Posudek oponenta na bakalářskou práci

Limity a l' Hospitalovo pravidlo

Kateřina Ranšová

Předložená práce se zabývá vysvětlením pojmu limita funkce, a zejména pak různými způsoby výpočtu limit s důrazem na l' Hospitalovo pravidlo a aplikaci Taylorových polynomů.

První čtyři kapitoly jsou věnovány samotnému pojmu limita funkce. První kapitola obsahuje stručný historický úvod. Místy je poměrně pěkný, obsahuje reprezentativní výběr jmen. Hodnocení přínosu jednotlivých matematiků však není v některých případech moc přesné, například Archimédovo užití Eudoxovy exhaustivní metody je sice pěknou aplikací antické „teorie limit", ta však vůbec není zmíněna – je založena na propozici X, 1 Eukleidových *Základů*.

Druhá kapitola měla obsahovat motivační úvahy, tj. řešení jakých problémů vede k pojmu limita funkce. Motivační část je však založena na zdůraznění významu derivace a integrálu. Správně je sice upozorněno na klíčovou roli limit při zavádění těchto důležitých pojmů, může však snadno vzniknout dojem, že limity slouží pouze k zavedení těchto pojmů, jinak nejsou důležité. To je bohužel problém mnoha učebních textů prezentujících diferenciální počet – student tak k počítání a promýšlení limit není veden, spíše naopak, má pak tendenci přeskočit „k něčemu užitečnějšímu": počítání derivací a integrálů. Motivační část tedy dle mého názoru splnila svou úlohu jen zčásti.

Grafické znázornění limity funkce ve vlastním bodě je předvedeno srozumitelně. Výklad u limity funkce v nevlastním bodě autorka neopatřila obrázkem, zabývá se jí jen v krátkém odstavci.

Ve stručné kapitole 3 jsou shrnuty základní pojmy (funkce, okolí bodu, nevlastní body a okolí „nekonečna"). Za definicí funkce je uvedeno, že *funkce je zobrazení*; není však zřejmé, jaký je mezi těmito pojmy rozdíl. Uvedena je i středoškolská definice zobrazení. Kvůli zvýšení srozumitelnosti textu pro běžného studenta prvního ročníku vysoké školy to jistě není na škodu, v didakticky zaměřené práci by však bylo možná užitečné (třeba v poznámce pod čarou) stručné porovnání obou definic. Je trochu škoda, že běžnému čtenáři nemusí být jasné, proč je pojem okolí zaváděn (zdůvodnění *je klíčový* nepovažuji za dostatečné).

Samotný výklad pojmu limita funkce v kapitole 4 začíná výčtem všech možných typů limit „(ne)vlastní limita v (ne)vlastním bodě", což nepovažuji za pěkně postavený úvod. Tímto způsobem je pak strukturován i samotný výklad. Ten je však zejména u nevlastních případů veden příliš stručně, u všech těchto případů chybí úvod, v němž by si čtenář učinil o zaváděném pojmu názornou představu, kterou by mohl následně formalizovat. Začít rovnou formalizací nepovažuji za didaktické.

Definice spojitosti funkce v bodě je založena na pojmu okolí; tento pečlivý postup oceňuji. Stručnou úvahou autorka dochází k jiné (mnohem častěji uváděné) definici spojitosti pomocí limity funkce, obě definice však chybně považuje za ekvivalentní.

V podkapitole 4.3 shrnující souvislost mezi limitou funkce a limitou posloupnosti je klíčová Heineho věta. Přestože je uvedena i definice posloupnosti, není upozorněno, že se jedná o speciální případ reálné funkce jedné reálné proměnné, a tak unikl hlavní vztah mezi oběma pojmy: definice limity posloupnosti je speciálním případem limity funkce. Není pak také zřejmé, proč limity posloupností počítáme jen pro $n \to \infty$. Autorka však upozorňuje na důležitou věc: z Heineho věty plyne, že výsledky dokázané pro limity posloupností lze poměrně snadno převést na výsledky o limitách funkcí.

Základní metody výpočtu limit funkcí pomocí úprav výrazů a význačných limit jsou představeny v kapitole 5. Po uvedení věty o aritmetice limit je uveden soupis pravidel pro počítání s nevlastními prvky (tj. v $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Odůvodnění chybí (*s výrazy se pracuje takto:...*). Následně je upozorněno na tzv. neurčité výrazy; přesvědčivý je příklad osvětlující podstatu neurčitého výrazu $\frac{0}{0}$ s využitím limit funkcí. Další neurčité výrazy jsou však pouze vypsány. Čtenáři tak nemusí být jasné, proč jsou právě tyto výrazy neurčité, a co hůře, zda neexistují ještě nějaké další neurčité výrazy, které ve výčtu chybí. Příklady k některým typům neurčitých výrazů jsou sice pěkné, mohou však působit nahodile.

Při výkladu u neurčitého výrazu 0^0 došlo k nedopatření: ve výrazu 0^c je připouštěno *jakékoliv reálné číslo kromě nuly*; pro záporná c však není 0^c definováno (Proč?).

Pod seznamem neurčitých výrazů na str. 21 uprostřed nerozumím formulaci: *dosadíme-li x-ovou souřadnici bodu, ve kterém hledáme limitu...*

Význačné limity jsou pouze uvedeny (str. 25 nahoře) jako „vzorce“ (str. 26 uprostřed). Jelikož je práce zaměřena spíše na početní techniku limit, tak to nepovažuji za vážný nedostatek.

V kapitolách 6 až 8 je ukázáno, jak efektivně počítat limity s využitím derivací; tvoří tak druhou část práce. Kapitola 6 se zaměřuje na výpočty limit pomocí Taylorových polynomů. Definice Taylorova polynomu je pouze uvedena, samotný pojem je motivován po uvedení jeho definice jen stručnou poznámkou, že *pomocí něho můžeme aproximovat funkce*; jeho složitý tvar není nijak vysvětlen. V definici 6.2 na str. 31 není symbol o korektně zaveden. V klíčové Peanově větě by stálo za zmínku, jakým způsobem je ošetřen případ, kdy je polynom $T_{f,x_0,n}(x)$ nulový. Oceňuji názorné obrázky ukazující jednotlivé aproximace funkce sinus Taylorovými polynomy stupně 1, 3, 5 a 7. Aplikace Taylorových polynomů při výpočtech limit je ukázána na standardních příkladech a opatřena podrobnými komentáři.

Podkapitola 6.2.2 obsahuje podstatné úvahy, které často při výkladu limit chybí: kdy selhává výpočet limity funkce pomocí úprav a význačných limit. Avšak název *Kdy je nutné používat při výpočtu limit Taylorův polynom?* nepovažuji za vhodný, neboť užití Taylorova polynomu není při výpočtech limit nutné nikdy; vždy totiž existuje funkční alternativa (např. l' Hospitalovo pravidlo).

Sedmá kapitola obsahuje formulaci l' Hospitalova pravidla (bez důkazu) a několik standardních ukázkových příkladů jeho použití. Oceňuji, že je upozorněno, že z neexistence limity vzniklé po derivování čitatele a jmenovatele neplyne nic o existenci či neexistenci limity původní.

V poslední osmé kapitole jsou dány do souvislosti způsoby výpočtu limit funkcí pomocí Taylorova polynomu a l' Hospitalova pravidla. Myšlenka této kapitoly je správná a hodnotná, škoda jen, že není prezentována stručněji a výrazněji. V mnoha učebnicích takovéto porovnání chybí; důvodem může být časový odstup mezi probíráním l' Hospitalova pravidla a aplikacemi Taylorova polynomu.

Obrázky jsou názorné. Text je poměrně pěkně vysázen v LaTeXu. Přesto se objevují některé systematické nedostatky, např.:

- uvádění nadbytečných závorek v průběhu celé práce, např. $\sin(x), \ln(x)$,

- na mnoha místech je pomlčka „–“ nahrazena spojovníkem „-“,

případně další formální nedostatky, např.:

chybný odkaz na stránku (na str. 22 dole: *budu hovořit na str. 24* místo *na str. 25*), na str. 28 uprostřed: citování literatury [2] přímo v rámci formulí (5.3), (5.4) a (5.5) nepovažuji za vhodné.

Překlepy nejsou časté (*Unverzity* na str. 51, položka 11; *čítatel*: str. 29 uprostřed). Místy se také objevují:

- nevhodná slova (*nadefinuji*: str. 7 nahoře; *zadefinuju*: str. 17 před definicí 4.10; *prokrácení*: str. 41 dole),
- nevhodné formulace (*víme, že platí limity…*: str. 28 pod formulí (5.5); na str. 46 dole: *o ten samý počet* místo *o tentýž počet*),
- pravopisné chyby (*10-krát* místo *10krát*: str. 28 uprostřed),
- nevhodně použité symboly ve větě (str. 11–12: $\forall x$ *z intervalu …není vzdálenost* místo správného *pro žádné x z intervalu …není vzdálenost*).

Vzhledem k výše uvedenému doporučuji, aby byla tato práce uznána jako bakalářská, a doporučuji ji k obhajobě. Navrhuji hodnocení ***velmi dobře.***

Praha 26. ledna 2018

Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky