POSUDEK DIPLOMOVE PRÁCE VÁCLAVA VLASÁKA

Diplomová práce "Ideály kompaktních množin a borelovské funkce" se zabývá studiem souvislostí mezi vlastnostmi zobrazení $f : X \to Y$ mezi polskými prostory a vlastnostmi ideálu $C(f)$ kompaktních podmnožin X, na kterých je restrikce f spojitá. Je uveden zevrubný přehled potřebných pomocných tvrzení, pojmů a značení a výsledky F. Jordana, na něž autor navazuje. Hlavní výsledky umožňují zesílit Jordanovy věty. Např. funkce f s G_δ grafem lze charakterizovat borelovskostí $C(f)$, ev. analytičností $C(f)$, bez dodatečné podmínky na borelovskost f. Ukazuje se, že množina funkcí s daným ideálem $C(f) = I$ má mohutnost nejvýš kontinuum. Je ukázáno, že $C(f)$ je koanalytická pro borelovské funkce (jde o původní výsledek?). To je odvozeno ze studia prostoru $\tilde{C}(f)$ konvergentních posloupností, na kterých je restrikce f spojitá. Funkce f je borelovská, právě když je $\tilde{C}(f)$ borelovská, resp. analytická. Ukazuje se, že je-li $C(f) = C(g)$ a f je borelovské třídy α, je i g borelovské třídy α.

Práce tedy obsahuje několik zajímavých nových výsledků. Kromě velmi dobrého zvládnutí standardních technik potřebných ke studiu nadprostoru kompaktních množin byly k řešení potřebné další myšlenky. Podstatný je např. popis měřitelnosti vzoru uzavřené množiny pomocí $C(f)$ a speciálního podprostoru kompaktních množin X, které jsou "generovány" vhodně vybranou spočetnou množinou. Klíčový pro posledně zmíněný původní výsledek práce je pojem tzv. $\mathcal{I}$ měřitelnosti, který je dán do souvislosti s borelovskou měřitelností a zároveň má bezprostřední souvislost se spojitostí na posloupnostech.

Práce je napsána pečlivě. Pro úplnost uvádím připomínky či doporučení, které se ale až na výjimky týkají drobných návrhů, jak by snad šlo některé formulace vylepšit. Možná, že by některá tvrzení mohla být doplněna informací o existenci protipříkladu či o otevřených problémech. Např. jsou inluze ve Větě 1.29 ostré? Ví se něco o struktuře $C(f)$ obecně (je jich jen kontinuum) či aspoň v případech Důsledku 4.26 ap.?

Domnívám se, že puvodní výsledky jsou publikovatelné v zahraničním časopise a práce splňuje beze zbytku nároky na diplomovou práci kladené.

Připomínky

V Pozn. 1.24 se tvrdí, že "z 2.6 a 4.14 plyne". To se mi nezdá dostatečné.

Podobne v Poznámce 1.25 postrádám zejména vysvětlení, jak (iii) implikuje borelovskost. Užívá se opravdu jen Věta 4.1 či též další tvrzení?

V důkazu Tvrzení 4.12 je odvolání se na "podobné postupy" příliš stručným náznakem, proč tvrzení platí. Mělo by být aspoň naznačeno, co je třeba použít pro $\alpha = \omega_1$ a co pro $\alpha < \omega_1$?

V důkazu Důsledku 4.6 se užívá borelovskost množiny $\{(L, K) : L \subseteq K\}$ bez odkazu. Bylo to někde vysvětleno?

V kapitole 2 se něco dokazuje, něco ne. Např. Tvrzení 2.6, Lemma 2.10, Lemma 2.11 jsou s důkazem bez odkazu. Znamená to, že jde o původní výsledky?

V definici "(σ-)ideál kompaktních množin", pak jen "(σ-)ideál" bez upozornění?

Značení pro derivaci množiny je několikrát zvedeno v jednotlivých tvrzeních. Myslím, že by stálo za uvedení v seznamu značení.

Za výraznější bych považoval formulovat Větu 4.23 jako Lemma a Důsledky 4.26, 4.27 jako Věty. Možná jako jednu větu. Nelze výsledek formulovat pro měřitelnost systémem $\mathcal{A}_\sigma$, kde $\mathcal{A}$ je algebra (obsahující libovolně malá okolí?). Myslím, že by to stálo za zvážení i při případném publikování výsledků.

Na str. 4^8 by bylo vhodné se zmínit hned i o analytičnosti, když se to v abstraktu o stranu dřív slibuje.

Ve Větě 4.4 namísto "Speciálně" patří spíš "Navíc" nebo něco podobného.

V definici $B(K, r)$ by asi také měl být vyloučen případ $K = \emptyset$?

V Definici 1.15 je asi omylem "$K = \emptyset \Leftrightarrow L \neq \emptyset$".

Na straně 24^{12} v důkazu Věty 4.2 "z (4.15) plyne" není přesné, neboť je třeba užít definice Φ a souvislostí mezi $A^f_{n,m}$ pro různá n, m.

V důkazu Lemmatu 2.10, str. 12^4, "Což dává" ... Ve skutečnosti užita charakterizace inkluze jednou implikací a ne rovnosti ekvivalencí?

Věta 3.7 - má být $C \cap B$ namísto $C \cap A$.

Nevím, zda Věty 4.14-4.16 se mají jmenovat Věty, ale v důkazech 4.15 a 4.16 by bylo vhodné kromě odkazu říci, o jaká tvrzení se jedná.

Na počátku jsou podrobně uvedeny pomocné věty. Při použití některých se odkaz nejen neužívá, ale konstatuje se, že "triviálně platí" (např. (ii) implikuje (iii) ve Větě 4.5). To je trochu nekonzistentní.

Na straně 25_8 by mělo být $d(K) \subset A$ namísto $d(K) \in A$.

Jazykové: Za neobvyklé považuji formulace: "Nechť ..., pak ..." v jedné větě; "Neboť ..., ..." či "Z čehož ..." na začátku věty. První věta úvodu je dost nesrozumitelná. Slovo "komplexita" bych nahradil slovem "složitost" na str. 3. Formulace "jestliže funkce $f \in M$" na straně 4 není pěkná. Ve slově Lebesgue se píše "g" (str. 7)? Na str. 8^{12} chybí čárka. V Tvrzení 2.5 má být za formulí tečka, pak velké "Pak". V 23.8 bych dal přednost otevřeným množinám "v prostoru" před "na prostoru". Nejsem si jist, zda je česky správněji "ko-analytická" či "koanalytická". Na straně 36^{10} má být "ji" namísto "jí" a na straně 36_2 "vzhledem" namísto "vyhledem".

V Praze dne 15. 5. 2007