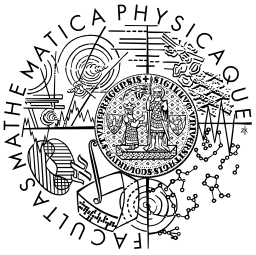


MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Magdaléna Žváčková

Souřadnicové systémy pro GPS

Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Tůma, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Chtěla bych poděkovat doc. RNDr. Jiřímu Tůmovi, DrSc. za jeho cenné rady a trpělivost při vedení mé bakalářské práce.

Název práce: Souřadnicové systémy pro GPS

Autor: Magdaléna Žváčková

Katedra: Katedra Algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Tůma, DrSc., katedra Algebry

Abstrakt: V této práci se zabýváme souřadnicemi, které získáváme z GPS, běžně používanými geodetickými souřadnicemi a tím, jak je mezi sebou převést. Nejprve jsou nalezeny vzorce pro převod z geodetických do kartézských a ty jsou poté řešeny jako soustava rovnic. Na to je použito několik numerických metod. Na základě toho získáváme návod na to, jak převádět souřadnicové systémy mezi sebou. Dále se v krátkosti seznámíme s principy GPS, jak můžeme Zemi aproximovat a nakonec, jak převést povrch Země do mapy.

Klíčová slova: GPS, transformace souřadnic, Zemské souřadnice, rotační elipsoid

Title: Coordinate Systems for GPS

Author: Magdaléna Žváčková

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Tůma, DrSc., Department of Algebra

Abstract: In this thesis we look at coordinates, that are obtained from GPS, commonly used geodetic coordinates and the ways to transform them. First, we find formulas for transformation from geodetic coordinates to Cartesian coordinates. These formulas are solved as system of equations. For that we use a couple of numeric methods. As a result, we get instructions on how to transform coordinates from one system to another. Further, we are introduced to GPS, how to approximate shape of the Earth and how to transform the surface of the Earth to map.

Keywords: GPS, transformations of coordinate systems, Geographic coordinate system, elipsoid of revolution

Obsah

Úvod **2**

1 GPS **3**
1.1 Seznámení s GPS . . . 3
1.2 Výpočet pozice . . . 3
1.3 Diferenciální GPS - DGPS . . . 4
1.4 Jiné systémy pro určování polohy . . . 4
1.4.1 GLONASS . . . 4
1.4.2 BeiDou . . . 5
1.4.3 Galileo . . . 5

2 Aproximace zemského povrchu **6**
2.1 Elipsoid . . . 6
2.2 Geoid . . . 6

3 Používané soustavy souřadnic **7**
3.1 Kartézský souřadnicový systém . . . 7
3.2 Geodetický souřadnicový systém . . . 7
3.3 GRS 80 a WGS 84 . . . 9

4 Převod mezi geodetickými a kartézskými souřadnicemi **10**
4.1 kartézské souřadnice z geodetických . . . 10
4.2 geodetické z kartézských . . . 16
4.2.1 Metoda pevného bodu . . . 16
4.2.2 Newtonova metoda . . . 18
4.2.3 Goadova metoda . . . 21

5 Transformace do roviny **23**
5.1 Rozdělení projekcí . . . 23
5.2 Přímá projekce . . . 23
5.3 Válcové projekce . . . 23
5.3.1 Mercatorova projekce . . . 23
5.4 Kuželové projekce . . . 24
5.5 Azimutové projekce . . . 24

Závěr **25**

Seznam použité literatury **26**

Seznam obrázků **27**

Úvod

Tato práce se zabývá úlohou, jak dále použít souřadnice, které jsou získávány pomocí systému GPS, jak je převést na používanější geodetické souřadnice a ty později i na mapu.

Označení GPS, jakožto název nejrozšířenějšího systému, bývá vnímáno jako obecné označení pro Globální družicový polohový systém. Systém, který umožňuje pomocí družicových signálů vypočítat polohu přijímače.

Seznámení s GPS, výpočtu pozice a představení jiných navigačních systémů je věnována úvodní kapitola této práce.

V části Aproximace zemského povrchu jsou definována tělesa elipsoid a geoid.

Dále jsou charakterizovány používané souřadnicové soustavy, kartézská a geodetická. Současně je popsán používaný Světový geodetický systém WGS84.

Klíčová část práce se zabývá převodem mezi geodetickými a kartézskými souřadnicemi. Nejprve jsou nalezeny vztahy, jak vyjádřit kartézské souřadnice z geodetických, které se potom pro opačný problém řeší pomocí několika různých numerických metod. Na základě toho získáváme návod na převod souřadnicových systémů mezi sebou.

Poslední část je věnována transformaci do roviny, jsou zde popsány projekční metody používané pro tvorbu map.

1. GPS

1.1 Seznámení s GPS

GPS (Global positioning system, National Coordination Office for Space-Based Positioning, Navigation and Timing) je systém na určování polohy na celé Zeměkouli. Tento družicový polohový systém provozuje Ministerstvo obrany Spojených států amerických. Vývoj započal v 70-tých letech, v roce 1994 bylo dosaženo kompletní sestavy 24 družic na oběžné dráze Země. Po roce 2000 byl systém postupně otevírán pro neautorizované uživatele, což umožnilo GPS masivně využívat v civilních oborech. Využívá se například v dopravě, geografii a geodezii, zemědělství a v turistice.

Skládá se ze tří segmentů. Vesmírný segment, kontrolní segment a uživatelský segment.

Vesmírný segment jsou satelity, které obíhají Zemi v nadmořské výšce rovné zhruba trojnásobku poloměru Země. Satelity se nacházejí v šesti orbitových rovinách (označených A - F). Aby systém fungoval na každém místě ve kteroukoliv dobu, musí být v provozu alespoň 24 satelitů, je potřeba, aby z každého místa byly vidět alespoň čtyři satelity. Satelity nepřetržitě vysílají radiové vlny, které obsahují informace o jejich poloze, o poloze jiných satelitů (s menší přesností) a čase, kdy byly vlny odeslány. Každý satelit je vybaven atomovými hodinami, aby se zajistila co nejpřesnější informace o čase.

Kontrolním segmentem je několik vedlejších stanic a jedna hlavní, které kontrolují polohu a stav satelitů, počítají jejich trajektorii, případně odešlou pokyn k jejímu opravení. Informace o rozmístění všech satelitů jsou odesílány zpátky satelitům.

Nakonec máme uživatelský segment, který tvoří právě přijímače. Ty přijímají signál vysílaný satelity a z jejich polohy a času, který byl potřeba, aby vlny dorazily od satelitu k přijímači, vypočítá polohu přijímače.

GPS používá k určení polohy vzdálenosti. Dříve se k tomuto používaly úhly, ale tento přístup byl postupně nahrazen, když se po 1960 začaly vzdálenosti elektronicky měřit. U GPS se tedy používá tzv. trilaterace, tedy zjišťujeme polohu přijímače podle jeho vzdálenosti od určitých bodů (v tomto případě satelitů).

Je velmi důležité, že můžeme vypočítat souřadnice všech viditelných satelitů. Tyto souřadnice jsou v kartézském systému souřadnic, jejichž středem je Země. Přijímači jsou tedy známy souřadnice satelitů a z jejich vzdáleností si dokáže vypočítat své souřadnice s přesností od 100 m do 20 m. Pro větší přesnost je používána metoda Diferenciální GPS (DGPS), která dokáže dosáhnout přesnosti až na centimetry.

1.2 Výpočet pozice

V ideálním případě, kdy máme všechny údaje přesné, pak nám na výpočet přesné pozice stačí tři satelity. U každého satelitu dostaneme vzdálenost mezi ním a příjemcem. Kolem každého satelitu je koule možných výskytů. Pokud satelity neleží na jedné přímce, tyto koule se protnou ve dvou bodech. Teoreticky je možné, aby byl pouze jeden průnik, to může nastat pouze v případě, že by dva satelity

ležely na stejné přímce s příjemcem. To ale v praxi nenastává. Máme tedy dva průsečíky, jeden se nachází někde ve vesmíru a druhý někde na zemi. Bod, který leží na Zemi je pozice, kterou jsme hledali.

Přestože satelity používají přesné atomové hodiny, hodiny příjemce mohou mít nějakou předem neznámou odchylku. Proto při výpočtu pozice používáme místo trojice satelitů čtveřici. S časovou odchylkou pak počítáme jako se čtvrtou neznámou. Pokud mají hodiny příjemce časový error dt, pak všechny vzdálenosti se liší o $c \cdot dt$. Vzdálenost s časovým errorem nazýváme pseudovzdálenost (pseudorange). Pokud vezmeme pseudovzdálenosti ze dvou různých satelitů ρ^1, ρ^2 a odečteme je, výsledek $d^{12} = \rho^1 - \rho^2$ je už bez časovéhé odchylky $c \cdot dt$. Příjemce potom musí ležet na hyperboloidu, který má tyto dva satelity jako ohniska. Pomocí třetího satelitu a příslušné pseudovzdálenosti získáme druhý hyperboloid, který protíná ten první v nějaké křivce. Poslední satelit a jeho pseudovzdálenost nám dá další hyperboloid, který protíná výše zmíněnou křivku běžně ve dvou bodech (pokud na jedné přímce neleží více jak dva satelity). Jeden z nich je daleko ve vesmíru a jeden je právě náš příjemce.

Dostáváme tedy čtyři rovnice pro $k = 1, 2, 3, 4$:

$$(x - X^k)^2 + (y - Y^k)^2 + (z - Z^k)^2 + (c \cdot dt)^2 = (\rho^k)^2,$$

kde (X^k,Y^k,Z^k) jsou souřadnice k-tého satelitu. Rovnice vypočítáme pro x, y, z a $c \cdot dt$.

1.3 Diferenciální GPS - DGPS

Tato metoda je založena na principu, že máme nějaké dva přijímače, v blízké vzdálenosti (například méně než 100 km), zatímco satelity jsou ve vzdálenosti více než 20 000 km.

Díky tomu signály ze satelitů k přijímačům budou mít velmi podobnou dráhu. Tímto budeme mít takřka stejné odchylky, které se tvoří, když signál prochází ionosférou. Zároveň veškeré odchylky v hodinách satelitů nebo jejich orbitech budou identické.

Polohu jednoho přijímače předem známe, polohu druhého chceme vypočítat. Můžeme tedy tyto odchylky odstranit odečtením naměřených hodnot těchto dvou přijímačů. Zjistíme tak rozdíly v polohách těchto dvou příjimačů.

1.4 Jiné systémy pro určování polohy

1.4.1 GLONASS

GLONASS (Bhatta (2011)) vlastní a provozuje Ruská federace. Globálním pokrytím a přesností je srovnatelný s GPS. Postavením družic je tento systém vhodný pro použití ve vysokých zeměpisných severních a jižních šířkách, kde signál GPS může mít zhoršený příjem. Přestože došlo k bezplatnému uvolnění pro nevojenské použití, civilní využívání není rozšířené.

1.4.2 BeiDou

BeiDou (dříve pod názvem Compass, Bhatta (2011)) vlastní a provozuje Čínská lidová republika. Systém je funkční v asiopacifické části Země s plánovaným globálním pokrytím.

1.4.3 Galileo

Na rozdíl od uvedených systémů je projekt Galileo (European GNSS Agency) primárně navržený, řízený a spravovaný civilní správou. Jeho výstavbu zajišťuje Evropská unie reprezentovaná Evropskou komisí a Evropskou kosmickou agenturou.

Evropský civilní družicový navigační systém GALILEO má poskytovat služby především v dopravě (letecká, silniční, železniční, námořní a říční, městská), má potenciál širokého využití i v dalších oblastech, kde zvýší bezpečnost, přesnost a komfort (například energetický průmysl, bankovnictví, zemědělství, civilní ochrana, životní prostředí, stavebnictví).

2. Aproximace zemského povrchu

2.1 Elipsoid

Elipsoid dostaneme z elipsy rotováním kolem jedné z jejích os. Pro aproximaci Země rotujeme kolem vedlejší (kratší) osy. Rovnice pro elipsu je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b.$$

Pro elipsoid potom máme rovnici

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

U elipsoidu můžeme určit zploštění $f = \frac{a-b}{a}$ a druhou excentricitu $(e')^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$. Elipsoid popisujeme pomocí parametru a (v našem případě poloměr Země) a dále zploštěním nebo druhou excentricitou. Speciálním případem je sféra, kdy volíme zploštění $f = 0$. Pro aproximaci Země se používá elipsoid se zploštěním $f = 0{,}00335$ a druhou excentricitou $e' \approx 0{,}08209$.

2.2 Geoid

Geoid je hypotetický tvar, který znázorňuje mořskou hladinu, kdyby byl celý zemský povrch pokrytý vodou. Je blízký elipsoidu, ale jeho povrch je mnohem komplexnější a není možné ho přesně matematicky definovat. Střed geoidu je stejný jako střed Země. Skutečná mořská hladina se malinko liší díky rozdílům v teplotách a slanosti vody. Ve většině zemí je geoid definován podle mořské hladiny, která se stále může lišit od výšky hladiny na pobřeží až o jeden metr.

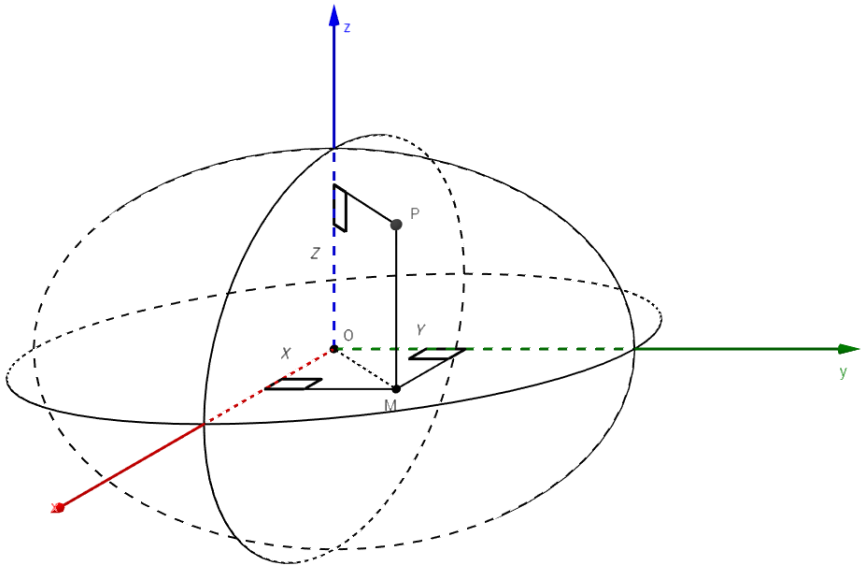
Pro bod P v terénu máme výšku h vzhledem k elipse, kterou získáme z GPS, dále máme hodnotu N, což je rozdíl výšky geoidu od elipsoidu, a orthometrickou výšku H. Zjednodušený vztah je $h = H + N$.

Pro přesnější vyjádření bychom museli brát v úvahu, že kolmice k elipse a geoidu nemusí být rovnoběžné, tedy svírají nějaký úhel. Tento úhel bychom potom museli zahrnout ve vztahu pro výšky.

3. Používané soustavy souřadnic

3.1 Kartézský souřadnicový systém

Kartézský systém souřadnic se skládá ze tří na sebe kolmých os x, y a z. Počátek (bod se souřadnicemi (0,0,0)) se nachází ve středu Země. Osa z prochází severním pólem a její orientace je také směrem k severnímu pólu. Osa x a y se nachází v rovině rovníku, osa x prochází a zároveň je orientována ke Greenwichskému poledníku, osa y svírá s ostatními osami pravý úhel a její orientace je východně od Greenwichského poledníku.



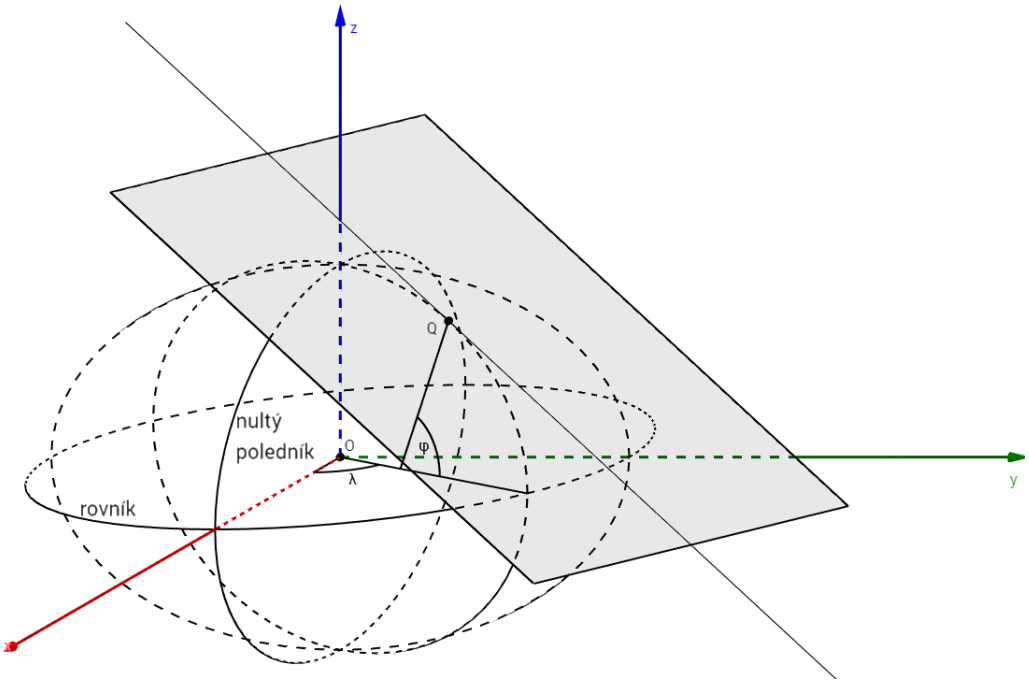
Obrázek 3.1: Kartézská soustava souřadnic

3.2 Geodetický souřadnicový systém

První budeme brát souřadnice pouze pro body na elipsoidu. Hledáme tedy souřadnice pro nějaký bod elipsoidu, označíme si ho Q. Jeho polohu vyjadřujeme pomocí dvou souřadnic, šířky φ a délky λ. Šířka φ je úhel mezi normálou (přímka kolmá k tečné rovině v bodě Q, pro který hledáme souřadnice) a rovinou obsahující rovník. Normála nemusí procházet středem elipsoidu, toto nastává pouze pro body na pólech a na rovníku. Délka λ je úhel mezi rovinou obsahující referenční (nultou) rovnoběžku a rovinou obsahující bod Q a póly. Pro póly tyto souřadnice nejsou jednoznačné, budeme je tedy brát jako speciální body, které mají pouze souřadnici φ.

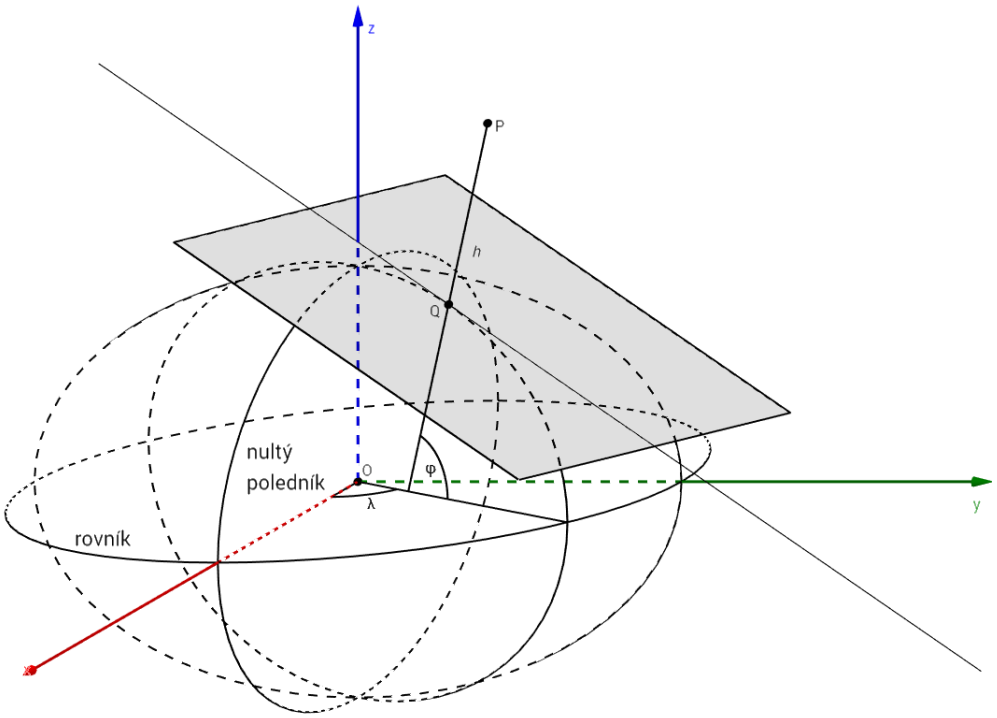
Body se stejnou hodnotou pro φ tvoří kružnice, které nazýváme rovnoběžky. Jejich středy se nacházejí na ose z a jejich poloměry se mění v závislosti na φ. Naopak body se stejnou λ tvoří elipsy a nazýváme je poledníky.

Pokud chceme určit polohu bodu ve vesmíru, přidáme třetí souřadnici a to výšku h. Pro bod P najdeme bod Q, který je nejbližší k P a zároveň leží na elipsoidu. Hodnota h je vzdálenost $|PQ|$ a hodnoty φ a λ určíme stejně jako



Obrázek 3.2: Geodetický souřadnicový systém pro body elipsoidu

v předchozím případě pro bod Q. Pro body na ose z stejně jako pro póly neurčujeme souřadnici λ.



Obrázek 3.3: Geodetický souřadnicový systém

3.3 GRS 80 a WGS 84

GRS 80, neboli geodetický referenční systém 1980, popisuje referenční elipsoid, gravitační pole a rychlost otáčení Země. Systém se začal používat roku 1979. Definuje délku hlavní poloosy $a = 6378137m$ a zploštění, které se uvádí ve formě převrácené hodnoty, $f^{-1} = 289{,}257222101$. Systém byl používán ve WGS 84, plným názvem Světový geodetický systém 1984. Je to systém, který se dodnes celosvětově používá. Později proběhly drobné úpravy hodnot, délka hlavní poloosy zůstala stejná a zploštění se změnilo na $f^{-1} = 298{,}257223563$.

4. Převod mezi geodetickými a kartézskými souřadnicemi

4.1 kartézské souřadnice z geodetických

Jako první máme k dispozici geodetické souřadnice bodu ve tvaru (φ,λ,h) a chceme souřadnice ve tvaru (X,Y,Z). První si problém zjednodušíme a budeme hledat řešení pouze pro body elipsoidu, tedy body, jejichž výška je nulová.

Tvrzení 1. *Pro bod Q na elipsoidu se souřadnicemi* (φ,λ) *platí vzorce*

$$X = N \cos\varphi \cos\lambda$$

$$Y = N \cos\varphi \sin\lambda$$

$$Z = (1-f)^2 N \sin\varphi,$$

kde $N = \frac{a}{\sqrt{1-f(2-f)\sin^2\varphi}}$.

Nejdříve si dokážeme pár pomocných Lemmat, abychom si odvodili hodnotu N. Výpočty budeme chtít provést v rovině obsahující osu z a bod Q, kterou si označíme ρ. K tomu budeme potřebovat, aby přímka určená normálou ležela v rovině ρ. Díky tomu, že rovina ρ i tečná rovina v bodě Q, bod Q obsahují, stačí, aby na sebe byly roviny kolmé.

Lemma 2. *Rovina ρ a tečná rovina τ jsou na sebe kolmé.*

Důkaz. Vypočítáme si normálové vektory k oběma rovinám, budou-li na sebe kolmé, pak jsou na sebe kolmé i roviny. Nechť bod Q má souřadnice [x_0,y_0,z_0]. Rovina ρ je určena vektorem (0,0,1), protože obsahuje osu z, a vektorem (x_0,y_0,z_0), protože obsahuje počátek O = [0,0,0] a bod Q = [x_0,y_0,z_0]. Normálový vektor u roviny ρ dostaneme z vektorového součinu těchto směrových vektorů.

$$u = (0,0,1) \times (x_0,y_0,z_0) = (1y_0 - 0z_0, 0z_0 - 1x_0, 0x_0 - 0y_0) = (y_0, -x_0, 0)$$

Normálový vektor roviny τ dostaneme z její rovnice. Rovnici tečné roviny dostaneme pomocí vzorce

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0,$$

kde $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ je rovnice elipsoidu. Rovnice tečné roviny je tedy

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0) + \frac{2y_0}{a^2}(y-y_0) + \frac{2z_0}{a^2}(z-z_0) = 0$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{a^2} + \frac{z_0 z}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{a^2} + \frac{{z_0}^2}{b^2}\right) = 0$$

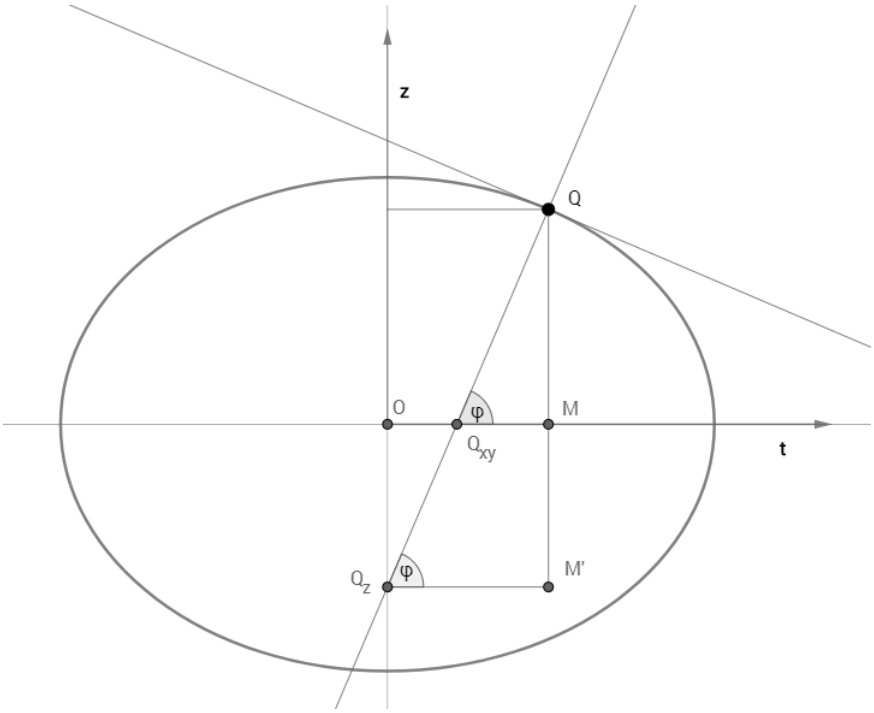
Normálový vektor k tečné rovině τ je tedy

$$v = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{a^2}, \frac{z_0}{b^2}\right).$$

Uděláme skalární součin vektorů u a v

$$u \cdot v = (y_0, -x_0, 0) \cdot \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{a^2}, \frac{z_0}{b^2}\right) = \frac{y_0 x_0}{a^2} + \left(-\frac{x_0 y_0}{a^2}\right) + 0 = 0$$

Normálové vektory jsou na sebe kolmé a tedy i roviny jsou na sebe kolmé. □



Obrázek 4.1: Rovina obsahující osu z a bod Q

Ve výpočtech pokračujeme v rovině ρ, která je znázorněna na Obrázku 4.1. V rovině ρ si vezmeme osy t a z, osa z je stejná jako původní osa z, i se stejnou orientací, osa t je průnik roviny ρ s rovinou rovníku a její orientace je taková, aby měl bod Q kladnou souřadnici na této ose. Díky tomu, že pracujeme s rotačním elipsoidem, je jeho řez rovinou, obsahující osu z, elipsa s rovnicí: $\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$. Máme bod Q se souřadnicemi $[t_0, z_0]$, které zatím neznáme a počátek $O = [0,0,0]$. Dále si označíme body $\mathrm{Q_z}$, což je průsečík osy z a přímky určené normálou, označíme si ji p. Podle předchozího lemmatu tato přímka opravdu leží v rovině ρ. Bod $\mathrm{Q_{xy}}$ je průnik přímky p a osy t. Bod M je kolmá projekce bodu Q na osu t a bod M' je průnik přímky QM a kolmice na osu z v bodě $\mathrm{Q_z}$.

Budeme počítat v trojúhelníku $\mathrm{QQ_zM'}$. Úhel $|\angle QQ_z M'| = \varphi$, protože OM je projekce přímky p na rovinu rovníku a úhel je identický s úhlem $\angle QQ_{xy}M$. Abychom zjistili délky stran, spočítáme si souřadnice všech vrcholů. K tomu budeme potřebovat rovnici přímky p.

Lemma 3. *Rovnice přímky p je*

$$\frac{z_0}{b^2} t - \frac{t_0}{a^2} z + t_0 z_0 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0$$

Důkaz. Průnik roviny ρ s tečnou rovinou τ je v rovině ρ tečna elipsy v bodě Q. Rovnici tečny dostaneme pomocí vzorce

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t_0, z_0)(t - t_0) + \frac{\partial G}{\partial z}(t_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

kde $G(t,z) = \frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ je rovnice elipsy. Tečna má tedy rovnici

$$\frac{2t_0}{a^2}(t - t_0) + \frac{2z_0}{a^2}(z - z_0) = 0$$

$$\frac{t_0 t}{a^2} - \frac{{t_0}^2}{a^2} + \frac{z_0 z}{b^2} - \frac{{z_0}^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{t_0 t}{a^2} + \frac{z_0 z}{b^2} - \left(\frac{t_0^2}{a^2} + \frac{{z_0}^2}{b^2}\right) = 0$$

Normálový vektor tečny je

$$w = \left(\frac{t_0}{a^2}, \frac{z_0}{b^2}\right)$$

Kolmice k tečně má směrový vektor w. Z něj můžeme zjistit rovnici přímky p.

$$\frac{z_0}{b^2}t - \frac{t_0}{a^2}z + c = 0$$

Hodnotu c zjistíme dosazením bodu $Q = [t_0, z_0]$.

$$\frac{z_0}{b^2}t_0 - \frac{t_0}{a^2}z_0 + c = 0$$

$$c = t_0 z_0 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

Rovnice přímky p je tedy

$$\frac{z_0}{b^2}t - \frac{t_0}{a^2}z + t_0 z_0 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0$$

□

Lemma 4. *Následující body mají souřadnice*

$$Q_z = \left[0, \frac{b^2 - a^2}{b^2} z_0\right], M' = \left[x_0, \frac{b^2 - a^2}{b^2} z_0\right]$$

Důkaz. Souřadnice bodu Q_z spočítáme díky tomu, že je to průsečík přímky p s osou z, dosadíme tedy do rovnice normály jeho první souřadnici $t = 0$.

$$-\frac{t_0}{a^2}z + t_0 z_0 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0$$

$$z = z_0 a^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

$$z = z_0 \frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

Souřadnice bodu Q_z jsou tedy $\left[0, \frac{b^2-a^2}{b^2} z_0\right]$. Bod M' leží na kolmici k ose t, která prochází bodem Q, mají tedy stejnou první souřadnici. Podobně M' leží na kolmici k ose z v bodě Q_z, mají tedy stejnou druhou souřadnici. Souřadnice bodu M' jsou $\left[x_0, \frac{b^2-a^2}{b^2} z_0\right]$ □

Délka úsečky je $|Q_zM'| = t_0$,t_0 je vždy kladné z volby osy t. Dovolíme tady záporné hodnoty u délek stran, protože φ může mít taky zápornou hodnotu.

$$|QM'| = z_0 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} z_0 = \frac{a^2}{b^2} z_0$$

Nyní už můžeme spočítat hodnotu $N = |QQ_z|$.

Lemma 5.

$$|QQ_z| = N = \frac{a}{\sqrt{1 - f\,(2 - f)\sin^2\varphi}}$$

Důkaz. Z Pythagorovy dostaneme vztah

$$N^2 = {t_0}^2 + \left(\frac{a^2}{b^2} z_0\right)^2 \tag{4.1}$$

Z rovnice elipsy si vyjádříme t_0 a dosadíme do rovnice (4.1).

$$ {t_0}^2 = a^2 \left(1 - \frac{{z_0}^2}{b^2}\right) \tag{4.2}$$

Dále použijeme úhel $|\angle QQ_zM'| = \varphi$, který jsme dostali v zadání původního problému.

$$\sin\varphi = \frac{\frac{a^2}{b^2} z_0}{N}$$

Z toho si vyjádříme z_0 a dosadíme do (4.1).

$$z_0 = \frac{b^2}{a^2} N \sin\varphi \tag{4.3}$$

Po dosazení vztahů (4.2) a (4.3) do rovnice (4.1) dostaneme

$$N^2 = a^2 \left(1 - \frac{N^2 \sin^2\varphi}{a^2}\right) + N^2 \sin^2\varphi$$

Nyní pouze zbývá vyjádřit N

$$N^2 \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi\right) = a^2$$

$$N^2 = \frac{a^2}{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi}$$

Víme, že parametry a a b jsou kladná čísla, pro libovolné φ platí, že $0 \leq \sin^2\varphi \leq 1$, a tedy platí, že

$$0 \leq \frac{a^2 - b^2}{a^2} < 1, 0 \leq \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi < 1$$

A tedy můžeme rovnost odmocnit

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}$$

Zlomek $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ si můžeme vyjádřit pomocí zploštění $f = \frac{a-b}{a}$.

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{a-b}{a}\frac{a+b}{a} = f\left(\frac{2a}{a} - \frac{a-b}{a}\right) = f(2-f)$$

Dostáváme tak hledané N ve tvaru

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-f(2-f)\sin^2\varphi}}$$

□

K dalším výpočtům potřebujeme ještě dokázat následující Lemma.

Lemma 6. *Platí, že*

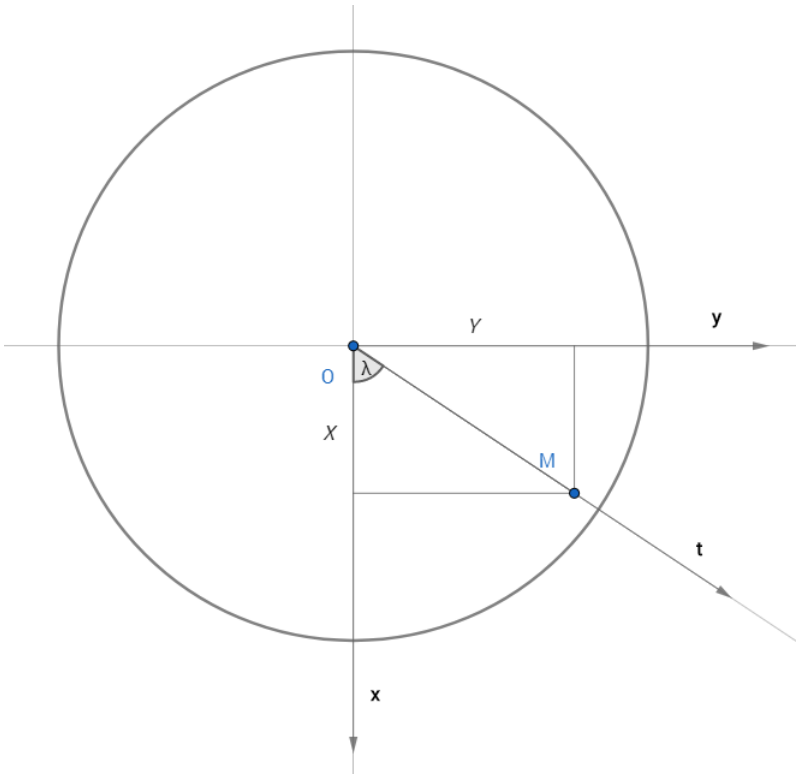
$$|QQ_{xy}| = \frac{b^2}{a^2}N = (1-f)^2 N$$

Důkaz. Vezmeme si trojúhelníky QQ_zM' a QQ_{xy}, které jsou si podobné. Víme, že $|QM| = z_0$ a $|QM'| = \frac{a^2}{b^2}z_0$, poměr podobnosti je $\frac{b^2}{a^2}$. Tedy i strany $|QQ_z|$ a $|QQ_{xy}|$ jsou také ve stejném poměru. Ještě musíme dokázat vztah

$$\frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(1 - \frac{a-b}{a}\right)^2 = (1-f)^2$$

□

Nyní už můžeme dokázat tvrzení 1.



Obrázek 4.2: Rovina rovníku

Důkaz. Platí $\sin\varphi = \frac{Z}{|QQ_{xy}|}$ a tedy díky předchozímu Lemmatu 6 máme pro souřadnici Z:

$$Z = \sin\varphi(1-f)^2 N$$

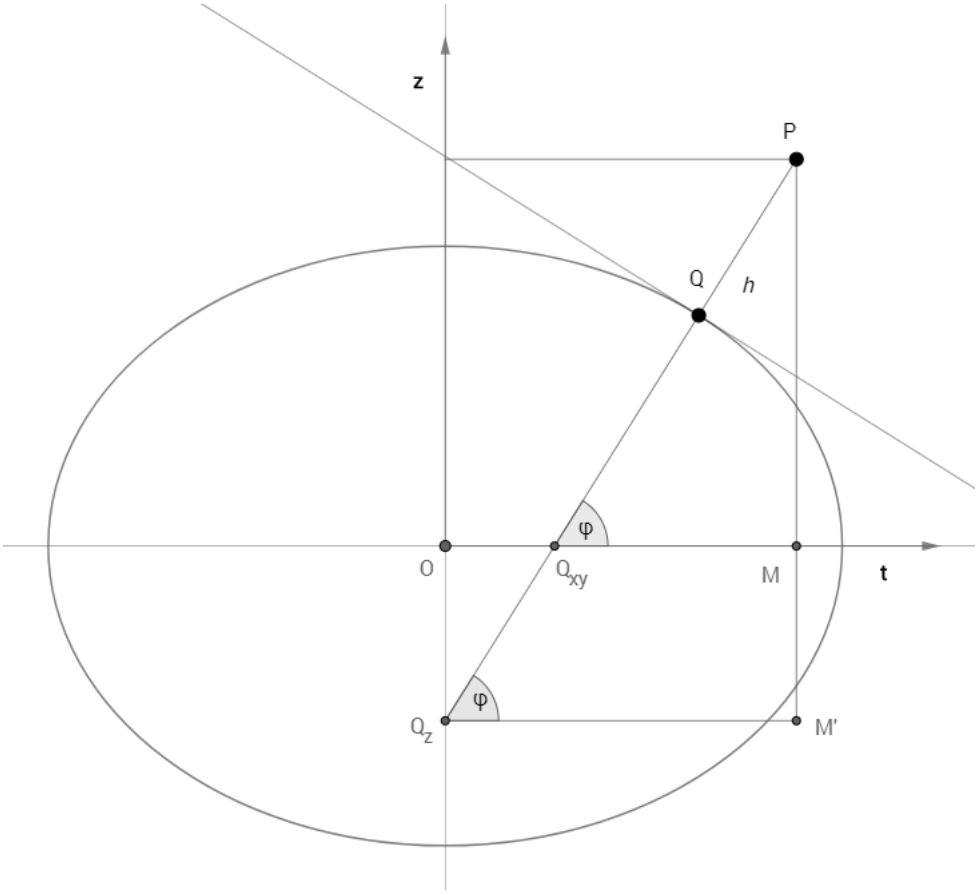
Dále budeme potřebovat vzdálenost $|OM| = N\cos\varphi$

Podle Obrázku 4.2 vidíme, že pomocí úhlu λ získáme zbylé souřadnice

$$X = |OM|\cos\lambda$$

$$Y = |OM|\sin\lambda$$

□



Obrázek 4.3: Rovina obsahující osu z a bod P

Obecně máme souřadnice (φ,λ,h) a chceme najít (X,Y,Z).

Tvrzení 7. *Pro obecný bod P se souřadnicemi* (φ,λ,h) *platí*

$$X = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda$$

$$Y = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda$$

$$Z = \left((1-f)^2 N + h\right)\sin\varphi.$$

Důkaz. Nyní si jako body M a M' označíme kolmé projekce bodu P (viz Obrázek 4.3). Délky $|QQ_z|$ a $|QQ_{xy}|$ jsme si dokázali v Lemmatech 5 a 6. Délka strany PQ_z je $N + H$ a délka strany PQ_{xy} je $(1-f)^2 N + H$. Dále postupujeme stejně jako v důkazu Tvrzení 1. □

4.2 geodetické z kartézských

Máme inverzní problém, vypočítat (φ,λ,h) z (X,Y,Z). Toto je důležité v GPS, ze které získáme souřadnice právě ve tvaru (X,Y,Z) a hodí se nám je převést do geodetických souřadnic, abychom s nimi mohli dále pracovat (například je zobrazovat na mapě). Problém budeme řešit z rovnic, které jsme získali v předchozí části 4.1. Máme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$X = (N + h)\cos\varphi\cos\lambda \tag{4.4}$$

$$Y = (N + h)\cos\varphi\sin\lambda \tag{4.5}$$

$$Z = \left((1 - f)^2 N + h\right)\sin\varphi \tag{4.6}$$

kde $N = \frac{a}{\sqrt{1-(2-f)f\sin^2\varphi}}$. Je to soustava nelineárních rovnic, budeme je tedy řešit numericky. Uvedeme si tři metody, které jsou popsány v Strang a Borre (2012). Metody jsou zde popsány bez vyšetřování konvergence, kterou se také nebudeme zabývat. Museli bychom dokázat například Lipschitzovu podmínku.

4.2.1 Metoda pevného bodu

Délku λ získáme podílem rovnic (4.5) a (4.4)

$$\frac{Y}{X} = \frac{(N + h)\cos\varphi\sin\lambda}{(N + h)\cos\varphi\cos\lambda} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} = \tan\lambda$$

$$\lambda = \arctan\frac{Y}{X}$$

Řešení pro φ a h provedeme iterační metodou využívající pevný bod. Nejdříve ale musíme najít vhodné funkce, které k iteracím použijeme. Obě neznámé si z rovnic vyjádříme. Výšku h dostaneme po sečtení kvadrátů rovnic (4.4) a (4.5)

$$X^2 + Y^2 = (N + h)^2\cos^2\varphi(\cos^2\lambda + \sin^2\lambda)$$

$$X^2 + Y^2 = (N + h)^2\cos^2\varphi$$

$$(N + h)^2 = \frac{x^2 + Y^2}{\cos^2\varphi}$$

Celou rovnost odmocníme, díky tomu, že $(N + h) \geq 0$, $X^2 + Y^2 \geq 0$ a $\cos\varphi \geq 0$ $\left(\varphi \in \left(-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\right)\right)$, je to ekvivalentní úprava.

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos\varphi} - N \tag{4.7}$$

Z pravé strany definujeme funkci $u_1(\varphi,h)$

$$u_1(\varphi.h) = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos\varphi} - N \tag{4.8}$$

Pro vyjádření φ použijeme rovnost (4.6) a vyjádření h, které si upravíme a podělíme

$$\sin\varphi = \frac{Z}{(1 - f)^2 N + h}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{N+h}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\frac{N+h}{(1-f)^2N+h}$$

$$\tan\varphi = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(\frac{(1-2f+f^2)N+h}{N+h}\right)^{-1}$$

$$\tan\varphi = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(1-\frac{(2-f)fN}{N+h}\right)^{-1}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(1-\frac{(2-f)fN}{N+h}\right)^{-1}\right) \tag{4.9}$$

Pravou stranu rovnice si označíme $u_2(\varphi,h)$

$$g_2(\varphi,h) = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(1-\frac{(2-f)fN}{N+h}\right)^{-1}\right) \tag{4.10}$$

Položíme zobrazení $U(\varphi,h) = (u_2(\varphi,h),u_1(\varphi,h))$, složené z funkcí, které jsme si definovali v (4.8) a (4.10). Z definice zobrazení, jsou splněny rovnosti (4.7) a (4.9) pro φ a h takové, že platí $U(\varphi,h) = (\varphi,h)$. Hledáme tedy pevný bod funkce $U(\varphi,h)$.

Nyní už můžeme použít iterační metodu. Nový bod získáme vyčíslením funkce v předchozím bodě. Startovní bod zvolíme tak, že budeme předpokládat, že máme pozici na elipsoidu, tedy s nulovou výškou. Tu také dosadíme do funkce u_2 (4.10).

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(1-\frac{(2-f)\,fN_0}{N_0+0}\right)^{-1}\right)$$

N_0 je nějaké nenulové číslo, které neznáme, ale můžeme jím zlomek zkrátit. Poté už φ_0 není závislé na žádné neznámé hodnotě a můžeme ho použít jako startovní bod. Startovní bod je tedy (φ_0,h_0), jehož hodnoty jsou

$$h_0 = 0, \varphi_0 = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(1-(2-f)\,f\right)^{-1}\right).$$

Dále provádíme iterace pomocí následujících vzorců, začneme na k=0 a postupujeme dokud nedosáhneme požadované přesnosti (nové hodnoty se liší od těch předchozích už jen o nějakou předem zvolenou konstantu).

Výšku h z φ dostaneme pomocí vzorce:

$$h_{k+1} = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cos\varphi_k} - N_k.$$

Šířku φ z h :

$$\varphi_{k+1} = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(1-\frac{(2-f)\,fN_k}{N_k+h_k}\right)^{-1}\right),$$

kde $N_k = \frac{a}{\sqrt{1-(2-f)f\sin^2\varphi_k}}$ $(k = 0,1,2...)$.

4.2.2 Newtonova metoda

Nejdříve si rovnice upravíme. Délku λ získáme podílem rovnic (4.5) a (4.4)

$$\frac{Y}{X} = \frac{(N+h)\cos\varphi\sin\lambda}{(N+h)\cos\varphi\cos\lambda} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} = \tan\lambda$$

$$\lambda = \arctan\frac{Y}{X}$$

Rovnice (4.6) ani součet druhých mocnin rovnic (4.4) a (4.5) neobsahují neznámou λ, budeme tedy aplikovat Newtonovu metodu na tyto rovnice.

$$X^2 + Y^2 = (N+h)^2\cos^2\varphi(\cos^2\lambda + \sin^2\lambda) = (N+h)^2\cos^2\varphi$$

Celou rovnost odmocníme, díky tomu, že $(N+h) \geq 0$, $X^2 + Y^2 \geq 0$ a $\cos\varphi \geq 0 \left(\varphi \in \left(-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\right)\right)$, je to ekvivalentní úprava.

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = (N+h)\cos\varphi \tag{4.11}$$

Pomocí rovnic (4.11) a (4.6) si definujeme funkce g_1 a g_2

$$g_1(\varphi,h) = (N+h)\cos\varphi - \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$g_2(\varphi,h) = \left((1-f)^2N + h\right)\sin\varphi - Z$$

Hledáme nulové body funkce

$$G(\varphi,h) = (g_1(\varphi,h), g_2(\varphi,h))$$

Použijeme na to Newtonovu metodu, budeme iterovat pomocí vzorce

$$(\varphi_{k+1},h_{k+1})^T = (\varphi_k,h_k)^T - J^{-1}(\varphi_k,h_k)G(\varphi_k,h_k), \tag{4.12}$$

kde J je Jakobián funkce G.

Abychom dostali Jakobián, musíme si spočítat parciální derivace

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial\varphi} &= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{(1-(2-f)f\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}(-2(2-f)f\sin\varphi\cos\varphi) \\
&= \frac{N^3}{a^2}f(2-f)\sin\varphi\cos\varphi \qquad (4.13) \\
\frac{\partial N}{\partial h} &= 0 \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial \varphi} &= \frac{N^3}{a^2}(2-f)f\sin\varphi\cos^2\varphi + (N+h)(-\sin\varphi) \\
&= sin\varphi\left(\left(\frac{N^3}{a^2}(2-f)f\cos^2\varphi - \frac{a^2}{N^2}\right) - h\right) \\
&= \sin\varphi\left(\frac{N^3}{a^2}\left((2-f)f\cos^2\varphi - 1 + (2-f)f\sin^2\varphi\right) - h\right) \\
&= \sin\varphi\left(\frac{N^3}{a^2}(2f - f^2 - 1) - h\right) \\
&= -\left(\frac{N^3}{a^2}(1-f)^2 - h\right)\sin\varphi \\
\frac{\partial g_1}{\partial h} &= \cos\varphi \\
\frac{\partial g_2}{\partial \varphi} &= (1-f)^2\frac{N^3}{a^2}(2-f)f\sin\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \left((1-f)^2N + h\right)\cos\varphi \\
&= \cos\varphi\left(\frac{N^3}{a^2}(1-f)^2\left((2-f)f\sin^2\varphi + \frac{a^2}{N^2}\right) + h\right) \\
&= \cos\varphi\left(\frac{N^3}{a^2}(1-f)^2\left((2-f)f\sin^2\varphi + 1 - (2-f)f\sin^2\varphi\right) + h\right) \\
&= \left(\frac{N^3}{a^2}(1-f)^2 + h\right)\cos\varphi \\
\frac{\partial g_2}{\partial h} &= \sin\varphi
\end{aligned}
$$

Pro zjednodušení si označíme $D = \frac{N^3}{a^2}(1-f)^2 + h$. Dostáváme tedy Jakobián

$$J_G = \begin{pmatrix} -D\sin\varphi & \cos\varphi \\ D\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Spočítáme inverz Jabiánu 4.15

$$
\begin{aligned}
J_G^{-1} &= \frac{1}{Det(J_G)}\begin{pmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ -D\cos\varphi & -D\sin\varphi \end{pmatrix} \\
Det(J_G) &= -D\sin^2\varphi - D\cos^2\varphi = -D \\
J_G^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{D}\sin\varphi & \frac{1}{D}\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Konvergence Newtonovy metody záleží na vhodném výběru nulového bodu. Abychom našli nulový bod co nejblíže k hledanému řešení, vyřešíme rovnice pro speciální případ, kdy počítáme se sférou ($f = 0$).

Lemma 8. *Rovnice*

$$X = (a+h)\cos\varphi\cos\lambda \tag{4.17}$$
$$Y = (a+h)\cos\varphi\sin\lambda \tag{4.18}$$
$$Z = (a+h)\sin\varphi \tag{4.19}$$

mají řešení

$$\varphi = \arctan\left(\frac{Z}{X^2+Y^2}\right)$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$h = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} - a$$

Důkaz. Nejdříve si vyjádříme h, sečteme druhé mocniny všech rovnic.

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (a+h)^2(\cos^2\varphi\cos^2\lambda + \cos^2\varphi\sin^2\lambda + \sin^2\varphi)$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (a+h)^2$$

Rovnici odmocníme, $a + h \geq 0$, tedy není potřeba absolutní hodnota.

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = a + h$$

$$h = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} - a$$

Dále si vyjádříme neznámou λ.

$$\frac{Y}{X} = \frac{(a+h)\cos\varphi\sin\lambda}{(a+h)\cos\varphi\sin\lambda} = \tan\lambda$$

$$\lambda = \arctan\frac{Y}{X}$$

Nakonec si vyjádříme φ.

$$X^2 + Y^2 = (a+h)^2\cos^2\varphi$$

Můžeme odmocnit bez absolutních hodnot, protože $a + h \geq 0$ a $\cos\varphi \geq 0$.

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{a+h}$$

$$\sin\varphi = \frac{Z}{a+h}$$

Tyto rovnice můžeme podělit, protože obě strany první rovnice nabývají nuly pouze na pólech, se kterými nepočítáme.

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{Z(a+h)}{\sqrt{X^2 + Y^2}(a+h)}$$

$$\tan\varphi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$\varphi = \arctan\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

□

Nyní už máme všechno potřebné k samotným iteracím. Do vzorce 4.12 dosadíme inverz Jakobiánu.

$$(\varphi_{k+1}, h_{k+1})^\top = (\varphi_k, h_k)^\top - \begin{pmatrix} -\frac{1}{D_k}\sin\varphi_k & \frac{1}{D_k}\cos\varphi_k \\ \cos\varphi_k & \sin\varphi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(\varphi_k, h_k) \\ g_2(\varphi_k, h_k) \end{pmatrix},$$

Po roznásobení dostáváme tyto vzorce

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1} = \varphi_k + \frac{1}{D_k}\sin\varphi_k\left((N_k + h_k)\cos\varphi_k - \sqrt{X^2+Y^2}\right)\\ -\frac{1}{D_k}\cos\varphi\left(\left((1-f)^2 N_k + h_k\right)\sin\varphi_k - Z\right)\\ h_{k+1} = h_k - \cos\varphi_k\left((N_k + h_k)\cos\varphi_k - \sqrt{X^2+Y^2}\right)\\ -\sin\varphi\left(\left((1-f)^2 N_k + h_k\right)\sin\varphi_k - Z\right).\end{aligned}$$

kde $D_k = \frac{N_k^3}{a^2}(1-f)^2 + h_k$ a $N_k = \frac{a}{\sqrt{1-(2-f)f\sin^2\varphi_k}}$. Iterujeme pro k = 0,1,2... a jako počáteční bod si zvolíme

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$$

$$h_0 = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} - a$$

4.2.3 Goadova metoda

Tato metoda používá jiný přístup, ale dojde k modifikaci Newtonovy metody. Místo Jakobiánu budeme počítat pouze s jeho aproximací. Jako v předchozích případech si nejdříve vyjádříme délku.

$$\lambda = \arctan\frac{Y}{Z}$$

Dále nám zůstanou rovnice

$$\begin{aligned}\sqrt{X^2+Y^2} &= (N=h)\cos\varphi\\ Z &= \left((1-f)^2 N + h\right)\sin\varphi\end{aligned}$$

Tyto rovnice vyjadřují vzdálenost od osy z a souřadnici Z

$$P = \sqrt{X^2+Y^2} = (N+h)\cos\varphi \tag{4.20}$$

$$Z = \left((1-f)^2 N + h\right)\sin\varphi \tag{4.21}$$

P a H si vezmeme jako funkce a argumenty φ a h a uděláme pro ně Taylorův rozvoj v bodě (φ,h)

$$\begin{aligned}P(\varphi,h) &= P(\varphi_0,h_0) + \frac{\partial P}{\partial\varphi}(\varphi_0,h_0)(\varphi-\varphi_0) + \frac{\partial P}{\partial h}(\varphi_0,h_0)(h-h_0) + ...\\ Z(\varphi,h) &= Z(\varphi_0,h_0) + \frac{\partial Z}{\partial\varphi}(\varphi_0,h_0)(\varphi-\varphi_0) + \frac{\partial Z}{\partial h}(\varphi_0,h_0)(h-h_0) + ...\end{aligned}$$

Zanedbáme derivace vyšších řádů, tím dostaneme soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{pmatrix}Z - Z(\varphi_0,h_0)\\ P - P(\varphi_0,h_0)\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\frac{\partial Z}{\partial\varphi}(\varphi_0,h_0) & \frac{\partial P}{\partial h}(\varphi_0,h_0)\\ \frac{\partial P}{\partial\varphi}(\varphi_0,h_0) & \frac{\partial Z}{\partial h}(\varphi_0,h_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\varphi-\varphi_0)\\ (h-h_0)\end{pmatrix}$$

Spočítáme si parciální derivace, pro N jsme si je spočítali už v předchozí sekci (4.13 a 4.14)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial \varphi} &= \frac{N^3}{a^2} f(2-f)\sin\varphi\cos\varphi \\
\frac{\partial N}{\partial h} &= 0 \\
\frac{\partial Z}{\partial \varphi} &= -\Big((1-f)^2+h\Big)\sin\varphi + \sin\varphi\frac{N^3}{a^2} f(2-f)\sin\varphi\cos\varphi \\
\frac{\partial Z}{\partial h} &= \sin\varphi \\
\frac{\partial P}{\partial \varphi} &= (N+h)sin\varphi + cos\varphi\frac{N^3}{a^2} f(2-f)\sin\varphi\cos\varphi \\
\frac{\partial P}{\partial h} &= \cos\varphi
\end{aligned}$$

Další aproximaci provedeme položením $f = 0$, pouze v N ponecháme f původní.

$$\begin{pmatrix} Z - Z(\varphi_0,h_0) \\ P - P(\varphi_0,h_0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (N_0+h_0)\cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \\ -(N_0+h_0)\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\varphi-\varphi_0) \\ (h-h_0) \end{pmatrix}$$

Navíc můžeme $(N_0 + h_0)$ vytknout, abychom si usnadnili hledání inverzu.

$$\begin{pmatrix} Z - Z(\varphi_0,h_0) \\ P - P(\varphi_0,h_0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (N_0+h_0)(\varphi-\varphi_0) \\ (h-h_0) \end{pmatrix}$$

Po přenásobení inverzem dostaneme

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z - Z(\varphi_0,h_0) \\ P - P(\varphi_0,h_0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (N_0+h_0)(\varphi-\varphi_0) \\ (h-h_0) \end{pmatrix}$$

Tady už máme aproximační vzorec pro φ a h. Budeme ho opakovat, dokud nebudeme mít aproximaci s požadovanou přesností. Explicitní vzorce pro φ a h v kroku $(k+1)$ josu

$$\begin{aligned}
\varphi_{k+1} &= \frac{\cos\varphi_k(Z - Z(\varphi_0,h_0)) - \sin\varphi_k P(\varphi_0,h_0)}{N_k + h_k} \\
h_{k+1} &= \sin\varphi_k(Z - Z(\varphi_0,h_0)) + \cos\varphi_k P(\varphi_0,h_0),
\end{aligned}$$

kde $N_k = \frac{a}{\sqrt{1-(2-f)f\sin^2\varphi_k}}$

Nakonec ještě musíme najít vhodný startovní bod. Položíme si $r = \sqrt{P^2 + Z^2}$, což je vzdálenost bodu od středu. Hodnotu pro φ si zvolíme jako úhel spojnice se středem a rovinou rovníku.

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{Z}{r}$$

Výšku h si aproximujeme pomocí φ_0

$$h_0 = r - a(1 - f\sin^2\varphi_0)$$

5. Transformace do roviny

5.1 Rozdělení projekcí

1. Mapy zachovávající tvary
2. Mapy zachovávající vzdálenosti - vzdálenost od středu k libovolnému bodu je zachována
3. Mapy zachovávající směry - jsou zachovány azimuty
4. Mapy zachovávající oblasti - zachovává proporce

Existuje nespočetně mnoho různých projekcí. Podle toho, k čemu je daná mapa určená, vybíráme takovou projekci, aby co nejpřesněji zachovala jednu nebo více z předchozích vlastností. Tím, že se snažíme minimalizovat nepřesnost některé vlastnosti, ale můžeme dostat veliké nepřesnosti v ostatních vlastnostech.

Pro zjednodušení budeme v dalších částech počítat, stejně jako v Bhatta (2011) a El-Rabbany (2002), se sférickou aproximací Země.

5.2 Přímá projekce

Přímá projekce je nejjednodušší, avšak velmi nepřesná. Geodetické souřadnice bodu elipsoidu (φ,λ) převedeme přímo na Euklidovské souřadnice v rovině.

$$(x,y) = \Phi_1(\varphi,\lambda) = (\lambda,\varphi)$$

5.3 Válcové projekce

Válcové projekce znamenají, že zobrazujeme sféru na válec, který potom můžeme snadno transformovat do roviny. Středová osa válce prochází vždy středem sféry, ale jeho natočení a velikost se může lišit. Máme tři druhy, první je, že se sféra nachází uvnitř, ale nedotýká se válce. Druhý je, že se válec se sférou dotýkají, a třetí je, že sféra proniká sférou.

5.3.1 Mercatorova projekce

Kolem Země si představíme válec, který je rovnoběžný s osou z a dotýká se Země na rovníku. Poloměr válce je tedy shodný s poloměrem Země a. Vzorec na zobrazení je

$$(x,y) = \Phi_2(\varphi,\lambda) = (a\varphi,a\operatorname{arctanh}\sin\lambda)$$

Zobrazení zachovává délky pouze na rovníku, směrem k pólům se zobrazení více zkresluje. Pro body s $|\varphi| > 86°$ se toto zobrazení nepoužívá.

Tato projekce věrně zobrazuje úhly, ale silně zkresluje plochy.

5.4 Kuželové projekce

U tohoto typu projekce místo válce použijeme kužel. Jeho osa také musí procházet středem sféry. Kužel můžeme také libovolně položit, v závislosti, kterou část sféry chceme zobrazit. Kužel stejně jako válec můžeme snadno transformovat do mapy.

5.5 Azimutové projekce

V tomto druhu projekce přiložíme k nějakému určenému bodu sféry rovinu. Vybereme si nějaký bod, podle kterého pak děláme projekci na rovinu.

Projekci dělíme na tři druhy podle toho, jaký jsme si vybrali bod, ze kterého projekci vedeme. Centrální znamená, že projekci vedeme ze středu sféry. Stereografická znamená, že projekci vedeme z bodu na opačné straně, než máme přiloženou rovinu. Ortografická projekce znamená, že bod ze kterého vedeme projekci se nachází v nekonečnu, jde tedy o kolmou projekci na rovinu.

Závěr

Zabývali jsme se použitím souřadnic, získávaných pomocí systému GPS. Po krátkém exkurzu do historie GPS a prezentace používaných a budovaných družicových polohových systémů, byly popsány základní principy fungování GPS, jeho části, segment vesmírný – soustava satelitů vysílajících radiový signál obsahující údaje o poloze a času, segment kontrolní a segment uživatelský. Ten tvoří přijímače, které přijímají signály z v tu chvíli viditelných družic. Poloha přijímače a čas je vypočtena z obdržených údajů.

V části Aproximace zemského povrchu byl definován elipsoid a geoid.

Dále byly popsány používané soustavy souřadnic. Kartézský souřadnicový systém

Skládající se ze tří na sebe kolmých os s průsečíkem ve středu země a geodetický souřadnicový systém . Dále byl popsán geografický referenční systém.

Tím byly popsány důležité pojmy a funkce související s GPS.

V nosné části této práce jsme se věnovali převodu mezi geodetickými a kartézskými souřadnicemi . Problém převodu z geodetických do kartézských souřadnic jsme vyřešili pomocí geometrických vztahů. Inverzní problém takto vyřešit nejde, použili jsme tedy vztahy, které jsme našli u předchozího problému a řešili je jako soustavu nelineárních rovnic. Byly použity tři numerické metody, dvě běžně používané a jeden jiný přístup, který vede k modifikaci jedné z předchozích metod.

Poslední část Transformace do roviny je věnována zobrazením používaných k převodu zemského povrchu do mapy.

Seznam použité literatury

Bhatta, B. (2011). *Global Navigation Satellite Systems: Insights into GPS, GLONASS, Galileo, Compass and Others*. CRC Press. ISBN 978-0-415-66560-5.

El-Rabbany, A. (2002). *Introduction to GPS: The Global Positioning System*. Artech House. ISBN 1-58053-183-0.

European GNSS Agency. European GNSS Service Centre. URL `https://www.gsc-europa.eu/`.

National Coordination Office for Space-Based Positioning, Navigation and Timing. GPS Educational Resources. URL `https://www.gps.gov/students/`.

Strang, G. a Borre, K. (2012). *Algorithms for Global Positioning*. Wellesley-Cambridge Press,U.S. ISBN 0980232732.

Seznam obrázků

3.1 Kartézská soustava souřadnic 7
3.2 Geodetický souřadnicový systém pro body elipsoidu 8
3.3 Geodetický souřadnicový systém 8

4.1 Rovina obsahující osu z a bod Q 11
4.2 Rovina rovníku 14
4.3 Rovina obsahující osu z a bod P 15