MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kateřina Ranšová

Limity a l'Hospitalovo pravidlo

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
Studijní program:	Chemie
Studijní obor:	Chemie se zaměřením na vzdělávání - Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Limity a l'Hospitalovo pravidlo

Autor: Kateřina Ranšová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Cílem této práce je seznámit čtenáře s pojmem limita funkce a se způsoby jejího řešení. Hlavní přínos spočívá v didaktickém pojetí a propojení teorie limity s grafickou představou a různými postupy algebraických výpočtů. Text je tvořen osmi kapitolami, které lze myšlenkově rozdělit do dvou částí. První část je věnována vysvětlení pojmu limita funkce. Následně jsou jednotlivé typy limit zadefinovány a pro lepší porozumění je u většiny z nich uveden i konkrétní příklad a grafické znázornění. První část je zakončena jednotnou definicí, která pomocí pojmu okolí shrnuje všechny předcházející typy limit. Druhá část se zabývá základními postupy výpočtu limit. Čtenář se zde seznamuje také s Taylorovým polynomem a l'Hospitalovým pravidlem, které lze použít jako další způsoby pro výpočet limity funkce. Vyvrcholením této práce je porovnání postupu řešení výpočtů limit pomocí l'Hospitalova pravidla a Taylorova polynomu. V závěru práce jsou uvedeny některé výhody a nevýhody použití l'Hospitalova pravidla a Taylorova polynomu při výpočtech limit.

Klíčová slova: limita, Taylorův polynom, l'Hospitalovo pravidlo, výpočet limity

Title: Limits and l'Hospital's rule

Author: Kateřina Ranšová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The aim of this BA thesis is to introduce to the reader the concept of the limit of function and the means of its solution. The main impact of the thesis lies in a didactic approach and in the connection of a limit theory with its graphic representation and different methods of algebraic calculation. The text consists of eight chapters which can be divided into two parts according to their content. The first part explores the term "the limit of the function". Individual types of limits are then defined. To facilitate understanding, most of the definitions are accompanied by a particular example and a graphic representation . The first part is concluded by a unified definition which by means of the term "vicinity" summarizes all preceding types of limits. The other part deals with some basic methods of limits' calculation. Other topics include Taylor Series, l'Hospital's Rule and their applications to the limits. The core of the thesis is a comparison of calculation by means of l'Hospital's Rule and Taylor Series. The conclusion of the thesis presents some advantages and disadvantages of applying Taylor Series and l'Hospital's Rule to the calculation of limits.

Keywords: limit, Taylor Series, l'Hospital's Rule, calculation limit

Ráda bych na tomto místě poděkovala RNDr. Jakubu Staňkovi, Ph.D., a své rodině za pomoc a podporu při vypracovávání této práce.

Obsah

Úvod

V bakalářské práci se budu zabývat pojmem limita funkce a různými způsoby jejího výpočtu. Limita funkce je základním pojmem celého diferenciálního a integrálního počtu, z tohoto důvodu je její pochopení pro další studium těchto matematických disciplín naprosto klíčové.

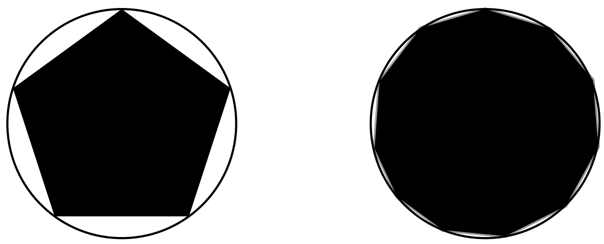
Výklad pojmu limity funkce může být pro některé studenty abstraktní a stává se tak pro ně obtížně uchopitelným. Při studiu odborné literatury, která se věnuje tématu limity funkce, jsem se setkala s převážně teoretickým výkladem. Cílem práce je zpracovat toto téma tak, abych propojila teorii pojmu limita funkce, obsahující velké množství definic a vět, s použitím v praxi a její grafickou představou. Nově zavedený pojem, či tvrzení více přiblížit na grafech konkrétních funkcí a popsat postup řešení u konkrétních příkladů daného typu limity. Dále vysvětlit, kdy je nutné při výpočtu limit použít Taylorův polynom, nebo l'Hospitalovo pravidlo. Porovnat tyto dva postupy řešení limit a pokusit se mezi nimi najít souvislost.

První kapitola je zaměřená na historii diferenciálního počtu, na kterou navazuje kapitola motivace. Obě tyto kapitoly by měly čtenáři představit význam a vývoj pojmu limita funkce. Základní historické souvislosti čtenáři objasní, proč je pojem limita v infinitezimálním počtu tak důležitý, a co vedlo k jeho zavedení. Třetí kapitola vysvětluje a připomíná definice základních pojmů, které jsou v práci používány. Ve čtvrté kapitole jsou vyjmenovány a vysvětleny typy limit. Navazující kapitola se věnuje vysvětlení neurčitých výrazů a výpočtu základních limit funkcí, se kterými se běžně student při počítání limit potká. V šesté a sedmé kapitole seznamuji čtenáře s Taylorovým polynomem a l'Hospitalovým pravidlem a ukazuji jejich využití při výpočtech limit. Závěrečná kapitola zachycuje vztah mezi výpočtem limit pomocí Taylorova polynomu a l'Hospitalova pravidla. Tato dvě témata jsou většinou probírána odděleně a jen minimum studentů se zamyslí nad tím, zda mezi nimi neexistují určité souvislosti. To mě inspirovalo se nad těmito dvěma metodami výpočtu limity více zamyslet a porovnat jejich použití, výhody a nevýhody ve výpočtech limit.

Práce má didaktický charatker a může sloužit jako doplňující materiál k tématu limit pro studenty vysokých škol, zvláště pro studenty učitelských a technických oborů.

1. Historie

Základy diferenciálního a integrálního počtu sahají až do starověku. Jejich počátky můžeme datovat až do starověkého Řecka. Tehdejší matematici a filosofové používali takzvanou exhaustivní metodu, jejímž zakladatelem je Eudoxos z Knidu (asi 408 – 355 př. n. l.). Tato metoda byla hojně využívána k výpočtu obsahů ploch ohraničených křivkami. Příkladem může být kruh. Do kruhu se postupně vepisovaly mnohoúhelníky (Obr. 1.1 [9]), jejichž obsahy se postupně více a více přibližovaly obsahu kruhu (v dnešní terminologii bychom řekli, že se obsahu kruhu limitně přibližovaly). Výpočet obsahů získaných mnohoúhelníků byl již dobře známý například metodou, při níž se mnohoúhelník rozloží na nepřekrývající se trojúhelníky. Výpočet obsahu trojúhelníků podle vzorce, který je běžně používán i dnes, všichni matematici ve starověku dobře ovládali. Tímto způsobem bylo možné s překvapivou přesností vypočítat obsahy i složitějších útvarů. Eudoxos dospěl k teorii, že při zvolení dostatečně velkého n, najdeme takový n-úhelník, který téměř vyplní kruh: k obsahu kruhu se tak můžeme dostat libovolně blízko. Tato metoda je považována za starověkou metodu limit k určování obsahů a objemů (využívá limit posloupností) [7]. Úžasným způsobem ji využil Archimédés ze Syrakus (287? př. n. l - 212 př. n. l.) k výpočtu obsahů a objemů (kruh, spirála, parabolická úseč, elipsoid, vrchlíky paraboloidů, hyperboloidů apod.).



Obrázek 1.1: Využití Eudoxovy exhaustivní metody pro výpočet obsahu kruhu

Diferenciální a integrální počet (souhrnně označovaný jako infinitezimální počet, dnes matematická analýza), jak ho přibližně známe dnes, byl objeven až ve druhé polovině 17. století. Za jeho objevitele se považují Isaac Newton (1643 – 1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). První publikoval svůj objev G. Leibniz [8], později se však ukázalo, že Newton objevil infinitezimální počet dříve. Vycházel v něm z tzv. teorii fluxí a fluent. Poté, co Leibniz zveřejnil své myšlenky, Newtonovi příznivci jej obvinili z převzetí Newtonových myšlenek. Spor došel tak daleko, že o prvenství rozhodovala komise Královské společnosti [6]. Na počátku bylo stanoveno, že bude nestranná, nakonec však byla složená převážně z Newtonových příznivců a za pouhých 50 dní rozhodla, že prvenství patří Newtonovi. Dnes však již víme, že podíl na tomto objevu mají oba slavní matematici. Leibniz kladl velký důraz na přehlednou symboliku, která se používá víceméně dodnes. Newtona proslavilo především jeho využití infinitezimálního počtu ve fyzice a atronomii.

Diferenciální a integrální počet je považován za jeden z největších matematických objevů, a tak není divu, že významní matematici té doby se začali těmito myšlenkami zabývat a rozvíjet je. Mezi prvními navazují na Leibnizovy myšlenky bratři Jacob (1654 - 1705) a Johann (1667 - 1748) Bernoulliové, kteří se za velmi krátkou dobu seznámili s jeho dílem. Neřeší pochybnosti, které spočívají již v užívání nekonečně malých veličin, místo toho infinitezimální počet rychle rozvíjejí a používají v praktických příkladech.

Dalším významným matematikem, kterého bych chtěla zmínit, byl Marquis de L'Hospital (1661 - 1704). Jeho učitelem byl Johann Bernoulli, který mu předal mnoho svých matematických výsledků zvláště z oblasti infinitezimálního počtu. Všechny tyto výsledky L'Hospital rozpracoval, některé ještě rozšířil a vydal ve své knize *Analýza nekonečně malých veličin ve studiu křivek*, která se stala první učebnicí infinitezimálního počtu. Učebnice se proslavila především díky dnes známému l'Hospitalovu pravidlu, jehož objevitelem je Johann Bernoulli [8]. L'Hospitalovo pravidlo slouží k výpočtu limit funkcí v podílovém tvaru, v němž se jak čitatel, tak jmenovatel blíží k nule, nebo k nekonečnu. Více se mu budu věnovat v 7. kapitole.

Dále bych chtěla zmínit Leonharda Eulera (1707 – 1783), také žáka Johanna Bernoulliho. Euler byl výborným matematikem, napsal velké množství nejen vědeckých děl, ale také učebnic, které byly velmi vážené a mimo jiné vedly k ustálení matematické symboliky. Euler obětoval matematice celý život, sepsal 886 matematických děl [8] a přinesl mnoho nových objevů do různých odvětví matematiky od analýzy, kombinatoriky, teorie čísel až po analytickou geometrii. Nějakou dobu se zdálo, že již není co nového objevovat, že Euler již vše rozřešil a objevil.

Již koncem 17. století si matematici začínají všímat nepřesností, které byly způsobeny vágní definicí derivace pomocí nekonečně malých veličin. Jako první podává tuto kritiku v roce 1694 Bernard Nieuwentijt (1654 – 1718), následně pak biskup George Berkeley (1685 – 1753). Kritizují používání nekonečně malých veličin, které jsou někdy nulové a někdy nenulové podle toho, jak je zrovna potřeba. Zároveň jim připadá zbytečné zavádění vyšších derivací, které podle nich nemají žádný praktický význam [3]. V této době začínají vznikat v matematických řadách dva rozdílné názory. První skupinu tvoří ti, kteří v současné stavbě diferenciálního a integrálního počtu nevidí žádný problém. Druhá skupina se snaží obhájit diferenciální počet pomocí exaktněji definovaného pojmu limity. První skutečný krok k vyřešení tohoto problému udělal Jean Baptista Le Rond d'Alembert (1717 – 1783), který se pokusil definovat derivaci pomocí limity poměrů přírůstku veličin. Jeho řešení bychom pomocí dnešní symboliky zapsali jako [8]:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Snažil se objasnit pojem limity funkce v bodě a pojem určitého integrálu [10]. Jím načrtnutý pojem limity se stal výchozím pojmem matematické analýzy a vedl v dalších desetiletích k jejímu očištění od nekonečně malých veličin. Například Joseph Louis de Lagrange (1736 – 1813) svou teorii postavil na konstrukci a vlastnostech Taylorovy řady, kterou publikoval Brook Taylor (1687 - 1731) v roce 1712. Lagrange tuto řadu odvozuje i se zbytkem. Trochu naivním způsobem ukazuje, že lze pomocí Taylorova rozvoje rozepsat libovolnou funkci čistě algebraickým způsobem. Tato teorie se ukázala jako neuspokojivá, co se týká objasnění základů infinitezimálního počtu, ale dodnes má velké využití u nekonečných řad.

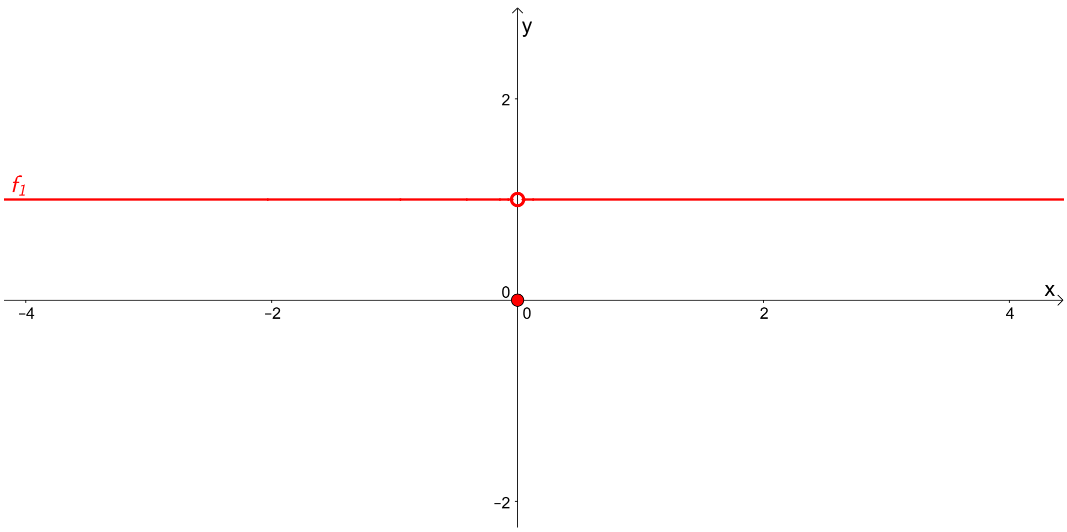
Jak tento rozvoj vytvořit a jaké je dnes jeho využití při výpočtu limit funkcí, si ukážeme v 6. kapitole.

Pojem limity funkce a celá tehdejší matematická analýza byla výrazně zpřesňována až v 19. století matematiky Augustinem-Louisem Cauchym (1789 - 1857) a Bernardem Bolzanem (1781 - 1848). Augustin Cauchy ve svém díle *Cours d'Analyse* (1821) zavádí nové požadavky na přesnost, ať už se jedná o definování pojmů, nebo o důkazy vět. Říká, že derivace a integrál, ale i součet nekonečné řady lze vyjádřit jako limitu. Mezery v jeho důkazech doplňují Karl Weierstrass (1815 - 1897), rodí se aritmetický základ pomocí jazyka $\varepsilon-\delta$, dále pak Eduard Heine (1821 - 1881), Richard Dedekind (1831 - 1916) a Georg Cantor (1845 - 1918). Pojem limita je základem celého infinitezimálního počtu. Tento obor matematiky získal obrovské využití. Díky němu jsme schopni vypočítat obsahy obrazců, u kterých známe jen předpis křivky, která je ohraničuje. Stejně tak umíme vypočítat objemy těles, délky křivek atd. Infinitezimální počet nenašel uplatnění jen v matematice, ale je ve velké míře využíván i v jiných oborech jako jsou například fyzika, astronomie, chemie atd.

2. Motivace

Předtím než exaktně nadefinuji pojem limita funkce a vysvětlím ho detailněji na jednotlivých příkladech, je dobré si připomenout jeho praktický význam. K čemu je dobré zavádět pojem limita funkce? Co si pod ním můžeme představit?

Limita funkce v bodě a je číslo, které nám říká, jak se daná funkce chová v okolí tohoto bodu - přesněji k jaké hodnotě se blíží její funkční hodnoty v tomto okolí. Příkladem nespojité funkce je například funkce $f_1(x) = |\text{sgn}(x)|$.



Obrázek 2.1: $f_1(x) = |\text{sgn}(x)|$

Funkce f_1 je konstantní funkce $y = 1$, až na bod $x = 0$, ve kterém není spojitá. Její funkční hodnota v bodě $x = 0$ je rovna 0. Z grafu funkce f_1 (Obr. 2.1) můžeme vidět, že pokud se budeme blížit k bodu $x = 0$ zprava i zleva co nejtěsněji, pak všechny body, které budou ležet v jeho blízkém okolí, budou mít funkční hodnotu rovnu 1. Limita této funkce pro x jdoucí k 0 se tedy rovná 1, což můžeme zapsat:

$$\lim_{x\to 0} |\text{sgn}(x)| = 1.$$

Analogicky můžeme vytvořit limitu ke zjištění hodnoty, ke které se funkce blíží, jde-li argument x do nekonečna. Nekonečno nelze jednoduše dosadit do funkčního předpisu, který by jednoznačně přiřadil funkční hodnotu, i kdyby funkce byla na daném intervalu spojitá. Jedinou možností jak zjistit, k jaké hodnotě se bude přibližovat funkční hodnota funkce v $\pm\infty$, je vypočítat její limitu. Příklady takových funkcí ukáži v dalších kapitolách.

Poznamenejme, že chceme-li se vůbec zabývat tím, zda má daná funkce v bodě limitu, musí být funkce v okolí tohoto bodu definována.

Máme tedy už určitou představu o tom, co to limita funkce je. Jaké je ale její využití? K čemu je vůbec dobré pojem limita funkce zavádět? Limita funkce je základním pojmem celé matematické analýzy, která se zabývá počtem diferenciálním a integrálním. Její objevení znamenalo pro matematiku veliký posun.

Pomocí limity je například definovaná derivace funkce, ústřední pojem diferenciálního počtu. Diferenciální počet se věnuje například hledání grafu funkce, u které známe jen její funkční předpis. S jeho pomocí lze řešit také mnoho zajímavých slovních úloh v matematice, chemii a zvláště ve fyzice. Můžeme ho využít například k řešení úloh typu:

- Určete rozměry válcové plochy o známém objemu tak, aby měla minimální povrch.

Je zřejmé, že tyto úlohy nejsou zajímavé jen ve školním prostředí, ale mohou mít praktické využití například v průmyslu při optimalizaci nákladů.

Při řešení úloh ve fyzice, chemii a jiných odvětvích je pro vyřešení úlohy velmi často potřeba vypočítat příslušné diferenciální rovnice (rovnice, ve kterých se vyskytuje neznámá a její derivace). V chemii se pomocí diferenciálních rovnic řeší například úlohy typu:

- Tepelný rozklad látky A v plynné fázi probíhá podle rovnice: $A(g) \to 3R(g)$. Při dané teplotě a známé rychlostní konstantě této reakce zjistěte, za jak dlouho bude okamžitá koncentrace látky R v reaktoru 50-krát větší než látky A, pokud na počátku byla v reaktoru pouze látka A.

Velké využití má také integrální počet. Pomocí integrálního počtu můžeme vypočítat obsahy ploch ohraničených křivkami grafu, objemy rotačních těles, nebo například délky křivek.

V této práci se nechci zabývat vysvětlováním výpočtů derivací a integrálů. Cílem této kapitoly bylo pouze vysvětlit, co si pod pojmem limita funkce můžeme představit, a nastínit v tomto krátkém výčtu aplikace matematické analýzy. Je však zřejmé, že se jedná o silný nástroj, který má velmi široké využití nejen v oblasti matematiky.

3. Základní pojmy

Než se dostanu k přesné definici limity funkce, chtěla bych nejprve vysvětlit několik základních pojmů, které jsou pro pochopení celého tématu nezbytné. V první části práce budu postupovat co nejjednodušším způsobem tak, aby nevyžadovala vysokoškolské znalosti, a aby tuto práci byli schopni číst i studenti prvního ročníku vysoké školy dříve, než se začnou učit matematickou analýzu. Celek práce je však určen pro vysokoškolské studenty, a tak další kapitoly, kde budu například porovnávat postup řešení limit pomocí Taylorova polynomu a l'Hospitalova pravidla, budou již vyšší znalosti vyžadovat.

3.1 Funkce

Vzhledem k tomu, že celá tato práce by se měla zabývat limitou funkce, bylo by vhodné si připomenout, co pojem funkce znamená. Pro naše účely bude stačit nadefinovat reálnou funkci jedné reálné proměnné. Korektní matematickou definici funkce můžeme nalézt zapsanou v [2] takto:

Definice 3.1. *Reálnou funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Její definiční obor označujeme D_f, obor hodnot R_f.*
$f(M) = \{y \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in M;\ y = f(x)\}$ značíme obraz množiny M pomocí funkce f. Speciálně je $R_f = f(D_f)$.

Funkce je zobrazení. Jestliže tedy do funkčního předpisu dosadíme jakoukoliv hodnotu x z definičního oboru, funkční předpis nám automaticky přiřadí jeho funkční hodnotu.

Nechtěla bych nyní ztrácet čas vysvětlováním a definováním pojmu zobrazení (jeho definici můžeme nalézt v [1] na str. 33). Myslím si, že pro naše účely by nám měla postačit i středoškolská definice funkce, která je v [5] na str. 9 definována takto:

Definice 3.2. *Funkce na množině $A \subset \mathbb{R}$ je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množina A se nazývá definiční obor funkce (značí se D_f).*

3.2 Okolí bodu

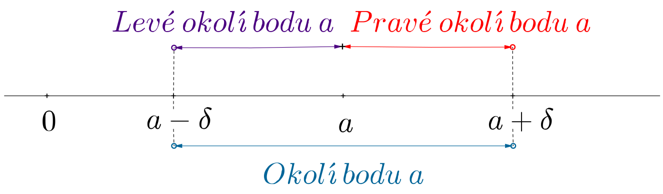
Pojem okolí je pro výklad teorie limity funkce klíčový a jeho pochopení je pro zavedení její definice velmi důležité. Jeho definice zní:

Definice 3.3. *Okolí bodu a o poloměru δ značíme symbolem $U_{(a,\delta)}$ a nazýváme jím interval $(a-\delta, a+\delta)$, kde $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, nebo-li δ-ovým okolím bodu a je množina bodů $U_{(a,\delta)} = \{x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \delta\}$.*

Levé okolí bodu a je množina: $U^-_{(a,\delta)} = \{x \in \mathbb{R}, a-\delta < x \leq a\}$, kterou můžeme pomocí intervalu zapsat jako $U^-_{(a,\delta)} = (a-\delta, a]$.

Pravé okolí bodu a je množina: $U^+_{(a,\delta)} = x \in \mathbb{R},\ a \leq x < a+\delta$. Pomocí intervalu jej můžeme zapsat jako množinu $U^+_{(a,\delta)} = [a, a+\delta)$.

Redukované okolí bodu a, někdy také nazývané prstencové okolí bodu a, je množina: $U_{(a,\delta)} \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta\}$, *značíme jej* $U^*_{(a,\delta)}$.



Obrázek 3.1: Okolí bodu

Co nám definice okolí bodu a říká? Pokud bychom ji převedli ze symboliky do běžného jazyka, říká, že okolím pevně zvolného bodu a jsou všechna reálná čísla x, která jsou od a ve vzdálenosti na přímce menší než δ. Při definování pravého a levého okolí bodu se omezíme na danou část intervalu podle toho, které okolí požadujeme (naznačeno na Obr. 3.1). Definice prstencového okolí bodu a se liší od definice okolí bodu a pouze tím, že bod a není součástí okolí.

3.3 Vlastní a nevlastní body

Vlastním bodem rozumíme jakékoliv konkrétní reálné číslo. Nevlastním bodem označujeme body plus nekonečno $(+\infty)$ a mínus nekonečno $(-\infty)$.

Množinu $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ budu značit symbolem $\mathbb{R}^*$.

3.4 Okolí nekonečna

Pro okolí nekonečna a prstencové okolí nekonečna je v [1] na str. 114 domluvená následující úmluva:

$$U(+\infty) = U^*(+\infty) = (K, +\infty), \text{kde } K < +\infty,$$
$$U(-\infty) = U^*(-\infty) = (-\infty, K), \text{kde } K > -\infty.$$

Dále jsme zvyklí na to, že při zmenšování $\varepsilon > 0$ se $U_\varepsilon(a)$(resp. $U^*_\varepsilon(a)$), pro $a \in \mathbb{R}$ „zmenšuje“, jeví se tedy vhodné zavést pro $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{\varepsilon}\},$$
$$U_\varepsilon(-\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x < \frac{-1}{\varepsilon}\}.$$

Formálně je $U^*_\varepsilon(+\infty) = U_\varepsilon(+\infty)$ a stejně tak i $U^*_\varepsilon(-\infty) = U_\varepsilon(-\infty)$. [2]

Po vysvětlení těchto pojmů můžeme přejít k teorii limity funkce. Rozlišujeme několik druhů limit. Postupně jednotlivé druhy rozeberu a vysvětlím na konkrétních příkladech.

4. Limita funkce

4.1 Typy limit

Rozlišujeme několik základních typů limit:

1. vlastní limita funkce ve vlastním bodě,
2. vlastní limita funkce v nevlastním bodě,
3. nevlastní limita funkce v nevlastním bodě,
4. nevlastní limita funkce ve vlastním bodě,
5. (jednostranná limita).

4.1.1 Vlastní limita funkce ve vlastním bodě

Definice 4.1. *Nechť funkce f je definována na redukovaném okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě a a píšeme* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, *jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_{(\varepsilon)}$*[1] *tak, že pro všechna x taková, že $0 < |x - a| < \delta_{(\varepsilon)}$ je $|f(x) - A| < \varepsilon$. [2]*

Což můžeme symbolicky zapsat:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0, \text{ tak, že } \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \text{ je } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Jinak řečeno funkce f má v bodě a limitu rovnu A právě tehdy, jestliže pro každý ε-ový pás na ose y kolem hodnoty A existuje (na ose x) takové δ-ové okolí bodu a, že funkční hodnota všech x z tohoto prstencového okolí leží v ε-ovém pásu.

Definici blíže vysvětlím na funkci:

Příklad.

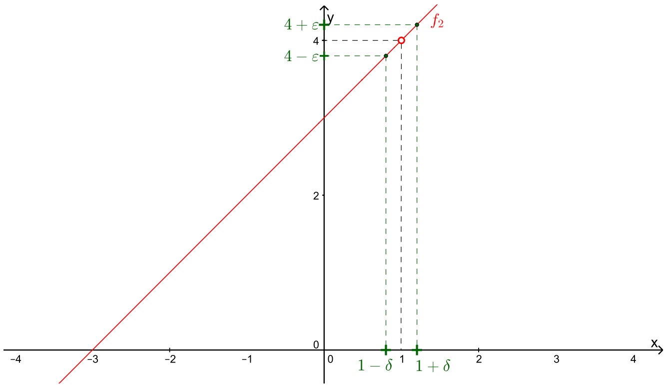
$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Budeme hledat limitu funkce v bodě $x = 1$.
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ platí:

$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)} = x + 3.$$

Můžeme si všimnout (graf - viz. Obr. 4.1), že pro všechny $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ platí: čím více se hodnoty x blíží k $x = 1$, tím více se funkční hodnota funkce f_2 přibližuje k hodnotě $y = 4$, i když dle definičního oboru tento bod nikdy neprotne.
Chceme-li z definice limity ověřit, zda je limita funkce f_2 v bodě $x = 1$ rovna 4, pak dle definice 4.1 by pro všechna $\varepsilon > 0$ mělo existovat $\delta > 0$ tak, že $\forall x$

[1] index ε u δ znamená, že volba δ závisí na volbě ε



Obrázek 4.1: $f_2(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

z intervalu $(1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$ není vzdálenost funkční hodnoty od 4 větší než ε. Poté můžeme říci, že limita funkce f_2 je rovna 4. Dosadíme do definice 4.1:

$$\begin{aligned}
|f_2(x) - L| &< \varepsilon \\
|\frac{x^2+2x-3}{x-1} - 4| &< \varepsilon \\
|\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)} - 4| &< \varepsilon \\
|x+3-4| &< \varepsilon \\
|x-1| &< \varepsilon \rightarrow \delta = \varepsilon \quad \rightarrow \quad x \,\epsilon\, U^*_{(1,\delta)}.
\end{aligned}$$

Pro všechna $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ (konkrétně jsme zjistili, že pro tuto funkci $\delta = \varepsilon$) tak, že $\forall x \,\epsilon\, (1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$je:

$$|\frac{x^2+2x-3}{x-1} - 4| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = 4.$$

4.1.2 Vlastní limita funkce v nevlastním bodě

Definice 4.2. *Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu $+\infty$ $(-\infty)$. Řekneme, že číslo $A \,\epsilon\, \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě $+\infty$ $(-\infty)$ a píšeme $\lim_{x\to+\infty} f = A$ $(\lim_{x\to-\infty} f = A)$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $K_{(\varepsilon)} \,\epsilon\, \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x > K_{(\varepsilon)}$ $(x < K_{(\varepsilon)})$ je $|f(x) - A| < \varepsilon$. [2]*

Příklad limity 4.2 ukážu na funkci f_3:

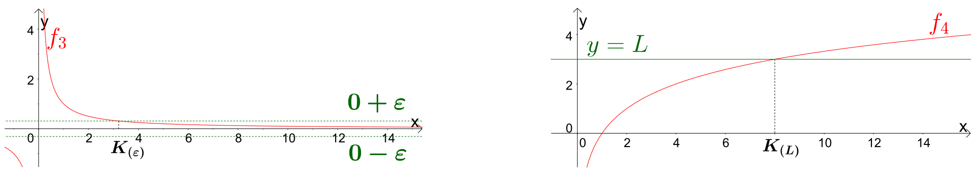
Příklad.

$$f_3(x) = \frac{1}{x}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Z definice 4.2 ukážu, že limita funkce f_3 (její graf - viz. Obr. 4.2), když x se blíží k $+\infty$, se rovná nule. Mějme $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ dle definice 4.2 je třeba najít $K_{(\varepsilon)}$ z definčního oboru takové, že je splněna podmínka $\forall x > K_{(\varepsilon)}$ je $|f(x) - A| < \varepsilon$. Zvolme tedy $K_{(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon}$, poté pro všechna $x > \frac{1}{\varepsilon}$ platí:

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \rightarrow \quad |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon \qquad \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Analogicky bychom ukázali, že: $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.



Obrázek 4.2: Funkce $f_3(x) = \frac{1}{x}$ a $f_4(x) = \log_2 x$

4.1.3 Nevlastní limita funkce v nevlastním bodě

Definice 4.3. *Nechť reálná funkce f je definována na nějakém okolí $+\infty$. Řekneme, že f má limitu $+\infty(-\infty)$ pro x blížící se k $+\infty$, jestliže ke každému $L \in \mathbb{R}$ existuje $K_{(L)} \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x > K_{(L)}$ je $f(x) > L$ $(f(x) < L)$. Píšeme pak $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty)$. Analogicky pro limitu v $-\infty$. [2]*

Příkladem nevlastní limity v nevlastním bodě je limita funkce f_4 (graf funkce f_4 - viz. Obr. 4.2) pro x jdoucí k $+\infty$.

Příklad.

$$f_4(x) = \log_2(x)$$

Ukážu, že limita funkce f_4 pro x jdoucí k $+\infty$ je rovna $+\infty$.
Nechť $L \in \mathbb{R}$, potřebujeme najít takové $K_{(L)}$, pro které bude platit: $\forall x > K_{(L)}$ je $f(x) > L$.

$$\begin{aligned} \log_2 x &> L \\ x &> 2^L \quad \to \quad K_{(L)} = 2^L \\ \Rightarrow \forall x > K_{(L)} = 2^L:\ \log_2 x &> \log_2 2^L = L. \\ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \log_2(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

4.1.4 Nevlastní limita funkce ve vlastním bodě

Tuto limitu je možné rozdělit na dvě možnosti - limitu funkce ve vlastním bodě rovnu $+\infty$ a limitu funkce ve vlastním bodě rovnu $-\infty$.

Definice 4.4. *Nechť reálná funkce f je definována v redukovaném okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v a limitu rovnou $+\infty$ $(-\infty)$, jestliže ke každému $L \in \mathbb{R}$ existuje $\delta_{(L)} > 0$, tak že pro všechna x splňující $0 < |x-a| < \delta_{(L)}$ je $f(x) > L$ $(f(x) < L)$. Píšeme pak $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(\lim_{x\to a} f(x) = -\infty)$. [2]*

Jako příklad této limity bychom mohli uvést limitu funkce $f_5(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

4.1.5 (Jednostranné limity)

Jelikož jednostranné limity vychází z výše zmíněných typů, rozhodla jsem se tento typ limit umístit do závorky. Jednostranné limity se liší od limit ve vlastním bodě pouze tím, že se zaměřují pouze na levé, nebo pravé redukované okolí bodu. Definice 4.1 a 4.4 lze tedy snadno upravit tak, aby se jednalo o definice jednostranné limity zprava nebo zleva. Dále je třeba si uvědomit, že limity 4.2 a 4.3 jsou apriori jednostranné. Z úmluvy pro okolí nekonečna v podkapitole 3.4 je zřejmé, že $+\infty$ má pouze levé okolí. Hledáme-li limitu funkce v $+\infty$, je jasné, že hledáme limitu pro x jdoucí k $+\infty$ zleva. Analogicky má $-\infty$ pouze pravé okolí, a tak hledáme-li limitu funkce pro x jdoucí k $-\infty$, jedná se o limitu zprava.

Nyní ukáži, jak můžeme definici 4.1 upravit tak, aby se jednalo o vlastní limitu ve vlastním bodě zprava.

Definice 4.5. *Nechť funkce f je definována na pravém redukovaném okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě a zprava a píšeme $\lim_{x\to a^+} f(x) = A$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_{(\varepsilon)}$ tak, že pro všechna x z intervalu $(a, a+\delta)$ je $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Stejným způsobem bychom mohli upravit i definici 4.4. Ukáži pouze úpravu pro limitu rovnu $+\infty$. (Úprava definice 4.4 pro limitu rovnu $-\infty$ by probíhala analogicky - nechám na laskavém čtenáři.)

Definice 4.6. *Nechť reálná funkce f je definována v pravém redukovaném okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v a limitu rovnou $+\infty$, jestliže ke každému $L \in \mathbb{R}$ existuje $\delta_{(L)} > 0$, tak že pro všechna $x \in (a, a+\delta)$ je $f(x) > L$. Píšeme pak $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.*

Úprava na definice limit zleva by probíhala úplně stejným způsobem, pouze bychom okolí bodu a neomezili na pravé redukované okolí, ale na levé redukované okolí. Limitu funkce f v bodě a zleva značíme: $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Předtím než ukážu konkrétní příklad jednostranných limit, chtěla bych ještě připomenout důležitou větu, kterou můžeme najít například v [4] na str. 50:

Věta 4.1. *Limita funkce f v bodě a existuje právě tehdy, když existují v bodě a limity zprava a zleva a jsou si rovny. Potom se limita funkce f v bodě a rovná společné hodnotě limit zprava a zleva. Což lze symbolicky zapsat:*

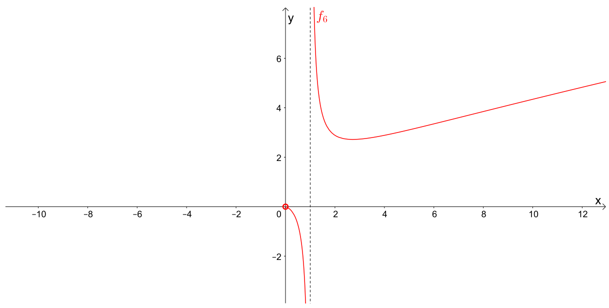
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Příklad jednostranných limit ukáži na funkci f_6 (Obr. 4.3), na které je možné demonstrovat vlastní a nevlastní jednostrannou limitu ve vlastním bodě i nevlastní limitu v nevlastním bodě.

Příklad.

$$f_6(x) = \frac{x}{\ln(x)},\ D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1, +\infty)$$

Již podle definičního oboru funkce f_6 si můžeme všimnout, že pokud bychom neznali graf této funkce a naším úkolem by bylo ho zjistit, bylo by nutné vypočítat limity funkce v krajních bodech definičního oboru: $x = 0$ a $x = +\infty$. Dále bychom nesměli zapomenout zjistit limitu funkce v bodě, ve kterém kvůli $\ln(x)$



Obrázek 4.3: $f_6(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

ve jmenovateli zlomku není funkce definovaná. Jedná se o bod $x = 1$. Při výpočtu limity funkce f_6 v bodě $x = 1$ zjistíme, že limita funkce v bodě $x = 1$ neexistuje (jak postupovat při výpočtu limit ukážu v následující kapitole). Po tomto zjištění bychom začali zkoumat, jak se daná funkce chová, blížíme-li se k bodu $x = 1$ zprava, a poté blížíme-li se k němu zleva. Ve všech zkoumaných bodech bychom hledali jednostranné limity. Po výpočtu jednostranných limit bychom došli k výsledkům:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln(x)} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty.$$

Pozorný čtenář si během této kapitoly zřejmě všiml, že všechny výše napsané definice limity funkce mají něco společného - liší se pouze v určitých detailech v závislosti na tom, zda mluvíme o vlastních, či nevlastních bodech. Tento malý detail však lehko odstraníme, nadefinujeme-li limitu funkce pomocí pojmu okolí bodu. Všechny tyto definice můžeme poté spojit a získáme jednoduchou jednotnou Weiesstrassovu definici (v [1] na str. 114):

Definice 4.7. *Nechť $U^*_{(a)}$ je redukované okolí bodu a, $U_{(L)}$ je okolí bodu L. Říkáme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí:*

$$(\forall U_{(L)})(\exists\, U^*_{(a)})(f(U^*_{(a)}) \subset U_{(L)}).$$

Píšeme $\lim_{x\to a} f(x) = L$*, nebo* $f(x) \to L$ *pro* $x \to a$*. Chceme-li pracovat s parametry velikosti okolí, lze definici pro* $a \in \mathbb{R}$*,* $A \in \mathbb{R}$ *modifikovat takto*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in U^*_{(a,\delta)})(f(x) \in U_{(L,\varepsilon)}).$$

Vrátíme se k definici 4.1 a její původní tvar:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ tak, že $\forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$,
přepíšeme pomocí jednotné Weierstrassovi definice, získáme:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$, tak, že $\forall x \in U^*_{(a,\delta)} \Rightarrow f(x) \in U_{(L,\varepsilon)}$, nebo-li
$\forall U_{(L,\varepsilon)}\, \exists\, U^*_{(a,\delta)} : f(U^*_{(a,\delta)}) \subset U_{(L,\varepsilon)}$.

Díky obecnému pojmu okolí bodu je možné tímto způsobem přepsat všechny výše uvedené definice.

4.2 Spojitá funkce

Na střední škole se někdy můžeme setkat s nepřesným, ale zato názorným popisem spojité funkce, který říká: „spojitá funkce je taková funkce, jejíž graf lze nakreslit jedním nepřerušovaným tahem“. Důvodem, proč není od začátku definována spojitá funkce korektně, je nezavedení pojmu limity funkce, pomocí kterého je spojitá funkce definována. Limita funkce bývá ve školách vyložena až o několik ročníků později, většinou před tématem derivace funkce, kde je její zavedení nezbytné.

4.2.1 Spojitost v bodě

Spojitá funkce je definována v [4] na str. 26 takto:

Definice 4.8. *Funkce f je spojitá v bodě a, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu $f(a)$ existuje takové okolí bodu a, že pro všechna x z tohoto okolí bodu a patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného okolí bodu $f(a)$.*

Neboli můžeme říct, že funkce f je spojitá právě tehdy, když
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon)$. [1]
Můžeme si všimnout, že definice spojistosti funkce v bodě je velmi podobná jako definice vlastní limity ve vlastním bodě. Aby byla funkce v daném bodě spojitá, je třeba, aby A (z definice 4.1) bylo rovno $f(a)$. Tedy aby limita funkce v daném bodě byla rovna jeho funkční hodnotě, neboli funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

4.2.2 Spojitost v intervalu

Definice 4.9. *Funkce je spojitá v otevřeném intervalu (a,b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.*
Funkce je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá v (a, b) a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.[2] *[4]*

4.3 Limita posloupnosti a limita funkce

Pojem limita funkce a limita posloupnosti spolu úzce souvisí, a tak se v krátkosti zmíním i o limitě posloupnosti. Dalo by se říct, že limita funkce je od limity posloupnosti ideově odvozená. Až si za malou chvíli prohlédneme definice limit posloupnosti, bude možné postřehnout určité podobnosti s některými definicemi limit funkce. Nejdříve bych ale chtěla zmínit, k čemu je dobré zavádět limitu posloupnosti a jaký je její význam.

[2]Funkce f je v bodě a spojitá zprava $\Leftrightarrow$ $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$. Analogicky je definována spojitost v bodě zleva. Funkce f je spojitá v bodě a zleva $\Leftrightarrow$ $f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x)$. [1]

Limity posloupností mají využití například při řešení úloh na výpočet obsahů některých útvarů - viz. výpočet obsahu kruhu Eudoxovou metodou. Vrátíme-li se zpět k Obr. 1.1, pak vidíme, že při exhaustivní metodě postupně vyplňujeme kruh n-úhelníky, jejichž obsah jsme schopni bez problému vypočítat pro každé n. Co by se ale stalo, kdybychom byli schopni n zvětšovat až do nekonečna? To by znamenalo, že hledáme limitu posloupnosti dané nějakým předpisem pro $n \to +\infty$. Stejným způsobem se tato metoda používá pro výpočet objemů různých těles. Další aplikací limity posloupnosti je například zavedení Riemannova integrálu jako limity integrálních součtů atd.

Předtím než zadefinuju limitu posloupnosti a ukáži, jak souvisí s limitou funkce, je třeba si připomenout definici posloupnosti:

Definice 4.10. *Zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme posloupností reálných čísel. [1]*

Z hlediska existence limity posloupnosti rozlišujeme tři druhy reálných posloupností:

- posloupnosti, které mají vlastní limitu,
- posloupnosti, které mají nevlastní limitu,
- posloupnosti, které limitu nemají (posloupnosti divergentní).

Definice vlastní limity posloupnosti je v [2] definována:

Definice 4.11. *Řekneme, že číslo $a\,(\epsilon\,\mathbb{R})$ je limitou posloupnosti $a_n, n\,\epsilon\,\mathbb{N}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0, \varepsilon\,\epsilon\,\mathbb{R}$ existuje $n_{0,(\varepsilon)}\,\epsilon\,\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_{0,(\varepsilon)}$ je*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Píšeme pak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Definice nevlastní limity posloupnosti je definována:

Definice 4.12. *Řekneme, že posloupnost reálných čísel a_n, $n\,\epsilon\,\mathbb{N}$ má nevlastní limitu $+\infty$ $(-\infty)$, jestliže pro každé $K\,\epsilon\,\mathbb{R}$ existuje $n_{0,(K)}\,\epsilon\,\mathbb{N}$ tak, že pro každé $n\,\epsilon\,\mathbb{N}, n > n_{0,(K)}$ platí*

$$a_n > K\ (a_n < K).$$

Píšeme pak $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty)$. *[2]*

Vrátíme-li se k definicím limity funkce, můžeme si všimnout podobnosti definic limity funkce a limity posloupnosti, které jsem zmínila už na začátku této podkapitoly. Podobnost můžeme objevit mezi definicí 4.11 s definicí vlastní limity funkce v nevlastním bodě (definice 4.2) a dále mezi definicí 4.12 s definicí nevlastní limity funkce v nevlastním bodě (definice 4.3).

Co propojuje limitu funkce a limitu posloupnosti? Tyto dva pojmy propojuje Heinova věta, kterou nejdříve zavedu, a poté vysvětlím její význam.

Věta 4.2. *i) Nechť funkce f má v bodě $a\,\epsilon\,\mathbb{R}^*$ limitu $A\,\epsilon\,\mathbb{R}$. Nechť x_n, $n\,\epsilon\,\mathbb{N}$ je posloupnost reálných čísel taková, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, přičemž $x_n \neq 0$ pro každé $n\,\epsilon\,\mathbb{R}$. Potom je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

ii) Nechť pro každou posloupnost x_n, $x_n \to a$, $x_n \neq a$ má posloupnost $f(x_n)$ limitu. Pak limity všech těchto posloupností jsou stejné a jejich společná hodnota je také limitou funkce f v bodě a. [2]

Díky této větě můžeme dokázat některé základní věty, které jsou dokázány pro limitu posloupnosti i pro limitu funkce. Stačí použít větu 4.2.i, poté dokážeme tvrzení pro limitu posloupnosti a opět použijeme větu 4.2, tentokrát část ii. Tímto způsobem je možné dokázat pro limitu funkce věty: o limitě součtu, součinu, či podílu funkcí; tvrzení, že každá funkce má v bodě a maximálně jednu limitu; větu „o dvou policajtech“ atd.

Naopak při řešení některých limit posloupností je výhodné převést limitu posloupnosti na limitu funkce. Poté je možné použít například l'Hospitalovo pravidlo, či Taylorův polynom, které mohou některé výpočty urychlit. Výsledná limita je díky Heineho větě i limitou původní limity posloupnosti.

5. Výpočet limity

V předchozí kapitole jsem definovala limitu funkce a přiblížila, co si pod ní můžeme představit graficky. Tato kapitola se bude věnovat algebraickému výpočtu limity funkce v daném bodě. Ukáži základní principy výpočtu bez toho, abych znala graf příslušné funkce.

Pro přehlednost rozdělím výpočet limity na dva základní typy: výpočet limity ve vlastním bodě a výpočet limity v nevlastním bodě. Po přečtení této kapitoly však uvidíme, že princip funguje velmi podobně.

5.1 Základní věty pro výpočty limit

Než přejdeme k vysvětlení výpočtu limity ve vlastním a nevlastním bodě, bylo by dobré nejprve zmínit dvě základní věty, které jsou pro výpočet limit zásadní. Jedná se o větu o aritmetice limit a větu o limitě složené funkce. Jako první uvedu větu o aritmetice limit (Tuto větu včetně jejího důkazu můžeme nalézt ve zdroji [2] na str. 61.).

Věta 5.1. *Nechť f a g jsou reálné funkce, které mají vlastní, nebo nevlastní limity v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Potom*

a. $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
kromě případu, kdy jedna z limit je $+\infty$ a druhá $-\infty$.

b. $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
kromě případu, kdy jedna z limit je 0 a druhá $\pm\infty$.

c. $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x)$
kromě případu, kdy $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, nebo $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ je rovna $\pm\infty$.

c'. Je-li $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ v $U^*(a)$, $\lim_{x\to a} f > 0(< 0)$, pak $\lim_{x\to a}(f/g) = +\infty(-\infty)$,

c". je-li $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) < 0$ v $U^*(a)$, $\lim_{x\to a} f > 0(< 0)$, pak $\lim_{x\to a}(f/g) = -\infty(+\infty)$,

d. je-li $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ a g v libovolném redukovaném okolí bodu a nabývá jak kladných, tak záporných hodnot, pak funkce f/g nemá v bodě a limitu.

Po aplikaci věty 5.1 se s výrazy na pravé straně, z nichž je alespoň jeden roven

$\pm\infty$ a jsou definované, pracuje takto:

$$\begin{aligned}
c + (+\infty) &= c - (-\infty) = +\infty \pm c = \infty, c \,\epsilon\, \mathbb{R},\\
c - (+\infty) &= c + (-\infty) = -\infty \pm c = -\infty, c \,\epsilon\, \mathbb{R},\\
+\infty + (+\infty) &= +\infty - (-\infty) = +\infty,\\
-\infty - (+\infty) &= -\infty + (-\infty) = -\infty,\\
c \cdot \pm\infty &= \pm\infty, \text{ pro } c > 0,\\
&= \mp\infty \text{ pro } c < 0.\\
\frac{c}{\pm\infty} &= 0\\
\frac{\pm\infty}{c} &= +\infty \text{ pro } c > 0\\
&= -\infty \text{ pro } c < 0.
\end{aligned}$$

U výpočtů limit se však můžeme velmi často setkat s výrazy, jejichž hodnotu nelze takto snadno určit. Tyto výrazy nazýváme neurčité. Jde o výrazy, se kterými jsme se setkali ve větě 5.1.*a-c*. Věta ovšem tyto případy vylučuje. To znamená, že narazíme-li na tento výraz, nemůžeme ji rovnou aplikovat.

Další důležitá věta, kterou je třeba zmínit před vysvětlením postupů výpočtu základních limit, je věta o limitě složené funkce. Její zavedení je pro výpočet limit některých složitějších funkcí, kterým se budu věnovat v druhé části této kapitoly, nezbytné (Větu včetně jejího důkazu můžeme nalézt například ve zdroji [2] na str. 68.).

Věta 5.2. *Nechť f je reálná funkce a $\lim_{x\to a} f(x) = A \,\epsilon\, \mathbb{R}^*$. Nechť g je reálná funkce taková, že $\lim_{y\to A} g(y) = B$. Jestliže existuje $U^*(a)$ tak, že $f(x) \neq A$ pro $x \,\epsilon\, U^*(a)$, pak funkce $g \circ f$ má v bodě a limitu a platí:*

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = B = \lim_{y\to \lim_{x\to a} f(x)} g(y).$$

5.2 Neurčité výrazy

5.2.1 Co je neurčitý výraz?

Jaký je rozdíl mezi určitým a neurčitým výrazem? Proč neumíme určit hodnotu neurčitého výrazu?
Mějme limitu:

Příklad.

$$\lim_{x\to 5} x^2 - 2.$$

Jedná se o limitu spojité funkce, u které chceme vypočítat limitu ve vlastním bodě. Stačí nám tedy do limity pouze daný bod dosadit. Výpočet by probíhal takto:

$$\lim_{x\to 5} x^2 - 2 = 25 - 2 = 23.$$

Po dosazení jsme získali výraz $25 - 2$, u kterého víme, že výsledek je jednoznačně roven 23. Ale co kdybychom měli například následující limitu:

Příklad.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$$

Tato funkce není spojitá, protože v bodě $x=5$ není definovaná. Pokud bychom do limity dosadili $x=5$, získali bychom výraz:

$$\frac{0}{0}.$$

Jaká je hodnota tohoto výrazu? Zkusme limitu vypočítat. Zatím se nebudu na způsob výpočtu zaměřovat; jak postupovat podrobněji rozeberu až v další části této kapitoly.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}x+5=10.$$

Zjistili jsme, že limita funkce je rovna 10. Už z toho můžeme dojít k názoru, že výraz $\frac{0}{0}$ může vést k různým výsledkům. Číslo 10 totiž není ničím speciální. Na následujícím příkladu ukáži, že výraz $\frac{0}{0}$ může mít opravdu více řešení. Zkusme výraz v čitateli $(x-5)(x+5)$, který jsme získali po rozložení výrazu x^2-25, nahradit výrazem $(x-5)x$. Budeme tedy zjišťovat limitu funkce:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)x}{x-5}=\lim_{x\to 5}x=5.$$

Poznamenejme, že výraz $\frac{x^2-5x}{x-5}$ je stále neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, který ovšem po výpočtu vede k úplně jinému výsledku. Je tedy zřejmé, že z původního tvaru nedokážeme hodnotu limity jednoznačně určit tak, jako u prvního příkladu. Původně stejný výraz $\frac{0}{0}$ vede k jinému výsledku. To je důvod, proč tyto výrazy nazýváme neurčité. Je třeba nejprve výraz v limitě nějakým způsobem upravit tak, abychom neurčitý výraz odstranili, a až poté můžeme určit limitu původní funkce.

Mezi neurčité výrazy řadíme:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.\quad (*)$$

O těchto výrazech se věta 5.1 nezmiňuje. Dosadíme-li x-ovou souřadnici bodu, ve kterém hledáme limitu příslušné funkce do funkčního předpisu, a získáme jeden z těchto neurčitých výrazů, musíme nejprve funkční předpis upravit tak, abychom příslušný „problematický“ neurčitý výraz odstranili. Funguje to velmi podobně i u výpočtů limit v nevlastním bodě (tj. $\pm\infty$), i když tam, jak vysvětlím později, ∞ do limity nikdy nedosazujeme. K odstranění neurčitých výrazů se využívají různé techniky podle typu dané limity. Může to být například rozšíření zlomku vhodným výrazem, krácení zlomku nebo vytknutí.

V následujících několika bodech se budu snažit vysvětlit a zároveň ukázat na typových příkladech, proč jsou i všechny zbylé výrazy $(*)$ neurčité. U každého příkladu uvedu vždy i postup řešení. Jeho řešení však nebudu detailně vysvětlovat, protože tomu se budu věnovat v následujících podkapitolách: výpočet limity ve vlastním (5.3.1) a výpočet limity v nevlastním bodě (5.3.2) popř. u kapitol Taylorův polynom (6) a l'Hospitolovo pravidlo (7).

5.2.2 Jednotlivé typy neurčitých výrazů

- $\frac{0}{0}$: Příklady na neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ jsem uváděla v předchozí podkapitole, kde jsem na něm vysvětlovala, proč jsou některé výrazy neurčité. Přejdu tedy rovnou k dalšímu neurčitému výrazu.

- 0^0: Pokud písmenem c označíme jakékoliv reálné číslo kromě nuly, víme, že platí:
  $0^c = 0$, ale zároveň
  $c^0 = 1$.
  Pokud bychom zvolili $c = 0$, nastal by následující problém. V prvním případě by měl být výraz 0^0 roven 1 a ve druhém 0, což není možné. Nemůžeme říct, že jeden z těchto výrazů má vyšší prioritu, nic takového není zavedeno. Nedávalo by to smysl a kromě tohoto případu to ani není potřeba.
  Jako příklad bychom mohli uvést limity:

  Příklad.

  $$\lim_{x\to\infty} \left(e^{-x}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-2x}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-2} = e^{-2}.$$
  $$\lim_{x\to\infty} \left(e^{-x^2}\right)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-5x^2}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-5x} = 0.$$

  Na těchto dvou příkladech si můžeme demonstrovat, proč je právě u tohoto neurčitého výrazu nutné limitu vhodným způsobem upravit tak, abychom neurčitý výraz odstranili. I když na začátku byly obě tyto limity typu 0^0, každá z nich vedla nakonec k jinému výsledku. Při řešení obou příkladů jsem použila větu 5.2.

- 1^∞: Příkladem limity, která by představovala tento typ neurčitého výrazu, by mohla být limita funkce:

  Příklad.

  $$\lim_{x\to+\infty} \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty} 2^1 = 2.$$
  $$\lim_{x\to 0^+} (x+1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

  Budeme-li do zlomku $\frac{1}{x}$ ve výrazu $\left(2^{\frac{1}{x}}\right)^x$ v první limitě dosazovat stále větší a větší čísla, zjistíme, že hodnota zlomku se bude stále více blížit k hodnotě nula. V závorce bychom získali výraz 2^0, který je roven jedné. Pokud x jde k nekonečnu, pak limita celého výrazu je rovna neurčitému výrazu 1^∞. Stejně jako u předchozích příkladů jsem při řešení použila větu 5.2.

  Při řešení druhé limity jsem použila znalost základní limity

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

  o které budu hovořit na str. 24 jako o limitě 5.2, dále větu 5.2 a větu 5.1.

  Ukázala jsem dva neurčité výrazy stejného typu, tentokrát typu 1^∞, které vedly k rozdílným výsledkům.

- ∞^0: Jako příklad bychom mohli uvést limity:

  Příklad.

$$\lim_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = 1.$$
$$\lim_{x\to\infty}(e^x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{\ln x}} = \infty.$$

  Stejně jako u všech ostatních neurčitých výrazů se ukázalo, že stejný neurčitý výraz na začátku vedl k rozdílným výsledkům. Při řešení byly opět použity věty 5.1 a 5.2.

- $\infty - \infty$:

  Příklad.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = +\infty.$$

  Dle věty 5.1 část c', kterou jsem zmínila výše, je limita funkce $\frac{1}{x^2}$ i funkce $\frac{1}{x^4}$ rovna nekonečno. Každá z nich se však k nekonečnu blíží jinou rychlostí. Pokud bychom začali dosazovat za x hodnoty blízké hodnotě nula, zjistili bychom, že funkce $\frac{1}{x^4}$ se blíží k nekonečnu rychleji než funkce $\frac{1}{x^2}$. Z toho důvodu nemůžeme říct, že výsledkem této limity bude nula, i když by se tak na první pohled mohlo zdát. Nemůžeme říct, že jedno nekonečno je větší než druhé, proto nemůžeme ani v tomto příkladě hned v prvním kroku určit výsledek této limity. Limitu je třeba nejdříve upravit a až následně vypočítat její hodnotu. Pokud zadání první limity jen nepatrně změníme, bude stále představovat neurčitý výraz typu $\infty - \infty$, ale povede k naprosto opačnému výsledku - viz druhý příklad.

  V obou příkladech je po vytknutí použita věta 5.1.

- $\frac{\infty}{\infty}$: Tento neurčitý výraz bychom si mohli vysvětlit například na limitě funkce, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

  Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2-5}{x^2-10} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(a-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a-\frac{5}{x^2}}{1-\frac{10}{x^2}} = a.$$

  V závisloti na volbě a je limita této funkce typu:
  Pro $a < 0 \to \frac{-\infty}{\infty}$
  Pro $a > 0 \to \frac{\infty}{\infty}$.

  U obou případů nastává stejný problém jako u předchozích výrazů. Funkce v čitateli i ve jmenovateli se blíží k nekonečnu, ale každá z nich se k němu blíží jinou rychlostí. Proto je nutné nejprve limitu funkce upravit. Tím odstraníme „problematický“ výraz, kvůli kterému v limitě vznikal neurčitý výraz, a až poté můžeme aplikovat větu 5.1.

- $0 \cdot \infty$: Tento poslední typ můžeme demonstrovat např. na limitách:

  Příklad.

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) \cdot \frac{1}{x} = 1.$$
$$\lim_{x \to 0^+} \sin(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} = +\infty.$$

  U prvního příkladu nenaznačuji postup řešení, protože se jedná o základní limitu 5.1, o které se zmíním později (lze ji dokázat například l'Hospitalovým pravidlem). Při řešení druhé limity využívám znalosti limity

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

  z prvního příkladu a následně aplikuji větu 5.1. Stejně jako v předchozích případech docházíme u stejného neurčitého výrazu k různým výsledkům.

5.3 Výpočty základních limit

5.3.1 Výpočty limit ve vlastním bodě

Při výpočtu limity funkce ve vlastním bodě mohou nastat dvě možnosti. První z nich jsou příklady limit, ve kterých budeme počítat limitu funkce v bodě, ve kterém je tato funkce definovaná a spojitá. V tom případě můžeme říct, že:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Stačí nám pouze dosadit bod, ve kterém hledáme limitu funkce do funkčního předpisu, čímž můžeme hodnotu limity velmi rychle získat. Jako příklad bych uvedla:

Příklad.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^2 - 5x + 7} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Dále se budu zabývat výpočtem limit funkcí, u kterých to tak snadné není. Jedná se o případy výpočtu limit funkcí v bodě, ve kterém funkce není definovaná, anebo není spojitá. Příkladem takové limity může být:

Příklad.

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

U této limity, jak jsem psala již výše u neurčitých výrazů, bychom po dosazení $x = 5$ získali výraz $\frac{0}{0}$.

Často je v takových příkladech třeba nejprve provést některé úpravy, odstranit neurčitý výraz, a až poté je možné použít větu 5.1.

Před tím než popíšu, jak u těchto příkladů postupovat, ukáži několik limit, jejichž zapamatování výpočty některých základních limit velmi urychlí. V [2] ve třetí kapitole je ukázáno, že platí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \to \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\text{ (viz příklad str. 26,)} \tag{5.1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \to \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\text{ (odvození lze nalézt v [2] na str. 87).} \tag{5.2}$$

To, že tyto limity platí, lze snadno ukázat například pomocí l'Hospitalova pravidla, kterému se budu věnovat v sedmé kapitole.

Příklady některých základních limit a doporučený postup jejich výpočtu

- $\frac{\text{polynom n-tého stupně}}{\text{polynom k-tého stupně}}, n, k \in \mathbb{N}$, kde po dosazení vznikne neurčitý výraz $\frac{0}{0}$.
  Před použitím věty 5.1 je nutné nejprve zlomek „problematickým“[1] výrazem zkrátit. Většinou se využívá rozklad polynomu na součin. Pokud není vidět rozklad na první pohled, je možné čitatel i jmenovatel problematickým výrazem vydělit.
  Příkladem limity tohoto typu by mohla být již výše zmíněná limita funkce:

  Příklad.

  $$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}.$$

  Můžeme si všimnout, že v čitateli zlomku máme polynom stupně dva, který lze jednoduše rozložit na součin pomocí vzorce:

  $$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B).$$

  V čitateli i ve jmenovateli tím získáme člen $(x-5)$, díky kterému v limitě vzniká neurčitý výraz. Zlomek tímto členem můžeme zkrátit a v limitě dostáváme novou funkci, která se v okolí daného bodu chová stejně jako funkce původní, ale v bodě $x = 5$ je spojitá.

  $$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{x+5}{1} = 10.$$

- Limity funkcí v podílovém tvaru obsahující odmocninu, ve kterých po dosazení získáváme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$.
  U tohoto typu příkladů se pro odstranění „problematického“ výrazu využívá rozšíření zlomku vhodným výrazem. Velmi často se rozšiřuje takovým výrazem, aby se následně mohly použít binomické vzorce. V našem případě jsem při výpočtu limity použila vzorec $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$, kdy jsem čitatel a jmenovatel rozšířila výrazem $(A+B)$

[1] výraz, který způsobuje v čitateli i jmenovateli limitní nulu

Příklad.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2})^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Po rozšíření jsme dostali výraz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x}\cdot\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}+1)}.$$

První část už umíme řešit - viz. předchozí typ, limitu výrazu $\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}+1)}$ zjistíme přímou aplikací věty 5.1.

- Limity funkcí pro $x \to 0$, ve kterých se vyskytují goniometrické funkce (hl. funkce $\sin(x)$).

  Zaměříme se jen na příklady, kdy nám po dosazení vznikne neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Ostatní příklady se dají řešit pomocí věty 5.1. U těchto typů využíváme již zmíněný vzorec:

  $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

  Příklad.

  $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{\sin(x)+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{\sin(x)}{x}-1\right)}{x\left(\frac{\sin(x)}{x}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{\frac{\sin(x)}{x}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

  V čitateli i ve jmenovateli jsme vytkli x, které jsme v druhém kroku mohli zkrátit, a použít větu $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$. Tímto jednoduchým postupem jsme odstranili původní neučitý výraz $\frac{0}{0}$ a získali výslednou limitu původní funkce pro $x \to 0$, která je dle výpočtu rovna 0.
  Dalším příkladem může být limita:

  Příklad.

  $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)} = \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

  Zlomek v limitě jsme rozšířili výrazem $\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$. V čitateli jsme tak získali výraz $(1-\cos^2(x))$, který (dle vzorce $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$) je roven $\sin^2(x)$. Na první část aplikujeme tvzení $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, limitu druhého výrazu $\frac{1}{1+\cos(x)}$ zjistíme přímo aplikací věty 5.1.

- Limity funkcí pro $x \to 0$ obsahující e^x nebo $\ln(1+x)$, u kterých nelze přímo aplikovat větu 5.1, ani větu 5.2.

  Před jejím použitím je třeba výraz nejprve vhodně upravit tak, abychom mohli použít limity 5.2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

  jejichž použitím neurčitý výraz odstraníme.

  Příklad.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{5x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{5x}-1}\cdot\frac{x}{x}\cdot\frac{5x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{5x\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{5\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}\right)}=$$
$$=\frac{1}{5}.$$

  Jelikož jde o výraz $\frac{0}{0}$ a chceme použít základní limitu: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, celý výraz rozšíříme výrazy $\frac{x}{x}$ a $\frac{5x}{5x}$. Po rozšíření použijeme limitu 5.2, kdy $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ a $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}=1$. Výsledná limita je poté rovna $\frac{1}{5}$.

- Limity funkcí typu $f(x)^{g(x)}$.[2]
  Při řešení limit tohoto typu se převede limita původní funkce do tvaru:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)},$$

  kde využíváme znalosti vzorce (můžeme nalézt v [12] na str. 102):

$$a^x=e^{x\ln(a)}.$$

  Poté se aplikuje věta 5.2 a následně věta 5.1. Příkladem takové limity je například limita funkce:

  Příklad.

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)}=*$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+1}{e^x+x}=2$$
$$*=e^2.$$

  Po převedení funkce do příslušného tvaru vypočítáme stranou limitu exponentu. V tomto příkladě jsem pro její vyřešení použila l'Hospitalovo pravidlo, kterému se budu důkladně věnovat v 7. kapitole, proto zde detailně postup výpočtu nerozebírám.[3] Pro vyřešení původní limity je důležitý hlavně výsledek limity exponentu, který je roven 2. Limitu původní funkce získáme už pouhým dosazením 2 do funkce e^x, tedy aplikací věty 5.2, výsledek počáteční limity je roven e^2.

[2] Využívá se stejným způsobem i u limit tohoto typu v nevlastním bodě.
[3] Limita by šla vyřešit i pomocí základní limity 5.2 a věty 5.2.

5.3.2 Výpočty limit v nevlastním bodě

Plus nekonečno je množství větší než jakékoliv reálné číslo (analogicky mínus nekonečno je menší než jakékoliv reálné číslo). Vhodným nástrojem jak zjistit, k jaké hodnotě se funkce bude blížit v okolí nekonečna, je právě limita funkce. Jelikož nekonečno není reálné číslo, nemůžeme ∞ do limity funkce přímo dosadit. V limitách pro $x \to \infty$ získáváme velmi často neurčité výrazy, které je třeba k získání limity nejprve upravit.

Představíme-li si grafy některých funkcí, je jasné, že existují i funkce, které limitu v $\pm\infty$ nemají. Jako příklad bych mohla uvést funkci $\sin(x)$, nebo $\cos(x)$.

Dále jsou limity funkce, jejichž výsledek je vidět na první pohled, například:

$$\lim_{x \to +\infty} 10x = +\infty.$$

Je zřejmé, že:

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

Jestliže je limita funkce $f(x) = x$ rovna $+\infty$, pak přímo z definice 4.3.a plyne (zvolíme-li pro L stejné $K_{(L)}$ jako u funkce $f(x) = x$), že i limita funkce $10f(x)$ musí být rovna $+\infty$. Můžeme si dokonce všimnout, že funkce $10f(x)$ se k nekonečnu blíží 10-krát rychleji než funkce $f(x) = x$.

Funkční předpis mnoha funkcí bývá často mnohem složitější. Výpočet jejich limit někdy vychází z následujících základních limit.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0,\ k > 0,\ c \in \mathbb{R}\ [2] \tag{5.3}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0,\ a > 1,\ k \in R^+\ [2] \tag{5.4}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{a^x} = 0,\ a > 1,\ k \in R^+\ [2]. \tag{5.5}$$

Jelikož víme, že platí limity 5.3 - 5.5, můžeme zjednodušeně říct, že logaritmus se blíží k nekonečnu pomaleji než polynom a polynom se blíží k nekonečnu pomaleji než exponenciální funkce. Schématicky bychom rychlost jednotlivých funkcí pro x jdoucí k ∞ mohli zapsat:

$$\log_a x < x^k < a^x.$$

Stejně jako u výpočtů limity funkce ve vlastním bodě jsou i zde limity, které je dobré si pamatovat. Samozřejmě je možné si je vždy odvodit [2], ale jejich znalost může výpočet mnoha limit urychlit a často i zjednodušit:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}.$$

Na následujících několika příkladech bych chtěla ukázat a vysvětlit základní postupy řešení, které se používají při výpočtu limit funkcí pro x jdoucí k $\pm\infty$.

Při výpočtu limity lomené funkce začneme tím, že ve jmenovateli vyhledáme takzvaný převládající člen. Je to člen, který se k ∞ blíží nejvyšší rychlostí. Může se jednat například o exponenciální funkci nebo člen polynomu. Tímto členem vydělíme čitatel i jmenovatel dané funkce. Tím nám v čitateli i ve jmenovateli vzniknou členy, jejichž limita bude rovna nule (vychází z tvrzení 5.3 - 5.5). Tímto postupem odstraníme neurčitý výraz a ze zbývajících členů určíme limitu dané funkce.

Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-x^2+10}{-2x^3+x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(4-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^3})}{x^3(-2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3})}=\frac{4}{-2}=-2.$$

Pokud bychom hned na začátku tohoto příkladu začali dosazovat za x stále větší reálná čísla, zjistili bychom, že limita čitatele i jmenovatele pro $x\to+\infty$ je rovna nekonečnu. Dostali bychom neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$. Je tedy nutné nejprve upravit limitu tak, abychom odstranili neurčitý výraz. K tomu použijeme postup popsaný v předchozím odstavci.

Neznámá v nejvyšší mocnině ve jmenovateli[4] je x^3. V čitateli a jmenovateli vytkneme x^3 a následně jím čitatel i jmenovatel vydělíme. Ve jmenovateli se limita všech členů, až na 4, rovná dle limity 5.3 nule. Stejným způsobem danou limitu použijeme i ve jmenovateli, kde nám zůstane pouze člen -2. Limita ostatních členů se, stejně jako v čitateli rovná nule. Díky této úpravě jsme odstranili neurčitý výraz a výsledná limita je rovna -2.

Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{10+x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{10}{x}+1\right)}{x\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{10}{x}+1}{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{10}{x}+1\right)x^{\frac{2}{3}}=+\infty.$$

Při výpočtu postupujeme úplně stejně jako u předchozího příkladu. Najdeme člen polynomu, ve kterém je x v nejvyšší mocnině. V našem případě je to lineární člen x, vytkneme tedy x v čitateli i ve jmenovateli a následně jím čítatel i jmenovatel vydělíme. V čitateli vznikne člen $\frac{10}{x}$, jehož limita je rovna 0. Limita členu $x^{\frac{2}{3}}$ je rovna $+\infty$. Výsledná limita je tedy rovna $+\infty$.

Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x+4}+15}{2^{x-2}-10}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x2^4+15}{2^x\cdot\frac{1}{2^2}-10}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\left(2^4+\frac{15}{2^x}\right)}{2^x\left(\frac{1}{4}-\frac{10}{2^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^4+\frac{15}{2^x}}{\frac{1}{4}-\frac{10}{2^x}}=$$
$$=\frac{2^4}{\frac{1}{4}}=64.$$

Tento příklad se počítá analogicky jako předchozí dva. Jediný rozdíl je v tom, že nyní je převládajícím členem exponenciální funkce, a ne člen polynomu.

Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x^2+2x+1)}-\sqrt[3]{(x^2-2x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{3}}\left[\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]$$

[4] Je vhodné podotknout, že odstranění neurčitého výrazu není vázáno k tomu, jestli vytkneme převládající člen v čitateli, nebo ve jmenovateli. Po zkrácení aplikujeme větu 5.1.

Pokud bychom hned na začátku začali za x dosazovat stále větší a větší čísla blížící se k $+\infty$, zjistili bychom, že získáváme neurčitý výraz $\infty - \infty$. Vytknutím převládajícího členu $x^{\frac{2}{3}}$ tak, jak jsme postupovali v předchozích příkladech, bychom získali limitu v uvedeném tvaru. Jelikož by byla limita výrazu v hranaté závorce rovna 0, přešli bychom pouze od neurčitého výrazu $\infty - \infty$ k neurčitému výrazu $0 \cdot \infty$, což by náš problém vůbec nevyřešilo. Proto výraz v limitě, podobně jako u výpočtu limit ve vlastním bodě, rozšíříme vhodným výrazem. Tam jsem pro úpravu využila binomického vzorce $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Tato limita obsahuje ne druhé, ale třetí odmocniny, a tak pro úpravu použiji vzorec $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$, kdy výraz v limitě $(A - B)$ rozšířím výrazem $A^2 + AB + B^2$. Po této úpravě bude už možné pokračovat stejným způsobem jako u předchozích příkladů, čímž odstraníme neurčitý výraz a dopočítáme limitu.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x\sqrt[3]{x}\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}\right]} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{x}\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}\right]} = \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

6. Taylorův polynom

V této kapitole vysvětlím, co je Taylorův polynom, a jak ho můžeme použít při výpočtu limity funkce.

6.1 Definice a vysvětlení Taylorova polynomu

V [1] na str. 196 je Taylorův polynom definován jako:

Definice 6.1. *Nechť $n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a f je funkce, definovaná v okolí bodu x_0. Předpokládejme, že pro funkci f platí $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Položme:*

$$T_{f,x_0,n}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Tento polynom se nazývá Taylorův polynom (stupně nejvýše n-tého) funkce f v bodě x_0. Pro $x_0 = 0$ se tento polynom nazývá též Maclaurinův polynom.

Hlavní důvod, proč je Taylorův polynom tak užitečný nástroj, je ten, že pomocí něho můžeme aproximovat funkce (mající v daném bodě vlastní derivaci až do řádu n) v okolí nějakého bodu právě polynomem. Polynomy se dobře derivují a integrují, a tak je tento přepis výhodný u mnoha výpočtů. O této aproximaci hovoří Peanova věta. Před tím než napíšu její znění, je pro její pochopení nutné zavést následující značení.

Definice 6.2. *Symbolem $o(x^n)$ budeme označovat funkci $g(x)$, kde $x = a \in \mathbb{R}^*$, pro kterou platí:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0.$$

Toto značení pro nás navíc bude velmi výhodné při výpočtu limit právě pomocí Taylorova polynomu. Abychom při výpočtech mohli tento symbol bez problému používat, je vhodné uvést pravidla, která ukazují, jak s ním můžeme pracovat. Všechny vycházejí z definice $o(x^n)$ a věty 5.1:

$$o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$$
$$o(x^n) \cdot x^k = o\left(x^{k+n}\right)$$
$$o(x^n) \cdot o\left(x^k\right) = o\left(x^{k+n}\right)$$
$$o(x^n) \pm o\left(x^k\right) = o(x^m), \text{ kde } m = min\{n,k\}.$$

Věta 6.1. *(Peanova) Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivace do řádu n včetně, kde n je přirozené. Potom existuje právě jeden polynom $T_{f,x_0,n}(x)$ stupně nejvýše n tak, že platí*

$$f(x) - T_{f,x_0,n}(x) = o((x - x_0)^n).$$

Tento polynom je dán vzorcem

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \text{ [2]}$$

Díky této větě již víme, že na okolí bodu x_0 můžeme za daných podmínek aproximovat funkci polynomem. Jak přesnou aproximaci získáme? Kolik máme vzít členů Taylorova polynomu, aby aproximace pro nás byla dostatečně přesná? Na tyto otázky nám odpovídá zbytek Taylorova polynomu, který je v [1] definován:

$$R_n(x) := f(x) - T_{f,x_0,n}(x).$$

Zbytek Taylorova polynomu tedy získáme odečtením Taylorova polynomu od zadané funkce. Jinak řečeno zbytek Taylorova polynomu nám udává rozdíl mezi funkční hodnotou f a její aproximací pomocí Taylorova polynomu. V literatuře můžeme Taylorův zbytek nejčastěji najít ve dvou tvarech jako Lagrangeův a Cauchyův. V praxi se častěji používá Lagrangeův tvar zbytku, který je definován:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde ξ leží mezi x a x_0. Zbytek Taylorova polynomu je užitečný nástroj, díky kterému můžeme vypočítat počet členů Taylorova polynomu, který je nutný pro získání funkce na okolí bodu x_0 v požadované přesnosti - např. kolik čenů Taylorova polynomu musíme vzít, abychom získali funkci $\sin\left(\frac{\pi}{180}\right)$ s přesností 10^{-7}.

Nyní předvedu jak zkonstruovat Taylorův polynom sedmého stupně pro funkci $\sin(x)$ v bodě $x_0 = 0$. Při jeho sestavování budeme postupovat přesně podle definice 6.1. Z obecného tvaru Taylorova polynomu vidíme, že budeme potřebovat vypočítat funkční hodnotu v bodě x_0, dále pak první, druhou až sedmou derivaci.

Příklad.

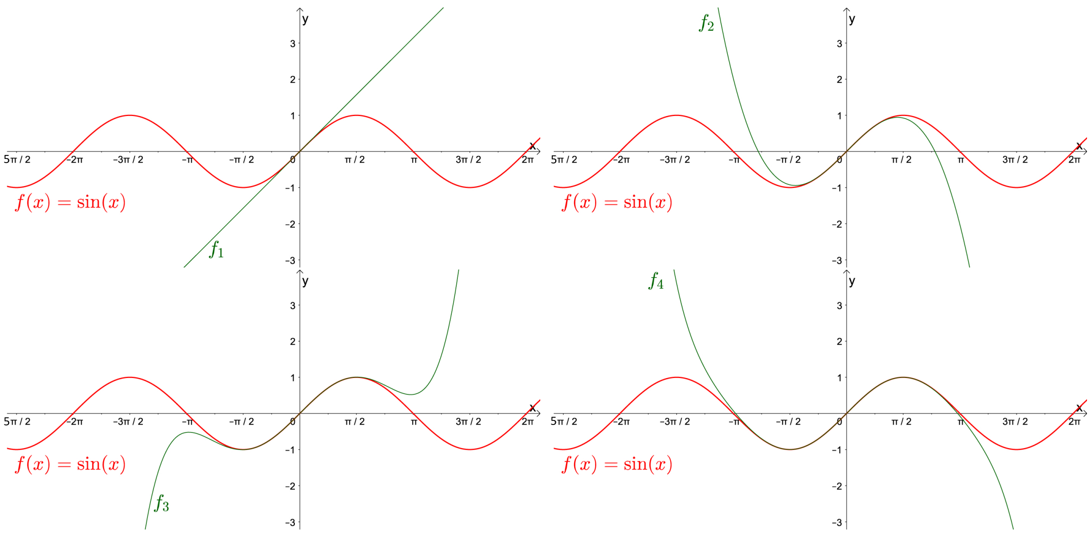
$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 & &\rightarrow & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos(x) & &\rightarrow & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin(x) & &\rightarrow & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos(x) & &\rightarrow & f'''(0) &= -1 \\
f^{(iv)}(x) &= \sin(x) & &\rightarrow & f^{(iv)}(0) &= 0 \\
f^{(v)}(x) &= \cos(x) & &\rightarrow & f^{(v)}(0) &= 1 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Všimněme si, že páta derivace je stejná jako první. Nemusíme už tedy dále derivovat. Vidíme, že pořadí derivací se bude periodicky opakovat. Zjistili jsme vše, co je nutné pro sestrojení Taylorova polynomu sedmého stupně funkce $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}
T_{\sin(x),\,0,\,7}(x) &= 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-1}{3!}(x-0)^3 + \\
&+ \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 + \frac{0}{6!}(x-0)^6 + \frac{-1}{7!}(x-0)^7 = \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}
\end{aligned}$$

Na Obr. 6.1 je znázorněno pět funkcí, na každém z nich je graf původní funkce $f : y = \sin(x)$ a dále postupně grafy funkcí Taylorova polynomu prvního, třetího, pátého a sedmého stupně, které mají tvar:

- $f_1(x) = x$
- $f_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$
- $f_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$,
- $f_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$.



Obrázek 6.1: Aproximace funkce $\sin(x)$ pomocí Taylorova polynomu

Z obrázku 6.1 je vidět, že s rostoucím počtem členů Taylorova polynomu je aproximace funkce $\sin(x)$ přesnější na stále větším okolí bodu $x = 0$.

Následující podkapitola již bude věnována aplikaci Taylorova polynomu při výpočtu limit.

6.2 Využití Taylorova polynomu v limitách

Taylorův polynom má u výpočtů limit velké využití. U mnoha funkcí by byl výpočet limity podle pravidel popsaných v předcházející kapitole velmi složitý a zdlouhavý. Díky Taylorovu polynomu si můžeme výpočet některých těchto funkcí velmi zjednodušit. Existují dokonce i funkce, které bychom bez použití Taylorova polynomu či l'Hospitalova pravidla neuměli spočítat vůbec.

Předtím než začnu demonstrovat použití Taylorova polynomu na konkrétních příkladech limity funkce, je dobré si ujasnit jedno základní pravidlo. A to, že je potřeba rozvíjet funkci v bodě, ve kterém počítáme limitu. Jde-li x k x_0, pro pevné n, potřebujeme, aby se zbytek $o(x - x_0)^n$ blížil k 0 v limitě $\lim_{x \to a}$. Díky Peanově větě to nastane tehdy, když $x_0 = a$. V jiných bodech to obecně platit nemusí. Pokud by byl bod x_0 od bodu, v němž hledáme limitu, více vzdálen, pak by se Taylorův polynom v tomto bodě už choval pravděpodobně diametrálně odlišně než funkce původní.

Dále by čtenáři mohlo připadat zvláštní, proč se téměř všechny níže uvedené příklady limit týkají limit funkcí pro $x \to 0$. Tyto limity jsem vybrala z důvodu, že u většiny funkcí má Taylorův rozvoj pro $x_0 = 0$ nejjednodušší tvar, a proto se nejčastěji využívá u výpočtu limit právě tohoto typu. To však neznamená, že nelze použít i u výpočtu jiných limit, ale ne vždy se poté jedná o ten nejefektivnější způsob výpočtu. Příklad výpočtu limity pro $x \to a, a \neq 0$ ukáži v posledním části této kapitoly.

Před každým výpočtem je nutné zvážit, zda pro danou funkci známe Taylorův polynom v daném bodě, případně jak obtížné by bylo ho pro danou funkci vypočítat. Polynomy některých základních funkcí v bodě $x_0 = 0$, například již výše uvedeného $\sin(x)$, nebo $\cos(x)$ a e^x, jsou velmi jednoduché. Jejich znalost výpočty limit velmi urychlí, a tak je dobré si je zapamatovat. Tvary Taylorova polynomu aproximujícího funkce e^x a $\cos(x)$ se středem v bodě $x_0 = 0$ nyní pouze vypíšu, jejich odvození by probíhalo stejným způsobem z definice 6.1 jako u výše rozepsaného $\sin(x)$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

6.2.1 Aplikace Taylorova polynomu při výpočtu limit

Pokud máme za úkol vypočítat limitu složitější funkce složené z elementárních funkcí, které jsou v součtu, rozdílu, součinu, nebo podílu, můžeme aplikovat Taylorův polynom dvěma způsoby. První způsob aproximuje celou funkci Taylorovým polynomem. Druhý způsob, který budu využívat v následujících příkladech, dosadí Taylorův polynom za jednotlivé elementární funkce. První způsob se využívá méně, protože například při derivaci vícenásobného součinu je výpočet vyšších derivací časově náročnější. Časová náročnost typicky stoupá s vzrůstajícím n. Proto se v praxi častěji používá druhý způsob. Jeho asi jedinou nevýhodou je, že se někdy obtížně odhaduje stupeň, do kterého je nutné Taylorův polynom rozvinout.

Pokud bychom se rozhodli použít první způsob výpočtu, je zřejmé, že Taylorův polynom funkce v limitě stačí rozvinout do prvního nenulového členu a určit limitu. Stejný princip funguje i při výpočtu druhým způsobem. Při jeho použití si však musíme dát pozor na to, aby se nám náš první nenulový člen neodečetl s členy Taylorových poynomů jiných funkcí. Máme-li tedy funkce v součtu nebo rozdílu, musíme vždy zkontrolovat, zda už právě vypočítaný nenulový člen stačí (zda se opravdu jedná o první nenulový). V tu chvíli sestrojování Taylorova polynomu ukončíme, Taylorův polynom funkce dosadíme do limity a určíme výsledek. Jsou-li funkce pouze v součinu je situace o něco jednodušší. V tomto případě nám stačí všechny funkce rozvinout do prvního nenulového členu, zapsat Taylorovy polynomy a vypočítat limitu. Nejobtížnější variantou se může zdát limita výrazu v podílovém tvaru, které bych se nyní chtěla věnovat detailněji. Jak přijít na to, do kterého stupně je nutné Taylorův polynom rozvinout, ukáži na následujícím teoretickém příkladě, a poté u jednotlivých příkladů ještě přiblížím jejich konkrétní postup výpočtu.

Mějme limitu:

Příklad.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots},\text{ kde } a_0,a_1,\dots\in\mathbb{R},$$
$$b_0,b_1,\dots\in\mathbb{R}.$$

Nechť n_1 je takové, že:
$\forall\, n<n_1$ je $a_n=0$ a $a_{n_1}\neq 0$.
Nechť n_2 je takové, že:
$\forall\, n<n_2$ je $b_n=0$ a $b_{n_2}\neq 0$.
Poté získáváme limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_{n_1}x^{n_1}+o(x^{n_1})}{b_{n_2}x^{n_2}+o(x^{n_2})}.$$

Podívejme se, jak tedy zjistit do jakého stupně je nutné obě funkce rozvinout. Ve skutečnosti nemusíme rozvíjet funkci $f(x)$ do stupně n_1 a funkci $g(x)$ do n_2, ale stačí nám vzít $n=min\{n_1,n_2\}$. Poté výraz v limitě zkrátíme výrazem x^n a dále už jen aplikujeme větu 5.1.

A jak to bude s výsledkem limity, pokud je původní limita funkce ve tvaru $\frac{0}{0}$? Jestliže je $n_1>n_2$, bude výsledná limita rovna 0. Bude-li $n_1<n_2$, pak bude výsledná limita rovna $+\infty$ nebo $-\infty$ (aplikací 5.1.c', nebo 5.1.c"). Jestliže $n_1=n_2$, pak je výsledná limita rovna $\frac{a_{n_1}}{b_{n_2}}$.

V následujícím příkladu si ukážeme aplikaci Taylorova polynomu na konkrétních příkladech limity. Dalším příkladům se budu věnovat v podkapitole 6.2.3.

Příklad.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}$$

Připomeňme si Taylorův rozvoj funkce $\sin(x)$:

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}}{x^3}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{3!}}{1}+\frac{o(x^3)}{x^3}=\frac{-1}{3!}=\frac{1}{6}.$$

Důvod, proč můžeme všechny členy Taylorova polynomu za členem $\frac{x^3}{3!}$ zapsat symbolem $o\left(x^3\right)$, vychází z definice $o\left(x^n\right)$ a věty 6.1.

Proč jsem rozvinula Taylorův polynom funkce $\sin(x)$ pouze do třetího řádu? Ve jmenovateli je člen x^3. Pro získání limity bude tedy třeba rozvinout Taylorův polynom v čitateli maximálně do 3. řádu. Je však možné, že by mohlo stačit rozvinout funkci $\sin(x)$ do nižšího stupně. Pokud by byl první nenulový člen Taylorova polynomu čitatele člen lineární, nebo kvadratický, stačilo by ho rozvinout do prvního nenulového členu, vytknout v čitateli i ve jmenovateli x, nebo případně x^2 a určit limitu. Představíme-li si Taylorův rozvoj funkce $\sin(x)$ v bodě $x_0=0$, zjistíme, že jeho první člen je lineární člen x. Ten se však v čitateli odečte. Druhý nenulový člen v bodě $x_0=0$ je až člen $\frac{x^3}{3!}$. Bude tedy třeba rozvinout funkci $\sin(x)$ až do 3. řádu. Následně už stačí pouze vytknout x^3 a výraz jím zkrátit. Limita výrazu $\frac{o(x^3)}{x^3}$ je z definice 6.2 rovna nule. Výsledná limita je rovna $\frac{1}{6}$.

6.2.2 Kdy je nutné používat při výpočtu limit Taylorův polynom?

Příklad $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x}$ vypočítaný pomocí Taylorova polynomu představuje typ limit, které nelze řešit pomocí postupů popsaných v 5. kapitole. Bez pomoci Taylorova polynomu bychom tyto limity nebyli schopni vypočítat. Pokud bychom se pokusili řešit tuto limitu pomocí klasických postupů, zjistili bychom, že nejsme schopni neurčitý výraz odstranit. Tento postup, který nevede k výsledku, by probíhal takto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x.(\frac{\sin(x)}{x}-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{\sin(x)}{x}-1)}{x^2}=\frac{(1-1)}{0}=\frac{0}{0}.$$

I po využití znalosti limity $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$, vytknutí x a jeho následném zkrácení, se nám neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ nepodařilo odstranit. Je tedy nutné použít výše popsaný postup řešení pomocí Taylorova polynomu. Proč nám klasický postup nefunguje? Jak je možné, že se nám nepodařilo pomocí základních pravidel daný neurčitý výraz odstranit přesto, že u jiných příkladů tento postup bez problémů fungoval? Jak poznáme, které příklady je výhodné řešit klasicky, a u kterých je nutné použít Taylorův polynom? Odpověď na tyto otázky budeme hledat ve výpočtu základních limit (které jsme používali v minulé kapitole) pomocí Taylorova polynomu.

Začneme řešením známé limity $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ z 5. kapitoly, kterou jsem se snažila použít při řešení předchozího příkladu klasickým způsobem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x}=1.$$

Ano, k výpočtu této limity nám stačí rozvinout Taylorův polynom funkce $\sin(x)$ pouze do prvního stupně. Limita součtu zbývajících členů bude dle věty 6.1 rovna nule. O výsledné hodnotě limity rozhode první člen Taylorova polynomu funkce $\sin(x)$. Problém ve výpočtu limit přichází ve chvíli, kdy se nám tento člen Taylorova rozvoje funkce $\sin(x)$ v limitě funkce odečte. Poté nelze využít znalosti limity $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$, protože ta nám neříká, jak budou vypadat další členy aproximace pomocí Taylorova polynomu. O výsledku limity bude poté rozhodovat následující člen Taylorova polynomu, o kterém základní limita $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ nic neříká. Ta žádné další členy neuvažuje, a proto ji v těchto případech nelze použít.

Stejným způsobem to funguje i u ostatních základních limit, například:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+o(x)-1}{x}=1.$$

Při výpočtu Taylorovým polynomem stačilo rozvinout e^x do 1. řádu. Stejně jako v limitě $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ je limita součtu ostatních členů dle věty 6.1 rovna nule. Pokud ale v nějakém příkladu limity dojde k tomu, že se lineární člen x, který určoval hodnotu limity, odečte, pak nám použití základní limity nepomůže a bude nutné použít pro výpočet Taylorův polynom. Ten bude nutné rozvinout do vyššího řádu, protože o výsledné limitě bude rozhodovat první nenulový člen polynomu.

Problém vznikne u všech příkladů, kde se odečte člen Taylorova polynomu, který rozhoduje o výsledku základní limity, kterou bychom chtěli použít. Stejným způsobem, jako u výše uvedených limit $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ a $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ to platí i pro limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Další příklad limity tohoto typu ukážu v následujícím příkladu, ve kterém kvůli odečtení určujícího lineárního členu Taylorova polynomu v čitateli nelze limitu vyřešit klasickými postupy.

Název této kapitoly je částečně zavádějící. Ve skutečnosti můžeme při řešení těchto příkladů použít také l'Hospitalovo pravidlo. Jelikož se mu ale budu věnovat až v 7. kapitole, přišlo mi nevhodné ho zmiňovat hned na začátku. To, že můžeme použít i l'Hospitalovo pravidlo, vyplývá z podobnosti obou postupů, které se budu věnovat v 8. kapitole.

6.2.3 Další příklady limit vypočítaných pomocí Taylorova polynomu

Příklad.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}}{x^2}+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Příklad jsme začali řešit rozvinutím funkce e^x pomocí Taylorova polynomu. Podobně jako u předchozích příkladů jsme podle stupně polynomu ve jmenovateli zjistili, že bude třeba rozvinout e^x nejvýše do druhého řádu. Absolutní a lineární člen Taylorova polynomu funkce e^x se v čitateli odečtou. První nenulový člen bude tedy člen kvadratický. Součet zbylých členů, jejichž limita jde dle věty 6.1 do nuly, jsme označili symbolem $o\left(x^2\right)$. Funkci v limitě jsme si rozdělili na dva zlomky. U prvního zlomku jsme mohli čitatel i jmenovatel vydělit x^2. Limita druhého členu byla rovna nule.

Příklad.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sin(x)-x(x+1)}{x^3}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)][x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)]-x^2-x}{x^3}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+x^2+\frac{x^3}{2!}+o\left(x^3\right)-x^2-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{2!}+o\left(x^3\right)}{x^3}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{6}+o\left(x^3\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{6}}{x^3}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Pomocí Taylorova polynomu jsme aproximovali e^x a $\sin(x)$. Díky členu x^3 ve jmenovateli víme, že bude třeba rozvinout obě funkce nejvýše do 3. řádu. Upravíme-li čitatel, zjistíme, že lineární a kvadratický člen se v něm odečte, a tak bylo skutečně třeba funkce rozvinout až do 3. řádu. V případě, že by se lineární a kvadratický člen neodečetl, pak by bylo možné rozvíjet funkce do nižších řádů. Podobně jako u předchozích příkladů jsme si označili symbolem $o\left(x^3\right)$ součet všech členů Taylorova polynomu, pro které platí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}=0.$$

Roznásobili jsme členy v hranatých závorkách. Všechny členy, pro které by platila limita $\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}=0$, jsme zahrnuli do $o\left(x^3\right)$. Dále už postup probíhal stejně jako u předchozích příkladů.

6.2.4 Získání Taylorova polynomu některých funkcí netradičním způsobem

V jistých příkladech lze Taylorův polynom některých funkcí získat i jinak než z definice 6.1. Tato cesta se při znalosti integrování může jevit jednodušeji, a proto bych ji zde chtěla ukázat. Příkladem takových funkcí může být například $\ln(1+x)$.

Příklad.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots$$

Rozvoj některých funkcí lze odvodit integrací součtu vhodných geometrických řad:

$$\int\limits_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x),$$

geometrická řada s $q=-t$

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+t^4-\dots,$$

$$\int\limits_0^x\left(1-t+t^2-t^3+t^4-\dots\right)dt=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots$$

V posledním kroku využívám teorie mocninných řad, kdy integruju danou řadu člen po členu v jejím poloměru konvergence. Avšak touto teorií se v práci zabývat nebudu, můžeme ji nalézt například v [1] v 8. kapitole. Stejným postupem můžeme odvodit například Taylorův rozvoj funkce $\ln(1-x)$, nebo $\mathrm{arctg}(x)$.

Jiné Taylorovy rozvoje se získávají odečtením dvou již známých Taylorových rozvojů, příkladem může být:

Příklad.

$$\ln\frac{1+x}{1-x},$$

kterou bychom mohli odvodit z Taylorových rozvojů funkcí:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots$$
$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\dots$$

Tyto dvě řady od sebe odečteme a získáme:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+\dots=2\cdot\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right).$$

6.2.5 Výpočet limity pomocí Taylorova polynomu pro $x \to a$, kde $a \neq 0$

Myslím si, že po ukázce několika limit v této kapitole, je jasné, že Taylorův polynom může být výhodným nástrojem při výpočtech limit - zvláště limit v podílovém tvaru obsahujících goniometrické funkce, e^x, $\ln(1+x)$ ad. Všechny tyto funkce nemají složitý rozvoj pro $x_0 = 0$. Na začátku této kapitoly jsem však zmiňovala, že pomocí Taylorova polynomu řešíme i limity pro $x \to a$, kde $a \neq 0$. Nejčastěji ty, které lze vhodnou substitucí převést na limity $x \to 0$. Příkladem mohou být limity:

Příklad.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1) - e^{\frac{-(x-1)^2}{2}}}{(x-1)^4} = |y = x-1| = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - e^{\frac{-y^2}{2}}}{y^4} = *$$

Pro zjednodušení výpočtu jsem provedla nejprve substituci $y = x - 1$. Pokud se rozhodneme řešit upravenou limitu pomocí Taylorova polynomu, budeme potřebovat vypočítat Taylorův polynom funkce $e^{\frac{-y^2}{2}}$. Podle stupně polynomu ve jmenovateli je očividné, že nám bude stačit rozvinout Taylorův polynom funkcí v čitateli nejvýše do 4. řádu. Začneme-li vypisovat Taylorovy rozvoje funkcí $\cos(x)$ a $e^{\frac{-y^2}{2}}$ zjistíme, že se nám nultý, první i druhý člen těchto rozvojů odečtou, první nenulový člen bude člen třetí.
Rozvinutí funkce $e^{\frac{-y^2}{2}}$ do čtvrtého řádu:

$$\begin{aligned}
f(y) &= e^{\frac{-y^2}{2}} && \to && f(0) = 1\\
f'(y) &= -ye^{\frac{-y^2}{2}} && \to && f'(0) = 0\\
f''(y) &= -e^{\frac{-y^2}{2}} + y^2 e^{\frac{-y^2}{2}} = e^{\frac{-y^2}{2}}(y^2-1) && \to && f''(0) = -1\\
f'''(y) &= -ye^{\frac{-y^2}{2}}(y^2-1) + e^{\frac{-y^2}{2}}2y = e^{\frac{-y^2}{2}}(-y^3+3y) && \to && f'''(0) = 0\\
f^{(iv)}(y) &= -ye^{\frac{-y^2}{2}}(-y^3+3y) + e^{\frac{-y^2}{2}}(-3y^2+3) = && && \\
&= e^{\frac{-y^2}{2}}(y^4 - 6y^2 + 3) && \to && f^{iv}(0) = 3
\end{aligned}$$

$$T_{f,0,4}(x) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{3y^4}{4!} + o(y^4)$$

Pro získání Taylorova polynomu funkce $e^{\frac{-y^2}{2}}$ můžeme využít i jiný způsob výpočtu, který je v tomto případě rychlejší a vychází ze znalosti Taylorova rozvoje funkce e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{\frac{-y^2}{2}} = 1 + \frac{\frac{-y^2}{2}}{1!} + \frac{\left(\frac{-y^2}{2}\right)^2}{2!} + \dots = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{8} + o(y^4)$$

Dokončení výpočtu limity:

$$* = \lim_{y\to 0} \frac{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4) - \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{3y^4}{4!} + o(y^4)\right)}{y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{-2y^4}{4!} + o(y^4)}{y^4} =$$
$$= -\frac{1}{12}.$$

Stejným způsobem je možné postupovat i při výpočtu limit v $\pm\infty$, kde využíváme substituci $y = \frac{1}{x}$.

Příklad.

$$\lim_{x\to\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \left| y = \frac{1}{x} \right| =$$
$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{y - \ln(1+y)}{y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y - \left(y - \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right)}{y^2} =$$
$$= \frac{1}{2}.$$

Abychom převedli limitu pro $x \to \infty$ na limitu pro $x \to 0$, je třeba provést danou substituci. Ze substituce vyplývá, že jde-li x k $+\infty$, pak y musí jít k nule zprava. Pokud bychom počítali limitu pro $x \to -\infty$, pak by y muselo jít k nule zleva. Po provedení substituce probíhá postup výpočtu stejně jako u výše uvedených příkladů.

Jelikož je výpočet Taylorova polynomu některých funkcí zdlouhavý, bývá v praxi častěji využíváno l'Hospitalovo pravidlo, kterému se budu věnovat v následující kapitole.

7. l'Hospitalovo pravidlo

Toto pravidlo je uvedeno jako věta 5.12 na str. 113 v [2], kde je pod jejím zněním uveden i důkaz. Věta zní:

Věta 7.1. *Nechť pro nějaké* $a \in \mathbb{R}^*$ *mají funkce* f *a* g *vlastní derivace na nějakém* $U^*(a)$, *přičemž* g' *je tam nenulová. Nechť je dále splněna jedna z následujících podmínek:*
I. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \neq 0$ *pro* $x \in U^*(a)$,
II. $\lim_{x\to a} \mid g(x) \mid = \infty$.
Potom platí: existuje-li

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

pak je také

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Věta zůstane v platnosti,nahradíme-li oboustranné limity a okolí jednostrannými.

L'Hospitalovo pravidlo nám říká, že pokud máme v podílu dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$, které mají vlastní derivace v prstencovém okolí bodu a a je-li $\lim_{x\to a} g(x)$ nevlastní (tzn. $\pm\infty$) anebo je limita obou funkcí rovna nule, pak platí, že:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

je-li výraz na pravé straně definován. Pokud bychom v průběhu výpočtu zjistili, že $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, pak nám věta 7.1 neříká nic o existenci limity $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. To by bylo třeba zjistit jiným způsobem.

L'Hospitalovo pravidlo bývá často využíváno při výpočtech limit funkcí typu $\frac{\infty}{\infty}$ nebo $\frac{0}{0}$. Jeho výhodou je, že při opakovaném splnění podmínek zmíněných výše, je možná jeho aplikace i několikrát po sobě. Je tedy nutné v průběhu výpočtu stále kontrolovat, zda můžeme l'Hospitalovo pravidlo stále ještě použít. Nyní bych chtěla ukázat několik příkladů využití l'Hospitalova pravidla při výpočtu limit.

Příklad.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(4x)}{\sqrt{x}} \overset{?l'H?}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{4x}\cdot 4}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Po použití l'Hospitalova pravidla jsme získali limitu funkce $\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}$, která stále představuje neučitý výraz ve tvaru $\frac{\infty}{\infty}$. Vytknutím $\sqrt{x}$ z čitatele a jmenovatele a následném prokrácení odstraníme neurčitý výraz a můžeme snadno určit limitu.

Zjistili jsme, že limita podílu derivací funkcí existuje a existuje tedy i limita funkce původní. To znamená, že jsme mohli v průběhu výpočtu použít l'Hospitalovo pravidlo. Otazníky (nad rovná se) při použití l'Hospitalova pravidla byly zbytečné a po této úvaze bychom je mohli odstranit. Pokud na konci příkladu v některé fázi výpočtu zjistíme, že limita derivací neexituje, musíme se vrátit na začátek a zamyslet se nad jiným postupem řešení. Pro zjednodušení zápisu budu otazníky v postupu řešení dalších příkladů vynechávat. Je však důležité na tento předpoklad nezapomínat, abychom z neexistence limity podílu derivací nevyvozovali neexistenci limity podílu původních funkcí. Příkladem limity, u které z tohoto důvodu není možné použít l'Hospitalovo pravidlo, je [11]:

Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}.$$

Po použití l'Hospitalova pravidla získáme limitu: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}$. Limita tohoto výrazu neexistuje, protože v čitateli i jmenovateli se jedná o funkci periodickou. Neznamená to však, že neexistuje ani limita výrazu původního (před použitím l'Hospitalova pravidla). Její výpočet může probíhat například takto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\sin(x)}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sin(x)}{x}}{1-\frac{\sin(x)}{x}} = 1.$$

Proč je limita rovna 1? Podíváme-li se na výraz v limitě po vytknutí a následném zkrácení x, vidíme, že jsme v čitateli získali: $1+\frac{\sin(x)}{x}$. Funkce $\sin(x)$ je funkce periodická a omezená. Její funční hodnoty se budou pro $x \to +\infty$ pohybovat v intervalu $< -1,1 >$. Budeme-li $\sin(x)$ dělit stále větším a větším číslem, zjistíme, že výraz $\frac{\sin(x)}{x}$ pro $x \to +\infty$ se bude blížit k hodnotě 0. To, že se $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$, můžeme dokázat například z věty „o dvou policajtech“[1]. Limita čitatele je tedy rovna 1. Při zjišťování limity jmenovatele postupujeme stejným způsobem. Výsledná limita je po použití věty 5.1 rovna 1.

Nyní ukáži několik příkladů, u kterých předvedu jejich řešení pomocí l'Hospitalova pravidla.

Příklad.

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos 5x)}{x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{\cos 5x}\cdot(-\sin 5x)5}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{-\sin 5x}{\cos 5x}5}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{-5\cdot \mathrm{tg}(5\mathrm{x})}{2x} \overset{l'H}{=}$$
$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to0} \frac{-25\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}}{2} = -\frac{25}{2}.$$

Při řešení jsem použila l'Hospitalovo pravidlo celkem dvakrát. Jelikož po prvním zderivování vznikl opět neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, bylo možné l'Hospitalovo pravidlo použít podruhé. Stejně jako u předchozího příkladu jsem došla k závěru, že limity derivací obou funkcí existují a výsledná limita je rovna $\frac{-25}{2}$.

Tento příklad lze vyřešit také pomocí základních limit, jejichž použití jsem se věnovala v 5. kapitole. Proto na tomto příkladě provedu jen stručný zápis výpočtu pro srovnání řešení pomocí l'Hospitalova pravidla a řešení s využitím základních limit.

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos 5x)}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos 5x)}{\cos(5x)-1} \cdot \frac{\cos(5x)-1}{25x^2} \cdot 25 = -\frac{25}{2}.$$

[1]Větu včetně jejího důkazu můžeme nalézt například v [2] na str. 39 jako větu 2.10.

Při řešení využívám základní limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1,$$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, dále pak větu 5.2 a větu 5.1.

L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít i u výpočtů limit typu 1^∞, nebo $0 \cdot \infty$. Před jeho použitím je ale nutné funkce upravit do vhodného tvaru tak, abychom získali limitu funkce typu $\frac{\infty}{\infty}$ nebo $\frac{0}{0}$. Bez této úpravy by l'Hospitalovo pravidlo nebylo možné použít. Příkladem takových limit může být:

Příklad.

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x \cdot \cos x} \overset{l'H}{=}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x \cos x}{\cos x + x \sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin 2x}{\cos x + x\sin x} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Abychom v limitě získali podíl dvou funkcí, převedli jsme $\sin x$ do jmenovatele. Limitu typu $0 \cdot (-\infty)$ jsme převedli na limitu typu $\frac{-\infty}{\infty}$, u které je již možné l'Hospitalovo pravidlo použít (v našem případě dokonce dvakrát po sobě).

Příklad.

$$\lim_{x\to 0} [\cos(5x)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos 5x)} = e^{\frac{-25}{2}}.$$

Limita této funkce je typu 1^∞. Za použití vzorce $a^x = e^{x\ln(a)}$ můžeme $(\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}$ přepsat do tvaru: $e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos 5x)}$. Tímto chytrým převedením jsme v exponentu získali výraz, který je možné snadno převést do limity tvaru: $\frac{0}{0}$. Nyní by následoval výpočet limity funkce v exponentu. My jsme tento výpočet provedli již v jednom z předchozích příkladů. Mohli jsme tedy jeho hodnotu rovnou dosadit do výpočtu, čímž jsme zjistili, že limita původní funkce je rovna $e^{\frac{-25}{2}}$.

8. Vztah mezi výpočtem limit pomocí l'Hospitalova pravidla a za použití Taylorova rozvoje

Cílem této kapitoly bude ukázat, že výpočet limity pomocí Taylorova polynomu i l'Hospitalova pravidla funguje na velmi podobném principu. Dále se pak budu zabývat tím, u jakých limit se může zdát jeden z těchto dvou postupů výpočtu výhodnější a proč.

8.1 Porovnání obou postupů při výpočtu limit

8.1.1 Konkrétní příklad

Už z několika příkladů v 7. kapitole je zřejmé, že díky l'Hospitalovu pravidlu dokážeme vypočítat limity i poměrně složitých funkcí. Nesmíme však zapomenout se u každého příkladu zamyslet (stejně jako tomu bylo u Taylorova polynomu), zda je pro danou limitu námi vybraný postup řešení vhodný. V některých případech je použití l'Hospitalova pravidla zbytečné a je výhodnější použít metody, které jsem uváděla v 5. kapitole, nebo použít Taylorovův polynom. Příklad takové limity ukáži na následujícím příkladě:

Příklad.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2 \sin^2 x}.$$

Jeho řešení ukáži nejprve pomocí Taylorova polynomu, a poté l'Hospitalovým pravidlem.

- Taylorův polynom:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2 \sin^2 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right] - 2 + x^2}{x^2[x + o\left(x\right)]^2} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2 + \frac{2x^4}{4!} + o\left(x^4\right) - 2 + x^2}{x^4 + o\left(x^4\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^4}{4!} + o\left(x^4\right)}{x^4 + o\left(x^4\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(\frac{2}{4!} + \frac{o\left(x^4\right)}{x^4}\right)}{x^4\left(1 + \frac{o\left(x^4\right)}{x^4}\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{4!} + \frac{o\left(x^4\right)}{x^4}}{1 + \frac{o\left(x^4\right)}{x^4}} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

- l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2\sin^2 x}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x+2x}{2x\sin^2 x+x^2 2\sin x\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x+2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}\overset{l'H}{=}$$
$$\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+2}{2\sin^2 x+4x\sin x\cos x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+2}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\overset{l'H}{=}$$
$$\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{4\sin x\cos x+4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{6\sin 2x+12x\cos 2x+4x^2(-\sin 2x)}\overset{l'H}{=}$$
$$\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{12\cos 2x+12\cos 2x-24x\sin 2x-8x\sin 2x-8x^2\cos 2x}=$$
$$=\frac{2}{12+12}=\frac{1}{12}.$$

Myslím si, že v tomto příkladě je řešení pomocí Taylorova polynomu rychlejší a méně pracné. Samozřejmě je mnoho příkladů, kde tomu může být přesně naopak. Jak jsem zmínila již výše, před každým příkladem je zapotřebí provést nejprve úvahu nad postupem řešení, bez které nemusí být námi zvolený postup řešení dostatečně efektivní. Tomu, jak se rozhodnout, zda je nutné použít Taylorův polynom, či l'Hospitalovo pravidlo, jsem se věnovala již v podkapitole 6.2.2. Na to, jak odhadnout, který z těchto dvou postupů bude v daném případě efektivnější, se zaměřím v závěru této kapitoly.

Než ukážu obecně, jak řešení pomocí l'Hospitalova pravidla a Taylorova polynomu funguje, prohlédněme si oba postupy ještě jednou a detailněji. Chtěla bych upozornit na několik podobností, kterých si není možné při řešení této limity nevšimnout. Mezi oběma postupy totiž můžeme postřehnout jistou paralelu, které se budu dále věnovat.

První podobností je nutný počet opakovaného použití l'Hospitalova pravidla a řád Taylorova polynomu, do kterého bylo nutné funkce rozvinout. Při výpočtu limity pomocí Taylorova polynomu bylo nutné rozvinou funkci $\cos(x)$ do 4. řádu tak, abychom v čitateli získali první nenulový člen. Při řešení pomocí l'Hospitalova pravidla bylo pro odstranění neurčitého výrazu $\frac{0}{0}$ nezbytné toto pravidlo použít celkem čtyřikrát. Je to náhoda? Pozorujme dále. Porovnejme poslední členy před zapsáním konečného výsledku:

- Taylorův polynom:

$$\frac{\frac{2}{4!}}{1}$$

- l'Hospitalovo pravidlo:

$$\frac{2}{12+12}$$

Čitatele a jmenovatele se liší o 4!, který pochází z čtvrtého členu Taylorova polynomu. Pozornému čtenáři je pravděpodobně už jasné, že tyto podobnosti nebudou pouhou náhodou, a proto následující část této kapitoly věnuji obecnému porovnání a vysvětlení vztahu mezi výpočtem limity pomocí Taylorova polynomu a l'Hospitalova pravidla.

8.1.2 Teoretické porovnání postupů

Pokud při výpočtu limity použijeme l'Hospitalovo pravidlo, bude výpočet probíhat následujícím způsobem:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'''(x)}{g'''(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to a}\frac{f^{(iv)}(x)}{g^{(iv)}(x)} = \cdots \overset{l'H}{=} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Čitatel a jmenovatel derivujeme do té doby, dokud neodstraníme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Budeme uvažovat situaci $\frac{0}{0}$. Po použití l'Hospitalova pravidla, mohou nastat dvě možnosti. Můžeme zjistit, že limita derivací neexistuje, a tak podle věty 7.1 již od začátku nebylo možné l'Hospitalovo pravidlo použít. Limitu zadané funkce by bylo nutné vyřešit jiným způsobem. Pokud dojdeme k výsledku, ve kterém limita podílu obou derivací existuje, získali jsme limitu původní funkce. To ale znamená, že alespoň jedna z limit derivací pro $f^{(n)}(x)$, nebo $g^{(n)}(x)$ pro $x \to a$ je nenulová. Označme n počet, kolikrát jsme derivovali čitatele resp. jmenovatele.

Než si ukážeme postup výpočtu pomocí Taylorova polynomu, připomeňme si, jak by vypadaly Taylorovy rozvoje funkcí $f(x)$ a $g(x)$ v bodě a:

$$T_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$
$$T_{g,a}(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Nejdříve určíme Taylorův polynom pro $f(x)$ respektive $g(x)$ do řádu n_1 respektive n_2, kde platí:
$f^{(n_1)}(a) \neq 0$, ale $\forall i < n_1$ je $f^{(i)}(a) = 0$ a
$g^{(n_2)}(a) \neq 0$, ale $\forall i < n_2$ je $g^{(i)}(a) = 0$.

Rozvineme tedy Taylorův polynom obou funkcí do prvního nenulového členu. Jelikož již od začátku uvažujeme situaci, kdy limita pro $x \to a$ je ve tvaru $\frac{0}{0}$, bude první nenulový člen ten, jehož derivace v bodě a bude nenulová. Označme $n = \min\{n_1, n_2\}$, kdy se jedná o stejné n, které jsem použila výše pro označení počtu použití l'Hospitalova pravidla. V obou případech derivujeme tak dlouho, než odstraníme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. L'Hospitalovo pravidlo budeme používat do té doby, než bude n-tá derivace $f(x)$ nebo $g(x)$ nenulová. Stejně tak Taylorův polynom funkcí $f(x)$ a $g(x)$ budeme rovíjet až než u jedné z nich narazíme na první nenulový člen, kdy je zřejmé, že se musí jednat o ten samý počet derivací jako u l'Hospitalova pravidla.

Z čitatele i jmenovatele vytkneme výraz $(x-a)^n$, dostaneme:

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n+o(x-a)^n}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n+o(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^n[\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n}]}{(x-a)^n[\frac{g^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n}]}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n}}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n}}.$$

Viděli jsme, že u l'Hospitalova pravidla finální hodnotu limity určuje podíl n-tých derivací funkcí. Zatímco u Taylorova polynomu o výsledku limity rozhoduje rovněž podíl n-tých derivací, jehož čitatel i jmenovatel je však ještě vydělen $n!$. Po zkrácení $n!$ tedy dojdeme ke stejné limitě jako při použití l'Hospitalova pravidla.

8.2 Kdy je výhodnější použít Taylorův polynom a kdy l'Hospitalovo pravidlo?

Z posledních tří kapitol této práce, které jsem věnovala výpočtům pomocí Taylorova polynomu a l'Hospitaova pravidla, je zřejmé, že každý z nich může být při výpočtu určitého typu limit výhodnější. Jsou příklady, u kterých nezáleží na tom, který z těchto dvou postupů výpočtu zvolíme, ale u některých nám naše volba může značně usnadnit práci. Jak ale poznat, který z postupů je u daného příkladu výhodnější? Existují na to nějaká pravidla? Žádná pravidla na to bohužel sestavená nejsou a ani to není možné. Každý příklad na limitu je jiný a dá se říct, že i specifický. Přesto bych chtěla provést alespoň krátkou úvahu nad tím, kdy se mi jaký postup jeví výhodnější, proč a jaká jsou jeho pozitiva.

Prohlédneme-li si více příkladů řešených pomocí Taylorova polynomu a l'Hospitalova pravidla, můžeme si všimnout několika důležitých detailů, které nás mohou při řešení nasměrovat k efektivnějšímu způsobu výpočtu. Zaprvé, Taylorův polynom, jak jsem psala již v 6. kapitole, se velmi často využívá u limit pro $x\to 0$, nebo pro limity, které lze snadnou substitucí na tuto limitu převést. Při rozhodování je dále důležité si dobře prohlédnout funkci, jejíž limitu budeme počítat. Taylorův polynom bývá výhodnější u limit, které obsahují součin více funkcí. Jedná-li se navíc o funkce, které jsem uváděla v 6. kapitole, jejichž Taylorův polynom je dobře znám, a je třeba je rozvinout do vyššího řádu, bývá Taylorův polynom mnohdy často efektivnější než l'Hospitalovo pravidlo. L'Hospitalovo pravidlo je často v těchto případech složitější. Při jeho použití derivujeme narozdíl od Taylorova polynomu celý součin, což je zdlouhavější zvláště, je-li nutné ho použít vícekrát. Například pokud bychom museli Taylorův polynom jednotlivých funkcí v součinu rozvíjet do čtvrtého řádu, znamenalo by to, že při použití l'Hospitalova pravidla by bylo nutné celý součin derivovat celkem čtyřikrát, abychom daný neurčitý výraz odstranili. Což může být mnohem zdlouhavější než roznásobení polynomů čtvrtého řádu vzniklých aproximací jednotlivých funkcí Taylorovým polynomem.

Jaká pozitiva má l'Hospitalovo pravidlo? Proč bývá studenty v praxi používáno mnohem častěji než základní způsoby výpočtu, či Taylorův polynom? Největší výhodou při používání l'Hospitalova pravidla je to, že při jeho používání není vůbec třeba vědět, kolikrát jej bude nutné použít. Zkrátka derivujeme tak dlouho, dokud získáváme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Proto bývá používáno mnohem častěji než Taylorův polynom, i když ne vždy je tento postup rychlejší. Další výhodou l'Hospitalova pravidla je, že ho lze použít přímo při řešení limit pro $x \to \infty$. Naproti tomu při řešení těchto limit pomocí Taylorova polynomu je nutné nejprve provést substituci $y = \frac{1}{x}$, tím limitu převedeme na limitu pro $y \to 0^+$ (viz. podkapitola 6.2.5), a až poté můžeme aplikovat Taylorův polynom.

U jakých limit je výhodnější použít Taylorův polynom jsem popsala v odstavci výše. Kdy je výhodnější použít l'Hospitalovo pravidlo? Pokud se rozhodneme použít Taylorův polynom, je nutné předem odhadnout řád, do kterého bude třeba polynom rozvinout. V opačném případě se může stát, že danou funkci budeme derivovat zbytečně vícekrát než je nutné a Taylorův polynom pak není tak výhodný nástroj, jak by mohl být. Neodhadneme-li řád, do kterého je třeba funkce rozvinout, bývá u těchto limit vhodnější použít l'Hospitalovo pravidlo.

Pro lepší představu ukáži ještě jeden příklad vypočítaný pomocí Taylorova polynomu i l'Hospitalova pravidla, na kterém budu demonstrovat výhody obou postupů popsaných v této podkapitole.

l'Hospitalovo pravidlo:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2\left(\cos(x)e^{2x}-1\right)-x\,(4+x)}{2e^{x^3}\sin^2(3x)} \overset{l'H}{=} \\
&\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x)e^{2x}+4\cos(x)e^{2x}-(4+x)-x}{6x^2e^{x^3}\sin^2(3x)+6e^{x^3}2\sin(3x)\cos(3x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x)e^{2x}+4\cos(x)e^{2x}-4-2x}{6x^2e^{x^3}\sin^2(3x)+6e^{x^3}\sin(6x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}(-2\sin(x)+4\cos(x))-2x-4}{6e^{x^3}\left(x^2\sin^2(3x)+\sin(6x)\right)} \overset{l'H}{=} \\
&\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}\left(-2\sin(x)+4\cos(x)\right)+e^{2x}\left(-2\cos(x)-4\sin(x)\right)-2}{6\sin^2(3x)xe^{x^3}\left(3x^3+2\right)+36\sin(6x)x^2e^{x^3}+36\cos(6x)e^{x^3}} = \\
&= \frac{6-2}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

Taylorův polynom:

Taylorovy polynomy jednotlivých funkcí:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = e^{x^3}, \\
&f(0) = 1 && \Rightarrow T_{e^{x^3},0} = 1 + o\,(1)\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g(x) = \sin(3x), && g'(x) = 3\cos(3x), \\
&g(0) = 0, && g'(0) = 3 && \Rightarrow T_{\sin(3x),0} = 3x + o\,(x)\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&h(x) = e^{2x}, && h'(x) = 2e^{2x}, && h''(x) = 4e^{2x} \\
&h(0) = 1, && h'(0) = 2, && h''(0) = 4 \\
& && && \Rightarrow T_{e^{2x},0} = 1 + 2x + 2x^2 + o\left(x^2\right).
\end{aligned}
$$

Výpočet limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(\cos(x)e^{2x}-1\right)-x\left(4+x\right)}{2e^{x^3}\sin^2(3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left[\left(1-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)\right)\left(1+2x+2x^2+o\left(x^2\right)\right)-1\right]-4x-x^2}{2\left(1+o\left(1\right)\right)\left(3x+o\left(x\right)\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(2x+2x^2-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)\right)-4x-x^2}{18x^2+o\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+o\left(x^2\right)}{18x^2+o\left(x\right)} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

Dle mého názoru představuje tento příklad právě ten typ limit, jejichž řešení pomocí Taylorova polynomu je početně jednodušší než pomocí l'Hospitalova pravidla. Přesto předpokládám, že by většina studentů zvolila řešení spíše pomocí l'Hospitalova pravidla. I když je výpočet pomocí l'Hospitalova pravidla v tomto příkladě pomalejší a je pravděpodobnější, že se při jeho použití studenti spíše dopustí chyby (zvláště při derivování součinu), zvolí tento postup většina z nich. Je to způsobeno tím, že při použití Taylorova polynomu je nutné předem provést nad daným příkladem úvahu. Je třeba si dobře rozmyslet, do jakého řádu bude nutné rozvíjet Taylorovy polynomy jednotlivých funkcí, a který člen polynomu bude rozhodovat o výsledku limity.

Před začátkem výpočtu pomocí Taylorova polynomu si zadání příkladu dobře prohlédneme. Podíváme-li se na jmenovatel funkce v limitě, vidíme, že je složen, ze součinu několika funkcí. Jelikož ve jmenovateli není žádný rozdíl ani součet funkcí, nehrozí, že by se některé členy Taylorova polynomu odečetly. Proto nám bude stačit rozvinout funkce pouze do prvního nenulového členu, který poznáme hned při jejich derivování. V tom okamžiku derivování zastavíme a sestavíme Taylorův polynom. V našem případě jsme po následném roznásobení zjistili, že jsme získali za funkci ve jmenovateli polynom druhého řádu. V čitateli je narozdíl od jmenovatele rozdíl několika funkcí. Je tedy možné, že se některé členy Taylorova polynomu mohou odečíst. Od součinu Taylorových polynomů funkcí $\cos(x)$ a e^{2x} budeme odčítat člen konstantní, lineární i kvadratický. Existuje tedy riziko, že by se mohl odečíst i člen kvadratický. Z toho důvodu bychom měli rozvinout Taylorovy polynomy funkcí $\cos(x)$ a e^{2x} do 3. řádu. Jelikož už víme, že první nenulový člen Taylorova polynomu ve jmenovateli bude 2. řádu, je zřejmé, že o hodnotě limity bude rozhodovat člen kvadratický. Z toho důvodu nám bude stačit funkce v čitateli rozvinout do 2. řádu. Provedením této úvahy se nám výpočet velmi zjednoduší a urychlí. Pokud bychom si ale těchto poznatků nevšimli, rozvíjeli bychom pravděpodobně Taylorovy polynomy jednotlivých funkcí do zbytečně vysokého stupně, čímž by se výpočet stal možná i delším a složitějším než pomocí l'Hospitalova pravidla.

I když je tedy l'Hospitalovo pravidlo v tomto případě časově náročnější a náchylnější k chybám, je to cesta, která vede jistě k cíli, a u které víme, že rozhodně budeme derivovat pouze tak dlouho, jak to bude nezbytně nutné. Ve správý čas výpočet zastavíme a určíme limitu. Je tedy ke zvážení, který postup se komu u jednotlivých limit jeví sympatičtější.

Závěr

Na počátku bakalářské práce jsem si stanovila za cíl hlouběji proniknout do pojmu limita funkce a různých způsobů jejího výpočtu. Limita funkce je neoddělitelnou součástí diferenciálního a integrálního počtu. Mojí snahou bylo co nejvíce propojit teorii s výpočtovou praxí i grafickou představou. Práci jsem strukturovala tak, aby mohla být případně použita jako studijní příručka pro studenty vysokých škol technických a učitelských oborů. Po představení základních pojmů, typů limit a jejich výpočtů jsem se dostala k Taylorovu polynomu a l'Hospitalovu pravidlu. Vysvětlila jsem, v kterých příkladech nelze použít pro výpočet základní limity, ale je nutné použít právě Taylorův polynom nebo l'Hospitalovo pravidlo. Ukázala jsem jejich použití při výpočtu limit, a poté jsem mezi těmito postupy výpočtu hledala souvislost. Tu jsem nalezla a následně jsem ji demonstrovala na obecném příkladu podílu dvou funkcí. Toto propojení mezi postupy výpočtu pomocí Taylorova polynomu a l'Hospitalova pravidla může studenty obohatit nejen z hlediska teoretického vědění, ale také jim může pomoci při úvaze, který postup výpočtu je v konkrétním případě vhodnější.

Seznam použité literatury

[1] VESELÝ, Jiří. (2004) *Základy matematické analýzy.* 1. vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-86732-29.

[2] KOPÁČEK, Jiří. (2004) *Matematická analýzy nejen pro fyziky (I).* 3. vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-89-8

[3] HAIRER, Ernst a WANNER, Gerhard.(2008) *Analysis by Its History.* Springer Science+Business Media, New York. e-ISBN: 978-0-387-77036-9

[4] HRUBÝ, Dag a KUBÁT, Josef. (1997) *Matematika pro gymnázia - Diferenciální a integrální počet.* 1. vydání. Prometheus, Praha. ISBN 80-7196-063-2

[5] ODVÁRKO, Oldřich. (2010) *Matematika pro gymnázia - Funkce.* Dotisk 4. vydání. Prometheus, Praha. ISBN 978-80-7196-357-8

[6] HELLMAN, Hal. (2000) *Velké spory na poli vědy.* 1. vydání. HEL, Ostrava. ISBN 0-471-16980-3

[7] FUCHS, Eduard. (1993) *Historie matematiky. I - Od měření obsahů a objemů k infinitesimálnímu počtu.* Jednota českých matematiků a fyziků, Brno. Dostupné z http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/400589

[8] SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra (1996) *Malý průvodce historií integrálu.* Prometheus, Praha. Dostupné z https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400855

[9] HRNČIŘÍK, Zdeněk (2008) *Aplikace diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné ve slovních úlohách.* Diplomová práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, katedra matematiky, Brno. Vedoucí práce: RNDr. Šárka Hošková, Ph.D. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/73244/.

[10] VOPĚNKA, Petr. (2015) *Nová infinitní matematika: I. Velká iluze matematiky 20. století.* 1. vydání. Karolinum, Praha. ISBN 978-80-246-2987-2

[11] KOJECKÝ, Tomáš a KOJECKÁ, Jitka. (1997) *Matematická analýza pro 1. semestr.* 1. vydání Vydavatelství Unverzity Palackého, Olomouc. ISBN 80-7067-761-9

[12] BRABEC, Jiří, MARTAN, František a ROZENSKÝ, Zdeněk. (1989) *Matematická analýza I.* 2. vydání SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha. ISBN 80-03-00044-0