Posudek vedoucího na diplomovou práci Václava Vlasáka
Ideály kompaktních množin a borelovské funkce

Hlavním tématem práce je zkoumání deskriptivních vlastností zobrazení mezi polskými prostory a systémů kompaktních množin. Pro zobrazení f z polského prostoru X do polského prostoru Y definujme následující systémy kompaktních množin

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(f) &= \{K;\ K \text{ je kompaktní množina taková, že } f|_K \text{ je spojité}\}, \\ \tilde{\mathcal{C}}(f) &= \{K;\ K \text{ je kompaktní množina s právě jedním} \\ &\qquad \text{hromadným bodem taková, že } f|_K \text{ je spojité}\}. \end{aligned}$$

F. Jordan ve své práci „Ideals of compact sets associated with Borel functions" (*Real Anal. Exchange 28 (2002/03), 15–31.*) zkoumá vztahy mezi deskriptivními vlastnostmi funkce f a deskriptivními vlastnostmi systému $\mathcal{C}(f)$ (v polském prostoru $\mathcal{K}(X)$ všech kompaktních podmnožin X opatřeném Vietorisovou topologií). Za předpokladu borelovské měřitelnosti funkce f například ukázal, že množina $\mathcal{C}(f)$ je borelovská právě tehdy, když f má G_δ graf. Dále za téhož předpokladu ukázal, že je-li $\mathcal{C}(f)$ typu $F_{\sigma\delta}$, pak je funkce f třídy B_1. Tyto výsledky jsou vyloženy v první kapitole práce pana Vlasáka.

Druhá kapitola je věnována vlastnostem prostoru $\mathcal{K}(X)$ a třetí kapitola obsahuje další pomocná tvrzení týkající se borelovských zobrazení a operátoru derivace množiny. Tvrzení jsou využita v závěrečné kapitole, kde jsou výsledky F. Jordana zobecněny a rozšířeny. Pan Vlasák mimo jiné ukázal, že ve výše zmíněných větách lze předpoklad borelovské měřitelnosti vynechat. Dále ukázal, že $\tilde{\mathcal{C}}(f)$ je borelovská právě tehdy, když zobrazení f je borelovské.

Závěr práce je věnován otázce, kdy podmínka $C(f) = C(g)$ zaručí, že jistá vlastnost funkce f se přenese i na funkci g. Je např. dokázáno, že pokud f a g jsou zobrazení z polského prostoru X do polského prostoru Y, f je první Baireovy třídy a $C(f) = C(g)$, pak také g je první Baireovy třídy.

Důkazy těchto výsledků nejsou jednoduché a vyžadují dobrou znalost základních metod deskriptivní teorie množin, stejně jako dobré porozumění vlastnostem Vietorisovy topologie. V práci jsem ale nalezl také nepřesnosti, překlepy a formulační neobratnosti, *např.*

8^{18}: Je třeba použít Tvrzení 2.8.

8_{17}: Tvrzení poznámky by se nemělo vztahovat na tvrzení (iii) Věty 1.26.

8_7: Místo „$\alpha = 1, 2$" má být „$\alpha = 2, 3$".

11^8: Místo „Daugherty" má být „Dougherty".

U některých tvrzení chybí odkaz na důkaz v literatuře či alespoň nějaký komentář, viz např. Tvrzení 1.16 nebo Lemma 3.4. V Tvrzení 1.16 je bod (i) nadbytečný.

I přes tyto výhrady je práce napsána přehledně a srozumitelně, přičemž obsahuje několik pěkných výsledků, které jsou publikovatelné v některém zahraničním časopise.

Práce zřejmě splňuje podmínky kladené na diplomovou práci.

Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.