

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jan Došel

Optimalizace zajištění pomocí stochastického programování a měř rizika

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika
a ekonometrie

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Touto cestou bych rád poděkoval vedoucímu práce RNDr. Martinu Brandovi, Ph.D. za čas věnovaný konzultacím a odbornému vedení. Dále děkuji své rodině a přátelům za podporu během celého studia.

Název práce: Optimalizace zajištění pomocí stochastického programování a měř rizika

Autor: Jan Došel

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá aplikací stochastického programování na úlohu optimalizace zajištění v kontextu současného regulačního rámce pro pojišťovnictví na území Evropské unie, Solvency II. Zajištění zde není spojeno pouze s přesunem rizika na zajištětele, ale i se snížením potřebného kapitálu drženého pojišťovnou. Využity jsou některé míry rizika a jejich vlastnosti, oceňovací principy pojistného a nelineární celočíselné programování. V teoretické části jsou popsány základní pojmy z oblasti Solvency II, zajištění, měř rizika, komonotonie náhodných veličin a odvozena samotná optimalizační úloha. V praktické části je uvedený přístup aplikován na data České kanceláře pojistitelů v programu GAMS a zkoumána stabilita řešení v závislosti na některých parametrech.

Klíčová slova: optimalizace zajištění, stochastické programování, Solvency II, míry rizika

Title: Reinsurance optimization using stochastic programming and risk measures

Author: Jan Došel

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The diploma thesis deals with an application of a stochastic programming in a reinsurance optimization problem in terms of a present regulatory framework of the insurance companies within the European Union, i.e. Solvency II. In this context, the reinsurance does not only transfer a portion of the risk to the reinsurer but also reduces an amount of required capital. The thesis utilizes certain risk measures and their properties, premium principles and non-linear integer programming. In the theoretical part, there are basic terms from Solvency II, reinsurance, risk measures and the comonotonicity of random variables described and the optimization problem itself is derived. The approach is then applied in the practical part on data of Czech Insurers' Bureau using the GAMS software. Finally, a stability of the solution is tested depending on several parameters.

Keywords: reinsurance optimization, stochastic programming, Solvency II, risk measures

Obsah

1	Úvod	2
1.1	Solvency II	2
1.2	Zajištění a jeho typy	3
1.2.1	Proporcionální kvótové zajištění	4
1.2.2	Proporcionální excedentní zajištění	4
1.2.3	Neporcionální zajištění	4
1.3	Principy pojistného	5
1.4	Míry rizika	6
1.5	Komonotonie	7
2	Optimalizace zajištění	10
2.1	Formulace úlohy	10
2.2	Wangův princip pojistného a PHT	14
2.3	Řešení úlohy	16
3	Praktická část	21
3.1	Tvary zajistné funkce	21
3.2	Data a úpravy dat	26
3.3	Implementace v softwaru	30
3.4	Výsledky	30
3.5	Testy sensitivity	31
3.5.1	Citlivost řešení na pojistné a zajistné	31
3.5.2	Stabilita v čase	32
	Závěr	35
	Seznam použité literatury	36
	Příloha A	37

1. Úvod

V první kapitole této práce popíšeme pojistný kontext potřebný k sestavení a řešení hlavní optimalizační úlohy optimalizace zajištění, tj. Solvency II, zajištění a jeho druhy a principy pojistného. Dále budou popsány využití míry rizika a ukázané vlastnosti komonotónních náhodných veličin, které budeme potřebovat pro optimalizační úlohu.

1.1 Solvency II

Solvency II je regulační rámec pojišťoven a zajišťoven na území Evropské unie. Do české legislativy byl implementován prostřednictvím zákona č. 277/2009 sb., který byl schválen senátem ČR v srpnu roku 2016. I když existuje český termín Solventnost II, v praxi se příliš nepoužívá, proto bude i v této práci užíván jeho anglický ekvivalent. Tato diplomová práce se zabývá optimalizací zajištění právě v kontextu Solvency II, což přináší některá specifika v přístupu k optimalizační úloze. Proto zde čtenáře se zmíněnou regulací krátce seznámíme, zejména s ohledem na terminologii, která bude využívána v samotné optimalizační části.

Jak je již z názvu patrné, hlavním cílem Solvency II je ochrana klientů před potenciální nesolventností pojišťoven a zajišťoven. Podobně jako u regulace bank, i zde se obrazně hovoří o třech pilířích:

1. kvantitativní požadavky
2. kvalitativní požadavky
3. požadavky ohledně vykazování.

Základem Solvency II je tzv. solventnostní kapitálový požadavek (známý i v českém prostředí jako SCR - Solvency Capital Requirement). Tento požadavek je pojišťovna či zajišťovna povinna pasivně držet pro pokrytí nepředvídaných ztrát. Pro výpočet a stanovení SCR je možné použít standardní formuli (zkr. SF), což je zjednodušený postup uvedený v prováděcích vyhláškách Solvency II vytvořený pro modelovou pojišťovnu s určitým portfoliem smluv za použití některých simplifikací. Druhou možností je vytvoření interního modelu pro výpočet kapitálového požadavku. Tato varianta je však v praxi pro pojišťovnu nebo zajišťovnu vcelku nákladná a bývá využívána hlavně v případech, kdy standardní formule nepřiměřeně navyšuje nutný kapitálový požadavek. Protože interní modely jsou „ušité na míru“ danému pojišťovacímu subjektu s využitím jeho specifických znaků, mohou se navzájem významně odlišovat. V této práci proto budeme vycházet zejména ze standardní formule.

Solventnostní kapitálový požadavek je určen k pokrytí všech rizik spojených s činností pojišťovny nebo zajišťovny, tedy nejen v oblasti upisování smluv a problematiky rizika pojistného a rezerv, ale například i tržní a finanční rizika nebo operační riziko. Svým nastavením odpovídá hodnotě v riziku (value at risk, VaR) vlastních zdrojů pojišťovny na hladině 99,5 % v horizontu jednoho roku. Kapitálový požadavek bývá proto často (ale poněkud nepřesně) interpretován jako kapitál schopný pokrýt ztráty pojišťovny, až na ty nejhorší s výskytem průměrně

jednou za 200 let. Pojišťovací subjekty jsou také druhým pilířem vedeny k aktivnímu posuzování jednotlivých rizik a snižování jejich dopadu, například prostřednictvím tzv. ORSA (Own Risk and Solvency Assessment).

Solvency II dále specifikuje požadovaný výpočet technických rezerv (anglicky TP - Technical Provisions), coby nejvýznamnější položky na straně pasiv a vstupů do výpočtu kapitálového požadavku. Technické rezervy by měly být počítány na bázi nejlepšího odhadu (angl. BE - Best Estimate) s připočtením rizikové marže (angl. RM - Risk Margin), která reflektuje neurčitost a riziko při výpočtu technických rezerv, které by neměly být implicitně obsaženy v nejlepší odhadu (BE). Riziková marže náležící jednotlivým technickým rezervám lze počítat podle standardní formule pomocí vzorců uvedených v technických specifikacích a nařízeních (Delegated acts) k Solvency II [1]. V těchto materiálech lze najít vymezení všech rizik, ke kterým má být solventnostní kapitálový požadavek počítán. Pro účely této práce se omezíme pouze na pojišťovnu poskytující neživotní druhy pojištění, kde je zajištění tradičně věnována větší pozornost oproti produktům životního pojištění. Takto uvažovaná pojišťovna je v kontextu Solvency II vystavena následujícím rizikům, ke kterým je nucena vytvářet kapitálový požadavek:

- Neživotní upisovací riziko, tedy riziko spojené zejména s portfoliem neživotních pojistných smluv. Obsahuje riziko pojistného (tj. riziko, že pojistné z nově uzavřených smluv nebude stačit na budoucí pojistná plnění nebo budou platby pojistného špatně načasované) a rezerv (tj. riziko budoucích výší pojistných plnění za škody nastalé v minulosti). Dále je zde obsaženo riziko storen (riziko spojené s úbytkem pojistných smluv vlivem stornovosti) a katastrofické riziko (riziko spojené s katastrofickými událostmi).
- Tržní riziko plynoucí z chování trhu, tržních cen a jejich volatilit. Obsahuje riziko spojené s vývojem úrokových měr, cen akcií, cen nemovitostí, měnových kurzů, kreditního rozpětí a koncentrace těchto tržních rizik.
- Riziko selhání protistrany, zejména riziko bankrotu zajišťovny, kdy je pojišťovna nucena hradit i část původně zajištěných škod.
- Operační riziko, tedy riziko finančních ztrát vzniklých kvůli provozním nedostatkům a chybám nebo selháním systémů a klíčových osob.

1.2 Zajištění a jeho typy

V této kapitole bude popsán princip fungování zajištění a některé jeho základní typy, kterou budou využity v následujících částech. Zajištění jako takové znamená přenesení části rizika (a závazků) prvopojistitele (také se říká cedent či zajištěný), tj. nejčastěji pojišťovny, na jinou společnost, nejčastěji zajišťovnu (obecně se říká zajistitel). V případě nastání pojistné události za předem stanovených okolností je část pojistného plnění poskytnuta zajišťovnou. Za tento transfer rizika platí prvopojistitel zajistiteli zajištění (zajišťovnou provizi). Zjednodušeně se tedy dá říci, že zajištění je pojištění pojišťovny.

Hlavní výhody zajištění:

- Snižování rizika bankrotu pojišťovny v případě nečekaně vysokých pojistných plnění (např. v případě přírodních katastrof).

- Zvýšení upisovací kapacity pojišťovny, díky celkovému snížení potenciálního objemu pojistného plnění plynoucího z jejího portfolia.
- Snížení ročních výkyvů ve vyplaceném pojistném plnění a homogenizace pojistného kmene.
- Snížení solventnostního kapitálového požadavku.

Nejčastější typy zajištění jsou:

1. Proporcionální kvótové zajištění
2. Proporcionální excedentní zajištění
3. Neproporcionální zajištění.

Jednotlivé typy zajištění nyní krátce popíšeme.

1.2.1 Proporcionální kvótové zajištění

Proporcionální kvótové zajištění (quota share reinsurance) je často využívaným typem zajištění. Výplaty plnění i pojistné se dělí v předem stanoveném poměru $0 < \alpha < 1$. Tedy pro škodu ve výši X zajistitel hradí αX , prvopojistitel hradí $(1 - \alpha)X$. A pro pojistné ve výši P je zajistné rovno αP . Tento druh zajištění je oblíbený zejména díky nízké administrativní náročnosti a snadné interpretovatelnosti. Na druhou stranu, nechrání prvopojistitele před možnými extrémními škodami, ani nehomogenizuje jeho portfolio.

1.2.2 Proporcionální excedentní zajištění

Proporcionálního excedentního zajištění (surplus reinsurance) je alternativou předchozího typu, kdy se výplaty plnění i pojistné dělí v předem stanoveném poměru, avšak pro každé riziko individuálně. Tradičně se uvádí v podílovém tvaru s využitím očekávané maximální škody (kde aplikovatelné) nebo pojistné částky Z a tzv. vlastního vrubu m . Podíl cedenta na škodě v celkové výši X je potom $\frac{m}{Z}X$ a zajistiteli náleží $\frac{Z-m}{Z}X$. Hlavní výhodou tohoto typu zajištění je homogenizace portfolia cedenta díky možnosti sjednání rozdílného podílu pro různá rizika. Administrativně je však výrazně složitější než kvótové zajištění.

1.2.3 Neproporcionální zajištění

Neproporcionální zajištění je souhrnné označení skupiny typů zajištění fungujících na podobném principu. U neproporcionálních druhů zajištění cedent hradí vždy škodu až do maximálně sjednané výše (tzv. priority) a vše nad tuto hranici je placeno zajistitelem (pokud ji celková velikost škody převyšuje) až do jeho vlastního limitu. V závislosti na stanovení velikosti celkové škody existuje například zajištění škodního nadměru (excess of loss, XL reinsurance), kde uvažujeme každou škodu individuálně nebo souhrn škod nastalých v důsledku jedné události (například vichřice). Na jiném principu je založeno zajištění časového škodního nadměru (stop loss reinsurance), kde se používá souhrn všech škod nastalých za určité časové období (například za jeden kalendářní rok). Neproporcionální

zajištění jsou administrativně velmi jednoduchá pro obě strany. Zajištitel není navíc vystaven riziku neadekvátně stanoveného pojistného. Na druhou stranu, samotné stanovení zajistného je poměrně náročné a v praxi je prováděno pomocí pojistně-statistických metod.

1.3 Principy pojistného

Principy pojistného (premium principles) jsou obecně matematické metody, jak stanovit výši pojistného v závislosti na spojeném pojistném riziku, případně i s prémie za nejistotu, poplatkem za náklady spojené se správou pojistné smlouvy a vlastním ziskem pojišťovny. Pojistné je pak určeno jako určitá funkce zmíněných faktorů (zejména funkce ztráty). Tato funkce se často volí tak, aby splňovala určité užitečné (a současně i realistické) matematické vlastnosti, z nichž některé zde uvedeme.

Označme χ množinu nezáporných náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru (Ω, F, P) a náhodné veličiny $X, Y \in \chi$. Tyto veličiny představují ztrátu pojišťovny v souvislosti s výplatami škod. Jedná se o čisté výše výplat za škody (tedy bez odečtení přijatého pojistného). Dále, nechť $\pi : \chi \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ je funkce z χ do nezáporných reálných čísel a nekonečna představující princip pojistného. Potom můžeme sledovat následující vlastnosti principu pojistného π :

- **Nezávislost:** $\pi(X)$ závisí pouze na rozdělení X , tedy pojistné je stanoveno pouze na základě pravděpodobností realizací hodnot ztrát X . Protože v praxi je rozdělení X odhadnuto na základě pozorované historie, tato vlastnost také říká, že pojistné závisí pouze hodnotách samotných výplat, ne na událostech, které je vyvolaly.
- **Přirážka za nejistotu:** $\pi(X) \geq EX$ pro všechna $X \in \chi$. Intuitivně udává, že pojistné by mělo být přinejmenším stanoveno tak, aby krylo očekávané náklady na pojistná plnění. Často bývá nerovnost splněna ostře kvůli zahrnutí administrativních nákladů na správu smlouvy. V opačném případě pojišťovně hrozí systematická finanční ztráta vlivem nevhodného finančního ocenění rizika (pricingu).
- **Hranice nejvyšší ztráty:** $\pi(X) \leq \sup(X)$ pro všechna $X \in \chi$. Oproti předchozímu, tato vlastnost říká, že pojistné by nemělo přesáhnout maximální (teoretickou možnou) hodnotu škody X . I když z pohledu rizika by se mohla zdát opačná nerovnost jako zdůvodnitelný prudentní předpoklad, v praxi by splnění opačné nerovnosti vedlo většinou k nepřijatelně drahým smlouvám, čímž by pojišťovna nemohla obstát v konkurenčním prostředí.
- **Translační invariance:** $\pi(X + a) = \pi(X) + a$ pro všechna $X \in \chi$ a $a \geq 0$. Tato vlastnost říká, že při nárůstu škody (rizika) X o pevné a by se mělo pojistné zvýšit také o toto a .
- **Pozitivní homogenita:** $\pi(bX) = b\pi(X)$ pro všechna $X \in \chi$ a $b \geq 0$. Tedy pojišťovna by měla požadovat například dvojnásobné pojistné za krytí dvojnásobného rizika. Splnění této vlastnosti může být motivováno argumentem neexistence arbitráže. Pokud by totiž cena za krytí rizika $2X$ byla vyšší než

součet dvou pojistných na krytí X , lze realizovat zisk nákupem rizik X odděleně. Naopak, kdyby cena za krytí $2X$ byla nižší než součet dvou cen za X , bylo by (pro jinou pojišťovnu) možné nakoupit krytí $2X$ a poté je se ziskem prodat zvlášť.

- Subaditivita: $\pi(X+Y) \leq \pi(X)+\pi(Y)$ pro všechna X a $Y \in \mathcal{X}$. V některých případech dává smysl uvažovat i aditivitu s ostrou nerovností díky podobnému bezarbitrážnímu argumentu jako výše. Obecně je však subaditivita realističtější, protože ne všechna rizika nakoupena společně jako $X+Y$ lze dále prodat odděleně.

Jako příklad pojistného principu zde uvedeme princip založený na střední hodnotě. Ten je definován jako

$$\pi(X) = (1 + \rho)E(X),$$

kde $\rho > 0$ představuje přírážku za nejistotu a související náklady. Tento princip je intuitivní a snadno interpretovatelný. Dá se také rychle nahlédnout, že pro rozumně zvolené ρ tento model splňuje všechny výše uvedené vlastnosti s výjimkou translační invariance, protože

$$(1 + \rho)E(X + a) = (1 + \rho)E(X) + (1 + \rho)a \neq (1 + \rho)E(X) + a.$$

V této práci se budeme zabývat širší třídou složitějších principů v literatuře označovanou jako Wangovy principy pojistného. K této problematice se později vrátíme.

1.4 Míry rizika

V této sekci definujeme míry rizika, které budeme využívat v následujících kapitolách. Jedná se o široce rozšířený VaR a CVaR. Definice budou uvedeny na základě výchozího článku [2], i když existují i alternativní definice používané v daném kontextu.

Definice 1 (Hodnota v riziku (VaR)). *Nechť Z je reálná náhodná veličina. Potom definujeme hodnotu v riziku (value at risk) veličiny Z na hladině α jako*

$$VaR_\alpha(Z) = \inf\{z \geq z_0 : P(Z \leq z) \geq \alpha\},$$

kde $z_0 = \sup\{z \in \mathbb{R} : P(Z \leq z) = 0\}$.

Definice 2 (Podmíněná hodnota v riziku (CVaR)). *Nechť Z je reálná náhodná veličina. Potom definujeme podmíněnou hodnotu v riziku (conditional value at risk) na hladině α jako*

$$CVaR_\alpha(Z) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_s(Z) ds = VaR_\alpha(Z) + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}(Z - VaR_\alpha(Z))_+,$$

kde značení $(x)_+ = \max\{0, x\}$.

Podobně jako u principů pojistného uvedme zde také základní čtyři vlastnosti tradičně sledované pro rizikové míry.

Definice 3. Necht τ označuje množinu reálných náhodných veličin. Potom se funkce $t : \tau \rightarrow \mathbb{R}$ nazývá koherentní míra rizika, pokud splňuje následující čtyři podmínky:

- *Pozitivní homogenita:* $X \in \tau, c > 0, cX \in \tau \Rightarrow t(cX) = ct(X)$
- *Translační invariance:* $X \in \tau, a \in \mathbb{R} \Rightarrow t(X + a) = t(X) + a$
- *Subaditivita:* $X, Y, X + Y \in \tau \Rightarrow t(X + Y) \leq t(X) + t(Y)$
- *Monotonie:* $X, Y \in \tau, Y(\omega) \geq X(\omega)$ pro všechna $\omega \in \Omega \Rightarrow t(Y) \geq t(X)$.

Je známo, že VaR není na rozdíl od CVaRu koherentní mírou rizika, protože obecně nesplňuje předpoklad subaditivity. I tak je však často využívanou rizikovou mírou a výchozí mírou rizika pro celou Solvency II.

1.5 Komonotonie

Jak je zmíněno v předchozí sekci, VaR není koherentní rizikovou mírou, protože nesplňuje předpoklad subaditivity. Existují však speciální případy, kdy je (sub)aditivita VaR splněna, jedním z nich je komonotonie náhodných veličin.

Definice 4. Složky X_1, X_2, \dots, X_n náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ se nazývají komonotónní právě tehdy, když existuje náhodná veličina Z a neklesající funkce $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ tak, že

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z), \dots, f_n(Z)),$$

kde zápisem $\stackrel{d}{=}$ rozumíme shodné rozdělení.

Lemma 1. Necht $U \sim R(0,1)$ a $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ jsou komonotónní náhodné veličiny. Potom platí

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U)),$$

kde $F_{X_i}^{-1}(\cdot)$ značí kvantilovou funkci náhodné veličiny X_i .

Důkaz. Plyne přímo z definice komonotonie (kvantilová funkce je neklesající). □

Věta 2. Necht X a $g(X)$ jsou reálné náhodné veličiny, funkce g je neklesající a zleva spojitá a $p \in (0,1)$. Potom

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p)).$$

Důkaz. Z definice kvantilové funkce (neklesající zleva spojitá inverze distribuční funkce) platí

$$F_X^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x).$$

Protože g je zleva spojitá, máme

$$g(z) \leq x \Leftrightarrow z \leq \sup \{y : g(y) \leq x\}$$

pro všechna reálná z a x . Potom

$$p \leq F_{g(X)}(x) \Leftrightarrow p \leq F_X(\sup \{y : g(y) \leq x\}).$$

Pokud je uvedené supremum konečné, dostáváme

$$p \leq F_X(\sup \{y : g(y) \leq x\}) \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq \sup \{y : g(y) \leq x\}.$$

V případě, že $\sup \{y : g(y) \leq x\} = \infty$, poslední ekvivalence přechází na

$$p \leq 1 \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq \infty,$$

zatímco v případě $\sup \{y : g(y) \leq x\} = -\infty$ máme

$$p \leq 0 \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq -\infty.$$

Protože navíc funkce g je neklesající a zleva spojitá

$$F_X^{-1}(p) \leq \sup \{y : g(y) \leq x\} \Leftrightarrow g(F_X^{-1}(p)) \leq x.$$

Spojením těchto ekvivalencí dostáváme pro všechna x

$$F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow g(F_X^{-1}(p)) \leq x.$$

□

Poznámka. Důkaz byl proveden pouze pro zleva spojitou funkci g . Důkaz pro zprava spojitou funkci by však probíhal podobně. Více o komonotonii a jejích aplikacích se lze dočíst například v [3] a [4].

Nyní můžeme dokázat následující větu.

Věta 3. *Nechť S značí součet komonotónních náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n , tj.*

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Potom kvantilová funkce F_S^{-1} splňuje pro $p \in (0,1)$

$$F_S^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p).$$

Důkaz. Uvažujme náhodnou veličinu $U \sim R(0,1)$. Potom díky komonotonii a výše uvedenému lemmatu můžeme psát

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} g(U)$$

s funkcí

$$g(u) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(u)$$

pro $u \in (0,1)$. Funkce g je jistě neklesající a zleva spojitá, můžeme tedy použít předchozí větu, čímž dostaneme

$$F_S^{-1}(p) = F_{g(U)}^{-1}(p) = g\left(F_U^{-1}(p)\right) = g(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p).$$

□

Poznámka. Zjednodušeně lze tedy říci, že součet kvantilů komonotónních veličin je roven kvantilu jejich součtu. Toto bude v následující kapitole aplikováno na součet hodnot v riziku. Více informací o aplikaci komonotonie v aktuárském kontextu lze najít například v [5].

2. Optimalizace zajištění

2.1 Formulace úlohy

Nyní postupně odvodíme tvar samotné optimalizační úlohy. Označme X reálnou náhodnou veličinu určující celkovou ztrátu pojišťovny za určité časové období s distribuční funkcí $F(\cdot)$ a funkcí přežití $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$. Předpokládejme $X \geq 0$. Dále označme $R[X]$ část celkové ztráty, která je hrazena zajistitelem. Na pojišťovnu tedy zbývá $I[X] = X - R[X]$. Protože předpokládáme, že zajištění nevede k neoprávněnému obohacení žádné z účastníků stran, omezíme se na následující přípustnou množinu možných $R[X]$

$$\mathcal{F} = \{0 \leq R[x] \leq x \text{ tak, že } R[x], x - R[x] \text{ jsou neklesající funkce}\}.$$

Definujme dále pojistné P , které pojišťovna obdrží od svých klientů, a zajištění $\pi(R[X])$, které pojišťovna hradí zajistiteli za převzetí rizika $R[X]$. Funkce $\pi(\cdot)$ je určitý princip stanovení pojistného na základě rizika $R[X]$.

Typická optimalizační úloha pro pojišťovnu je minimalizace rizika $I[X]$ při dané ceně $\pi(R[X])$, případně její modifikace známé z teorie Markowitzova portfolia. V této práci je však úloha řešena s ohledem na kontext Solvency II, kde je přesun části rizika spojen i se snížením potřebného kapitálového požadavku zejména kvůli snížení technických rezerv. Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, technické rezervy se skládají z nejlepšího odhadu a rizikové marže. Protože však nejlepší odhady technických rezerv bývají počítány bez efektu transferu rizika, nemá na ně zajištění žádný vliv, a proto je v této úloze neuvažujeme. Do výpočtu tedy zahrneme rizikovou marži náležitě upisovacímu riziku, tržnímu riziku a riziku selhání protistrany, které jsou popsány v první kapitole. Rizikové marži pro operační riziko se nebudeme ve výpočtu věnovat, protože operační riziko ze své podstaty není nijak ovlivněno zajištěním. Samotné riziko budeme kvantifikovat pomocí míry VaR, která je používána i v samotné Solvency II a výpočet kapitálového požadavku přesně odpovídá kvantilovému přístupu sloužící ke krytí ztráty na 99,5% kvantilu.

V naší se úloze se tedy budeme snažit optimálně rozložit X na část $R[X]$ převedenou zajistiteli a část $I[X]$, která zbývá prvopojistiteli. Z tohoto důvodu bychom také potřebovali rozložit $VaR(X)_p$ na hladině $p \in (0,1)$, který však obecně není aditivní (ani subaditivní). Pro $R[X] \in \mathcal{F}$ však výhodně platí, že

$$VaR_p(I[X]) = VaR_p(X) - VaR_p(R[X]) \quad (2.1)$$

To je splněno díky tomu, že za uvedených předpokladů jsou $R[X]$ a $I[X]$ komotónní náhodné veličiny a uvedená rovnost kvantilů byla dokázána v předchozí kapitole.

Podle výčtu rizik z kapitoly o Solvency II můžeme tedy zformulovat optimalizační úlohu pro pojišťovnu

$$\begin{aligned} & \min_{R \in \mathcal{F}} H_1(R[X]), \\ & \text{kde } H_1(R[X]) = RM_{UwR}(R[X]) + RM_{UMR}(R[X]) + RM_{CDR}(R[X]) + \\ & \quad + \pi(R[X]) + VaR_p(X) - VaR_p(R[X]), \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde RM_{UwR} znamená rizikovou marži náležící upisovacímu riziku (underwriting risk), RM_{UMR} rizikovou marži náležící tržnímu riziku (unavoidable market risk) a RM_{CDR} rizikovou marži selhání protistrany (counterparty default risk). Výraz $\pi(R[X])$ představuje cenu za zajištění rizik využívající princip pojistného $\pi()$ a $VaR_p(X) - VaR_p(R[X])$ představuje celkový objem škod ponížený o hodnotu zajištěné části.

Výpočet pro jednotlivé rizikové marže je uveden v QIS5 ([1]). Pro účely praktických výpočtů jsou tyto formule odvozeny s log-normální aproximací rizika rezerv, které vystupuje ve výpočtu upisovacího rizika a rizika selhání protistrany. Jak však upozorňují autoři [2], je zde určitá nekonzistence uvažovat log-normální aproximaci rizika rezerv, zatímco zajištění je odvozeno z rozdělení skutečných škod. Proto autoři [2] přichází s úpravou vzorců ze standardní formule, kdy místo aproximace předpokládáme, že samotné $I[X]$ a $R[X]$ má log-normální rozdělení. Tento předpoklad je v souladu s výchozími předpoklady Solvency II.

Podle vzorců z technické specifikace a článku [2] nejprve rozepíšeme rizikovou marži na upisovací riziko. Definujme funkci

$$g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + xy},$$

která nám výrazně zjednoduší matematický zápis. Dále definujme parametr λ jako upravenou předepsanou sazbu nákladů na kapitál (adjusted Cost of Capital). Ta se liší od standardní sazby nákladů na kapitál CoC předepsané regulátorem ($CoC = 6\%$) tím, že v sobě už obsahuje efekt diskontování. Výpočet λ z CoC je pro známé úrokové míry snadný a nemá žádný vliv na naši optimalizační úlohu, zde je toto značení použito hlavně kvůli zjednodušení výrazů v účelové funkci, kde bychom jinak museli mít diskontované sumy. Takto můžeme přepsat vzorec za standardní formule pro rizikovou marži neživotního upisovacího rizika jako

$$RM_{UwR}(R[X]) = g(a_1(P - \pi(R[X])), \lambda(VaR_p(I[X]) - \mathbb{E} I[X])), \quad (2.3)$$

kde

$$a_1 = \lambda \left(\frac{\exp\left\{\phi^{-1}(p)\sqrt{\log(1 + \sigma_{PR}^2)}\right\}}{\sqrt{1 + \sigma_{PR}^2}} - 1 \right), \quad (2.4)$$

parametr σ_{PR}^2 je koeficient variability rizika pojistného, který je předepsán a uveden v technické specifikaci, a $\phi^{-1}(p)$ je kvantilová funkce standardního normálního rozdělení.

Dále přejdeme k rizikové marži pro riziko selhání protistrany. Definujme q jako roční pravděpodobnost bankrotu zajistitele (probability of default) a $RecR$ jako míru zotavení (recovery rate), tj. kolik procent z celkového objemu závazků se podaří prvopojistiteli ještě vymocit ze zajistitele v případě jeho bankrotu. V souladu se standardní formulí zavádíme ještě $\vartheta = \lambda(1 - RecR)l\sqrt{q(1 - q)}$, kde l je konstanta, kterou pojišťovna při výpočtu volí podle určitých vlastností svého pojistného portfolia (tato konstanta v sobě integruje několik dalších parametrů z technické specifikace, obvykle $3 \leq l \leq 5$). Potom můžeme rizikovou marži pro riziko selhání protistrany spočítat jako

$$RM_{CDR}(R[X]) = g(a_2(\pi(R[X])), \vartheta(CVaR_p(I[X]) - VaR_p(R[X]))), \quad (2.5)$$

kde

$$a_2 = \vartheta \left(\frac{\phi(\sqrt{\log(1 + \sigma_{PR}^2)} - \phi^{-1}(p))}{1 - p} - \frac{\exp\{\phi^{-1}(p)\sqrt{\log(1 + \sigma_{PR}^2)}\}}{\sqrt{1 + \sigma_{PR}^2}} \right).$$

Výraz $\vartheta(CVaR_p(I[X]) - VaR_p(R[X]))$ v 2.5 zohledňuje náhodnost samotného rizika po odstranění zmíněné log-normální aproximace ve standardní formuli.

Pro výpočet rizikové marže pro tržní riziko musíme ještě zavést d jako modifikovanou duraci závazků pojišťovny $I[X]$ (tj. už očištěných o zajištění), n^* jako maximální duraci dostupných bezrizikových finančních aktiv schopných krýt $I[X]$ a Δ_n jako absolutně vyjádřený pokles bezrizikové úrokové míry s maturitou n^* způsobený stresem úrokových měr, jak je předepsán v technické specifikaci k SCR [1]. Pak můžeme vypočítat

$$RM_{UMR}(R[X]) = c(\mathbb{E} X - \mathbb{E} R[X]), \quad (2.6)$$

kde

$$c = CoC(d - n^*)(d - n^* + 1)\Delta_n. \quad (2.7)$$

Naše účelová funkce z úlohy 2.2 lze za použití tohoto značení přepsat jako

$$\begin{aligned} & \min_{R \in \mathcal{F}} H_2(R[X]), \\ & \text{kde } H_2(R[X]) = g(a_1(P - \pi(R[X]), \lambda(VaR_p(I[X]) - \mathbb{E} I[X])) + \\ & \quad + c(\mathbb{E} X - \mathbb{E} R[X]) + \\ & \quad + g(a_2(\pi(R[X]), \vartheta(CVaR_p(I[X]) - VaR_p(R[X]))) + \\ & \quad + \pi(R[X]) + VaR_p(X) - VaR_p(R[X]), \end{aligned} \quad (2.8)$$

Takto formulovanou úlohu budeme nyní postupně upravovat. Pro další zjednodušení značení definujeme

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E} R[X] \in [0, \mathbb{E} X] \\ \nu &= VaR_p(R[X]). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Připomeňme, že celá úloha musí být řešena s ohledem na podmínku

$$\pi(R[X]) \leq P, \quad (2.10)$$

která říká, že zajistné nemůže být vyšší než prvopojistné a samotné zajištění tak nevede k neoprávněnému obohacení. Další podmínky pro přípustnost vyplynou z následných úprav.

Nejprve obecně definujeme vrstvu $(a, b]$ rizika Z jako

$$\mathcal{L}_{(a,b]}(Z) = \min\{(Z - a)_+, (b - a)\} \quad 0 \leq a \leq b,$$

kde značení $(Z - a)_+$ odpovídá $\min\{(Z - a), 0\}$. Tuto definici můžeme interpretovat tak, že pokud realizace z náhodné veličiny Z představující riziko (ztrátu) padne do intervalu $(a, b]$, $\mathcal{L}_{(a,b]}(Z) = (Z - a)$. Pokud je $z \leq a$, hodnota vrstvy je nulová. Pokud $z \geq b$, hodnota vrstvy je $(b - a)$.

Jak později ukážeme, zápis funkce cedovaných ztrát $R[X]$ pomocí vrstev je snadno interpretovatelný a přesně odpovídá neproporcionálnímu XL zajištění, kdy zajistitel hradí škodu přesahující určitou hranici a až do maximální smluvené výše b . Toto schéma můžeme aplikovat na naši optimalizační úlohu pomocí následující věty. Nejprve však zadefinujeme použité značení.

Definice 5 (Konvexní pořadí). Zápísem $Y \geq_{cx} Z$ ve shodě se značením uvedeným v [2] rozumíme, že

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] \text{ a } \mathbb{E}[(Y - d)_+] \leq \mathbb{E}[(Z - d)_+]$$

(tedy je zachováno konvexní pořadí) pro všechna d reálná. Více o použití v tomto kontextu se dá dočíst například v [6].

Věta 4. Pro každou přípustnou funkci cedovaných ztrát $R[X]$ s $\mu = \mathbb{E}R[X]$ a $\nu = VaR_p(R[X])$ existuje přípustná funkce cedovaných ztrát $\tilde{R}[X]$ taková, že

$$\tilde{R}[X] = \begin{cases} \min\{X, \nu\} + \mathcal{L}_{(VaR_p(X), t]}(X), & \text{když } \mathbb{E}(\min\{X, \nu\}) \leq \mu \\ \min\{X, z\} + \mathcal{L}_{(VaR_p(X) - \nu + z, VaR_p(X)]}(X) & \text{jinak} \end{cases}$$

Pro nějaké $z \in [0, \nu]$ a $t \geq VaR_p(X)$ takové, že

$$CVaR_p(R[X]) \geq CVaR_p(\tilde{R}[X]),$$

$$VaR_p(\tilde{R}[X]) = VaR_p(R[X])$$

$$\tilde{R}[X] \geq_{cx} R[X].$$

Navíc platí

$$CVaR(\tilde{R}[X]) - VaR_p(\tilde{R}[X]) = \frac{1}{1-p}(\mu - \mathbb{E}(\min\{X, \nu\}))_+.$$

Důkaz. Důkaz je uveden ve [2] s využitím důkazu věty 3.2 z [6].

V důkazu je ukázáno, že existuje přípustná funkce cedovaných ztrát ve tvaru

$$\hat{R}[X] = \mathcal{L}_{(0, d_1]}(X) + \mathcal{L}_{(VaR_p(X) - \nu + d_1, d_2]}(X)$$

pro nějaké $d_1 \in [0, \nu]$ a $d_2 \geq VaR_p(X)$ splňující

$$\hat{R}[X] \geq_{cx} R[X], VaR_p(\hat{R}[X]) = \nu \text{ a } CVaR_p(R[X]) \geq CVaR_p(\hat{R}[X]).$$

□

Protože je funkce $\tilde{R}[X]$ současně i funkcí μ a ν , budeme ji zapisovat $\tilde{R}[X, \mu, \nu]$. Jak je ukázáno v [2], optimalizační úloha 2.8 lze zjednodušit pomocí předchozí věty a faktu, že účelová funkce 2.8 je zřejmě rostoucí v $\pi(R[X])$ a $CVaR_p(R[X])$, na optimalizační úlohu o dvou proměnných μ a ν ve tvaru

$$\min h_2(\mu, \nu) = H_2(\tilde{R}[X, \mu, \nu]) \tag{2.11}$$

za podmínek $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}_+^2$

$$\nu \leq VaR_p(X) + \mu - \mathbb{E}X \tag{2.12}$$

$$\pi(\tilde{R}[X, \mu, \nu]) \leq P$$

$$\int_{VaR_p(X) - \nu}^{VaR_p(X)} \tilde{F}(x) dx \leq \mu \leq \mathbb{E}X - \int_{\nu}^{VaR_p(X)} \tilde{F}(x) dx \tag{2.13}$$

$$\nu \leq VaR_p(X).$$

Uvedená podmínka 2.12 je nutná k zachování nerovnosti $VaR_p(I[X]) \geq \mathbb{E}I[X]$, zatímco podmínka 2.13 přidává vztah mezi μ a ν . Obě tyto podmínky jsou nutné pro použití předchozí věty a zápis pomocí vrstev rizika.

Poznámka. Autoři ve [2] dále ukazují, že úloha 2.11 lze převést na následující dva jednodušší optimalizační problémy:

$$\begin{aligned}
& \min h_2(\mu, VaR_p(X) + \mu - EX) \\
& \quad \text{za podmínek} \quad \pi(\tilde{R}[X; \mu, VaR_p(X) + \mu - EX]) \leq P \\
& \quad \quad \quad \mu_0 \leq \mu \\
& \min h_2(\mu, \nu) \\
& \quad \text{za podmínek} \quad (\mu, \nu) \in \mathcal{S} \\
& \quad \quad \quad \pi(\tilde{R}[X, \mu, \nu]) \leq P,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq \mu < \mu_0, \quad \nu \in [\nu(\mu), VaR_p(X) + \mu - EX] \cap \mathbb{R}_\mu\}, \\
\nu(\mu) &= \sup \{0 \leq t \leq VaR_p(X) : \mathbb{E}(\min\{X, t\}) \leq \mu\}, \\
\mathbb{R}_\mu &= \{\nu \in [0, VaR_p(X) + \mu - EX] \text{ tak, že} \\
& \text{podmínka 2.13 je splněna, } 0 \leq \mu \leq EX, \nu \leq VaR_p(X)\}.
\end{aligned}$$

2.2 Wangův princip pojistného a PHT

Pro vyřešení úlohy je dále třeba specifikovat princip pojistného $\pi(\cdot)$. Nejjednodušším příkladem je princip pojistného založený na střední hodnotě ve tvaru

$$\pi(\cdot) = (1 + \rho) \mathbb{E}[\cdot],$$

kde parametr $\rho > 0$ je přírůžka za nejistotu či náklady spojené se správou smlouvy. Jak je ukázáno například v [2], při použití tohoto principu je možné najít explicitní řešení optimalizační úlohy 2.11. V této práci se však zaměříme na obecnější skupinu principů pojistného označovanou souhrnně jako Wangův princip pojistného (viz například [7]). Ten je charakterizován jako

$$\pi(X) = (1 + \rho) \int_0^\infty \omega(\bar{F}(x)) dx,$$

kde $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$ a $\omega : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ je rostoucí konkávní funkce taková, že $\omega(0) = 0$ a $\omega(1) = 1$ označovaná jako distorzní funkce (distortion function). Jak lze vidět, princip pojistného založený na střední hodnotě je speciálním případem Wangova principu, neboť pro nezápornou náhodnou veličinu X s hustotou $f_X(x)$ a střední hodnotou $\mathbb{E} X$ platí

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} X &= \int_0^\infty x f_X(x) dx = \int_0^\infty \int_0^x 1 ds f_X(x) dx = \int_0^\infty \int_0^x f_X(x) ds dx = \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(x) dx ds = \int_0^\infty 1 - F_X(s) ds.
\end{aligned}$$

Protože naším cílem je převést úlohu do tvaru řešitelného pro software na základě generovaných dat, potřebujeme odhad $\pi(X)$ založený na výběru o rozsahu n . Jak ukazují například autoři v článku [8], takovým odhadem je

$$\hat{\pi}(X) = (1 + \rho) \sum_{i=1}^n \phi_i x_i = (1 + \rho) \sum_{i=1}^n \left[\omega \left(1 - \frac{i-1}{n} \right) - \omega \left(1 - \frac{i}{n} \right) \right] x_i, \quad (2.15)$$

kde $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ jsou realizace náhodných škod ve výběru srovnané bez újmy na obecnosti podle velikosti.

Jak je shrnuto například v článku [7], Wangův princip pojistného splňuje všechny vlastnosti uvedené v kapitole o principech pojistného (je pouze subaditivní, nikoliv aditivní). Zbývá však zvolit distorzní funkci ω . Shaun Wang ve svém článku [9] popisuje vhodné kandidáty, například (v původní anglické terminologii):

- Proportional hazard transform (PHT):

$$\omega(t) = t^{1/q}, q \geq 1$$

- Dual-power function:

$$\omega(t) = 1 - (1 - t)^\alpha, \alpha \geq 1$$

- Denneberg's absolute deviation principle: Pro $r \in [0,1]$

$$\omega(t) = \begin{cases} (1+r)t & \text{pro } 0 \leq t < 0,5 \\ r + (1-r)t & \text{pro } 0,5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- Quadratic function: Pro $r \in [0,1]$

$$\omega(t) = (1+r)t - rt^2.$$

Jak argumentuje Shaun Wang ve svém dalším článku [10] a dále je rozvedeno například v [11], princip PHT má řadu užitečných vlastností v aktuáрске praxi. I když budeme naši optimalizační úlohu dále řešit s obecnou distorzní funkcí ω , pro praktickou aplikaci byl vybrán právě PHT.

2.3 Řešení úlohy

Nyní přejdeme k praktickému pohledu na naši úlohu s cílem ji převést na softwarově řešitelný tvar s lineárními podmínkami na základě pozorovaných dat. Předpokládejme, že máme k dispozici historii škod x_1, x_2, \dots, x_n uspořádanou bez újmy na obecnosti $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

Pokud shrneme všechny předchozí argumenty, dostáváme následující podmínky pro přípustné funkce cedovaných ztrát $R[X; d_1, d_2, \mu, \nu]$ ve tvaru z důkazu věty 4 (pro přesnost přidáváme argumenty d_1 a d_2 do zápisu)

$$R[X; d_1, d_2, \mu, \nu] = \mathcal{L}_{(0, d_1]}(X) + \mathcal{L}_{(VaR_p(X) - \nu + d_1, d_2]}(X) \quad (2.16)$$

$$\mathbb{E} R[X; d_1, d_2, \mu, \nu] = \mu \quad (2.17)$$

$$0 \leq d_1 \leq \nu \leq VaR_p(X) \leq d_2 \quad (2.18)$$

$$\int_{VaR_p(X) - \nu}^{VaR_p(X)} \tilde{F}(x) dx \leq \mu \leq \mathbb{E} X - \int_{\nu}^{VaR_p(X)} \tilde{F}(x) dx \quad (2.19)$$

a dvě další podmínky

$$\pi(R[X; d_1, d_2, \mu, \nu]) \leq P \quad (2.20)$$

$$\nu \leq VaR_p(X) + \mu - \mathbb{E} X. \quad (2.21)$$

Podmínka 2.16 udává tvar přípustné funkce cedovaných ztrát přejatý z důkazu věty 4. Podmínka 2.17 je pouze připomenutí značení uvedené v 2.9 a podmínku 2.18 jsme dostali z věty 4. Dále, podmínka 2.19 je nutný vztah mezi μ a ν použitý v 2.13. Vztah 2.20 je vztah mezi zajistným a prvopojistným 2.10. A konečně 2.21 je podmínka 2.12 pro zachování $VaR_p(I[X]) \geq \mathbb{E} I[X]$.

Dále využijeme vztah pro uvažovaný princip pojistného 2.15. Dosazením vyjádření 2.16 do 2.15 získáme

$$\begin{aligned} \pi(R[X; d_1, d_2, \mu, \nu]) &= \\ &= (1 + \rho) \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\min(x_i, d_1) + (x_i - \widehat{VaR}_p(X) - d_1 + \nu)_+ - (x_i - d_2)_+ \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

kde zápis $(a)_+$ značí $\max(a, 0)$ a $\widehat{VaR}_p(X)$ je výběrový odhad (empirický kvantil) $VaR_p(X)$ ve smyslu

$$\widehat{VaR}_p(X) = \begin{cases} x_{[np]+1}, & \text{pokud } np \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{np} + x_{np+1}), & \text{pokud } np \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(x_i jsou bez újmy na obecnosti uspořádané podle velikosti a symbol $[\cdot]$ značí dolní celou část).

Dále můžeme integrály v podmínce 2.19 přepsat a odhadnout jako

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (X - VaR_p(X) + \nu)_+ - \mathbb{E} (X - VaR_p(X))_+ &= \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((x_i - \widehat{VaR}_p(X) + \nu)_+ - (x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+ \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (X - \nu)_+ - \mathbb{E} (X - VaR_p(X))_+ &= \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((x_i - \nu)_+ - (x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+ \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Zbývá upravit výraz $CVaR_p(R[X]) - VaR_p(R[X])$ uvnitř účelové funkce 2.11, resp. 2.8. S využitím Definice 2, 2.18 a vlastností funkce $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$ můžeme psát

$$\begin{aligned} & CVaR_p(R[X; \mu, \nu, d_1, d_2]) - VaR_p(R[X; \mu, \nu, d_1, d_2]) = \\ &= \frac{1}{1-p} \int_{VaR_p(X)}^{d_2} \bar{F}(x) dx = \frac{1}{1-p} (\mathbb{E}(X - VaR_p(x))_+ - \mathbb{E}(X - d_2)_+) = \\ &= \frac{1}{(1-p)n} \sum_{i=1}^n ((x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+ - (x_i - d_2)_+). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nyní můžeme formulovat následující větu 6, která převede naši výchozí optimalizační úlohu 2.8 do tvaru prakticky řešitelného softwarem, tj. s využitím empirických odhadů získaných z dat a lineárními nerovnostmi v podmínkách. Ještě předtím však zvlášť dokážeme lemma 5, které využijeme v jejím důkazu.

Lemma 5. *Nechť $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, M > 0$ je dostatečně vysoká (ale konečná) konstanta ve smyslu $M > \max(x, y, z)$ a existuje parametr $\eta \in \{0, 1\}$. Potom platí*

- $\min(x, y) = z \Leftrightarrow z \leq x, z \leq y, z \geq x - M\eta, z \geq y - M(1 - \eta)$
- $\max(x, y) = z \Leftrightarrow z \geq x, z \geq y, z \leq x + M\eta, z \leq y + M(1 - \eta)$

Důkaz. Začneme důkazem pro minimum.

\Rightarrow : První dvě nerovnosti plynou rovnou z toho, že $z = \min(x, y)$. Dále máme následující možnosti v závislosti na hodnotě z :

- $\min(x, y) = z = x$: Třetí nerovnost je splněna pro $\eta = 0$, tj. $z \geq x$. Čtvrtá nerovnost přechází na $z \geq y - M$, což platí díky tomu, že $y < M$ a $z \geq 0$.
- $\min(x, y) = z = y$: Čtvrtá nerovnost je splněna pro $\eta = 1$, tj. $z \geq y$. Třetí nerovnost přechází na $z \geq x - M$, což platí díky tomu, že $x < M$ a $z \geq 0$.

\Leftarrow : Důkaz rozdělíme v závislosti na hodnotě parametru η :

- $\eta = 1$: Třetí nerovnost je splněna podobně jako předtím. Ze čtvrté nerovnosti dostáváme $z \geq y$, což nám spolu s druhou nerovností dává $z = y$. Dosazením do první nerovnosti dostáváme $y = z \leq x$. Tedy buď $\min(x, y) = y = z$ anebo dokonce $x = y = z$ a potom $\min(x, y) = y = z = x$.
- $\eta = 0$: Čtvrtá nerovnost je splněna podobně jako předtím. Ze třetí nerovnosti dostáváme $z \geq x$, což nám spolu s první nerovností dává $z = x$. Dosazením do druhé nerovnosti dostáváme $x = z \leq y$. Tedy buď $\min(x, y) = x = z$ anebo dokonce $x = y = z$ a potom $\min(x, y) = x = z = y$.

Důkaz pro maximum probíhá naprosto analogicky s opačnými znaménky. □

Nyní provedeme reformulaci nelineární celočíselné úlohy 2.11. Tvar účelové funkce a jednotlivých podmínek je odvozen v důkazu. Hlavně kvůli celočíselnosti a vysokému počtu omezení v podmínkách je úloha poměrně komplikovaná a náročná na řešení (to bude zkoumáno v praktické části).

Věta 6. *Nechť M je konečná konstanta taková, že $M > 2x_n$. Pro úspornost značení definujeme*

$$K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+.$$

Úloha $\min_{\mu, \nu, d_1, d_2} H_2(R[X; \mu, \nu, d_1, d_2])$ s podmínkami 2.16 - 2.21 je ekvivalentní minimalizační úloze s proměnnými

$$\begin{aligned} \mu, \nu, d_1, d_2 &\in \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} &\in \mathbb{R}_+^n \\ \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 &\in \mathbb{R}_+^n \\ \boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_3, \boldsymbol{\delta}_4, \boldsymbol{\delta}_5 &\in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

s účelovou funkcí

$$\begin{aligned} \min \{ & -\nu - c\mu + (1 + \rho)\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}) + \\ & + g \left(a_2(1 + \rho)\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}), \frac{\vartheta}{(1-p)n}(nK - \mathbf{1}^T\mathbf{w}) \right) + \\ & + g \left(a_1P - a_1(1 + \rho)\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}), \lambda(\widehat{VaR}_p(X) - \nu) - \lambda(\bar{x} - \mu) \right) \} \end{aligned}$$

a podmínkami

$$0 \leq d_1 \leq \nu \leq \widehat{VaR}_p(X) \leq d_2 \leq x_n, \quad (2.26)$$

$$-\mathbf{x} + \mathbf{u} \leq \mathbf{0}, \quad -d_1\mathbf{1} + \mathbf{u} \leq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{u} - M\boldsymbol{\delta}_1 \leq \mathbf{0}, \quad -M\mathbf{1} + d_1\mathbf{1} - \mathbf{u} + M\boldsymbol{\delta}_1 \leq \mathbf{0}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{x} - (\widehat{VaR}_p(X) + d_1 - \nu)\mathbf{1} + \mathbf{v} \leq \mathbf{0}, \quad -\mathbf{v} \leq \mathbf{0},$$

$$-\mathbf{x} + (\widehat{VaR}_p(X) + d_1 - \nu)\mathbf{1} + \mathbf{v} - M\boldsymbol{\delta}_2 \leq \mathbf{0}, \quad -M\mathbf{1} + \mathbf{v} + M\boldsymbol{\delta}_2 \leq \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{x} - d_2\mathbf{1} - \mathbf{w} \leq \mathbf{0}, \quad -\mathbf{w} \leq \mathbf{0},$$

$$-\mathbf{x} + d_2\mathbf{1} + \mathbf{w} - M\boldsymbol{\delta}_3 \leq \mathbf{0}, \quad -M\mathbf{1} + \mathbf{w} + M\boldsymbol{\delta}_3 \leq \mathbf{0}, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{x} - (\widehat{VaR}_p(X) - \nu)\mathbf{1} - \mathbf{m}_1 \leq \mathbf{0}, \quad -\mathbf{m}_1 \leq \mathbf{0},$$

$$-\mathbf{x} + (\widehat{VaR}_p(X) - \nu)\mathbf{1} + \mathbf{m}_1 - M\boldsymbol{\delta}_4 \leq \mathbf{0}, \quad -M\mathbf{1} + \mathbf{m}_1 + M\boldsymbol{\delta}_4 \leq \mathbf{0}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{x} - \nu\mathbf{1} - \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{0}, \quad -\mathbf{m}_2 \leq \mathbf{0},$$

$$-\mathbf{x} + \nu\mathbf{1} + \mathbf{m}_2 - M\boldsymbol{\delta}_5 \leq \mathbf{0}, \quad -M\mathbf{1} + \mathbf{m}_2 + M\boldsymbol{\delta}_5 \leq \mathbf{0}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{1}^T\mathbf{m}_1 - nK - n\mu \leq 0, \quad (2.32)$$

$$n\mu - n\bar{x} + \mathbf{1}^T\mathbf{m}_2 - nK \leq 0, \quad (2.33)$$

$$\nu - \mu + \bar{x} - \widehat{VaR}_p(X) \leq 0, \quad (2.34)$$

$$-P + (1 + \rho)\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}) \leq 0, \quad (2.35)$$

$$n\mu - \mathbf{1}^T(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0. \quad (2.36)$$

Důkaz. Pro co největší přehlednost vyjdeme z předchozí formulace účelové funkce 2.8. Výrazy $VaR_p(X)$ a $\mathbb{E} X$ lze odhadnout jako $\widehat{VaR}_p(X)$ a \bar{x} respektive, pro daná data se však jedná o konstanty, které nemají na samotnou optimalizaci žádný vliv (kromě hodnoty účelové funkce) a lze je tedy v účelové funkci vynechat. Pomocí značení 2.9 přepíšeme $VaR_p(R[X])$ jako ν a $\mathbb{E} R[X]$ jako μ . Postupně tedy upravujeme:

$$\begin{aligned} & g(a_1(P - \pi(R[X])), \lambda(VaR_p(I[X]) - \mathbb{E} I[X])) - \\ & -c \mathbb{E} R[X] + \\ & +g(a_2(\pi(R[X]), \vartheta(CVaR_p(I[X]) - VaR_p(R[X]))) + \\ & +\pi(R[X]) - VaR_p(R[X]) \end{aligned}$$

Výraz $\pi(R[X])$ přepíšeme podle 2.22, $\mathbb{E} I[X]$ jako $\mathbb{E} X - \mathbb{E} R[X]$, $VaR_p(I[X])$ podle 2.1 a rozdíl

$$CVaR_p(R[X; \mu, \nu, d_1, d_2]) - VaR_p(R[X; \mu, \nu, d_1, d_2])$$

podle 2.25. Dostaneme

$$\begin{aligned} & g\left(a_1 P - a_1 \left((1 + \rho) \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\min(x_i, d_1) + \left(x_i - (\widehat{VaR}_p(X) + d_1 - \nu) \right)_+ - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (x_i - d_2)_+ \right) \right), \lambda \left((\widehat{VaR}_p(X) - VaR_p(R[X])) - (\mathbb{E} X - \mathbb{E} R[X]) \right) \right) - \\ & -c\mu + \\ & +g\left(a_2 \left((1 + \rho) \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\min(x_i, d_1) + \left(x_i - (\widehat{VaR}_p(X) + d_1 - \nu) \right)_+ - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (x_i - d_2)_+ \right) \right), \frac{\vartheta}{(1-p)n} \sum_{i=1}^n \left((x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+ - (x_i - d_2)_+ \right) \right) + \\ & + (1 + \rho) \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\min(x_i, d_1) + \left(x_i - (\widehat{VaR}_p(X) + d_1 - \nu) \right)_+ - (x_i - d_2)_+ \right) - \nu. \end{aligned}$$

Výrazy v součinu s λ nahradíme svými odhady a zjednodušíme zápis pomocí K definovaného ve znění věty. Dále zavedeme vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} a \mathbf{w} , kde pro $i = 1, 2, \dots, n$ definujeme

$$\begin{aligned} u_i &= \min(x_i, d_1), \\ v_i &= \left(x_i - (\widehat{VaR}_p(X) + d_1 - \nu) \right)_+, \\ w_i &= (x_i - d_2)_+, \end{aligned}$$

čímž můžeme přejít místo sumace k úspornějšímu skalárnímu součinu a dostaneme

$$\begin{aligned} & g\left(a_1 P - a_1 (1 + \rho) \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}), \lambda(\widehat{VaR}_p(X) - \nu) - \lambda(\bar{x} - \mu)\right) - \\ & -c\mu + \\ & +g\left(a_2 (1 + \rho) \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}), \frac{\vartheta}{(1-p)n} (nK - \mathbf{1}^T \mathbf{w})\right) + \\ & + (1 + \rho) \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}) - \nu. \end{aligned}$$

Po přeházení sčítanců dostáváme tvar účelové funkce z věty.

Nyní postupně ukážeme podmínky. První podmínka 2.26 je přepsáním podmínky 2.18 s využitím odhadů příslušných náhodných veličin. Následující čtyři podmínky 2.27 plynou z definice vektoru \mathbf{u} , $u_i = \min(x_i, d_1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, kde je minimum nahrazeno čtyřmi ekvivalentními nerovnostmi pro minimum z lemmatu 5. Ve značení z lemmatu $x = x_i$, $y = d_1$, $z = u_i$, $M = M$, $\eta = \delta_{1,i}$. Tak postupně dostáváme čtyři podmínky

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \leq d_1 \mathbf{1} \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{x} - M \boldsymbol{\delta}_1, \quad \mathbf{u} \geq d_1 \mathbf{1} - M(\mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}_1).$$

Čtyři podmínky 2.28 a čtyři podmínky 2.29 jsou podobnou aplikací části lemmatu 5 pro maximum na vektory \mathbf{v} , resp. \mathbf{w} , čímž je zápis $(\cdot)_+$ nahrazen čtyřmi podmínkami. Poprvé používáme lemma s $\eta = \delta_{2,i}$, podruhé s $\eta = \delta_{3,i}$ a v obou případech s $y = 0$.

Další dvě čtveřice podmínek 2.30 a 2.31 opět plynou z převedení zápisu $(\cdot)_+$ na čtyři nerovnosti z lemmatu. Jedná se o dvě nerovnosti v podmínce 2.19, které jsme upravili s využitím příslušných odhadů v 2.23 a 2.24. Pomocí nich potom definujeme vektory \mathbf{m}_1 a \mathbf{m}_2 tak, že pro $i = 1, 2, \dots, n$

$$m_{1,i} = (x_i - \widehat{VaR}_p(X) + \nu)_+ \\ m_{2,i} = (x_i - \nu)_+$$

a použijeme postupně podle lemmatu s $\boldsymbol{\delta}_4$, resp. $\boldsymbol{\delta}_5$.

Samotná podmínka 2.19 je rozložena na 2.32 a 2.33. Přesněji, podmínku 2.32 získáme

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \left((x_i - \widehat{VaR}_p(X) + \nu)_+ - (x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+ \right) \right] &\leq \mu \\ \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \widehat{VaR}_p(X) + \nu)_+ - \sum_{i=1}^n (x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+ \right] &\leq \mu \\ \mathbf{1}^T \left((\mathbf{x} - \widehat{VaR}_p(X) \mathbf{1} + \nu \mathbf{1})_+ \right) - n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+ &\leq n\mu \\ \mathbf{1}^T \mathbf{m}_1 - nK - n\mu &\leq 0 \end{aligned}$$

a podmínku 2.33 dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{x} - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \left((x_i - \nu)_+ - (x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+ \right) \right] &\geq \mu \\ \bar{x} - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \nu)_+ - \sum_{i=1}^n (x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+ \right] &\geq \mu \\ n\bar{x} - \mathbf{1}^T (\mathbf{x} - \nu \mathbf{1})_+ + n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \widehat{VaR}_p(X))_+ &\geq n\mu \\ n\mu - n\bar{x} + \mathbf{1}^T \mathbf{m}_2 - nK &\leq 0. \end{aligned}$$

Podmínky 2.34 a 2.35 plynou rovnou z podmínek 2.20 a 2.21 při použití odhadů. A nakonec poslední podmínka 2.36 plyne rovnou z kombinace původních podmínek 2.16 a 2.17. Tím je důkaz hotov. □

3. Praktická část

3.1 Tvary zajistné funkce

Připomeňme, že celá optimalizační úloha v předchozí kapitole byla zformulována z pozice prvopojistitele jako minimalizace nezajištěné části rizika měřeného pomocí hodnoty v riziku (tj. $VaR_p(I[X]) = VaR_p(X) - VaR_p(R[X])$) a současně minimalizace ceny zajištění (tj. $\pi(R[X])$). Toto celé je také bráno s ohledem na úbytek technických rezerv prvopojistitele (resp. odpovídající rizikové marže), protože prvopojistitel nemusí držet celé technické rezervy na krytí zajištěných rizik. Při řešení zmíněné optimalizační úlohy jsme však explicitně neomezili, jakou skupinu typů zajištění uvažujeme a zda-li je vůbec výsledná podoba úlohy v souladu s některým z reálně existujících typů zajištění.

V podmínce 2.16 jsme specifikovali tvar zajistné funkce v zápisu pomocí vrstev rizika jako

$$R[X] = \mathcal{L}_{(0,d_1]}(X) + \mathcal{L}_{(VaR_p(X)-\nu+d_1,d_2]}(X).$$

Nechť x je konkrétní realizace nezáporné náhodné veličiny ztrát X . Potom první člen je roven x pokud $x \in (0,d_1]$ a d_1 , pokud $x > d_1$. Druhý člen je roven $(x - VaR_p(X) - d_1 + \nu)_+$ pro $x \leq d_2$ a $d_2 - VaR_p(X) - d_1 + \nu$ pro $x > d_2$.

Toto bude nyní pro lepší představu ilustrováno na příkladu. Nechť náhodná veličina ztrát X nabývá pouze diskrétních hodnot 0, 250, 500, 750, ..., 4750, 5000 se stejnou pravděpodobností. Potom můžeme spočítat výběrový kvantil na hladině 0,995, který je roven 4975. Toto použijeme jako hodnotu $VaR_{0,995}$ (úlohu budeme počítat na hladině 0,995, která je často využívaná v kontextu Solvency II pro výpočet kapitálového požadavku). Pro účely ilustrace dále zvolíme

$$d_1 = 1000, \quad d_2 = 4000, \quad \nu = 3500.$$

Hodnoty jednotlivých vrstev a celkově funkce $R[X]$ jsou shrnuty v Tabulce 3.1. Vidíme, že hodnota první vrstvy roste stejně jako hodnota X , avšak po dosažení d_1 zůstává na hladině d_1 . Druhá vrstva je nulová, dokud X nedosahuje hodnoty vyšší než

$$VaR_{0,995} + d_1 - \nu = 4975 + 1000 - 3500 = 2475$$

a roste úměrně X až do dosažení hodnoty

$$d_2 - VaR_{0,995} - d_1 + \nu = 4000 - 4975 - 1000 + 3500 = 1525.$$

Nyní budeme zkoumat chování funkce $R[X]$ v závislosti na jednotlivých parametrech. Pro ilustraci stále používáme hodnoty X uvedené výše a $p = 0,995$. Připomeňme, že zatímco $VaR_p(X)$ je dáno daty (tj. realizacemi náhodné veličiny škod X), parametry d_1 , d_2 a ν jsou rozhodovací proměnné. V závislosti na nich můžeme získat následující typy průběhu $R[X]$, které použitá parametrizace umožňuje:

1. Žádné zajištění: V praxi se může stát, že cena za zajištění $\pi(R[X])$ je nastavena zajistitelem tak vysoko, že není vůbec vhodné žádné zajištění sjednávat. V takovém případě bychom dostali

$$d_1 = d_2 = 0, \quad \nu = VaR_{0,995}(X) = 4975.$$

X	$\mathcal{L}_{(0,1000]}(X)$	$\mathcal{L}_{(VaR_p(X)-\nu+d_1,d_2]}(X)$	$R[X]$
0	0	0	0
250	250	0	250
500	500	0	500
750	750	0	750
1000	1000	0	1000
1250	1000	0	1000
1500	1000	0	1000
1750	1000	0	1000
2000	1000	0	1000
2250	1000	0	1000
2500	1000	25	1025
2750	1000	275	1275
3000	1000	525	1525
3250	1000	775	1775
3500	1000	1025	2025
3750	1000	1275	2275
4000	1000	1525	2525
4250	1000	1525	2525
4500	1000	1525	2525
4750	1000	1525	2525
5000	1000	1525	2525

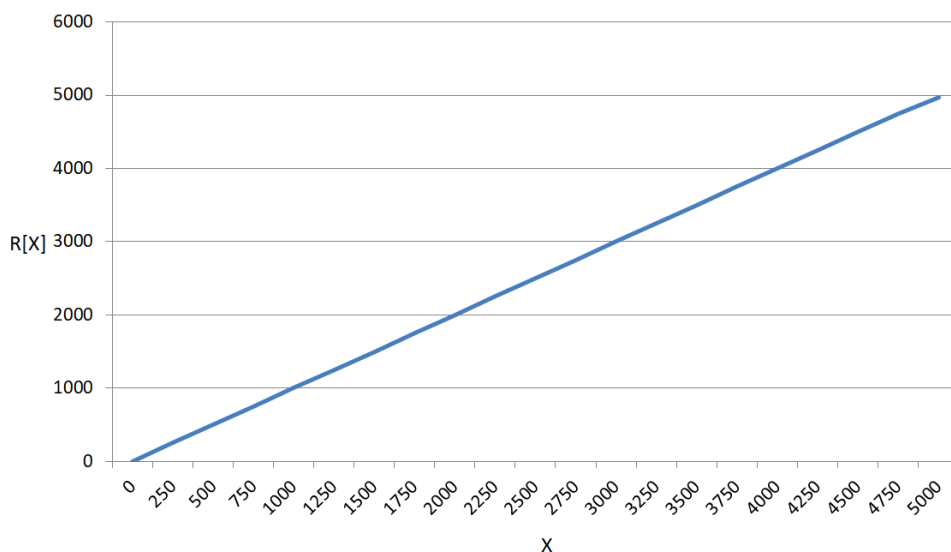
Tabulka 3.1: Příklad použití vrstev rizika v zajistné funkci

Potom jsou hodnoty obou vrstev nulové a funkce $R[X]$ je konstantní nula pro všechny realizace x .

2. Vše proporcionálně zajištěno: Opakem prvního případu je situace s nastavením

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \nu = VaR_{0,995}(X) = 4975$$

ilustrovaná na Obrázku 3.1. Zde vidíme, že $X = R[X]$, tedy vlastně vše je zajištěno proporcionálně s kvótou $\alpha = 1$. I když se možná toto řešení zdá pro pojišťovnu nerealistické, v praxi k takovým případům dochází. Například, pokud pojišťovna ceduje zajišťovně ze stejné obchodní skupiny, která ji umožňuje zaplatit zajistné $\pi(R[X])$ nižší, než je vybrané pojistné P , je tato smlouva pro prvopojistitele výhodná.



Obrázek 3.1: Příklad 2: Vše zajištěno proporcionálně

3. Proporcionální zajištění s limitem: Na rozdíl od předchozího případu může nastat situace, kdy si zajistitel smluvně stanoví určitou mez, do které nejvýše je ochoten škodu hradit, zejména kvůli obavě z extrémních škod plynoucích z katastrofických událostí. Toto nastává například při

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 4000, \quad VaR_{0,995}(X) = 4975, \quad \nu = 5000,$$

což je zachyceno na Obrázku 3.2

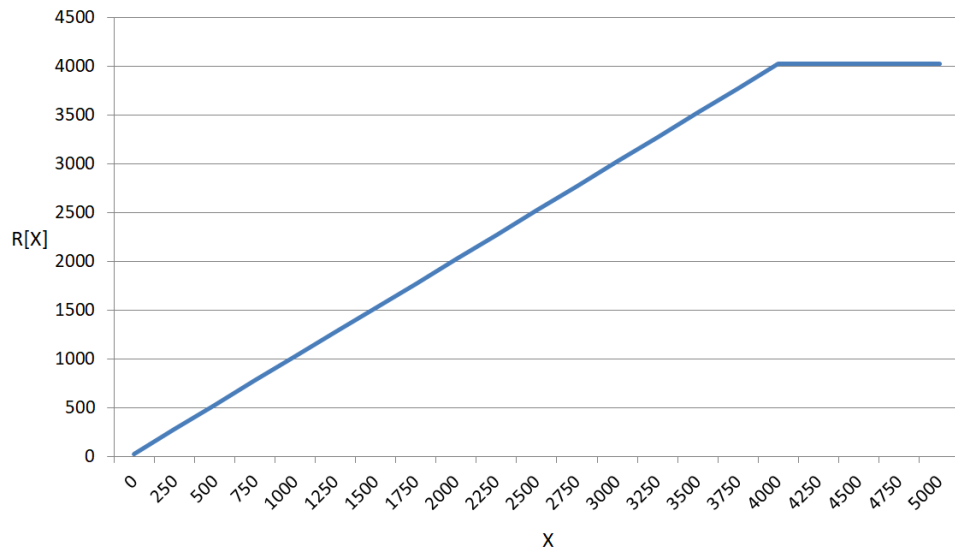
4. Neproporcionální zajištění: Jiný typ průběhu dostaneme například při nastavení

$$d_1 = 0, \quad d_2 = VaR_{0,995}(X) = 4975, \quad \nu = 4000$$

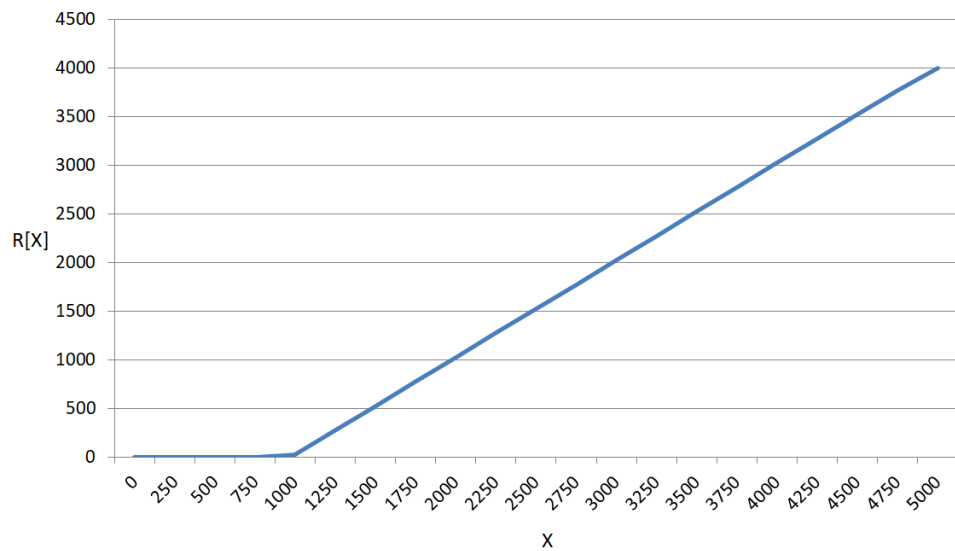
zachycený na Obrázku 3.3. Zajistná funkce $R[X]$ je nejprve nulová, potom roste lineárně, což přesně odpovídá neproporcionálnímu zajištění typu XL, kdy zajistitel hradí všechny škody jednotlivě přesahující předem domluvenou hladinu.

5. Omezení shora i zdola: Kombinací posledních dvou příkladů dostáváme funkci, která je omezena shora i zdola, například díky parametrizaci

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 4000, \quad VaR_{0,995}(X) = 4975, \quad \nu = 3000,$$



Obrázek 3.2: Příklad 4: Proporcionalní zajištění s limitem



Obrázek 3.3: Příklad 3: Neproporcionalní XL zajištění

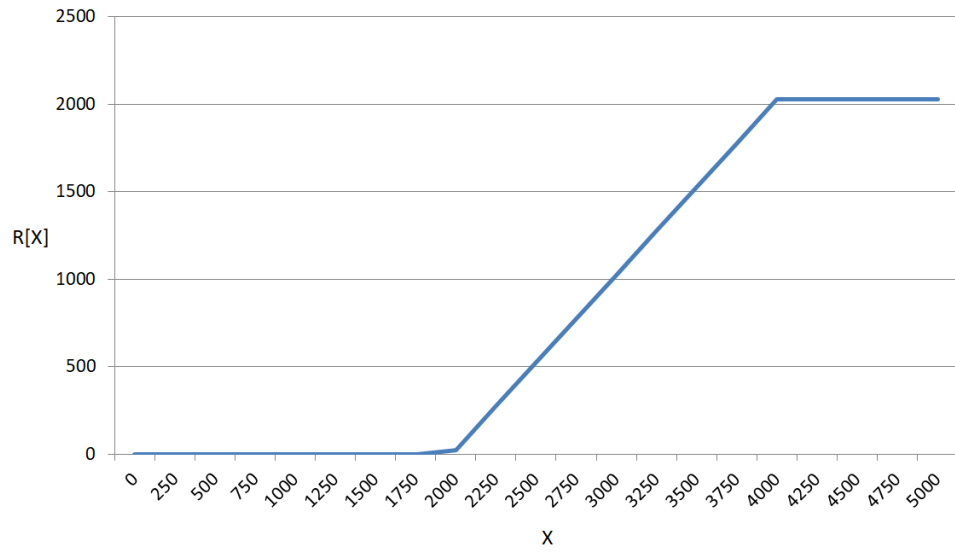
což je zachyceno na Obrázku 3.4.

6. Kombinace: Nejsložitější tvar funkce $R[X]$ dostaneme například parametrizací

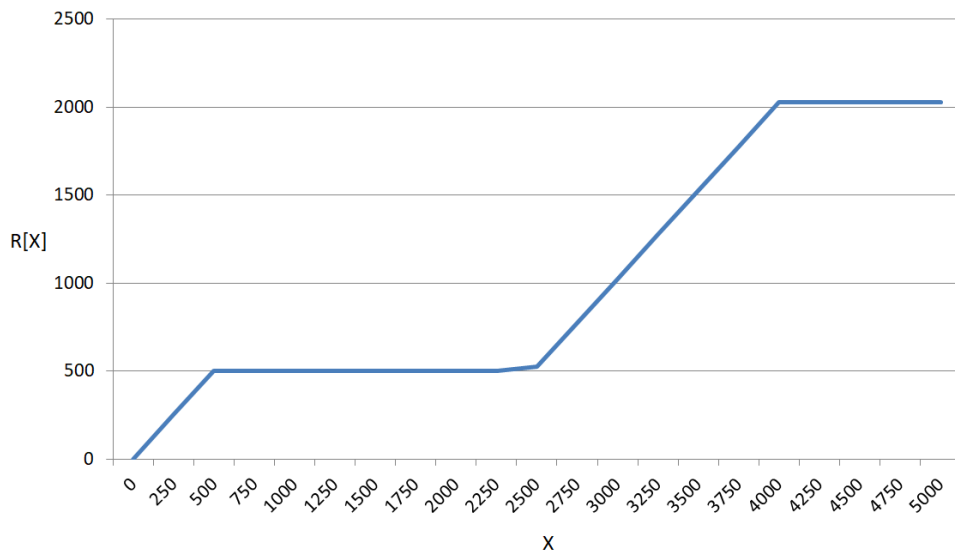
$$d_1 = 500, \quad d_2 = 4000, \quad VaR_{0,995}(X) = 4975, \quad \nu = 3000.$$

Tato varianta je ilustrována na Obrázku 3.5. I když je tento průběh díky použité parametrizaci možný, nemá žádnou jednoduchou realistickou interpretaci.

Poznámka. Z výše uvedeného rozboru vyplývá, že daná optimalizační úloha dobře odpovídá neproporcionalnímu XL zajištění, chybí nám však parametry pro op-



Obrázek 3.4: Příklad 5: Omezení shora i zdola



Obrázek 3.5: Příklad 6: Kombinace

timalizaci kvót proporcionálního zajištění pro pojišťovnu kombinující proporcio-
nální a neproporcionální zajištění. Úloha by šla dále zobecnit a uvažovat další
optimalizační parametry α_j pro j z nějaké množiny J umožňující úpravy trendů
ve smyslu kvót u proporcionálního zajištění. Přidání takových proměnných do
účelové funkce i podmínek je však vzhledem už k současné komplikovanosti úlohy
vcelku náročné, a proto nebude v této práci uvažováno.

3.2 Data a úpravy dat

Pro praktickou část byla použita data České kanceláře pojistitelů (ČKP) publikovaná na stránkách České společnosti aktuárů v roce 2015 (viz [12]). Data a doprovodnou prezentaci připravil Mgr. Petr Jedlička, Ph.D. u příležitosti Jarního aktuárského setkání v květnu 2015 za účelem zveřejnění reálných dat použitelných v diplomových a bakalářských pracích a pro možnost aplikace různých metod pojistné matematiky. Jedná se o individuálních škodní data z garančního fondu, který spravuje ČKP a je určen pro úhradu škod způsobených nepojištěnými vozidly a dalších škod specifikovaných zákonem. Konkrétně jsou to škody nastalé mezi lety 2000 a 2015, kdy v jednom souboru je evidováno tvoření a úpravy rezerv náležitých jednotlivým škodám a ve druhém je rozpouštění rezerv do výplat pojistného plnění. Kombinací těchto dvou datových souborů získáváme přehled o vyplacených škodách mezi lety 2000 a 2015.

V datech ČKP máme také k dispozici informaci o druhu pojistného plnění:

- Věcná škoda: Nároky spojené se škodou na majetku (například oprava vozidla, totální likvidace vozidla).
- Škoda na zdraví: Nároky spojené se škodou na zdraví bez opakujících se plateb rent (například bolestné, krátkodobé léčebné náklady).
- Renta: Nároky na pravidelně se opakující výplaty (například ztráta na výdělků způsobená invaliditou, náklady na nutnou asistenci v domácnosti).
- Ušlý zisk: Nároky na ušlé zisky právnických osob (analogie ztrát na výdělků fyzických osob).
- Technické poplatky: Použito v případě, kdy se v minulosti předpokládaly nenulové závazky, což však bylo později vyloučeno a na smlouvě tak vznikly přímo přiřaditelné technické náklady na vyšetřování bez jakýchkoliv jiných závazků.
- Nic: Použito v případě, kdy se v minulosti předpokládaly nenulové závazky, což však bylo později vyloučeno a žádné technické poplatky nevznikly.
- Ostatní: Typ není známý nebo se jedná o velmi specifické případy.

Datový soubor obsahuje informace o téměř 49 tisících škod. Pro účely této práce budeme pracovat pouze s věcnými škodami představujícími asi 75 % všech škod (celkem 36 683 škod), což znamená dostatečně reprezentativní vzorek. Navíc ze zkušenosti vyplývá, že vyřízení věcných škod bývá jednodušší (často jednorázová výplata, což je procesně nejsnadnější pro zajistitele) v porovnání se škodami na zdraví, kde vyšetřování škody a stanovení její výše trvá řádově několik let a rezerva může být mnohokrát upravována a plnění vypláceno po částech. Kategorie renta, ušlý zisk, ostatní a nic vynecháváme, protože se jedná o závazky s velmi specifickým vývojem a jejich výskyt v datech je velmi nízký (všechny kategorie pod 200 škod, což je méně než 1 %). Technických poplatků je okolo 13 %, z povahy věci se však jedná o spíše individuální výskyty spojené s rezervovacími a likvidačními procesy nastavenými v garančním fondu ČKP, které by zhoršovaly interpretovatelnost dat a výsledků.

Při podrobnějším zkoumání samotných dat byly zjištěny ještě některé nesrovnalosti, například datum ohlášení pojistné události předchází datu jejího vzniku anebo datum výplaty předchází datu ohlášení události. Po reconciliaci s druhým souborem s pohyby rezerv byly také vynechány ty škody, kde došlo k výplatě plnění, ale nevznikla žádná rezerva na nahlášené ale dosud neuhrazené škody (tzv. Reported But Not Settled - RBNS), což je běžný postup v praxi. Také neuvažujeme škody s nulovým plněním. V průvodní prezentaci k datům ČKP autor zmiňuje, že data nebyla záměrně očištěna od některých nesmyslných údajů kvůli výukovým účelům. Po vyřazení zmíněných nedůvěryhodných údajů zůstává v našem datovém souboru 35 571 vyplacených škod z let 2000-2015.

V upravených datech sledujeme i datum výplaty pojistného plnění, které budeme dále potřebovat. Je však běžné i u věcných škod, že nejdříve je vyplacena pouze část pojistného plnění a zbytek uhradí pojišťovna až později, například po zjištění nových skutečností nebo skončení vyšetřování a likvidace události. Analýza dat, kde je jedna škoda přítomna vícekrát (každá vyplacená část plnění vstupuje jako jeden údaj), může však vést k nesprávným závěrům, kdy například jedna velká škoda je rozložena na více fiktivních menších škod, protože byla vyplácena postupně. Proto přijmeme zjednodušení, kdy všechny části plnění pro jednu danou škodu sečteme (tím dostaneme, že jedna škoda odpovídá jedné platbě) a přisoudíme k datu poslední vyplacené části. Tedy například škoda nastalá 1.1.2013 s první výplatou 1.2.2013 ve výši 5 000 Kč a druhou výplatou 1.3.2013 ve výši 6 000 Kč bude v našem datasetu jako škoda s výplatou 1.3.2013 ve výši 11 000 Kč.

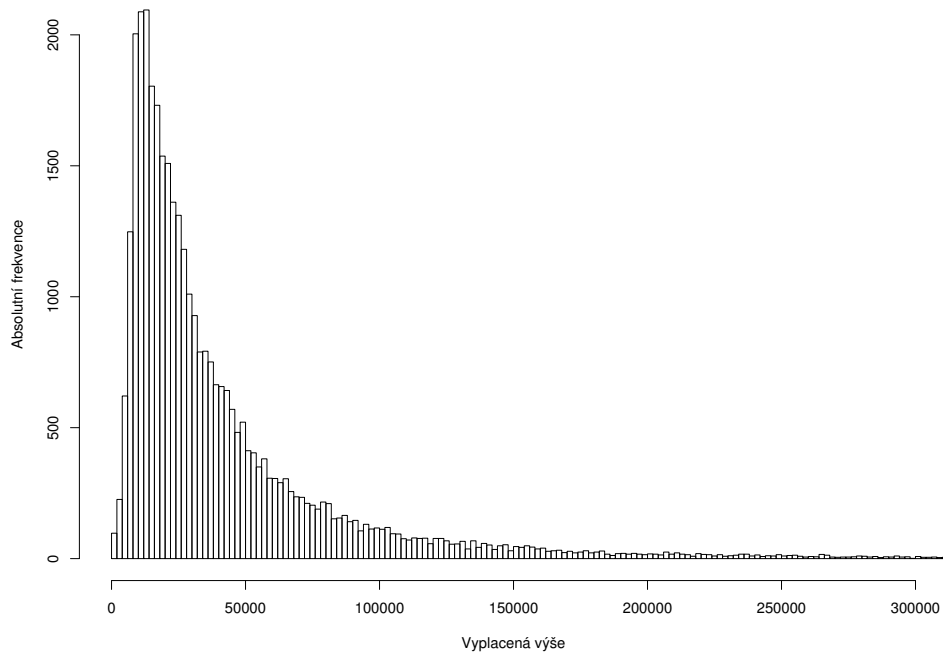
Základní informace o datovém souboru věcných škod můžeme zjistit z Obrázku 3.6 a Tabulky 3.2. Z obou vidíme, že data jsou výrazně zešikmena, což je typické pro pojistná data, a pohybují se v širokém intervalu od 114 Kč do 2 679 750 Kč. Přítomná šikmost rovněž způsobuje rozdíl mezi průměrem a mediánem a velký rozdíl mezi maximem a třetím kvantilem.

Výše škod	
Minimum	114
První kvartil	14 580
Medián	26 267
Průměr	44 401
Třetí kvartil	50 271
Maximum	2 679 750

Tabulka 3.2: Základní popisné statistiky škod (v Kč)

Nyní je třeba si uvědomit, že náš výpočet v kontextu Solvency II zahrnuje změny potřebného kapitálu vlivem zajištění prostřednictvím jednotlivých rizikových marží. Solventnostní kapitálový požadavek se počítá na ročním horizontu, a proto ve výpočtu rizikových marží figurují i některé roční parametry (například roční pravděpodobnost bankrotu zajištětele v rizikové marži pro riziko selhání protistrany). Abychom udrželi konzistenci a realističnost výpočtu, musíme brát pouze roční objem škod, nikoliv všechny škody z let 2000-2015. Proto jsme se rozhodli z celkového datového souboru popsání výše vyčlenit pouze škody vyplacené v posledním roce, tj. 2015. Těch je celkem 1 691, jejich histogram je na Obrázku 3.7 a základní popisné statistiky vidíme v Tabulce 3.2. Vidíme, že rok

Histogram – vecné škody



Obrázek 3.6: Histogram vyplacených škod

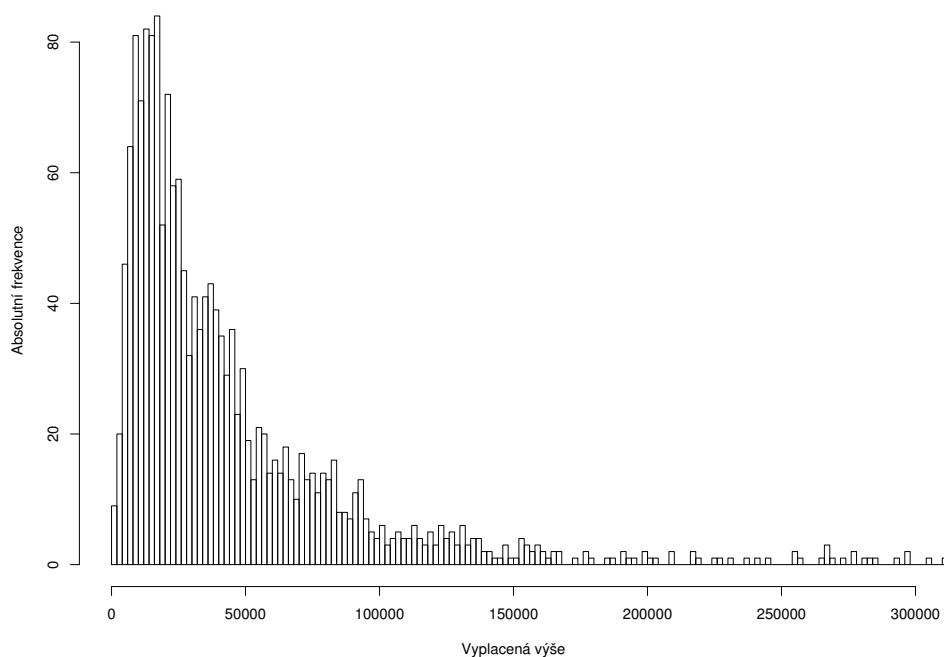
2015 je vcelku dobrý reprezentant celkového datového souboru, v porovnání s předchozí tabulkou pozorujeme podobné hodnoty prakticky všech popisných statistik s výjimkou maxima. V roce 2015 tedy zřejmě z garančního fondu nebyly vyplaceny tak vysoké škody jako ze zbytku pozorovaného období. Oba histogramy vypadají také podobně.

Výše škod	
Minimum	293
První kvartil	15 203
Medián	29 319
Průměr	45 944
Třetí kvartil	56 648
Maximum	606 125

Tabulka 3.3: Základní popisné statistiky škod vyplacených 2015 (v Kč)

Kromě samotných škod vstupuje do výpočtu ještě řada dalších parametrů vyplývajících z pojistného kontextu úlohy. Hodnoty těchto parametrů byly vesměs přejaty z článku [2], kde je zběžně diskutována jejich opodstatněnost. Výjimku tvoří koeficienty pro rozptyl rizik pojistného a rezerv, kde namísto hodnot doporučených v technické specifikaci k pojištění majetku byly použity hodnoty k povinnému ručení. Klíčovými parametry pro optimalizační úlohu je pojistné P , které pojišťovna (prvopojistitel) vybírá od svých klientů, a prémie za neurčitost a poplatky ρ , která je součástí výpočtu zajistného. Tedy zatímco P je voleno pojišťovnou na základě své oceňovací metodologie, zajistitel volí ρ . Pro úvodní výpočet bylo zvoleno $P = 150\,000$ Kč a $\rho = 50\%$. Pojistné P bylo takto nastá-

Histogram – vecné škody 2015



Obrázek 3.7: Histogram vyplacených škod v roce 2015

veno s ohledem na výši průměrné a maximální škody. Těmito parametry se však budeme později zabývat dále. Všechny parametry shrnuje následující Tabulka 3.4 a byly popsány v úvodní kapitole této práce.

P	Pojistné vybrané pojišťovnou	150 000 Kč
d	Modifikovaná durace závazků $I[X]$	1,56
n^*	Nejdelší dostupná durace bezriz. aktiv kryjících $I[X]$	1,00
l	Konstanta pro riziko selhání protistrany	3,00
q	Roční pravděpodobnost bankrotu zajistitele	6,04 %
CoC	Sazba nákladů na kapitál	6,00 %
δ_n	Pokles bezriz. míry při stresu SCR	3,00 %
RecR	Recovery rate	50,00 %
λ	Upravený CoC	5,77 %
p	Kvantil, na kterém je výpočet proveden	99,50 %
σ_{PR}	Koeficient rozptylu rizika pojistného	10,00 %
σ_{RR}	Koeficient rozptylu rizika rezerv	9,50 %
ρ	Prémie za neurčitost v pojistném	50,00 %

Tabulka 3.4: Vložené parametry

Jako princip pojistného volíme Wangův a PHT s distorzní funkcí

$$\omega(t) = t^{0,95}.$$

Pro ušetření výpočetního výkonu byly jednotlivé členy ϕ_i zavedené v 2.15 spočteny předem v MS Excel a vloženy jako číselné hodnoty.

3.3 Implementace v softwaru

Úloha byla řešena v systému GAMS 24.0.2. V úloze se nachází celočíselné 0-1 proměnné ve složkách vektorů $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$, ostatní jsou kladné reálné proměnné. Proto byl k řešení použit přístup Mixed Integer Non-Linear Programming (MINLP) a solver *dicopt*. Detaily o tomto solveru lze najít online v uživatelském manuálu GAMSu [13].

MINLP je druh matematického programování se spojitými i celočíselnými proměnnými a nelineárními výrazy v účelové funkci i podmínkách. Obecně se jedná o úlohy ve tvaru

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x,y) \\ \text{s.t.} \quad & g(x,y) \leq 0 \\ & x \in X \quad \text{reálné} \\ & y \in Y \quad \text{celočíselné} \end{aligned}$$

pro nějaké množiny přípustných řešení X a Y . Úlohy typu MINLP mohou být výpočetně náročné, protože kombinují jak problematiku celočíselnosti (Mixed Integer Programming - MIP) tak nelineárního (a nekonvexního) programování (Non-Linear Programming - NLP).

Jak je uvedeno například v článku [14], existuje řada optimalizačních algoritmů a technik pro MINLP, často zobecněné z MIP. V anglické terminologii například Outer Approximation, Branch and Bound, Extended Cutting Plane method a Generalized Bender's Decomposition. Některé algoritmy fungují dvukrokově (například Branch and Bound), kdy je nejdříve ignorován požadavek na celočíselnost některých proměnných a úloha je řešena NLP algoritmy (také nazýváno Relaxed MINLP - RMINLP) a až ve druhém kroku je hledáno přípustné celočíselné řešení. Zmíněné metody jsou velmi dobře popsány v knize [15].

Dicopt (název odvozen z anglického Discrete and Continuous Optimizer) je solver MINLP problémů implementovaný v GAMSu. Autory jsou J. Viswanathan a Ignacio E. Grossmann. *Dicopt* rozkládá MINLP úlohu na sérii NLP a MIP podproblémů, které mohou být řešeny jakýmkoliv NLP, resp. MIP algoritmem. GAMS nabízí *conopt*, *ipopt*, *knitro*, *minos* a *snopt* jako možné NLP algoritmy a *cplex*, *gurobi* a *xpress* jako MIP algoritmy. Při řešení úlohy byl použit *conopt* a *cplex*. Více informací lze najít v uživatelské dokumentaci GAMSu [13]. Zdrojový kód použitý k výpočtu lze najít v Příloze A.

3.4 Výsledky

V naší úloze se nachází nezáporné proměnné $\mu, \nu, d_1, d_2, u_i, v_i, w_i, m_{1,i}$ a $m_{2,i}$, $i = 1 \dots 1691$ a binární proměnné (tj. 1-0 celočíselné) $\delta_{1,i}, \delta_{2,i}, \delta_{3,i}, \delta_{4,i}$ a $\delta_{5,i}$, $i = 1 \dots 1691$. Celkem tedy úloha obsahuje $10 \cdot 1691 + 4 = 16\,915$ proměnných, z čehož je 8 455 binárních, a téměř 34 tisíc rovnic v podmínkách. Výpočet vyžaduje několik iterací NLP a MIP a trvá v řádu minut. Číselné výsledky hlavních proměnných jsou shrnuty v Tabulce 3.5 (i když cena zajištění $\pi(R[X])$ není přímo optimalizovaný parametr, do tabulky je zařazena pro přehled).

Vidíme, že na základě ročních dat z roku 2015 je optimální pro pojišťovnu sjednat zajištění v ceně 47 352 Kč, kdy střední hodnota zajištěných škod je 29 142 Kč

	hodnota účelové funkce	-233 543,68
μ^*	$\mathbb{E} R[X]$	29 141,97
ν^*	$VaR_{0,995}(R[X])$	282 645,00
d_1^*	hranice první vrstvy	0,00
d_2^*	hranice druhé vrstvy	301 337,42
$\pi(R[X])$	cena	47 352,31

Tabulka 3.5: Výsledky optimalizace (v Kč)

a VaR zajištěných škod na hladině 99,5 % je 282 645 Kč. Parametr d_1^* vychází nulový a d_2^* je přesně shodný s hodnotou $VaR_{0,995}$ škod X , tj. 301 337 Kč. Hodnota $d_1^* = 0$ znamená, že horní hranice první rizikové vrstvy je nulová, tudíž celá vrstva je vždy nulová. Toto lze interpretovat tak, že je pro pojišťovnu nevýhodné cedovat velmi nízké hodnoty škod. Zápis funkce cedovaných škod 2.16 lze tak zjednodušit na

$$R[X] = \mathcal{L}_{(VaR_p(X) - \nu^*, VaR_p(X))}(X).$$

Lepší představu o průběhu funkce $R[X]$ získáme z Obrázku 3.8. Kvůli $d_1^* = 0$ pojišťovna neceduje malé škody a funkce $R[X]$ je nulová až do hodnoty 18 692 Kč. Potom funkce roste úměrně škodám X až do doby, kdy škody překročí hladinu $d_2^* = 301 337$ Kč = $VaR_{0,995}(X)$ (první taková škoda je ve výši 304 523 Kč), potom už je zajištná funkce rovna hodnotě 282 654 Kč. To je dáno tím, že v podmínkách je hodnota ν shora omezena hodnotou $VaR_p(X)$, což je technický důsledek aplikace vrstev rizika na škody. V zajištné terminologii bychom tedy pojišťovně doporučili uzavřít neproporcionální zajištění škodního nadměrku (XL) s prioritou 18 692 Kč. To (zjednodušeně řečeno) vede k nejnižší hodnotě kapitálového požadavku na uvažovaná rizika vzhledem k zaplacené ceně za zajištění.

3.5 Testy sensitivity

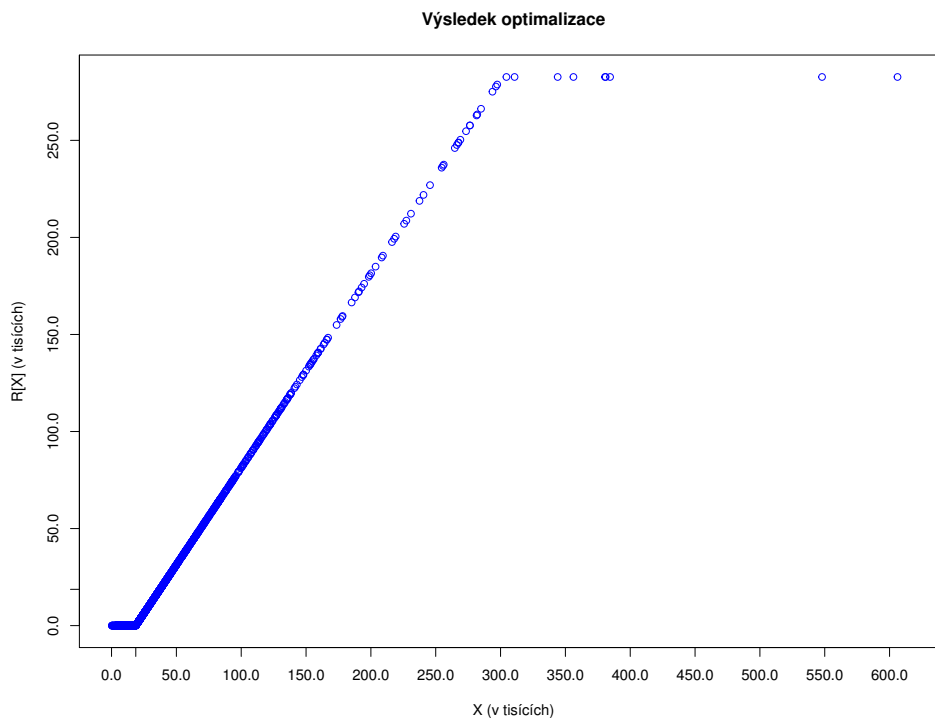
3.5.1 Citlivost řešení na pojistné a zajištné

V této části budeme zkoumat senzitivitu výsledků na pojistném P , které pojišťovna vybere od svých klientů, a rizikové přírážce ρ , kterou si přidává zajištitel k ceně zajištění. Pojistné P tedy udává rozpočet pojišťovny na zajištění, zatímco přírážka ρ ovlivňuje jeho cenu (tj. zajištné). Na základě intuice by oba tyto parametry měly ovlivňovat objem zajištěných škod.

Úloha byla nejdříve spočítána pro fixní $\rho = 0,50$ a postupně pro dvanáct hodnot pojistného P , záměrně od velmi nízkých po velmi vysoké. Výsledky jsou shrnuty v Tabulce 3.6.

Vidíme, že pojistné shora omezuje hodnotu zajištného (což je samozřejmě jedna z podmínek) pouze pro nízké hodnoty P , což také snižuje μ^* a ν^* (coby statistiky cedovaných škod). Nízké hodnoty ν^* způsobí, že funkce $R[X]$ začíná být rostoucí až pro vyšší hodnoty X . Pro $P > 50 000$ Kč se řešení ustálí a zvyšování pojistného na něj nemá vliv. Drobné odchylky jsou spíše softwarové nepřesnosti. Zdá se, že pojistné nemá žádný vliv na d_1^* a d_2^* .

Dále jsme zafixovali hodnotu pojistného na své původní hodnotě (150 000 Kč) a spočetli úlohu pro různé hodnoty přírážky k zajištnému ρ od 0,1 do 1,0. Výsledky uvádí Tabulka 3.7.



Obrázek 3.8: Tvar optimální zajistné funkce

S rostoucím ρ se zvyšuje cena za zajištění a tím se snižuje jeho výhodnost. I když postupně klesá zajištěný objem škod (klesající μ^* a ν^*) cena za zajištění se zvyšuje. Je zajímavé, že i když má pojišťovna díky vysokému P dostatek prostředků ve všech případech na nákup zajištění, je pro ni výhodnější nést riziko sama, než nakupovat drahé zajištění. Hodnota ρ má tedy vcelku významný vliv na hodnotu optimálního řešení a v praxi by se odvíjela od situace na zajistném trhu. Zdá se, že ρ opět nemá žádný vliv na d_1^* a d_2^* .

3.5.2 Stabilita v čase

Vrátíme se opět k výchozímu nastavení s pojistným $P = 150\,000$ Kč a parametrem $\rho = 0,5$ a budeme zkoumat, jak se mění optimální zajistná strategie, kdybychom uvažovali postupně škody z let 2013 a 2014 místo 2015. K datům přistupujeme stejně, jako je popsáno v sekci 3.2, nyní však vybereme škody odpovídající zmíněným rokům a spočteme úlohu s těmito daty. Pro základní představu, jak se škody z těchto let liší od škod z roku 2015, uvádíme porovnání v Tabulce 3.8.

I přesto, že škod v dřívějších letech bylo více (o 140, resp. 219), vidíme, že hodnoty z jednotlivých let jsou si poměrně blízké, i když pozorujeme určitý rostoucí trend mediánů. Výjimku tvoří maximum z roku 2013, které výrazně převyšuje maxima z ostatní let. Jedná se nejspíše o ojedinělou extrémní škodu, protože druhá nejvyšší škoda z roku 2013 je rovna 672 879 Kč. Bez této výjimky se škody zdají být poměrně stabilní, proto bychom očekávali i určitou stabilitu výsledků. Pro co nejlepší porovnání byla úloha spočtena se stejnými ekonomickými parametry (shrnuté v Tabulce 3.4) jako v případě škod z 2015. Výsledky shrnuje Tabulka

Pojistné P	μ^*	ν^*	d_1^*	d_2^*	Cena (zajistné)
20 000	11 698,09	238 068,40	0,00	301 337,42	20 000,00
30 000	17 957,52	260 380,64	0,00	301 337,42	30 000,00
40 000	24 363,79	274 669,67	0,00	301 337,42	40 000,00
50 000	29 215,31	282 754,00	0,00	301 337,42	47 464,53
60 000	29 215,31	282 754,00	0,00	301 337,42	47 464,53
90 000	29 148,01	282 654,00	0,00	301 337,42	47 361,56
120 000	29 141,97	282 645,00	0,00	301 337,42	47 352,31
150 000	29 141,97	282 645,00	0,00	301 337,42	47 352,31
200 000	29 141,97	282 645,00	0,00	301 337,42	47 352,31
300 000	29 139,95	282 642,00	0,00	301 337,42	47 349,23
400 000	29 139,95	282 642,00	0,00	301 337,42	47 349,23
500 000	29 139,95	282 642,00	0,00	301 337,42	47 349,23

Tabulka 3.6: Výsledky pro různé hodnoty pojistného P (v Kč)

ρ	μ^*	ν^*	d_1^*	d_2^*	Cena (zajistné)
0,10	35 135,45	290 528,45	0,00	301 337,42	41 408,01
0,20	34 770,50	290 098,00	0,00	301 337,42	44 730,82
0,30	32 508,63	287 309,00	0,00	301 337,42	45 487,03
0,40	30 771,92	284 995,00	0,00	301 337,42	46 519,53
0,50	29 141,97	282 645,00	0,00	301 337,42	47 352,31
0,60	27 528,50	280 172,00	0,00	301 337,42	47 871,89
0,70	26 495,03	278 475,00	0,00	301 337,42	49 062,89
0,80	25 320,33	276 433,00	0,00	301 337,42	49 775,23
0,90	24 303,35	274 555,00	0,00	301 337,42	50 548,10
1,00	23 001,75	272 018,00	0,00	301 337,42	50 517,00

Tabulka 3.7: Výsledky pro různé hodnoty přírážky ρ (v Kč)

3.9 a graficky jsou znázorněny na Obrázku 3.9.

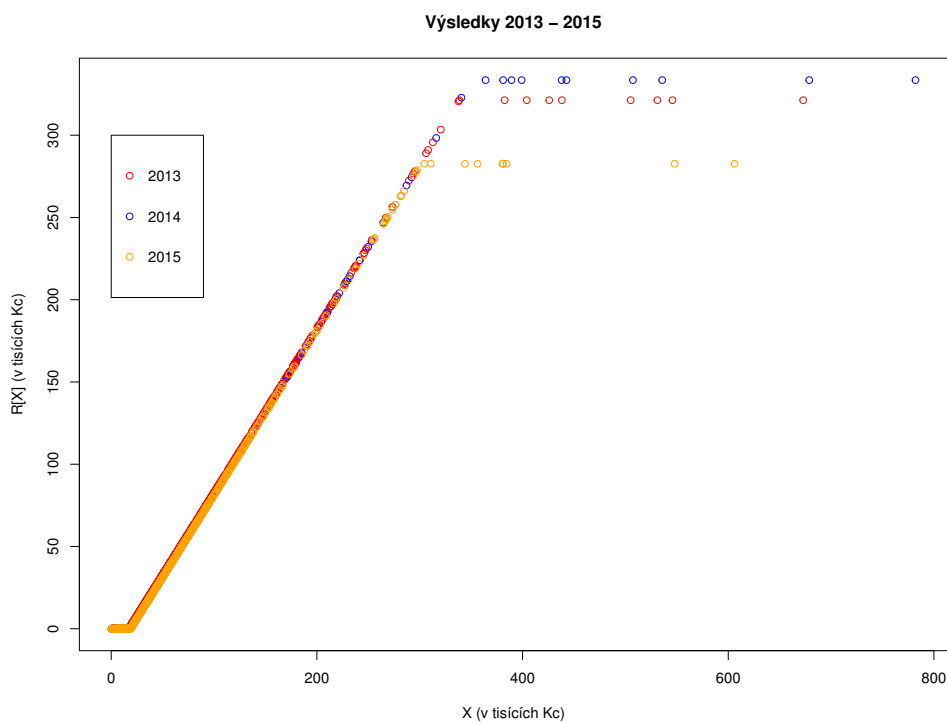
Vidíme, že funkce cedovaných škod pro roky 2013-2015 mají velmi podobný průběh a liší se pouze horní hranicí. To je způsobeno hlavně optimální hodnotou d_2^* , která zase závisí na hodnotě $\widehat{VaR}_{0,995}(X)$ (i pro roky 2013 a 2014 je d_2^* rovno $\widehat{VaR}_{0,995}(X)$). Můžeme tedy konstatovat, že získané výsledky jsou poměrně stabilní, i když klíčová je samozřejmě stabilita dat pro daná období.

	2013	2014	2015
Počet škod	1831	1910	1691
Minimum	378	308	293
První kvartil	13 887	14 490	15 203
Medián	24 646	27 483	29 319
Průměr	44 247	44 356	45 944
Třetí kvartil	50 113	52 898	56 648
Maximum	2 679 750	782 087	606 125

Tabulka 3.8: Základní popisné statistiky škod vyplacených 2013-2015 (v Kč)

	2013	2014	2015
hodnota úč. funkce	-274 754,35	-286 016,16	-233 543,68
μ^*	27 378,02	28 060,87	29 141,97
ν^*	321 268,00	333 491,00	282 645,00
d_1^*	0,00	0,00	0,00
d_2^*	338 385,00	351 225,23	301 337,42
$\pi(R[X])$	44 771,28	45 712,53	47 352,31

Tabulka 3.9: Porovnání výsledků (v Kč)



Obrázek 3.9: Porovnání optimálního zajištění 2013-2015

Závěr

V této práci byla popsána aplikace stochastického programování na problém optimalizace zajištění. Úloha je řešena v kontextu aktuálně platné regulace pojišťoven a zajišťoven na území Evropské unie, Solvency II. To přináší do úlohy kromě optimalizace ceny za přenos rizika na zajistitele také zohlednění dopadu zajištění na výši solventnostního kapitálového požadavku (SCR). V této práci byla uvažována neživotní pojišťovna čelící upisovacímu riziku, tržnímu riziku, riziku selhání protistrany a operačnímu riziku. Byla ukázána výše rizikové marže příslušící jednotlivým rizikům (coby část SCR ovlivněná zajištěním) pomocí kterých byla sestavena optimalizační úloha. Úlohu formulujeme obecněji, bez použití log-normální aproximace, která se využívá pro zjednodušení výpočetních vzorců v technických dokumentacích k Solvency II.

V úvodní kapitole také krátce popisujeme nejčastější druhy zajištění a použité rizikové míry VaR a CVaR. Dále je dokázáno tvrzení o komonotónních náhodných veličinách, které zjednodušuje danou úlohu.

Ve druhé kapitole je problém postupně reformulován do tvaru nelineární celočíselné úlohy řešitelné softwarem využívající odhady získané z dat a třídu Wangových principů pojistného.

V praktické části jsou diskutovány možné tvary zajistné funkce a jejich interpretace v řeči zajištění. Jsou zde také popsána data od České kanceláře pojistitelů, na která je řešená úloha aplikována, a postup jejich zpracování. Samotný výpočet je proveden v programu GAMS solverem *dicopt* na škody z roku 2015. Na základě získaných výsledků bychom v roli pojišťovny zvolili neproporcionální zajištění bez cedování nízkých škod. Nakonec je proveden test senzitivity optimální zajistné strategie na různých výších pojistného a zajistného. Bylo ukázáno, že nízké hodnoty pojistného aktivně omezují cenu optimální zajistné strategie, zatímco rostoucí cena zajištění snižuje zajištěný objem škod. Zkoumána je také stabilita řešení pro škody z předchozích let 2013 a 2014. Bylo ukázáno, že optimální zajistný postup je pro všechny tři roky velmi podobný. Hlavní rozdíly se odvíjí od odhadnuté hodnoty v riziku ze škodních dat.

Seznam použité literatury

- [1] European Commission. QIS5 Technical Specifications. 2010.
- [2] A.V. Asimit, Y. Chi, and J. Hu. Optimal non-life reinsurance under Solvency II regime. *Insurance: Mathematics and Economics*, 65:227–237, 2015.
- [3] J. Dhaene, M. Denuit, M.J. Goovaerts, R. Kaas, and D. Vyncke. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(1):3 – 33, 2002.
- [4] J. Dhaene, M. Denuit, M.J. Goovaerts, R. Kaas, and D. Vyncke. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(2):133 – 161, 2002.
- [5] M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, and R. Kaas. *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. John Wiley and Sons, Ltd, Chichester, 2005.
- [6] Y. Chi. Reinsurance arrangements minimizing the risk-adjusted value of an insurer’s liability. *ASTIN Bulletin: The Journal of the International Actuarial Association*, 42(02):529–557, 2012.
- [7] V. R. Young. *Premium Principles*. John Wiley and Sons, Ltd, 2006.
- [8] B.L. Jones and R. Zitikis. Empirical estimation of risk measures and related quantities. *North American Actuarial Journal*, 7(4):44–54, 2003.
- [9] Shaun Wang. Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, 26(1):71–92, 1996.
- [10] Shaun Wang. Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. *Insurance: Mathematics and Economics*, 17(1):43 – 54, 1995.
- [11] Lourdes Centeno Maria de and e Silva João Andrade. Applying the proportional hazard premium calculation principle. *ASTIN Bulletin*, 35(2):409–425, 2005.
- [12] Petr Jedlička. ČKP výuková data. <https://www.actuaria.cz/prezentace.html>, 2015.
- [13] GAMS Development Corporation Washington DC USA. *GAMS - A User’s Guide*. GAMS.
- [14] Michael Bussieck and Armin Pruessner. Mixed-integer nonlinear programming. 14, 09 2004.
- [15] Pietro Belotti, Christian Kirches, Sven Leyffer, Jeff Linderoth, James Luedtke, and Ashutosh Mahajan. Mixed-integer nonlinear optimization. *Acta Numerica*, 22:1–131, 2013.

Příloha A - GAMS kód

```
* Sets of indices
SET i assets /1*1691/;

* Scalars
SCALARS
kvant level kvantil p /0.995/
c RM_UMR koeficient /0.00157248/
rho premium prirazka /0.5/
a1 RM_UwR /0.016531958/
a2 RM_CDR /0.000861569/
theta RM_CDR koef /0.02061575/
n pocet pozor /1691/
K pomocna-prumer nad VaRem /534.42/
P pojistne /150000/
lambda adj. CoC /0.0577/
meanX prumer X /45944/
varX VaR(X) /301337/
maxX nejvetsi x /606125/
M horni konstanta /1818375/
thetaclen pomocny /0.00243829/

*-----
* Tables (matrices) - input from a text file

PARAMETER x(i) skody x
$include "C:\Users\hdose\OneDrive\Plocha\DP\2015claims.txt"

Parameters phi(i) funkce phi
$include "C:\Users\hdose\OneDrive\Plocha\DP\2015phi.txt"

*-----
* Decision variables
Positive Variables nu,mu,d1,d2,u(i),v(i),w(i),s(i),t(i),price;
Variables target;
Binary variables delta1(i),delta2(i),delta3(i),
                delta4(i),delta5(i);

*-----
* Equations
EQUATIONS          ucelova
                  nerovnost0
                  nerovnost1
                  nerovnost2
                  nerovnost3
                  nerovnost4
```

```

u1(i)
u2(i)
u3(i)
u4(i)
v1(i)
v2(i)
v3(i)
v4(i)
w1(i)
w2(i)
w3(i)
w4(i)
s1(i)
s2(i)
s3(i)
s4(i)
t1(i)
t2(i)
t3(i)
t4(i)
int1
int2
prem1
prem2
defmu
aux1
aux2
aux3
aux4
cena;

ucelova.. target =e= -nu-c*mu+
(1+rho)*sum(i,phi(i)*(u(i)+v(i)-w(i)))+
sqrt(power(a2*(1+rho)*
sum(i,phi(i)*(u(i)+v(i)-w(i))),2)+
power(thetaclen*(n*K-sum(i,w(i))),2)+
a2*(1+rho)*sum(i,phi(i)*(u(i)+v(i)-w(i)))*
(thetaclen*(n*K-sum(i,w(i)))))+
sqrt(power(a1*P-a1*(1+rho)*
sum(i,phi(i)*(u(i)+v(i)-w(i))),2)+
power(lambda*(varX-nu-meanX+mu),2)+
(a1*P-a1*(1+rho)*sum(i,phi(i)*(u(i)+v(i)-w(i))))*
(lambda*(varX-nu-meanX+mu)));

nerovnost0.. 0 =l= d1;
nerovnost1.. d1 =l= nu;
nerovnost2.. nu =l= varX;
nerovnost3.. varX =l= d2;
nerovnost4.. d2 =l= maxX;

```

```

u1(i)..      u(i) =l= x(i);
u2(i)..      u(i) =l= d1;
u3(i)..      u(i) =g= x(i)-M*delta1(i);
u4(i)..      u(i) =g= -M+d1+m*delta1(i);
v1(i)..      v(i) =g= x(i)-varX-d1+nu;
v2(i)..      v(i) =g= 0;
v3(i)..      v(i) =l= x(i)-varX-d1+nu+M*delta2(i);
v4(i)..      v(i) =l= M-M*delta2(i);
w1(i)..      w(i) =g= x(i)-d2;
w2(i)..      w(i) =g= 0;
w3(i)..      w(i) =l= x(i)-d2+m*delta3(i);
w4(i)..      w(i) =l= M-M*delta3(i);
s1(i)..      s(i) =g= x(i)-varX+nu;
s2(i)..      s(i) =g= 0;
s3(i)..      s(i) =l= x(i)-varX+nu+M*delta4(i);
s4(i)..      s(i) =l= M-M*delta4(i);
t1(i)..      t(i) =g= x(i)-nu;
t2(i)..      t(i) =g= 0;
t3(i)..      t(i) =l= x(i)-nu+M*delta5(i);
t4(i)..      t(i) =l= M-M*delta5(i);
int1..       sum(i,s(i))-n*K =l=n*mu;
int2..       n*mu-n*meanX+sum(i,t(i)) =l= n*K;
prem1..      nu-mu+meanX =l= varX;
prem2..      (1+rho)*sum(i,phi(i)*(u(i)+v(i)-w(i))) =l= P;
defmu..      n*mu-sum(i,u(i)+v(i)-w(i)) =e= 0;
aux1..       sum(i,phi(i)*(u(i)+v(i)-w(i))) =g= 0;
aux3..       n*K =g= sum(i,w(i));
aux2..       a1*P =g= a1*(1+rho)*
              sum(i,phi(i)*(u(i)+v(i)-w(i)));
aux4..       varX =g= nu-meanX+mu;
cena..       price =e= (1+rho)*sum(i,phi(i)*(u(i)+v(i)-w(i)));

```

*-----

* Model declaration

MODEL reins /all/;

*-----

* Solve and display results

```

option minlp = dicopt;
*options domlim = 5000000;
SOLVE reins minimizing target using MINLP;
DISPLAY target.l,mu.l,nu.l,d1.l,d2.l,price.l;

```