4.18) plyne, že

$$O(A) \quad = \quad d^{-1}(O^1(A) \backslash \{\emptyset\}) \cap \left(\bigcap_{\substack{s,v\in\mathbb{Q} \\ v\geq s>0}} (f_{s,v})^{-1}(O^{<\omega}(A)) \right),$$

což spolu s (4.17), Lemmatem 3.14 a Lemmatem 3.9 dává borelovskost množiny $O(A)$ v prostoru $O(X)$. Již dříve jsme však dokázali borelovskost množiny $O(X)$ v prostoru $\mathcal{K}(X)$, tedy množina $O(A)$ je také borelovská v prostoru $\mathcal{K}(X)$.

□

Věta 4.5. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce, pak následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f *je borelovská,*

(ii) $\widetilde{C}(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}(X))$,

(iii) $\widetilde{C}(f) \in \mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{K}(X))$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že (i) implikuje (ii).
Z (i) plyne, že graf(f) je borelovský, tedy z Věty 4.4 plyne, že $O(\text{graf}(f))$ je borelovská množina. Z Důsledku 3.13 plyne, že

$$\widetilde{C}(f) \quad = \quad \widehat{\Pi}(O(\text{graf}(f))).$$

Z čehož plyne, že $\widetilde{C}(f)$ je spojitý prostý obraz borelovské množiny, tedy z Lusinovy věty (Věta 3.6) již plyne (ii).

Tvrzení (ii) implikuje tvrzení (iii) triviálně.

Nyní ukážeme, že (iii) implikuje (i). Tato část důkazu je podobná důkazu "(iii) implikuje (iv)" ve Větě 4.1.
Nechť je tedy F libovolná uzavřená podmnožina Y. Podle Lemmatu 3.10 stačí ukázat, že

$$f^{-1}(F) \text{ je analytická.} \tag{4.19}$$

Označme:

$$A \quad := \quad (\Pi^Y)^{-1}(F) \cap \text{graf}(f). \tag{4.20}$$

Dále zvolme spočetnou $D \subset A$ tak, aby

$$\overline{D} \quad \supset \quad A. \tag{4.21}$$

Z čehož plyne:

$$\overline{\Pi(D)} \quad \supset \quad \Pi(A) \ = \ f^{-1}(F). \tag{4.22}$$

Z Lemmatu 2.10, (iii) a Věty 4.4 plyne, že

$$\mathcal{V} := (O^{<\omega}(X) \cup \widetilde{C}(f)) \cap \{K \in \mathcal{K}(X) : \ \overline{K \cap \Pi(D)} = K\} \quad \in \quad \mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{K}(X)). \tag{4.23}$$

Dále ukážeme:

$$K \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad K \subset f^{-1}(F). \tag{4.24}$$

Nechť tedy $K \in \mathcal{V}$ a $x \in K$ jsou libovolné, pak z definice $\mathcal{V}$ plyne, že existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $K \cap \Pi(D)$ taková, že $x_n \to x$. Neboť $O^{<\omega}(X) \cup \widetilde{C}(f) \subset C(f)$, tak

$$\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \quad \subset \quad K \in C(f),$$

tedy $f(x_n) \to f(x)$, což dává

$$(x_n, f(x_n)) \quad \to \quad (x, f(x)). \tag{4.25}$$

Tedy

$$(x_n, f(x_n)) \quad \in \quad D \subset (\Pi^Y)^{-1}(F),$$

což spolu s uzavřeností množiny $(\Pi^Y)^{-1}(F)$ a (4.25) dává

$$(x, f(x)) \quad \in \quad (\Pi^Y)^{-1}(F).$$

Z čehož spolu s (4.20) plyne, že $(x, f(x)) \in A$, tedy $x \in f^{-1}(F)$, tedy platí (4.24). Nyní ukážeme:

$$\forall x \in f^{-1}(F)\ \exists K \in \mathcal{V} \quad : \quad x \in K. \tag{4.26}$$

Buď tedy $x \in f^{-1}(F)$ libovolné, pak z (4.20) plyne, že $(x, f(x)) \in A$. Z (4.21) plyne, že existuje posloupnost $\{(x_n, f(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ v D, která splňuje:

$$(x_n, f(x_n)) \quad \to \quad (x, f(x)).$$

Z čehož plyne, že $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \in \mathcal{V}$, tedy platí (4.26) pro $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Z (4.26) a (4.24) plyne:

$$f^{-1}(F) \quad = \quad \bigcup_{K \in \mathcal{V}} K.$$

Z čehož spolu s (4.23) a Lemmatem 2.11 již plyne (4.19).

□

Důsledek 4.6. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce. Jestliže je funkce f borelovská, pak množina $C(f)$ je ko-analytická.*

Důkaz. Z Heineho věty plyne, že

$$C(f) \quad = \quad \{K \in \mathcal{K}(X) : \ O(K) \subset \widetilde{C}(f)\},$$

z čehož plyne, že

$$C(f) \quad = \quad \{K \in \mathcal{K}(X):\ \forall L \in \mathcal{K}(X):\ (L \notin O(K) \vee L \in \widetilde{C}(f))\}.$$

Tedy

$$\mathcal{K}(X)\backslash C(f) \quad = \quad \{K \in \mathcal{K}(X):\ \exists L \in \mathcal{K}(X):\ (L \in O(K) \wedge L \notin \widetilde{C}(f))\},$$

z čehož plyne, že

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(X)\backslash C(f) \quad = \quad & \Pi(\{(K,L) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X): \\ & L \in O(X) \wedge L \subset K \wedge L \notin \widetilde{C}(f))\}). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Z Věty 4.5 a Věty 4.4 již snadno plyne, že množina

$$\{(K,L) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X):\ L \in O(X) \wedge L \subset K \wedge L \notin \widetilde{C}(f))\}$$

je borelovská, což spolu s (4.27) dává ko-analytičnost množiny $C(f)$.

□

Nyní si uvedeme příklad použití předcházejících výsledků při určování komplexity množiny $C(f)$ pro určitou funkci f.

Definice 4.7. Dirichletovu funkci definujeme jako charakteristickou funkci racionálních čísel.

Příklad 4.8. Nechť f je Dirichletova funkce, pak $C(f) \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{K}(\mathbb{R}))\backslash\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{K}(\mathbb{R}))$.

Důkaz. Je snadné nahlédnout, že f je borelovská funkce, jež nemá G_δ graf, neboť

$$\mathrm{graf}(f) \cap (\mathbb{R} \times \{1\}) \quad = \quad \mathbb{Q} \times \{1\} \notin \mathcal{G}_\delta(\mathbb{R}^2).$$

Tvrzení pak již snadno plyne z Věty 4.6 a Věty 4.1.

□

Nyní si uvedeme bez důkazu několik jednoduchých tvrzení, jež uvádějí souvislost mezi množinami $C(f)$ a $\widetilde{C}(f)$.

Definice 4.9. Nechť X je polský prostor a zobrazení $d : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ je derivace. Pak definuji zobrazení $d^0 : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ následovně:

$$d^0(K) \quad := \quad K:\ K \in \mathcal{K}(X).$$

Dále pro libovolné $1 \leq \alpha < \omega_1$ definujeme rekurentně zobrazení $d^\alpha : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ následovně:

$$\begin{aligned} d^{\alpha+1}(K) \quad &:= \quad d(d^\alpha(K)):\ K \in \mathcal{K}(X), \\ d^\alpha(K) \quad &:= \quad \bigcap_{\beta<\alpha} d^\beta(K):\ K \in \mathcal{K}(X),\ \alpha \text{ limitní}. \end{aligned}$$

Definice 4.10. Nechť X, Y jsou polské prostory, $A \subset X$ a $f : X \to Y$ je funkce. Pak definujme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_0(A) &:= \{K \in \mathcal{K}(A) : \ d(K) = \emptyset\}, \\
\mathcal{O}_\alpha(A) &:= \{K \in \mathcal{K}(A) : \ d^\alpha(K) \neq \emptyset \wedge d^{\alpha+1}(K) = \emptyset\}, \ 1 \leq \alpha < \omega_1, \\
\mathcal{O}_{\omega_1}(A) &:= \{K \in \mathcal{K}(A) : \ K \text{ je spočetná množina}\}, \\
C_\alpha(f) &:= C(f) \cap \mathcal{O}_\alpha(f) : \ 0 \leq \alpha \leq \omega_1.
\end{aligned}$$

Následující tvrzení lze snadno dokázat z definic pojmů $\mathcal{O}_\alpha(A)$, C_α, $\alpha \leq \omega_1$.

Tvrzení 4.11. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $A \subset X$ a $f : X \to Y$ je funkce. Pak platí následující vztahy:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\omega_1}(A) &= \bigcup_{0 \leq \alpha < \omega_1} \mathcal{O}_\alpha(A), \\
C_{\omega_1}(f) &= \bigcup_{0 \leq \alpha < \omega_1} C_\alpha(f), \\
\mathcal{O}_\alpha(A) &= \{K \in \mathcal{O}_\alpha(X) : \ \forall 0 \leq \beta \leq \alpha \ \forall s, v \in \mathbb{Q}, \ v \geq s > 0 : \\
&\quad\ d^\beta(K) \cap P(d^{\beta+1}(K), s, v) \in \mathcal{O}_0(A)\} : \ 0 \leq \alpha < \omega_1.
\end{aligned}$$

Následující tvrzení plyne přímo z Tvrzení 4.11 použitím podobných postupů jako v důkazu Věty 4.1.

Tvrzení 4.12. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $0 \leq \alpha \leq \omega_1$, $f : X \to Y$ je borelovská funkce a $\operatorname{graf}(f) \notin \mathcal{G}_\delta(X \times Y)$. Pak $C_\alpha(f)$ je borelovská právě tehdy, když $\alpha \neq \omega_1$.*

4.2 Třídy funkcí a ideál $C(f)$

Poznámka 4.13. V následujících větách se budeme zabývat otázkou, jaké množiny funkcí M mají tu vlastnost, že je-li $f \in M$ a $C(f) = C(g)$, pak také $g \in M$.

Věta 4.14. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce. Pak f je spojitá právě tehdy, když $C(f)$ je σ-ideál.*

Důkaz. Nechť f je spojitá, pak $C(f) = \mathcal{K}(X)$, a tedy $C(f)$ je σ-ideál. Nechť naopak $C(f)$ je σ-ideál. Protože $C(f)$ obsahuje všechny konečné kompakty, tak $C(f)$ obsahuje také všechny spočetné kompakty, tedy dle Heineho věty je f spojitá.

□

Věta 4.15. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce. Pak následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{B}_1(X, Y)$,

(ii) $\forall F \subset X$ *uzavřenou neprázdnou* $\exists x \in F : \ (d^{-1}(\{x\}) \cap O(F)) \subset C(f)$.

Důkaz. Tato věta je triviálním důsledkem Baireovy věty [K, 24.15].

□

Věta 4.16. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f : X \to Y$ je funkce. Pak následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\forall V \subset Y$ *otevřenou*: $f^{-1}(V)$ *má Baireovu vlastnost,*

(ii) $\exists G \subset X$ *residuální*: $C(f) \supset \mathcal{K}(G)$.

Důkaz. Tato věta je triviálním důsledkem Věty [K, 8.38].

□

Poznámka 4.17. Předchozí dvě věty ukazují, že množina funkcí $\mathcal{B}_1(X, Y)$ a množina funkcí z X do Y, měřitelných vzhledem k systému množin majících Baireovu vlastnost, splňují podmínku popsanou v Poznámce 4.13.

Definice 4.18. Nechť X, Y jsou metrické prostory. Pak definujeme $\Lambda_1(X)$, $\Lambda_2(X)$, $\Lambda(X)$, $T_\Gamma(X,Y)$ a $\widetilde{T}_\Gamma(X,Y)$ následovně:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(X) &:= \{\Gamma \subset 2^X : \Gamma \text{ je uzavřená na spočetná sjednocení}\},\\
\Lambda_2(X) &:= \{\Gamma \subset 2^X : \Gamma \text{ je uzavřená na konečné průniky} \wedge \\
&\ (\Gamma \supset \mathcal{F}(X) \vee \Gamma \supset \mathcal{G}(X))\},\\
\Lambda(X) &:= \Lambda_1(X) \cap \Lambda_2(X),\\
T_\Gamma(X,Y) &:= \{f \in Y^X : \forall V \subset Y \text{ otevřenou} : f^{-1}(V) \in \Gamma\} : \Gamma \subset 2^X,\\
\widetilde{T}_\Gamma(X,Y) &:= \{f \in Y^X : \forall x \in X, \epsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}_{(x)},\ V \in \mathcal{U}_{(f(x))},\ G \in \Gamma : \\
&\ G \supset f^{-1}(V) \cap U,\ \operatorname{osc}(f, G) < \epsilon\} : \Gamma \subset 2^X.
\end{aligned}$$

Poznámka 4.19. Třídy funkcí $\widetilde{T}_\Gamma(X,Y)$ jsou nadefinovány na metrických prostorech, ale je snadné si rozmyslet, že se jedná o topologický pojem, neboť $f \in \widetilde{T}_\Gamma(X,Y)$ právě tehdy, když pro každé $x \in X$ a každé $W \in \mathcal{U}_{(f(x))}$ existují $U \in \mathcal{U}_{(x)}$, $V \in \mathcal{U}_{(f(x))}$ a $G \in \Gamma$, které splňují $G \supset (f^{-1}(V) \cap U)$ a $f(G) \subset W$.

Následující lemma nám říká o vztahu mezi množinami funkcí $T_\Gamma(X,Y)$ a $\widetilde{T}_\Gamma(X,Y)$. Tento vztah je zajímavý, protože oproti definici množiny $\widetilde{T}_\Gamma(X,Y)$ je definice množiny $T_\Gamma(X,Y)$ běžná. Naopak definice množiny $\widetilde{T}_\Gamma(X,Y)$ je vhodnější ke zkoumání vlastnosti popsané v Poznámce 4.13.

Lemma 4.20. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $\Gamma \in \Lambda_1(X)$. Pak platí, že*

$$\widetilde{T}_{\{A \subset X:\ X \setminus A \in \Gamma\}}(X,Y) \supset T_\Gamma(X,Y) = \widetilde{T}_\Gamma(X,Y). \tag{4.28}$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že

$$T_\Gamma(X,Y) \supset \widetilde{T}_\Gamma(X,Y). \tag{4.29}$$

Nechť jsou tedy funkce $f \in \widetilde{T}_\Gamma(X,Y)$ a otevřená $V \subset Y$ libovolně zvolené. Dále označme $\{V_n \subset Y : n \in \mathbb{N}\}$ bázi otevřených množin prostoru Y a $\{U_n \subset X : n \in \mathbb{N}\}$ bázi otevřených množin prostoru X. Protože $f \in \widetilde{T}_\Gamma(X,Y)$, tak pro každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ existují $l_n^x, k_n^x \in \mathbb{N}$ a $G_n^x \in \Gamma$, které splňují:

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}(V_{l_n^x}) \cap U_{k_n^x}, \\ G_n^x &\supset f^{-1}(V_{l_n^x}) \cap U_{k_n^x}, \\ \operatorname{osc}(f, G_n^x) &< \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Z tohoto vidíme, že požadavky na množinu G_n^x jsou ve skutečnosti závislé pouze na l_n^x, k_n^x, n. Zvolme tedy pro každou trojici (l_n^x, k_n^x, n), kde $x \in X, n \in \mathbb{N}$, jednu množinu $G \in \Gamma$ splňující (4.30) a označme jí $G_{k_n^x,n}^{l_n^x}$. Dále pro každé $x \in f^{-1}(V)$ nalezněme $n_x \in \mathbb{N}$ splňující:

$$\operatorname{dist}(f(x), Y \backslash V) > \frac{2}{n_x}. \tag{4.31}$$

Označme:

$$\begin{aligned} l^x &:= l_{n_x}^x, \text{ pro } x \in f^{-1}(V), \\ k_x &:= k_{n_x}^x, \text{ pro } x \in f^{-1}(V), \\ M &:= \bigcup_{\{x \in X:\ f(x) \in V\}} G_{k_x,n_x}^{l^x}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Systém množin $\{G_{k_x,n_x}^{l^x} : f(x) \in V\}$ je spočetným podsystémem systému $\Gamma \in \Lambda_1(X)$, tedy

$$M \in \Gamma. \tag{4.33}$$

Z (4.30) a (4.31) plyne, že $M \subset f^{-1}(V)$, zároveň ale z (4.32) a (4.30) triviálně plyne, že $f^{-1}(V) \subset M$, tedy $M = f^{-1}(V)$, z čehož spolu s (4.33) již plyne, že $f \in T_\Gamma(X,Y)$, tedy platí (4.29).

Nyní ukážeme, že

$$T_\Gamma(X,Y) \subset \widetilde{T}_\Gamma(X,Y). \tag{4.34}$$

Nechť jsou tedy funkce $f \in T_\Gamma(X,Y)$, $x \in X$ a $\epsilon > 0$ libovolně zvolené, pak

$$\begin{aligned} G := f^{-1}(B(f(x), \tfrac{\epsilon}{3})) \cap X &\in \Gamma, \\ X &\in \mathcal{U}_{(x)}, \\ B(f(x), \tfrac{\epsilon}{3}) &\in \mathcal{U}_{(f(x))}, \\ G &\supset f^{-1}\left(B(f(x), \tfrac{\epsilon}{3})\right) \cap X, \\ \operatorname{osc}(f, G) &< \epsilon. \end{aligned}$$

Z tohoto již snadno plyne, že $f \in \widetilde{T}_\Gamma(X,Y)$, tedy platí (4.34).

Nakonec ukážeme, že

$$T_\Gamma(X,Y) \quad \subset \quad \widetilde{T}_{\{A\subset X:\ X\setminus A\in\Gamma\}}(X,Y). \tag{4.35}$$

Nechť jsou tedy funkce $f \in T_\Gamma(X,Y)$, $x \in X$ a $\epsilon > 0$ libovolně zvolené, pak

$$\begin{aligned} G := f^{-1}\left(\overline{B(f(x),\frac{\epsilon}{3})}\right)\cap X &\in \{A\subset X:\ X\setminus A\in\Gamma\},\\ X &\in \mathcal{U}_{(x)},\\ B(f(x),\frac{\epsilon}{3}) &\in \mathcal{U}_{(f(x))},\\ G &\supset f^{-1}\left(B(f(x),\frac{\epsilon}{3})\right)\cap X,\\ \operatorname{osc}(f,G) &< \epsilon. \end{aligned}$$

Z tohoto již snadno plyne, že $f \in \widetilde{T}_{\{A\subset X:\ X\setminus A\in\Gamma\}}(X,Y)$, tedy platí (4.35). Z (4.29), (4.34) a (4.35) již přímo plyne (4.28).

□

Následující snadný důsledek dává do souvislosti baireovské a $\mathcal{E}_\alpha$ třídy funkcí.

Důsledek 4.21. *Nechť X, Y jsou polské prostory. Pak*

$$\begin{aligned} \bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{B}_\beta(X,Y) \ \subset\ \mathcal{E}_{\alpha+1}(X,Y) \ \subset\ \mathcal{B}_\alpha(X,Y),\ 1\le\alpha<\omega_1,\\ \bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{B}_\beta(X,Y) \ \subset\ \mathcal{E}_{\alpha}(X,Y) \ \subset\ \mathcal{B}_\alpha(X,Y),\ \alpha<\omega_1 \textit{ limitní ordinál.} \end{aligned} \tag{4.36}$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \in \Lambda_1(X)$ pro každé $1 \le \alpha < \omega_1$. Zbytek již snadno plyne z Lemmatu 4.20 a Věty 1.19, neboť

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\alpha(X,Y) &= T_{\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X)}(X,Y) = \widetilde{T}_{\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X)}(X,Y),\\ \mathcal{E}_\alpha(X,Y) &= \widetilde{T}_{\bigcup_{\beta<\alpha}\mathbf{\Pi}^0_\beta(X)}(X,Y),\\ \widetilde{T}_{\bigcup_{\beta<\alpha}\mathbf{\Pi}^0_\beta(X)}(X,Y) &\supset \widetilde{T}_{\mathbf{\Pi}^0_{\sigma+1}(X)}(X,Y) \supset \widetilde{T}_{\mathbf{\Sigma}^0_{\sigma+1}(X)}(X,Y),\ \text{pro } \sigma+1<\alpha, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha(X,Y) \subset \mathcal{E}_{\alpha+1}(X,Y) = \widetilde{T}_{\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)}(X,Y) \subset \widetilde{T}_{\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X)}(X,Y) = \mathcal{B}_\alpha(X,Y),\\ \mathcal{E}_\alpha(X,Y) = \widetilde{T}_{\bigcup_{\beta<\alpha}\mathbf{\Pi}^0_\beta(X)}(X,Y) \supset \widetilde{T}_{\mathbf{\Sigma}^0_{\sigma+1}(X)}(X,Y) = \mathcal{B}_\sigma(X,Y),\ \text{pro } \sigma+1<\alpha. \end{aligned}$$

□

Nyní si dokážeme lemma, jež použijeme v důkazu Věty 4.23. Tvrzení v tomto lemmatu je topologické, tedy lze použít Poznámku 1.17.

Lemma 4.22. *Nechť X, Y jsou polské prostory a nechť $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ jsou funkce. Pak $C(f) = C(g)$ právě tehdy, když pro každé $x \in X$, $V \in \mathcal{U}_{(f(x))}$ a $W \in \mathcal{U}_{(g(x))}$, existují $\widetilde{V} \in \mathcal{U}_{(g(x))}$, $\widetilde{W} \in \mathcal{U}_{(f(x))}$ a $\widetilde{U} \in \mathcal{U}_{(x)}$ splňující následující podmínky:*

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &\supset g^{-1}(\widetilde{V}) \cap \widetilde{U}, && (4.37) \\ g^{-1}(W) &\supset f^{-1}(\widetilde{W}) \cap \widetilde{U}. && (4.38) \end{aligned}$$

Důkaz. Nechť nejprve $C(f) = C(g)$, máme dán bod x, okolí V a W. Dále označme:

$$\begin{aligned} U_n &:= B(x, \frac{1}{n}), \\ V_n &:= B(f(x), \frac{1}{n}), \\ W_n &:= B(g(x), \frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že podmínky (4.37) a (4.38) jsou symetrické, takže stačí ověřit jen (4.37). Důkaz povedeme sporem. Nechť tedy neexistují $\widetilde{V}$, $\widetilde{U}$ splňující (4.37). Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in X$, které splňuje:

$$\begin{aligned} x_n &\in g^{-1}(W_n), && (4.39) \\ x_n &\in U_n, && (4.40) \\ x_n &\notin f^{-1}(V). && (4.41) \end{aligned}$$

Z (4.40) plyne, že $x_n \to x$ a z (4.39) plyne, že $g(x_n) \to g(x)$, tedy $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \in C(g) = C(f)$, ale z (4.41) plyne, že $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \notin C(f)$, což je spor.

V dalším kroku ukážeme, že z podmínky (4.37) plyne:

$$C(f) \supset C(g).$$

Což nám pak díky symetrii podmínek (4.37) a (4.38) dává, že $C(f) = C(g)$.

Z Heineho věty plyne, že $C(f) \supset C(g)$ právě tehdy, když $\widetilde{C}(f) \supset \widetilde{C}(g)$. Stačí tedy dokázat, že

$$\widetilde{C}(f) \supset \widetilde{C}(g).$$

Důkaz povedeme sporem. V této části důkazu budeme používat stejné značení jako v předchozí části. Nechť tedy existuje $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ splňující:

$$\begin{aligned} x_n &\to x, && (4.42) \\ \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} &\in \widetilde{C}(g), && (4.43) \\ \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} &\notin \widetilde{C}(f). && (4.44) \end{aligned}$$

Dále z podmínky (4.37) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$f^{-1}(V_n) \quad \supset \quad g^{-1}(W_m) \cap U_m. \tag{4.45}$$

Z (4.44) a (4.43) plyne, že existují $n \in \mathbb{N}$ a $\{y_s\}_{s=1}^{\infty}$ podposloupnost $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ takové, že

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{N}: \ f(y_s) &\notin V_n, & (4.46)\\ g(y_s) &\to g(x). & (4.47) \end{aligned}$$

Z (4.45) a (4.46) plyne, že existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall s \in \mathbb{N}: \ y_s \quad \notin \quad g^{-1}(W_m) \cap U_m. \tag{4.48}$$

Což spolu s (4.42) dává spor s (4.47).

□

Následující věta nám říká, za jakých podmínek na množinu $\Gamma \subset 2^X$ splňuje množina funkcí $\widetilde{T}_\Gamma(X, Y)$ podmínku popsanou v Poznámce 4.13.

Věta 4.23. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $\Gamma \in \Lambda_2(X)$ a $f: X \to Y$, $g: X \to Y$ jsou funkce. Pak jestliže $g \in \widetilde{T}_\Gamma(X, Y)$ a $C(f) = C(g)$, tak i $f \in \widetilde{T}_\Gamma(X, Y)$.*

Důkaz. Důkaz povedeme sporem. Nechť tedy

$$\begin{aligned} C(f) &= C(g), & (4.49)\\ f &\notin \widetilde{T}_\Gamma(X, Y), & (4.50)\\ g &\in \widetilde{T}_\Gamma(X, Y). & (4.51) \end{aligned}$$

Nejprve označme:

$$\begin{aligned} U_n(x) &:= B(x, \frac{1}{n}),\\ V_n(x) &:= B(f(x), \frac{1}{n}),\\ W_n(x) &:= B(g(x), \frac{1}{n}),\\ \{G^\gamma(x) : \gamma \in \Gamma_n(x)\} &:= \{G \in \Gamma : \ G \supset f^{-1}(V_n(x)) \cap U_n(x)\}. & (4.52) \end{aligned}$$

Z (4.50) plyne, že existují $x \in X$ a $\epsilon > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\gamma \in \Gamma_n(x)$ existuje $x_n^\gamma \in G^\gamma(x)$, které splňuje:

$$|f(x) - f(x_n^\gamma)| \quad > \quad \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.53}$$

Z (4.51) vyplývá, že pro každé $s \in \mathbb{N}$ existují $\widetilde{U}^s \in \mathcal{U}_{(x)}$, $\widetilde{W}^s \in \mathcal{U}_{(g(x))}$ a $\widetilde{G}^s \in \Gamma$, které splňují:

$$\begin{aligned} \widetilde{G}^s &\supset g^{-1}(\widetilde{W}^s) \cap \widetilde{U}^s,\\ \operatorname{osc}(g, \widetilde{G}^s) &< \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Označme:

$$\begin{aligned} U^s &:= \widetilde{U}^s \cap U_s(x), \\ W^s &:= \widetilde{W}^s \cap W_s(x), \\ G^s &:= \widetilde{G}^s \cap U_s(x): \text{ pro } \Gamma \text{ obsahující otevřené množiny}, \\ G^s &:= \widetilde{G}^s \cap \overline{U_s(x)}: \text{ pro } \Gamma \text{ obsahující uzavřené množiny}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Z čehož spolu s $\Gamma \in \Lambda_2(X)$ plyne, že

$$g^{-1}(W^s) \cap U^s \subset G^s \in \Gamma, \tag{4.55}$$

$$\operatorname{osc}(g, G^s) < \frac{1}{s}. \tag{4.56}$$

Z Lemmatu 4.22 a (4.49) plyne, že pro každé $s \in \mathbb{N}$ existuje $m(s) \in \mathbb{N}$ takové, že

$$g^{-1}(W^s) \cap U^s \supset f^{-1}(V_{m(s)}(x)) \cap U_{m(s)}(x).$$

Z čehož spolu s (4.55) a (4.52) plyne, že existuje $\gamma \in \Gamma_{m(s)}(x)$ takové, že

$$G^s = G^\gamma(x).$$

Pro každé $s \in \mathbb{N}$ označme:

$$y^s := x^\gamma_{m(s)} \in G^s.$$

Z čehož spolu s (4.54) a (4.56) plyne:

$$\begin{aligned} y^s &\to x, \\ g(y^s) &\to g(x). \end{aligned}$$

Tedy z (4.49) plyne, že

$$f(y^s) \to f(x).$$

Toto je ale ve sporu s (4.53).

□

V následujících důsledcích si uvedeme několik speciálních tříd splňujících podmínku popsanou v Poznámce 4.13.

Důsledek 4.24. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $2 \leq \alpha < \omega_1$ a $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ jsou funkce. Pak jestliže $g \in \mathcal{E}_\alpha(X, Y)$ a $C(f) = C(g)$, tak i $f \in \mathcal{E}_\alpha(X, Y)$.*

Důkaz. Je zřejmé, že

$$\forall 2 \leq \alpha < \omega_1 : \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta(X) \in \Lambda_2(X).$$

Zbytek již přímo plyne z Věty 4.23.

□

Důsledek 4.25. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $\Gamma \in \Lambda(X)$ a $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ jsou funkce. Pak jestliže $f \in T_\Gamma(X, Y)$ a $C(f) = C(g)$, tak i $g \in T_\Gamma(X, Y)$.*

Důkaz. Toto tvrzení přímo plyne z Lemmatu 4.20 a Věty 4.23.

$\square$

Důsledek 4.26. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ jsou funkce a $C(f) = C(g)$. Pak $f \in \mathcal{B}_\alpha(X, Y)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{B}_\alpha(X, Y) : 1 \leq \alpha < \omega_1$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 1.19 a Důsledku 4.25, neboť $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X) \in \Lambda(X)$ pro každé $1 \leq \alpha < \omega_1$.

$\square$

Důsledek 4.27. *Nechť X, Y jsou polské prostory, $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ jsou funkce, $\mathcal{A}$ je σ-algebra na prostoru X, která obsahuje borelovské množiny a $C(f) = C(g)$. Pak f je měřitelná vzhledem k $\mathcal{A}$ právě tehdy, když g je měřitelná vyhledem k $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Důsledku 4.25 a $\mathcal{A} \in \Lambda(X)$.

$\square$

Literatura

[J1] F. Jordan: Ideals of compact sets associated with Borel functions, *Real Analysis Exchange*, **28**(1) (2002-2003).

[J2] F. Jordan: Collections of compact sets and functions having G_δ-graph, preprint.

[K] A. S. Kechris: Classical Descriptive Set Theory, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg 1995.

[K2] A. S. Kechris: Hereditary properties of the class of closed sets of uniqueness for trigonometric series, *Israel J. Math.*, **73**(1991), no. 2, 189-198.

[KLW] A. S. Kechris, A. Louveau, W. H. Woodin: The structure of σ-ideals of compact sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **301**(1987), no. 1, 263-288.