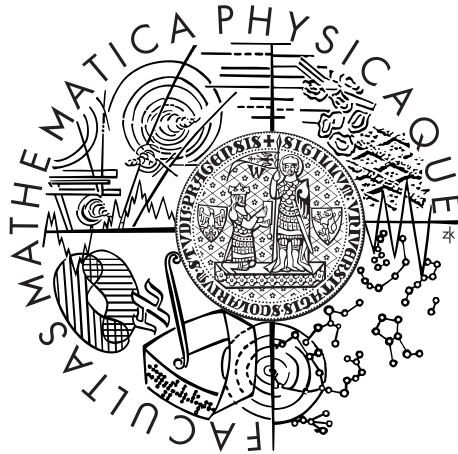


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko–fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Ondřej Chrenko

Interakce migrujících obřích planet a malých těles sluneční soustavy

Astronomický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Miroslav Brož, Ph. D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Astronomie a astrofyzika

Praha 2015

Na tomto místě bych rád poděkoval Mgr. Miroslavu Brožovi, Ph. D. za pečlivé vedení této práce, za neocenitelnou pomoc při psaní odborného článku a za nezapomenutelné zážitky z mojí první konference. Dále bych rád poděkoval Davidovi Nesvornému, Kleomenisovi Tsiganisovi a Despoině Skoulidou za přínosné diskuze a za poskytnutí výsledků jejich numerických simulací. Velký dík patří celé mojí rodině za vytrvalou podporu během mého studia. Děkuji mojí přítelkyni Barunce za trpělivost a za její víru v to, co dělám.

Tato práce vznikla za podpory Univerzity Karlovy v Praze (projekt GA UK č. 1062214 a projekt SVV-260089).

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/200 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 6. května 2015

Ondřej Chrenko

Název práce: Interakce migrujících obřích planet a malých těles sluneční soustavy

Autor: Bc. Ondřej Chrenko

Katedra: Astronomický ústav Univerzity Karlovy v Praze

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Miroslav Brož, Ph. D.; Astronomický ústav UK

Abstrakt: Změny velkých poloos obřích planet, které proběhly před 4 miliardami let a uvedly sluneční soustavu do její dnešní podoby, podstatně ovlivnily tehdejší populace malých těles sluneční soustavy. Jednou z takových skupin byly i dynamicky stabilní planetky v rezonanci 2:1 středního pohybu s Jupiterem, které setrvávají ve dvou ostrovech fázového prostoru, označovaných A a B, a vykazují životní doby srovnatelné se stářím sluneční soustavy. Původ těchto planetek doposud nebyl vysvětlen. Naším cílem je vypracovat uspokojivou hypotézu jejich původu.

Na základě nejnovějších observačních dat aktualizujeme rezonanční populaci a její fyzikální vlastnosti. S použitím N -částicového modelu se sedmi planetami a Jarkovského jevem ukazujeme, že difuze z ostrova A probíhá rychleji než v případě ostrova B. Následně vyšetřujeme: (i) přežívání primordiálních rezonančních planetek a (ii) zachycení populace během planetární migrace, a to v nedávno popsáném scénáři s unikající pátou obří planetou a nestabilitou „skákajícího Jupiteru“. Používáme simulace s předepsanou migrací, simulace hladké pozdní migrace a výsledky statisticky vyhodnocujeme pomocí dynamických map. Modelujeme rovněž srážky během uplynulých 4 miliard let. Naším závěrem je, že skupina stabilních planetek vznikla zachycením části hypotetické asteroidální rodiny vnějšího hlavního pásu během skoku Jupiteru.

Klíčová slova: migrace planet, planetky, rezonance, N -částicové modely, srážky

Title: Interactions of migrating giant planets and small Solar-System bodies

Author: Bc. Ondřej Chrenko

Department: Astronomical Institute of Charles University in Prague

Supervisor: Mgr. Miroslav Brož, Ph. D.; Astronomical Institute of Charles University

Abstract: Changes of semimajor axes of giant planets, which took place 4 billion years ago and evolved the Solar System towards its present state, affected various populations of minor Solar-System bodies. One of these populations was a group of dynamically stable asteroids in the 2:1 mean-motion resonance with Jupiter which reside in two islands of the phase space, denoted A and B, and exhibit lifetimes comparable to the age of the Solar System. The origin of stable asteroids has not been explained so far. Our main goal is to create a viable hypothesis of their origin.

We update the resonant population and its physical properties on the basis of up-to-date observational data. Using an N -body model with seven giant planets and the Yarkovsky effect included, we demonstrate that the depletion of island A is faster compared to island B. We then investigate: (i) survivability of primordial resonant asteroids and (ii) capture of the population during planetary migration, using a recently described scenario with an escaping fifth giant planet and a jumping-Jupiter instability. We employ simulations with prescribed migration, smooth late migration and we statistically evaluate the results using dynamical maps. We also model collisions during the last 4 billion years. We conclude that the long-lived group was created by a capture from a part of hypothetical outer main-belt family during Jupiter's jump.

Keywords: planetary migration, asteroids, resonance, N -body models, collisions

Obsah

Úvod a motivace	3
1 Pozorované asteroidy v rezonanci 2:1 s Jupiterem	9
1.1 Charakterizace rezonančních drah	9
1.2 Dynamické mapy	12
1.3 Životní doby a stabilita drah	16
1.4 Rozdělení velikostí, albeda a barevných indexů	19
1.5 Vliv terestrických planet a Jarkovského jevu	23
2 Simulace s předepsanou migrací	25
2.1 Diskuze postupu při konstrukci dynamických modelů	27
2.2 Úprava integrátoru SWIFT	30
2.3 Porovnání integrátorů s předepsanou migrací	31
3 Zachycování planetek z hlavního pásu při skoku Jupiteru	39
3.1 Počáteční podmínky a vývoj testovacích částic	39
3.2 Zachycené planetky a porovnání s pozorováním	41
4 Stabilita primordiální populace během migrace planet	45
4.1 Počáteční podmínky a vývoj testovacích částic	45
4.2 Primordiální planetky přežívající migraci	48
5 Vliv velké nerovnosti Jupiteru a Saturnu	51
5.1 Simulace hladké migrace	51
5.2 Míra difuze stabilní populace	52
6 Kolizní vývoj stabilní populace v rezonanci 2:1	57
6.1 Vlastní pravděpodobnosti a rychlosti srážek	57
6.2 Asteroidy zachycené z pozadřové populace hlavního pásu	59
6.3 Katastrofický rozpad zachyceného mateřského tělesa	62

6.4	Vznik strmého rozdělení velikostí zachycením z rodiny	65
	Závěr a budoucí práce	71
A	Článek The origin of long-lived asteroids in the 2:1 mean-motion resonance with Jupiter	75
B	Integrátor swift_rmvs3_xyzinterp	97
	Literatura	108

Úvod a motivace

Studium procesů, které formovaly sluneční soustavu do její dnešní podoby, patří mezi jeden z hlavních zájmů moderní nebeské mechaniky. Jedním z takových dějů jsou i výrazné změny hlavních poloos planet v důsledku gravitační interakce s hmotným diskem transneptunických planetesimál. Migrace planet v disku planetesimál byla zřejmě poslední velkou dynamickou nestabilitou sluneční soustavy, která se odehrála přibližně před 4 miliardami let, uvedla planety na jejich dnešní dráhy a znatelně ovlivnila veškeré populace malých těles sluneční soustavy.

Vznik obřích planet. Jak zapadá zmiňovaná planetární migrace do všeobecně přijímaného modelu vzniku sluneční soustavy? V plynoprachovém protoplanetárním disku vznikala postupnou akrecí pevné složky větší tělesa. Nejprve subkilometrová, následně planetesimály a nakonec planetární embrya (Bitsch a kol., 2015). V zóně za sněžnou linií zřejmě probíhala akrece rychleji díky depozici vodního ledu, který přispěl ke zvýšení plošné hustoty pevné složky disku (Brunini & Benvenuto, 2008). Nejhmotnější embrya v této oblasti umožnila lokální gravitační kolaps plynu, čímž si utvořila hmotné plynné obálky — vznikly obří planety.

V této fázi vývoje ovšem sehrál významnou roli vliv centrální hvězdy, která během své kontrakce k hlavní posloupnosti nulového věku prošla eruptivním stádiem a vymetla zbývající plyn z disku do mezihvězdného prostoru. Tuto skutečnost potvrzují přímá pozorování protoplanetárních disků a hvězd v různých stádiích vývoje (Armitage a kol., 2003; Johnstone a kol., 2014). Z toho mimo jiné vyplývá, že obří planety musely své plynné obálky získat na časové škále srovnatelné s 10 Myr, protože poté už na jejich vznik nebyl v okolí dostatek plynného materiálu.

Hydrodynamické simulace naznačují, že vznik planety za tak krátkou dobu je problematický zejména u ledových obrů, pokud bychom uvažovali, že se formovaly na dnešních orbitách (Levison & Stewart, 2001). V takovém případě jsou totiž oběžné doby příliš velké pro dostatečně rychlé utvoření hmotného embrya, kolem kterého by mohla vzniknout plynná obálka. Toto je jeden z hlavních argumentů, které vedly k přesvědčení, že obří planety obíhaly krátce po svém vzniku výrazně blíže ke Slunci, než je tomu dnes.

Průběh migrace planet. Planety následně prodělaly migraci v *plynném disku*, během níž se zřejmě zachytily ve *vzájemných* rezonancích středního pohybu (Masset & Snellgrove, 2001; Morbidelli & Crida, 2007). Vystává přirozená otázka, jaký mechanismus vedl k migraci planet na dnešní dráhy *po* rozptýlení plynného disku. Silné perturbace, vyvolané nestabilní kompaktní konfigurací obřích planet, byly tlumeny masivním diskem planetesimál ($M_{\text{disk}} = 20$ až $40 M_{\oplus}$, Nesvorný & Morbidelli (2012)), které zůstaly v oblasti ze Neptunem, kde se žádná obří planeta nestihla vytvořit. Pomalá migrace planet, případné rezonance středního pohybu a následné vniknutí Neptunu mezi planetesimály vedly k destabilizaci transneptunického disku. Změny momentu hybnosti¹ planet při gravitačním rozptylování planetesimál vedly k výrazným změnám velkých poloos planetárních drah. Zároveň se značně zvýšil tok impaktorů skrze sluneční soustavu, což vedlo k zrychlenému koliznímu vývoji populací malých těles a k zesílení kráterování měsíců. Toto období se označuje jako velké pozdní bombardování (Gomes a kol., 2005).

Samotné rozptýlení transneptunických planetesimál umožňuje vysvětlit migraci planet na dnešní dráhy (Tsiganis a kol., 2005), nicméně způsobuje též *plynulý* nárůst separace drah Jupiteru a Saturnu, což v simulacích často způsobuje tři nežádoucí efekty: (i) excentricity terestrických planet vzrostou nad pozorované hodnoty (Brasser a kol., 2009); (ii) sekulární rezonance ν_6 a ν_{16} svým pomalým průchodem přes hlavní pás vytvoří struktury, které se neshodují s pozorováním (Morbidelli a kol., 2010); (iii) vlastní frekvence planetárního systému taktéž neodpovídají dnešnímu stavu (Morbidelli a kol., 2009). Všechny tyto nežádoucí efekty do jisté míry zaniknou v případě, kdy vzájemné vzdálení Jupiteru a Saturnu proběhne takřka *skokově*, na škále menší než 0,1 Myr. Protože rozptylování planetesimál takto rychlou a náhlou migraci neumožňuje, předpokládá se, že ve sluneční soustavě nastala série vzájemných blízkých *přiblížení* obřích planet (tedy opakovaný rozptyl planety na planetě).

Nedávná studie Nesvorného a Morbidelliho (2012) se zabývala statistickým vyhodnocením několika tisíců simulací migrace planet, často s nestabilitou označovanou jako „skok Jupiteru“. Jedná se o událost, při které Saturn rozptýlí jednoho

¹Máme na mysli změny při výměně momentu hybnosti, jehož celková velikost se zachovává.

z ledových obrů směrem k Jupiteru, a pak sám migruje ven, Jupiter následně ledového obra rozptýlí do vnější části sluneční soustavy, a sám tedy migruje dovnitř. Ukázalo se, že při takové interakci je ledový obr často vymrštěn zcela *mimo* sluneční soustavu. Dokonce je statisticky pravděpodobnější počáteční konfigurace sluneční soustavy s pěti obřími planetami.

Otázka přesného průběhu planetární migrace i nadále zůstává otevřeným tématem. Ačkoliv jsou simulace migrace založeny na Newtonově gravitačním zákoně, který je dostatečně přesný a jednoduchý, díky vysoké míře chaosu N -částicových systémů se tato úloha stává netriviální. Navíc je třeba si uvědomit, že se jedná o úlohu *inverzní*: je třeba nalézt takové počáteční podmínky, které vedou k vývoji soustavy do stavu co nejpodobnějšího dnes pozorovanému.

Souvislost migrace planet s malými tělesy. Jedním z efektivních způsobů, jak testovat věrohodnost scénářů migrace, je studium vývoje populací malých těles při změnách planetárních drah. Malá tělesa totiž výrazně reagují na jakékoliv změny perturbujících gravitačních sil a v jejich orbitálních strukturách nebo fyzikálních vlastnostech lze nalézt otisk globálních procesů, které ve sluneční soustavě proběhly. Ovšem často jsou tyto informace obtížně identifikovatelné, protože malá tělesa se vyvíjejí neustále, ať už orbitálně, kolizně nebo působením různých negravitačních zrychlení. V souvislosti s migrací nás tedy zajímají především takové populace, jejichž vývoj za poslední 4 Gyr jsme schopni alespoň přibližně rekonstruovat.

Rezonance 2:1 s Jupiterem. Jak naznačila řada předchozích studií (např. Rogig a kol., 2002; Brož a kol., 2005; Chrenko, 2013), jedna z takových populací se zřejmě nachází v rezonanci 2:1 středního pohybu s Jupiterem (často ji budeme označovat zkratkou J2/1). Tato silná rezonance prvního řádu odpovídá Kirkwoodově mezeře, která se nazývá Hecuba (Kirkwood, 1867; Schweizer, 1969), a je považována za hranici mezi vnějším hlavním pásem a oblastí Cybele (viz obrázek 1). Její název je odvozen od velké planetky (108) Hecuba, která se nachází blízko rezonance 2:1, ale nikoliv přesně v ní.

V rezonanci 2:1, která byla zprvu považována za zcela vyprázdněnou, setrvává vícero malých asteroidů, objevených během 20. století; první asteroid zpozorovaný v J2/1 byla (1362) Griqua, objevená roku 1943 (Rabe, 1959). Dynamika těchto

těles byla velmi dobře prostudována v posledních třech desítkách let pomocí analytických a semi-analytických metod (např. Murray, 1986; Moons a kol., 1998), symplektického mapování (např. Roig & Ferraz-Mello, 1999) a frekvenční analýzy (např. Nesvorný & Ferraz-Mello, 1997). Tyto studie poskytly vhled do vnitřní struktury rezonance, která je ovlivněna překryvem se sekulárními (Morbidelli & Moons, 1993) a sekundárními rezonancemi (Wisdom, 1987; Henrard a kol., 1995). Ukázalo se, že zatímco oblasti překryvu vyvolávají velmi chaotické chování drah planetek, lze ve fázovém rezonančním prostoru nalézt dvě oddělené oblasti kvaziregulárních pohybů (Franklin, 1994; Michtchenko & Ferraz-Mello, 1997). Tyto oblasti byly označeny jako stabilní ostrovy A a B (Nesvorný & Ferraz-Mello, 1997).

Nicméně i stabilita těchto ostrovů mohla být v minulosti narušena, jak navrhl Ferraz-Mello a kol. (1998). Možný mechanismus, který by způsobil zvýšení chaosu v ostrovech, byl popsán jako rezonance 1:1 mezi librační periodou P_{σ} planetek v J2/1 a periodou P_{GI} velké nerovnosti Jupiteru a Saturnu. Ačkoliv současná hodnota periody velké nerovnosti je 880 yr, v minulosti byla zřejmě kratší a narůstala během rozbíhavé migrace Jupiteru a Saturnu. Pokud byla někdy v minulosti perioda velké nerovnosti srovnatelná s librační periodou (která je typicky $\simeq 420$ yr), nastala by zmíněná rezonance.

Díky neustálému zdokonalování observační techniky a přehlídkám oblohy byla v J2/1 objevena populace planetek dostatečně početná pro statistickou analýzu pomocí numerických metod. Roig a kol. (2002) provedli dlouhodobé integrace 53 pozorovaných rezonančních drah ve zjednodušeném modelu se čtyřmi obřimi planetami a identifikovali dráhy dvojího typu: nestabilní a stabilní. Zatímco dynamické životní doby první skupiny jsou relativně krátké a její členové z rezonance unikají na škálách 10 Myr, asteroidy druhé skupiny mohou vykazovat životní doby srovnatelné se stářím sluneční soustavy. Dráhy těchto těles byly lokalizovány v ostrově B a jeho okolí, kam jsou rozptylovány chaotickou difuzí. Avšak v ostrově A žádná planetka nalezena nebyla.

V sérii článků, zaměřených na J2/1 a rezonance prvního řádu obecně, Brož a kol. (2005) a Brož & Vokrouhlický (2008) aktualizovali katalog rezonančních planetek. Identifikovali 92 nestabilních a 182 stabilních planetek, z nichž 9 se nacházelo

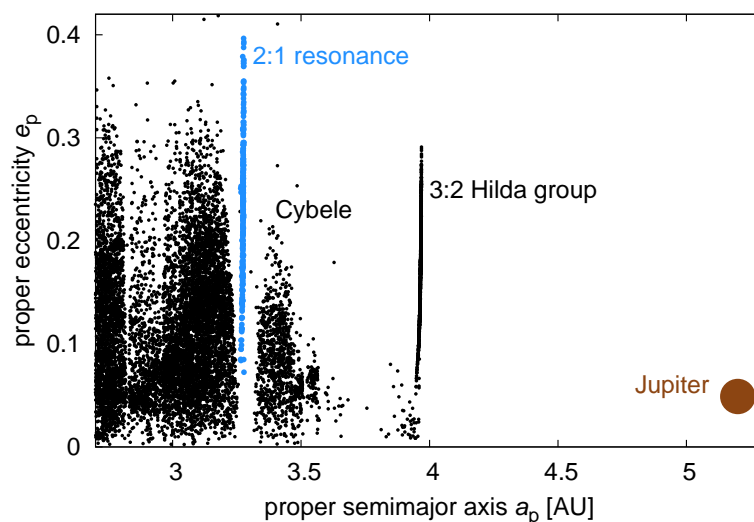
v ostrově A. Původ nestabilních asteroidů byl vysvětlen pomocí Jarkovského driftu, který doplňuje tělesa jejich transportem z přilehlého vnějšího hlavního pásu, a udržuje tak tuto krátce žijící populaci v ustáleném stavu. Podobný model byl zkusmo použit i v případě stabilní populace, tentokrát jakožto transport z kolizní rodiny Themis (Brož a kol., 2005), která leží na podobných sklonech jako stabilní asteroidy v ostrově B. Tento model nicméně selhal, protože driftující fragmenty jsou příliš perturbovány krátce po vstupu do rezonance a neproniknou až do stabilních ostrovů.

V práci Roiga a kol. (2002) bylo poprvé popsáno kumulativní rozdělení velikostí stabilní populace, které je *strmé*, čili vzdálené od rovnovážného stavu (Dohnanyi, 1969), což by mohlo naznačovat nedávný vznik populace při srážce. Naproti tomu Brož & Vokrouhlický (2008) nenalezli v orbitálním rozdělení žádný shluk fragmentů; případná rodina by tudíž musela být již rozptýlená orbitálním vývojem, a tedy starší než 1 Gyr. Dopad fragmentů do ostrova A by navíc vyžadoval nerealistické rychlosti výhozu.

Cíle diplomové práce. Jedním z hlavních cílů této práce je podat vnitřně konzistentní vysvětlení původu a vývoje stabilní populace v rezonanci 2:1, které prozatím neexistuje. Je třeba vzít v potaz pozorovanou nerovnoměrnou populaci stabilních ostrovů, nízké sklony planetek ostrova B v porovnání s ostrovem A, i nerovnovážné rozdělení velikostí.

Dlouhé dynamické životní doby stabilních asteroidů a dosavadní neúspěšné pokusy o vysvětlení původu stabilní populace naznačují, že vznik této skupiny těles může souviset s obdobím migrace planet. Nedávné pokroky v migračních teoriích ukázaly, že původně kompaktní konfigurace planetárních drah, případně následná skoková migrace, může vést k destabilizaci oblastí, které jsou v dnešní sluneční soustavě stabilní. Jako příklad lze uvést Trojany a Hildy (Nesvorný a kol., 2013; Roig & Nesvorný, 2014): primordiální populace v příslušných rezonancích 1:1 a 3:2 s Jupiterem byly zřejmě zcela rozptýleny ještě před skokem Jupitera a pozorované populace vznikly zachycením těles z hlavního nebo transneptunického pásu během migrace planet. Lze očekávat, že i rezonance 2:1 při migraci prodělala značné změny polohy, vnitřní sekulární struktury a samozřejmě populace planetek.

Struktura diplomové práce. Diplomová práce je členěna následovně. V kapitole 1 je podán přehled aktualizovaných fyzikálních vlastností stabilní populace. Dále je diskutován vliv terestrických planet a Jarkovského jevu na dlouhodobou stabilitu studovaných planetek. V kapitole 2 porovnáváme různé metody, pomocí kterých lze provádět dynamické simulace s předepsanou migrací planet. Kapitola 3 je zaměřena na studium hypotézy rezonančního zachycení stabilní populace. V kapitole 4 zkoumáme, zda mohli planetární migraci přežít hypotetické primordiální rezonanční planetky. Následně v kapitole 5 ověřujeme, jaký vliv měla na rezonanční populaci hladká pozdní migrace planet. Kapitola 6 je věnována kolizním modelům. Příloha A obsahuje odborný článek s názvem *The origin of long-lived asteroids in the 2:1 mean-motion resonance with Jupiter*, který byl podán do časopisu *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. V příloze B jsou uvedeny nejdůležitější části zdrojového kódu integrátoru SWIFT, upraveného pro simulace s předepsaným vývojem planet.



Obrázek 1: Pozice planetek v rezonanci 2:1 středního pohybu s Jupiterem (modré body) zobrazená v rovině (a_p, e_p) , kde a_p je vlastní hlavní poloosa a e_p je vlastní excentricita. Černé body odpovídají okolním malým tělesům hlavního pásu, oblasti Cybele a skupiny Hilda. Vyznačujeme rovněž pozici Jupiteru. Vlastní elementy jsou převzaty z databáze orbitálních elementů AstDyS (Knežević & Milani, 2003).

1. Pozorované asteroidy v rezonanci 2:1 s Jupiterem

1.1 Charakterizace rezonančních drah

Střední pohyb n libovolného tělesa můžeme definovat jeho vztahem ke střední anomálii M jako:

$$n(t - t_0) = M(t), \quad (1.1)$$

kde t je časová proměnná a t_0 je okamžik průchodu tělesa pericentrem. Rezonancí $p : q$ středního pohybu mezi jistými dvěma tělesy rozumíme takový stav, kdy jsou střední pohyby obou těles právě v poměru $p : q$, kde p a q jsou celá čísla. Poměr oběžných period těles je pak přesně opačný.

Kritický úhel σ rezonance 2:1 středního pohybu planety s Jupiterem (značíme J2/1) je definován jako:

$$\sigma \equiv 2\lambda_J - \lambda - \varpi, \quad (1.2)$$

kde λ_J a λ je střední délka Jupiteru a planety a ϖ je délka perihelia planety¹. Kritický úhel těles nacházejících se v J2/1 libruje (kvaziperiodicky se mění na intervalu $< 2\pi$) s typickou periodou přibližně 420 yr. Naopak tělesa mimo rezonanci se vyznačují cirkulací kritického úhlu. Na základě těchto vlastností lze jednoduše identifikovat planety nacházející se v rezonanci.

Dynamika drah. Librace úhlu σ je též spojena s periodickými změnami oskuláčnické hlavní poloosy a , excentricity e a sklonu I . Provázání elementů dráhy lze ve zjednodušeném modelu pohybu planety v omezeném kruhovém problému Slunce–

¹Uvedené veličiny jsou v jednoduchém vztahu s klasickými Keplerovými elementy dráhy jako: $\lambda = M + \varpi = M + \omega + \Omega$, kde M je střední anomálie, ω je argument pericentra a Ω je délka výstupného uzlu.

Jupiter–planetka vystihnout adiabatickým invariantem:

$$N = \sqrt{a} \left(2 - \sqrt{1 - e^2 \cos I} \right). \quad (1.3)$$

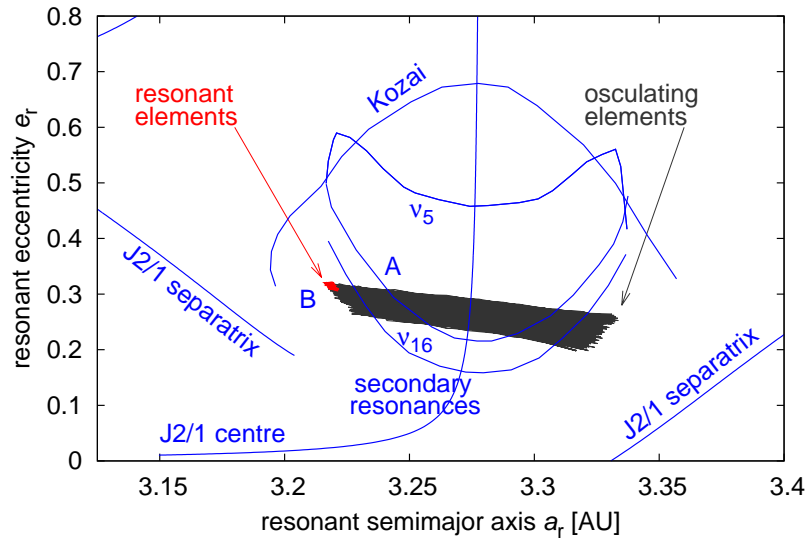
Přítomnost dalších planet a nenulová proměnná excentricita Jupiteru vyvolávají četné perturbace v J2/1 a zabraňují analytické integrabilitě rezonančních drah. Provázání oscilací a , e a I je ovšem do jisté míry zachováno. Hlavní poloosa osciluje kolem libračního centra, které se nachází blízko hodnoty přesné rezonance $a_{\text{res}} \simeq 3,27 \text{ AU}$. Excentricita a sklon nabývají maximálních hodnot, když oscilace hlavní poloosy dosahuje minima, a naopak.

Rezonanční elementy. Důsledkem popsaného chování je, že standardní metody pro výpočet vlastních elementů založené na středování (Knežević & Milani, 2003) vedou ke ztrátě informace o amplitudě librace (t.j. vlastní hlavní poloosa všech drah v rezonanci odpovídá přibližně hodnotě a_{res}). Proto je vhodné použít pro popis dráhových vlastností alternativní sadu elementů. Roig a kol. (2002) navrhli zaznamenávat oskulační elementy ve chvíli, kdy nabývají extrémálních hodnot v průběhu libračního cyklu. Tyto hodnoty, které budeme dále nazývat *rezonanční elementy*, lze nalézt jako průniky drah s vhodně definovanou plochou v prostoru oskulačních elementů. Soubor podmínek pro zavedení této plochy může mít například následující tvar:

$$\sigma = 0 \wedge \frac{d\sigma}{dt} > 0 \wedge \varpi - \varpi_J = 0 \wedge \Omega - \Omega_J = 0, \quad (1.4)$$

kde Ω značí délku výstupného uzlu a index J odpovídá veličinám pro planetu Jupiter. Tyto podmínky umožňují zaznamenat oskulační hlavní poloosu a v jejím minimu, excentricitu e a sklon I v jejich maximu. Librující planetky jsou tedy v prostoru rezonančních elementů vždy zobrazeny „nalevo“ (blíže ke Slunci) od centra rezonance.

Vzhledem k perturbacím a sekulárním efektům vyšších řádů jsou podmínky (1.4) jen zřídka splněny přesně. Při numerických výpočtech lze však použít mé-



Obrázek 2: Porovnání časového vývoje oskulačních (šedá křivka) a rezonančních (červená křivka) elementů pro asteroid (13963) Euphrates v rovině hlavní poloosa vs excentricita. V grafu jsou dále vyznačeny polohy separatrix a centra rezonance J2/1, sekulární rezonance ν_5 a ν_{16} , Kozaiova rezonance a systém sekundárních rezonancí (Henrard a kol., 1995). Hranice rezonancí jsou převzaty z práce Moonse a kol. (1998). Rovněž vyznačujeme přibližnou polohu stabilních ostrovů A a B (Nesvorný & Ferraz-Mello, 1997).

ně omezující sadu podmínek:

$$|\sigma| < 5^\circ \wedge \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} > 0 \wedge |\varpi - \varpi_J| < 5^\circ. \quad (1.5)$$

Zde namísto časové derivace používáme diferenci mezi následnými časovými kroky (značíme $\Delta\sigma$ apod.). Podmínku na Ω zde neklademe, při výpočtu postačuje ověřit, zda bylo zaznamenáno maximum sklonu.

Na obrázku 2 je zobrazen časový vývoj oskulačních a rezonančních elementů asteroidu (13963) Euphrates po dobu 10 Myr. Výpočet byl proveden integrátorem SWIFT_MVS2 (Levison & Duncan, 1994) se symplektickým schematem druhého řádu (Laskar & Robutel, 2001) a s implementací digitálních filtrů pro výpočet rezonančních elementů (Brož a kol., 2005). Uvážili jsme pouze vliv čtyř obřích planet. Vývoj obou typů zaznamenaných dráhových elementů odpovídá popisu výše.

V případě rezonančních elementů ještě poznamenejme, že jejich časový vývoj může posloužit jako jednoduchý indikátor *stability* zkoumané dráhy. Stabilní orbity totiž vykazují ustálenou libraci s malou variací kolem jisté střední hodnoty. Průniky s referenční rovinou se v čase příliš neposouvají (to je i případ asteroidu na obrázku 2) a rezonanční elementy jsou, s jistou omezenou přesností, konstantami pohybu. Situace v případě nestabilních drah je přesně opačná — průniky s referenční rovinou se v čase pomalu posouvají. Tato skutečnost propaguje do numericky spočtených rezonančních elementů; proto určujeme i jejich standardní odchylku jako chybu střední hodnoty ze záznamu přes dostatečně dlouhý časový interval (~ 100 kyr).

1.2 Dynamické mapy

Dynamické mapy slouží k posouzení stability drah v různých oblastech fázového prostoru. Umožňují kvalitativně odhadnout, které dráhy mohou být regulární, a které naopak chaotické. Existuje několik druhů dynamických map: některé jsou založeny na sledování vývoje částicové hustoty, jiné využívají výpočet l'japunovských časů, nebo podobné indikátory.

Postup při konstrukci. V případě rezonance 2:1 uplatňujeme za účelem dynamického mapování přímo vlastnosti rezonančních elementů. Jak jsme zmínili v předchozí kapitole 1.1, rezonanční elementy se chaoticky mění v případě nestabilních drah a v případě stabilních drah oscilují s malou amplitudou. Stejně chování vykazují akční proměnné dynamického systému, a proto jsou časové řady jejich extrémálních (nebo středních) hodnot často využívány pro dynamické mapování (např. Laskar, 1994; Morbidelli, 1997; Tsiganis a kol., 2007).

Při konstrukci dynamické mapy postupujeme následovně:

1. Rozdělme vyšetřovanou část fázového prostoru na buňky stejné velikosti.
2. Necht' souřadnice (a, e, I) středu každé buňky představují soubor počátečních rezonančních elementů. To je dosaženo nastavením úhlových orbitálních elementů tak, aby platily podmínky (1.4).

3. Integrojme takto vytvořené dráhy po několik milionů let a zaznamenejme vývoj rezonančních elementů.
4. Označme δa_r , δe_r a $\delta \sin I_r$ rozdíl mezi počátečním a konečným (nebo posledním zaznamenaným) rezonančním elementem.
5. Spočtěme celkový posun ve fázovém prostoru pomocí metriky:

$$d \equiv \sqrt{\left(\frac{\delta a_r}{\bar{a}_r}\right)^2 + (\delta e_r)^2 + (\delta \sin I_r)^2}, \quad (1.6)$$

kde \bar{a}_r značí aritmetický průměr spočtený z počáteční a konečné rezonanční hlavní poloosy. Vzdálenost d reprezentuje míru dynamické stability počáteční dráhy a používáme ji jako charakteristickou veličinu pro celou buňku. Poznamenejme, že definice d je obdobou metriky užívané v hierarchické shlukovací metodě (Zappalà a kol., 1995).

Dynamická mapa rezonance v současnosti. Za účelem ověření výše popsané metody jsme zkonstruovali dynamickou mapu 2:1 rezonance v současné konfiguraci sluneční soustavy. Fázový prostor jsme v intervalech $a \in (3,195; 3,275)$ AU, $e \in (0,1; 0,5)$, $I \in (0^\circ; 25^\circ)$ rozdělili na síť $40 \times 40 \times 5$ buněk. Abychom zlepšili celkovou statistiku, vygenerovali jsme v blízkosti každé testovací částice dvě další, a to náhodně v okolí nepřesahujícím 20% z příslušného rozměru buňky. Tímto způsobem jsme vytvořili počáteční podmínky pro 24 000 testovacích částic.

Následně jsme tyto syntetické dráhy integrovali pro dobu $t_{\text{int}} = 10$ Myr. Využili jsme tentýž symplektický integrátor jako v kapitole 1.1, s časovým krokem $\Delta t = 91,3125$ d. Do výpočtu jsme zahrnuli gravitační interakce se Sluncem a čtyřmi obřími planetami. Terestrické planety jsme zanedbali až na barycentrickou korekci, kterou jsme aplikovali na počáteční podmínky. Pro zavedení referenčního kartézského systému jsme použili Laplaceovu rovinu. Žádné negravitační zrychlení jsme zde neuvažovali.

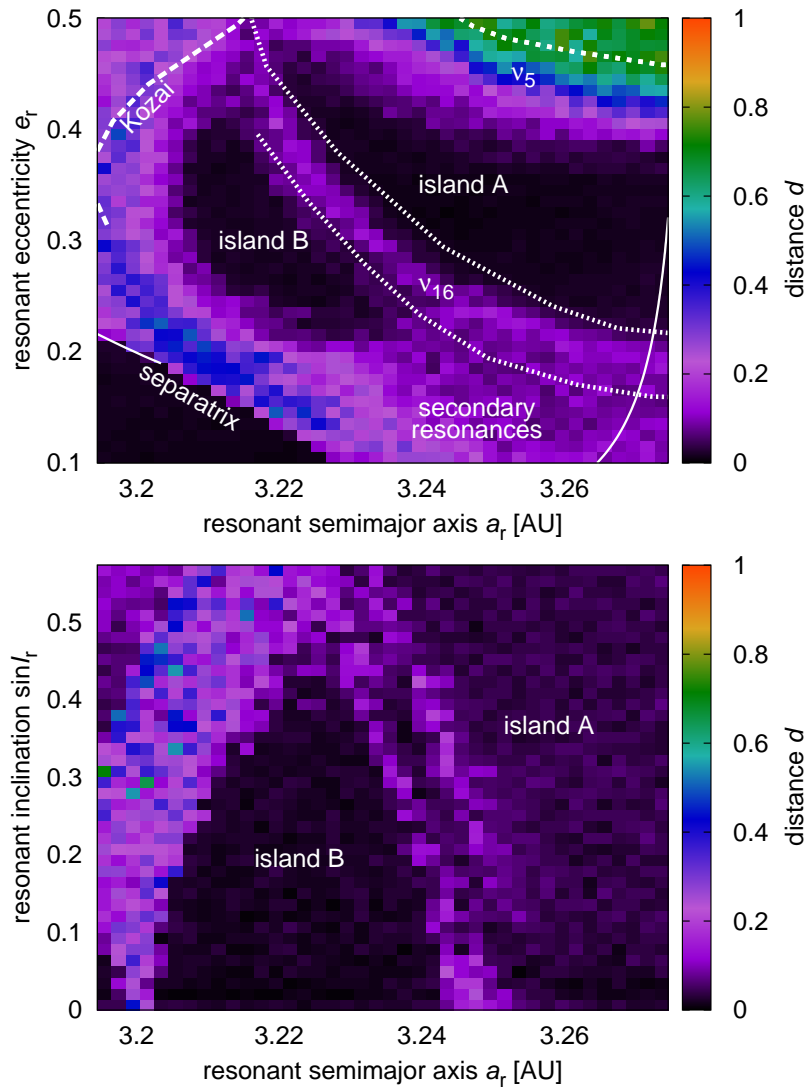
Po provedení integrace jsme spočetli vzdálenost d podle rovnice (1.6) pro všechny testovací částice. Abychom vyjádřili dynamickou stabilitu v jednotlivých buňkách, spočetli jsme průměrnou hodnotu \bar{d} pro částice, které pocházely z téže buňky.

Je nutno poznamenat, že v naší metodě není žádná časová míra, výsledná mapa tudíž představuje celkový posun v každé buňce během doby integrace t_{int} , ale nelze z ní určit, *jak rychle* k tomuto posunu došlo.

Horní panel obrázku 3 představuje výslednou dynamickou mapu jakožto zprůměrovanou projekci všech řezů v $\sin I_r$ do roviny (a_r, e_r) . Porovnáním s vnitřní strukturou 2:1 rezonance odvozenou v práci Moonse a kol. (1998) vidíme, že dynamická mapa tuto strukturu přímo vystihuje: oblasti ovlivněné překryvem se sekulárními nebo sekundárními rezonancemi se vyznačují vyšší mírou difuze ve fázovém prostoru.

Na dolním panelu obrázku 3 je zobrazena projekce mapy do roviny $(a_r, \sin I_r)$, ovšem v tomto případě jsme pro konstrukci mapy použili pouze testovací částice s malým rozmezím e_r (například na obrázku je $e_r \simeq 0,25$). Důvodem je výrazná závislost polohy separatrix a tvaru stabilních ostrovů na excentricitě, v mapě průměrované přes e_r by tedy byly hledané struktury špatně patrné. Na obrázku si lze povšimnout, jak se tvar stabilních ostrovů mění se sklonem: zatímco ostrov A se s rostoucím sklonem rozevírá, ostrov B se naopak zužuje. S přihlédnutím k dynamické mapě se zdá zvláštní, že je v ostrově B pozorován nadbytek planetek, zatímco v ostrově A se jich nachází velmi málo a navíc pouze na vyšších sklonech. Příčinu je patrně nutné hledat v dynamických procesech zodpovědných za vznik rezonanční populace.

Využití dynamických map. Dynamické mapování s použitím rezonančních elementů se tedy ukazuje jako vhodný nástroj pro zkoumání fázového prostoru uvnitř J2/1. Nezávisle se také potvrzuje, že zavedení rezonančních elementů je opodstatněné a robustní, a rovněž nám umožňuje jednoduše konstruovat portrét rezonance i pro jiná uspořádání planet, než je to současné. Můžeme takto určit polohu analogů stabilních ostrovů A a B pro libovolnou konfiguraci planetárních drah. Mapa samozřejmě neumožňuje určit, *jaké* rezonance jsou zodpovědné za vyvolání chaosu, to však není pro naši aplikaci zásadní, a navíc lze příslušné rezonance často identifikovat v analogii se známou sekulární strukturou rezonance 2:1.



Obrázek 3: Dynamická mapa 2:1 rezonance středního pohybu s Jupiterem spočtená v současné konfiguraci obřích planet. Nahoře: portrét fázového prostoru v rovině (a_r, e_r) zkonstruovaný jako projekce průměrovaná přes pět zkoumaných řezů v rezonančních sklonech $\sin I_r$. Barevná škála jednotlivých buněk odpovídá průměrné vzdálenosti d , kterou za integrační čas $t_{\text{int}} = 10 \text{ Myr}$ urazí částice s počáteční dráhou náležící dané buňce. Přes mapu je pro srovnání překreslen systém rezonancí křížících J2/1 (Moons a kol., 1998). Dole: portrét fázového prostoru v rovině $(a_r, \sin I_r)$ spočtený pro testovací částice s rezonanční excentricitou $e_r \simeq 0,25$.

1.3 Životní doby a stabilita drah

Výběr drah. Za účelem aktualizace pozorované populace ve 2:1 rezonanci jsme nejprve vybrali dráhy číslovaných a multiopozičních planetek v širokém okolí J2/1. Využili jsme databázi oskulačních elementů AstOrb (Bowell, 2012) k 15. prosinci 2012, z níž jsme vybrali elementy omezené v rovině (a, e) přímkami $e_1 = 0,45 ([a]_{\text{AU}} - 3,24) / (3,1 - 3,24)$ a $e_2 = 0,5 ([a]_{\text{AU}} - 3,24) / (3,46 - 3,24)$. Takto jsme získali 11 479 drah. Tyto dráhy jsme numericky integrovali po dobu 10 kyr se stejným nastavením jako v předchozích kapitolách. Planetární efemeridy odpovídající příslušnému Juliánskému datu jsem vzali podle JPL DE405 (Standish, 2004). Během integrace jsme pro každou planetku zaznamenávali časový vývoj kritického argumentu σ (viz rovnice (1.2)). Takto jsme našli 374 librujících asteroidů.

Životní doby. Abychom určili dynamické životní doby planetek v J2/1, a identifikovali tak nestabilní a stabilní část populace, bylo nutné provést dlouhodobou integraci jejich drah. V tomto případě je nutné si uvědomit, že zkoumaná rezonance je ovlivněna vysokou mírou chaotické difuze. I malá změna počátečních podmínek může zcela změnit následný orbitální vývoj. Protože orbitální elementy všech pozorovaných planetek jsou známy pouze s omezenou přesností, je v ideálním případě nutné uvážit vícero hodnot v intervalu observační nepřesnosti jakožto možné počáteční podmínky, abychom pokryli co nejvíce alternativ budoucího orbitálního vývoje.

Abychom zohlednili vliv chaosu, připsali jsme nejprve nalezeným librujícím planetkám příslušné nejistoty z katalogu AstDyS (Knežević & Milani, 2003). Ve čtyřech případech se nezdařilo data zpárovat, tyto planetky jsme tudíž z populace vyřadili. Následně jsme pomocí pseudonáhodného generátoru vytvořili v blízkosti nominální dráhy každé planetky svazek 10 blízkých syntetických orbit, takzvaných klonů. Elementy těchto orbit jsme vybrali z intervalu $\pm 3\sigma$ (kde σ nyní značí standardní odchylku) Gaussova rozdělení v prostoru nesingulárních orbitálních elementů. Tímto způsobem jsme získali 4 070 drah (1 nominální a 10 syntetických pro každý asteroid), které jsme integrovali po dobu 1 Gyr.

Dle Roiga a kol. (2002) definujeme dynamickou životní dobu τ jako časový úsek,

který asteroid stráví v rezonanci. Planetky, které rezonanci opouštějí, jsou obvykle z integrace vyřazeny díky vysoce excentrickým nebo skloněným drahám, které kříží dráhy planet nebo vedou k pádu do Slunce. Po skončení integrace jsme spočetli střední životní dobu $\bar{\tau}$ jako medián z životních dob pro každou skupinu klonů.

Na základě $\bar{\tau}$ jsme rozdělili rezonanční populaci do následujících skupin:

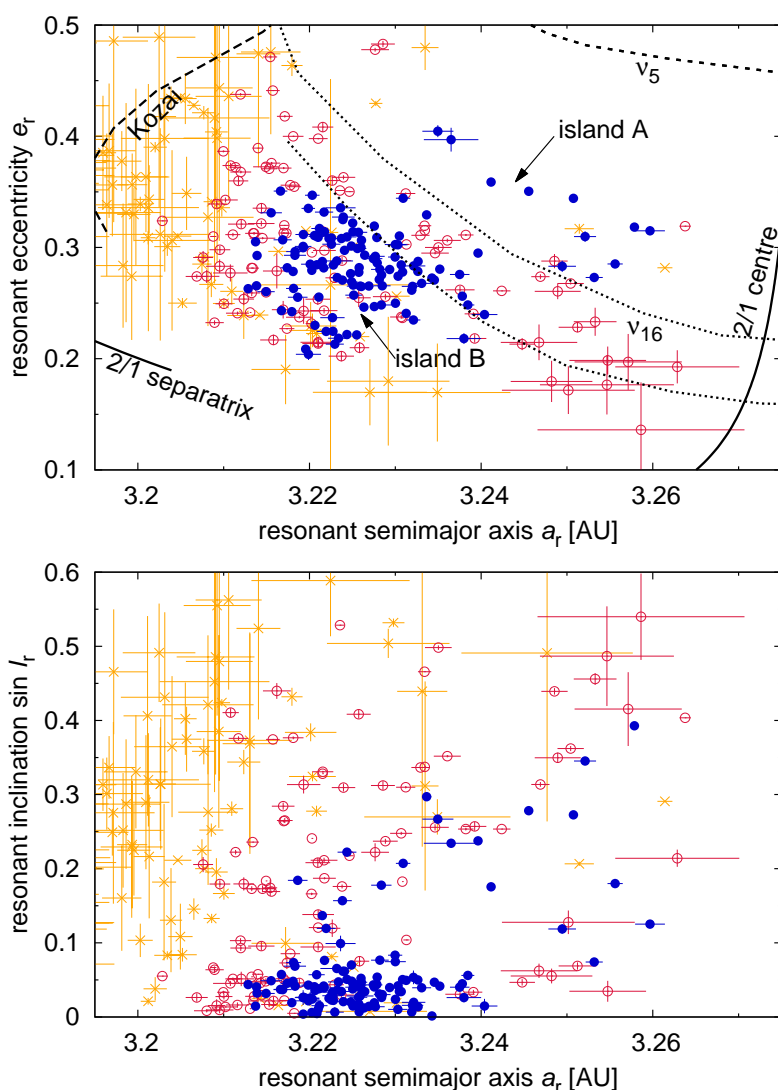
- $\bar{\tau} \leq 70$ Myr: tyto asteroidy jsou dynamicky nestabilní. Dle největší známé planety v této skupině se též označují jako skupina Zulu. Počet identifikovaných těles: 140.
- $\bar{\tau} \in (70; 1000)$ Myr: tyto planetky jsou marginálně stabilní. Označují se jako skupina Griqua. Počet identifikovaných těles: 106.
- $\bar{\tau} \geq 1$ Gyr: tyto planetky jsou dynamicky stabilní. Označují se jako skupina Zhongguo. Počet identifikovaných těles: 124.

Pro srovnání uvádíme počet asteroidů z poslední studie Brože & Vokrouhlického (2008), kteří identifikovali 92 nestabilních a 128 stabilních planetek.

Orbitální rozdělení. Na základě dlouhodobé integrace jsme rovněž sestrojili orbitální rozdělení asteroidů v rezonanci 2:1. Pro každou testovací částici jsme nejprve spočetli průměrné hodnoty rezonančních elementů za 1 Myr od začátku integrace, následně jsme ještě zprůměrovali výsledky pro každý asteroid a jeho klony. Standardní odchylka je potom definována jako nejistota aritmetického průměru².

Výsledné střední orbitální elementy jsou vyneseny na obrázku 4 jako projekce v rovinách (a_r, e_r) a $(a_r, \sin I_r)$. Skupina Zhongguo se nachází v samotném centru stabilních ostrovů, 11 planetek v ostrově A a 113 v ostrově B. Velká většina planetek Zhongguo ostrova B vykazuje velmi nízké sklony drah, zatímco v ostrově A jsou jejich dráhy mnohem více skloněné. Skupina Griqua se částečně překrývá se skupinou Zhongguo, ale setrvává buďto na drahách s menší hlavní poloosou, nebo s vyšším sklonem. Mezi drahami planetek Zhongguo a Griqua není v orbitálním rozdělení jednoznačná hranice. Je tedy otázkou, zda rozdělení stabilní populace na tyto dvě

²Tímto postupem zřejmě dochází k jistému nadhodnocení chyby, protože počáteční elementy klonů byly voleny náhodně, čímž ale vznikají nekorelované veličiny. Orbitální elementy přitom do jisté míry korelované jsou, jak to popisují například korelační matice v databázích orbitálních elementů.



Obrázek 4: Orbitální rozdělení asteroidů ve 2:1 rezonanci v rovinách (a_r, e_r) (nahore) a $(a_r, \sin I_r)$ (dole). Symboly odpovídají dynamickým životním dobám: plné modré kruhy značí dynamicky stabilní skupinu Zhongguo, prázdné červené kruhy představují marginálně stabilní skupinu Griqua, oranžové křížky odpovídají nestabilní skupině Zulu. Chybové úsečky značí standardní odchylku spočtených dráhových elementů.

podskupiny má ještě jiný fyzikální význam než z hlediska životních dob. Pozice planetek skupiny Griqua spíše naznačuje, že jedná o část asteroidů Zhongguo, které náhodně vstoupily do okrajových částí stabilních ostrovů a byly rozptýleny chaotic-

kou difuzí; jejich původ by tedy měl být společný.

Jelikož se zaměřujeme na studium stabilní populace, na obrázku 4 chybí velká část nestabilních planetek. Zobrazené nestabilní asteroidy povětšinou chaoticky driftují směrem k drahám, které jsou následně ovlivněny Kozaiovým mechanismem (Kozai, 1962).

1.4 Rozdělení velikostí, albeda a barevných indexů

Rozdělení albeda. Za účelem odvození základních fyzikálních vlastností populace ve 2:1 rezonanci jsme nejprve prohledali databázi WISE (Masiero a kol., 2011). Pro 44 planetek z 370 jsme našli geometrické albedo ve viditelném oboru p_V a efektivní průměr D odvozené z termálních modelů NEATM.

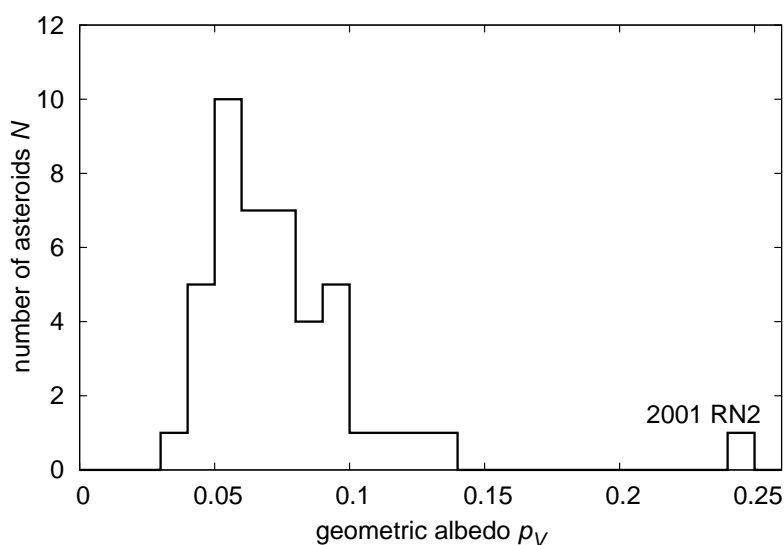
Na základě těchto dat jsme zkonstruovali neúplné rozdělení albeda planetek v rezonanci, jak ukazuje obrázek 5. Nejnižší nalezená hodnota albeda je $(0,034 \pm 0,002)$, zatímco nejvyšší nabývá hodnoty $(0,24 \pm 0,03)$. Toto relativně vysoké albedo náleží planetce 2001 RN₂. Jedná se zřejmě o taxonomický typ S. Většina asteroidů má však albedo nižší nebo rovno hodnotě $(0,136 \pm 0,004)$. Tvar rozdělení albeda je typický pro populaci vnějšího hlavního pásu, kde dominují planetky typu C.

Rozdělení velikostí. Vyšetřili jsme rovněž velikosti planetek. Pro 44 případů identifikovaných v databázi WISE používáme nalezenou hodnotu D a její nejistotu plynoucí z termálního modelu. Pro zbytek asteroidů jsme spočítali jejich přibližný průměr pomocí vztahu (Harris, 1998):

$$D = \frac{1329}{\sqrt{p_V}} 10^{-\frac{H}{5}}, \quad (1.7)$$

kde za veličinu H dosazujeme absolutní magnitudu z katalogu AstOrb a za p_V dosazujeme střední albedo $\bar{p}_V = (0,08 \pm 0,03)$. Standardní odchylka D je následně určena přenosem chyby veličin H a \bar{p}_V .

Sestrojili jsme kumulativní rozdělení velikostí rezonanční populace a jednotlivých podskupin, jak ukazuje obrázek 6. Strmou část rozdělení velikostí aproximujeme mocninovou závislostí $N(> D) \propto D^\gamma$, abychom odhadli index sklonu γ pro další

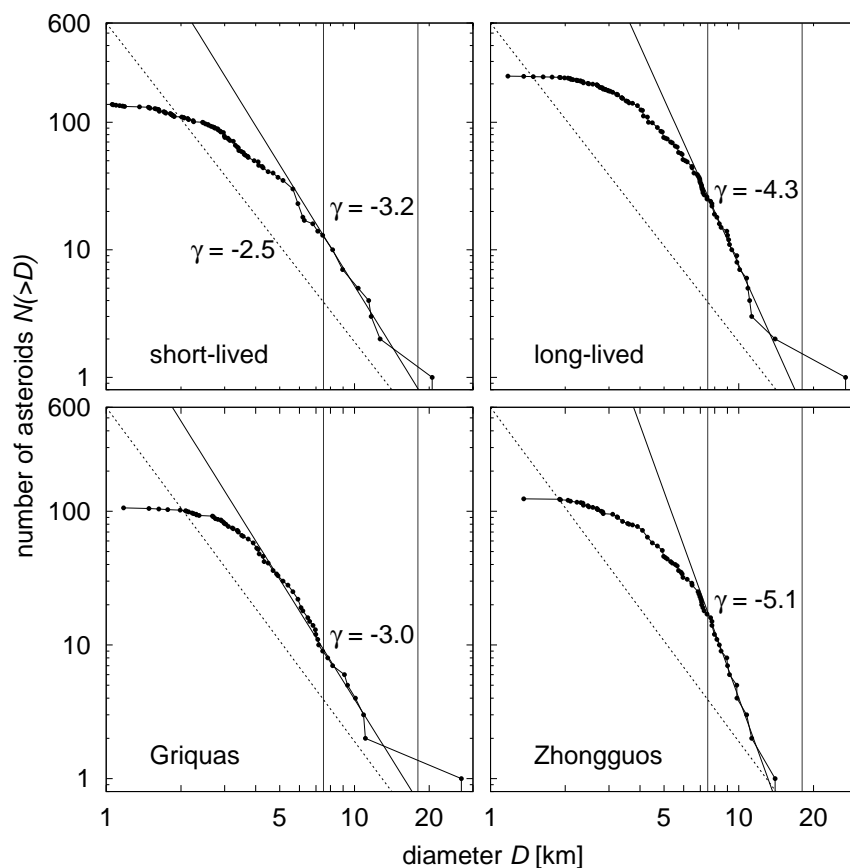


Obrázek 5: Histogram rozdělení albeda v populaci planetek v rezonanci 2:1. Na vodorovné ose vynášíme viditelné geometrické albedo p_V , na svislé ose potom počet planetek N . Šířka jednotlivých binů je $\Delta p_V = 0,01$. Data pro 44 rezonančních planetek jsme převzali z práce Masiera a kol. (2011).

skupina	nominální γ	variace γ
nestabilní	-3,2	(-2,5; -3,7)
stabilní	-4,3	(-3,7; -5,1)
Griqua	-3,0	(-3,0; -3,3)
Zhongguo	-5,1	(-3,9; -5,1)

Tabulka 1: Indexy sklonu γ určené metodou nejmenších čtverců, kterou jsme použili pro aproximaci strmých částí kumulativních rozdělení velikostí podskupin v rezonanci 2:1 mocninnou závislostí $N(> D) \propto D^\gamma$. Prostřední sloupec je výsledkem fitu v nominálním intervalu průměrů $D \in (7,5; 18)$ km. Třetí sloupec vystihuje variaci indexu sklonu při náhodné změně fitovaného intervalu.

porovnání. Hodnota γ samozřejmě závisí na zvoleném intervalu velikostí, ve kterém rozdělení velikostí fitujeme. Tento interval je vhodné zvolit tak, aby v jeho rozsahu nedocházelo k výraznému ohybu rozdělení velikostí. Jako nominální interval jsme zvolili $D \in (7,5; 18)$ km. Většina sestavených rozdělení velikostí se totiž začíná zplošťovat na dolní hranici tohoto intervalu, až na rozdělení velikostí skupiny Griqua, které zůstává přibližně stejně strmé až k $D \simeq 4$ km. Abychom prozkoumali,



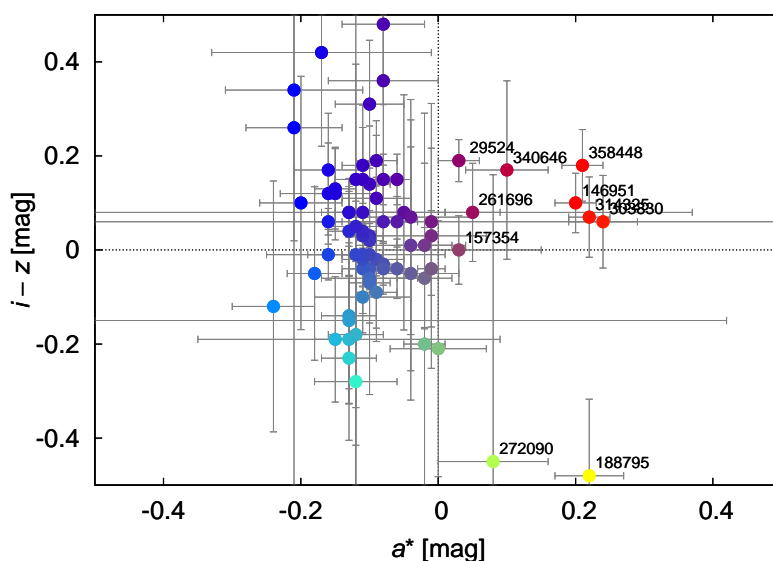
Obrázek 6: Kumulativní rozdělení velikostí jednotlivých dynamických podskupin populace v J2/1: nestabilní populace (nahore vlevo), stabilní populace (nahore vpravo), která je dále rozdělena na skupinu Griqua (dole vlevo) a Zhongguo (dole vpravo). Na vodorovné ose je vynesena průměr D , na svislé ose počet $N(>D)$ asteroidů větších než D . V grafu je použita logaritmická škála. Strmé části rozdělení jsou aproximovány mocninou závislosti $N(>D) \propto D^\gamma$. Vertikální linie vyznačují nominální interval ($D = 7,5$ až 18 km), ve kterém jsme aplikovali metodu nejmenších čtverců pro získání fitu. Výsledná hodnota indexu sklonu γ je vyznačena v každém panelu. Pro srovnání též vynášíme rovnovážné Dohnanyiho rozdělení se sklonem $\gamma = -2,5$ (Dohnanyi, 1969).

jak závisí parametr γ na volbě rozsahu fitovaných velikostí, náhodně jsme měnili hranice intervalu v rozmezí $D = 6$ až 21 km. Variace sklonu γ jsou souhrnně uvedeny v tabulce 1.

Důležitým novým výsledkem ve srovnání s prací Brože a kol. (2005) je, že rozdělení velikostí aktualizované skupiny Griqua již není plošší než rovnovážné Dohna-

nyho rozdělení s $\gamma = -2,5$ (Dohnanyi, 1969). Navíc si lze povšimnout, že rozdělení velikostí skupiny Zhongguo, Griqua a celé stabilní populace mají podobný celkový tvar (ačkoliv jejich strmost se liší). Považujeme to za další náznak toho, že dělení na skupiny Griqua a Zhongguo je z hlediska studia jejich původu nevhodné.

Barevné indexy. Nakonec jsme prohledali katalog SDSS MOC (Parker a kol., 2008). Nalezli jsme fotometrická a astrometrická data pro 81 rezonančních asteroidů, pro které jsme následně sestrojili diagram barev (viz obrázek 7). Hlavní komponenta označená jako a^* je definována na základě měření ve filtrech r , i a g jako $a^* = 0,89(g - r) + 0,45(r - i) - 0,57$ a používá se pro odlišení planetek typu C ($a^* < 0$) a typu S ($a^* > 0$). Rozdělení v diagramu opět odpovídá C-typům vnějšího hlavního pásu, ale přítomno je i několik přimíslených typů S. Mezi rozložením barev a orbitálním rozdělením jsme nenašli žádnou důležitou souvislost.



Obrázek 7: Diagram barev planetek v rezonanci 2:1 podle dat z katalogu SDSS MOC (Parker a kol., 2008). Na vodorovnou osu vynášíme optimalizovanou barvu a^* a na svislou osu barevný index $i - z$. Chybové úsečky odpovídají standardním odchylkám zobrazených veličin. Planetky, které mají pro vnější hlavní pás atypické hodnoty barev, jsou označeny příslušným katalogovým číslem.

1.5 Vliv terestrických planet a Jarkovského jevu

Jelikož se pozorovaná rezonanční populace zřejmě vyvíjela na škálách řádu miliard let, je vhodné řádně prostudovat její dynamickou stabilitu na srovnatelném časovém úseku. Tento problém byl nedávno studován v práci Skoulidou a kol. (2014). Zde vyvodíme důsledky této studie pro naši práci.

Perturbace vyšších řádů. Při studiu vnějšího hlavního pásu se obvykle zanebávají perturbace od terestrických planet (jako jsme to provedli v kapitole 1.3), protože toto zjednodušení výrazně zkracuje výpočetní čas. Skoulidou a kol. (2014) však ukázali, že v případě rezonance 2:1 je třeba terestrické planety zohlednit, jelikož dochází k řadě interakcí s Marsem, které způsobují lokální chaotické variace. Jejich efekt se pomalu kumuluje s časem a nakonec přispěje k narušení protekčního mechanismu, který jinak zabraňuje středně excentrickým drahám přiblížit se k Jupiteru. Zahrnutí terestrických planet ve výsledku vede k rychlejšímu dynamickému rozpadu stabilní populace.

Je-li navíc započten i Jarkovského efekt, difuze se stane ještě efektivnější pro planetky s velikostmi $D < 20$ km. Tento efekt byl již popsán v práci Brože & Vokrouhlického (2008). Kombinace rezonanční dynamiky a pomalého driftu v hlavní poloose totiž díky adiabatické invarianci způsobuje přechod dráhy na vyšší nebo nižší excentricitu. Výpočty provedené v práci Skoulidou a kol. (2014) ukazují, že stabilní populace v rezonanci 2:1 se při zohlednění terestrických planet a Jarkovského jevu dynamicky rozpadá přibližně podle exponenciálního zákona s charakteristickou časovou škálou řádově 1 Gyr.

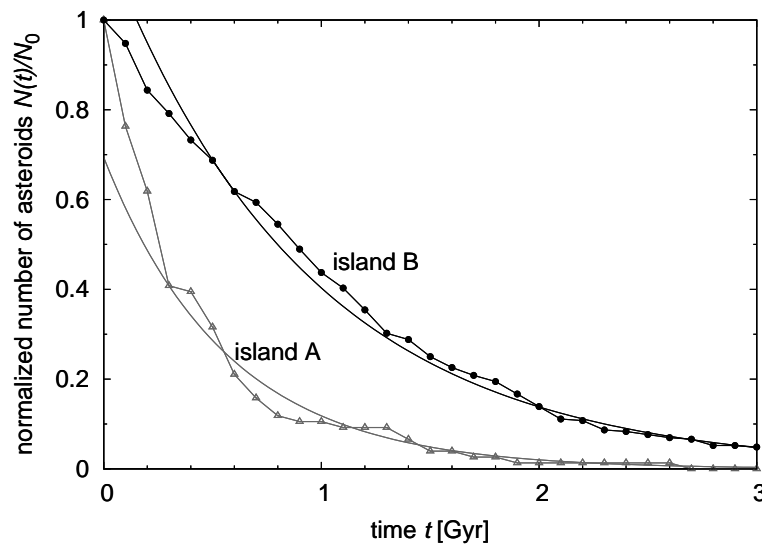
Dynamický model. Na obrázku 8 je ukázán výsledek obdobné simulace se sedmi planetami (od Venuše po Neptun), která pokrývá období 3 Gyr. Dále byl implementován zjednodušený model Jarkovského zrychlení, ve kterém do pohybových rovnic přidáváme dodatečné zrychlení odpovídající konstantnímu driftu v hlavní poloose o velikosti $da/dt = 2,7 \times 10^{-4} D^{-1} \text{ AU Myr}^{-1}$. Simulace, které vycházejí z práce Skoulidou a kol. (2014), využívají starší katalog stabilní populace planetek (Brož & Vokrouhlický, 2008). Jejich velikost D je odhadnuta na základě absolutní magnitudy H a za předpokladu albeda v intervalu 0,06 až 0,08. Planetkám

je taktéž náhodně připsána extrémní hodnota šikmosti $\gamma = 0^\circ$ nebo 180° .

Z dynamické simulace vyplývá, že míra difuze planetek v kvazistabilních ostrovech není stejná. Obrázek 8 ukazuje dvě sady křivek (pro jednotlivé ostrovy): je zřejmé, že populace v ostrově A ubývá rychleji než v ostrově B. Pokud aproximujeme časovou závislost počtu těles $N(t)$ pomocí exponenciálního zákona:

$$N(t) = N(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (1.8)$$

získáme metodou nejmenších čtverců charakteristickou škálu³ $\tau_A = (0,57 \pm 0,02)$ Gyr pro ostrov A a $\tau_B = (0,94 \pm 0,02)$ Gyr pro ostrov B. Toto nově objevené nerovnoměrné vyprazdňování je důležitou dynamickou vlastností rezonance 2:1 a je zřejmě jedním z důvodů pro pozorovanou asymetrii A/B.



Obrázek 8: Časový vývoj počtu stabilních planetek $N(t)/N_0$ normalizovaného na počáteční hodnotu. Jedná se o výsledek simulace s integrační dobou 3 Gyr se zahrnutím planet od Venuše po Neptun a s Jarkovského driftem v hlavní poloose. Datové body odpovídají populacím v ostrovech stability (A – prázdné trojúhelníky, B – plné kruhy). Příslušné křivky jsou fitované exponenciely, s charakteristickými časy $\tau_A = (0,57 \pm 0,02)$ Gyr a $\tau_B = (0,94 \pm 0,02)$ Gyr.

³Poznamenejme, že standardní odchylky, které jsou zde uvedeny, jsou čistě formální nejistotou metody nejmenších čtverců. Nijak nezohledňují systematiky použitého dynamického modelu. V kapitole 3 budeme nejistotu charakteristických časů znovu diskutovat.

2. Simulace s předepsanou migrací

V této kapitole podáváme přehled numerických metod, které slouží k simulacím migrace planet podle předepsaných scénářů. Jedná se o kapitolu technického rázu, v rámci které připravujeme a testujeme vhodné postupy pro dynamickou studii planetek v rezonanci 2:1 s Jupiterem během migrace planet. Ačkoliv v odborných člancích nebývá na podobné rozbory prostor, jejich důležitost je nesporná — je nutné správně posoudit, jakých aproximací se lze dopustit a jak co nejlépe simulovat fáze vývoje sluneční soustavy, o kterých máme pouze přibližné informace plynoucí z teorií nebeské mechaniky.

Scénáře migrace planet, které hodláme v práci používat, jsou založeny na N -částicových simulacích. Tyto simulace většinou zahrnují systém obřích planet, pás transneptunických planetesimál, a někdy též skupiny planetesimál v meziplanetárním prostoru, například v oblasti dnešního hlavního pásu. Simulace potom musejí správně zohlednit nejen dalekodosahovou gravitační interakci, ale rovněž dvoučásticová blízká přiblížení a gravitační rozptyl. Díky velkému počtu hmotných těles je integrace časově náročná a značně ovlivněná chaosem N -částicového systému.

Mezi hlavní neznámé v simulacích migrace patří: počet a počáteční konfigurace obřích planet, úhrnná hmotnost pásu planetesimál a požadovaná časová škála migrace (ačkoliv z nedávných prací vyplývá, že časová škála musela být poměrně krátká; Morbidelli a kol. (2010)).

Chceme-li efektivně zkoumat, jak působí migrující planety na některou z populací asteroidů v hlavním pásu, je vhodné použít simulace s migrací *předepsanou*. Jinými slovy, nebudeme konstruovat scénář od základu, protože bychom museli testovat velký počet počátečních podmínek, provádět numericky náročné simulace a až po jejich vyhodnocení studovat vliv migrace planet na malá tělesa. Namísto toho využijeme existující úspěšné scénáře, u nichž bylo prokázáno, že splňují některá důležitá omezení a dobře reprodukuje některé charakteristiky dnešní sluneční soustavy.

V simulacích s předepsanou migrací není vývoj hmotných těles počítán obvyklými integračními metodami. Namísto toho je na vstupu předložen soubor, v němž

jsou s určitým vzorkováním zaneseny orbitální elementy planet. Práce se vstupním souborem může být dvojího typu:

- načtení celého souboru do paměti před spuštěním výpočtu;
- průběžné načítání potřebných informací během výpočtu.

Druhá možnost většinou umožňuje podrobnější vzorkování na vstupu, avšak ani v jednom případě není vždy možné spoléhat na to, že vzorkování vstupu bude odpovídat časovému kroku integrátoru. Proto je nutné do integrátoru implementovat metodu, která umožní interpolaci v datech na vstupu, pomocí které aproximujeme vývoj planet v časovém úseku mezi předepsanými datovými body. S příslušným časovým krokem je zároveň integrován vývoj drah testovacích částic. Části programu, které počítají evoluci testovacích částic, obvykle není třeba měnit.

Existují dva základní principy interpolace ve vstupních datech:

- interpolace v orbitálních elementech;
- interpolace přímo v kartézských souřadnicích, ovšem podél keplerovských elips.

První princip již byl implementován do symplektického integrátoru `SWIFT_RMVS3` (Rozehnal, 2013), pod názvem `SWIFT_RMVS3_JJ` (zkráceně budeme psát JJ-integrátor). Tato verze využívá načtení vstupního souboru do paměti. Implementaci druhého algoritmu, spolu s modifikací pro průběžné načítání vstupního souboru, provádíme v této práci, abychom obě metody porovnali a případně měli k dispozici dva nezávislé nástroje pro řešení úloh s předepsanou migrací. Integrátor s interpolací v kartézských souřadnicích nazýváme `SWIFT_RMVS3_XYZINTERP` (zkráceně budeme psát XYZ-integrátor).

Ačkoliv jsou simulace s předepsanou migrací zjednodušující v tom smyslu, že spoléhají na již spočtené migrační scénáře a zanedbávají vliv jiných těles než Slunce a planet, mají i následující výhody:

- Do integrace zahrnujeme pouze tělesa, která vyvolávají nejsilnější perturbace. Pro hlavní pás je rozumné předpokládat, že jeho vývoj bude ovlivněn přede-

vším pohyby obřích planet a vliv planetesimál bude až druhořadý. Zanedbání planetesimál je sice zjednodušením, nicméně výrazně zkracuje výpočetní čas.

- Předepsaná migrace umožňuje *opakovaně* reprodukovat daný scénář. Výsledky jednotlivých simulací lze pak snadno porovnávat mezi sebou. To je důležitá výhoda oproti simulacím úplným, v nichž blízké počáteční podmínky mohou často vést ke značně rozdílným průběhům migrace.

2.1 Diskuze postupu při konstrukci dynamických modelů

V bakalářské práci Chrenka (2013) jsme provedli řadu simulací s předepsanou migrací podle scénáře „skákajícího Jupiteru“ (Morbidelli a kol., 2010) pomocí JJ-integrátoru. Ačkoliv jsme získali několik výsledků, které posloužily jako motivace pro další práci, chování testovacích částic v mnoha simulacích vykazovalo některé zvláštnosti, které naznačovaly možnou přítomnost systematické chyby v našem přístupu.

Nejprve na příkladu stručně popíšeme, jak jsme postupovali v simulacích s primordiální rezonanční populací (viz obrázek 9) a jaké anomálie ve výsledcích jsme pozorovali.

1. Za testovací částice jsme vzali pozorovanou stabilní populaci v rezonanci 2:1. Pro zvýšení efektivity simulací jsme tato tělesa klonovali, abychom získali vzorek o velikosti několika tisíců asteroidů.
2. Provedli jsme hladký drift planet pomocí JJ-integrátoru, kdy vstupní soubor s předepsaným vývojem drah obsahoval pouze dvě konfigurace obřích planet: dnešní konfiguraci a počáteční uspořádání studovaného scénáře migrace. Časová škála tohoto driftu byla $\tau = 0,1$ Myr. Záměrem tohoto kroku bylo přenést dnešní stabilní rezonanční dráhy tak, abychom vytvořili primordiální stabilní populaci.

3. Následovala samotná simulace předepsaného migračního scénáře. Vstupní soubory se zaznamenaným vývojem obřích planet jsme převzali jednak z práce Morbidelliho a kol. (2010) a rovněž z práce Nesvorného & Morbidelliho (2012), přičemž vzorkování vstupních dat bylo $\Delta t_{\text{vstup}} = 100 \text{ yr}$. Časová škála byla v prvním případě $\tau = 5 \text{ Myr}$, v druhém $\tau = 10 \text{ Myr}$.
4. Abychom porovnali orbitální rozdělení testovacích částic s dnešním pozorovaným stavem, zařadili jsme na závěr další hladký drift, tentokrát ze závěrečné konfigurace planetárních drah v migračním scénáři do konfigurace dnešní, pozorované.
5. Přeškálovali jsme částicovou hustotu v počáteční populaci testovacích částic, aby lépe reflektovala stav hlavního pásu před 4 Gyr, a pro tuto hustotu jsme odvodili počet přeživších primordiálních planetek.

Simulace zachycování asteroidů probíhaly obdobně s tím rozdílem, že jsme iniciální populaci testovacích částic rozmístili rovnoměrně v prostoru orbitálních elementů, který je při migraci procházen rezonancí 2:1 (kroky 1 a 2 jsme tedy mohli přeskočit).

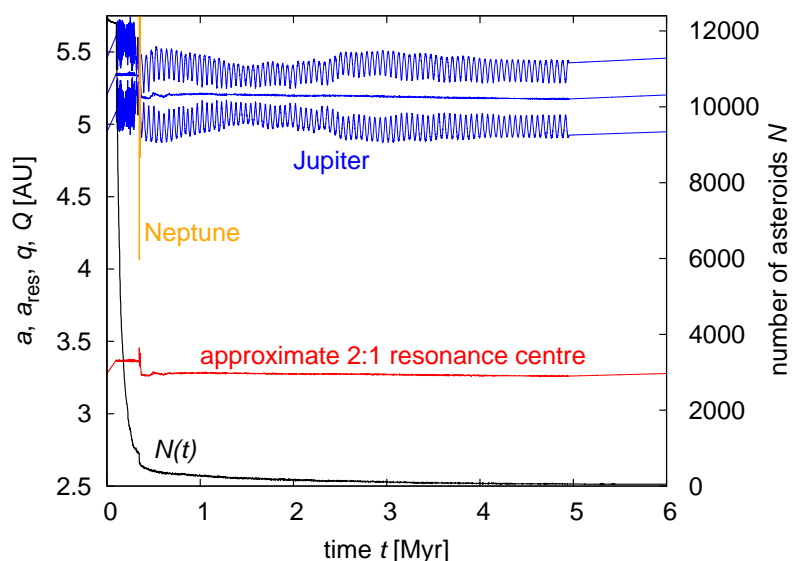
Veškeré simulace s primordiální populací, které jsme provedli, vykazovaly ihned na začátku migrace značný pokles početnosti testovacích částic a velká část populace byla vyřazena ještě před skokem Jupiteru (viz obrázek 9). To je ovšem v rozporu s našim záměrem studovat dynamiku stabilních primordiálních asteroidů – takovýto náhlý pokles může vykazovat jediné populace nestabilní.

Existuje několik možných vysvětlení:

- Simulace byla provedena správně, ale stabilní rezonanční ostrovy v kompaktnější konfiguraci obřích planet neexistují.
- Planetky mohou být destabilizovány během hladkého driftu ještě před samotnou migrací. Důvodem může být například rezonance mezi periodou librace a periodou velké nerovnosti Jupiteru a Saturnu (Ferraz-Mello a kol., 1998).
- Destabilizace může být způsobena příliš řídkým vzorkováním vstupního souboru.

- Metoda interpolace v orbitálních elementech pozmění dynamiku rezonance tak, že stabilní dráhy přestanou existovat.

Abychom zjistili, o kterou z uvedených možností se jedná, bylo nejprve třeba vyvinout nezávislý numerický nástroj, kterým bychom mohli provádět simulace s předepsanou migrací.



Obrázek 9: Příklad dynamické simulace z bakalářské práce Chrenka (2013). Jedná se o vývoj syntetické primordiální populace 12 400 testovacích částic během migrace obřích planet podle scénáře Morbidelliho a kol. (2010). Výpočet byl proveden pomocí JJ-integrátoru s interpolací předepsaného scénáře v orbitálních elementech. Nahoře: časový vývoj oskulační hlavní poloosy a , pericentra q a apocentra Q Jupiteru, dále vývoj oskulační hlavní poloosy Neptunu, vývoj přibližné polohy a_{res} centra rezonance 2:1 a příslušný vývoj počtu testovacích částic $N(t)$. Na začátku a na konci simulace je patrné zařazení hladkého driftu planet. Zřetelný je též značný náhlý pokles počtu testovacích částic na začátku samotné migrace.

2.2 Úprava integrátoru SWIFT

V této části popíšeme princip XYZ-integrátoru, který umožňuje interpolaci předeepsaného vstupního souboru s migračním scénářem v kartézských souřadnicích. Podrobnější popis jednotlivých podprogramů spolu se zdrojovým kódem obsahuje příloha B.

Integrátor nejprve načte do paměti orbitální elementy planet ve dvou po sobě jdoucích časech t_1 a t_2 . Tyto časy musí vzhledem k integračnímu času t splňovat nerovnost $t_1 < t < t_2$. Pokud není tato nerovnost splněna, integrátor prochází vstupní soubor dokud nenalezne první dva vhodné datové segmenty.

Po načtení orbitálních elementů dojde k jejich převodu na kartézské souřadnice a rychlosti. Následný krok závisí na tom, jaká je hodnota času t_{interp} , pro který chceme odvodit polohy a rychlosti planet. Je-li t_{interp} velmi blízký času t_1 nebo t_2 , připíše se planetám poloha a rychlost přímo v příslušném čase. Není-li tomu tak, proběhne interpolace v kartézských souřadnicích.

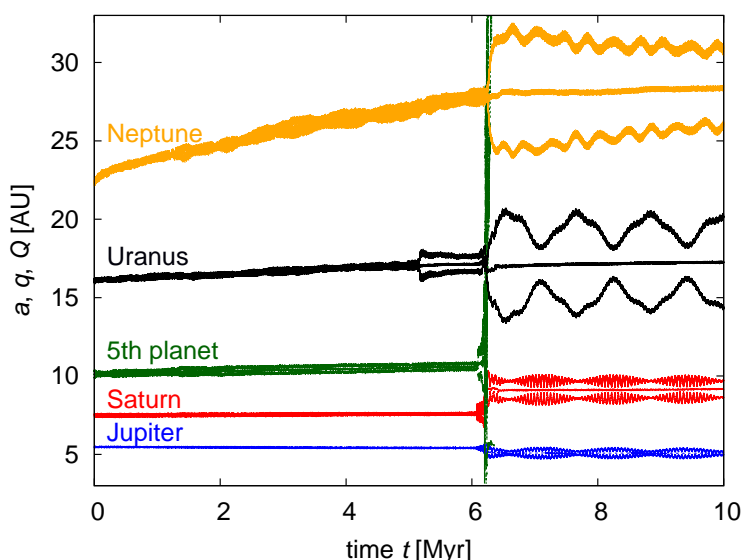
Interpolace probíhá tak, že je s planetou vykonán drift podél keplerovské oskulární elipsy v dopředném smyslu z času t_1 do t_{interp} a ve smyslu zpětném z času t_2 do t_{interp} . Rychlosti a souřadnice získané z obou driftů jsou následně kombinovány užitím váženého průměru, ve kterém váha závisí na délce driftu (kratší drift je uvážěn s větší vahou). Tato procedura se opakuje dokud $t_{\text{interp}} \leq t_2$. Pokud nerovnost neplatí, posouvá se datový segment s časem t_2 na pozici t_1 a pro čas t_2 je načten nový segment ze vstupního souboru.

Zvolená metoda interpolace by samozřejmě přestala být přesná, pokud bychom zvolili příliš řídké vzorkování vstupního souboru. Průběžné načítání vstupu ovšem umožňuje zvolit vzorkování podrobné, jelikož soubor nemusí být celý nahrán do paměti. Ve všech simulacích s XYZ-integrátorem používáme $\Delta t_{\text{vstup}} = 1 \text{ yr}$, což je čas kratší než charakteristická oběžná doba obřích planet.

Protože využíváme scénáře s pátou obří planetou, která je po blízkých přiblíženích k Saturnu a Jupiteru rozptýlena ven ze sluneční soustavy, je třeba v průběhu čtení vstupního souboru kontrolovat, zda se nezměnil počet hmotných těles. V případě, že se jejich počet mění, je totiž nutné správně omezit cykly, ve kterých jako

kontrolní index slouží identifikační čísla jednotlivých hmotných částic. Je také nutné po celou dobu integrace udržet správnou indexaci hmotných těles v případě, že se jedno či více z nich přestane ve vstupním souboru vyskytovat.

Na obrázku 10 je uveden příklad vývoje drah obřích planet podle scénáře s pátou obří planetou, která je při skoku Jupiteru vymrštěna pryč ze sluneční soustavy (Nesvorný & Morbidelli, 2012). Obrázek jsme zkonstruovali na základě simulace provedené XYZ-integrátorem. Tento předepsaný scénář migrace budeme používat v následujících kapitolách.



Obrázek 10: Orbitální vývoj obřích planet ve scénáři s pátou obří planetou (Nesvorný & Morbidelli, 2012) během nestability „skákájícího Jupiteru“ tak, jak byl reprodukován upraveným integrátorem s interpolací v kartézských souřadnicích. Na vodorovné ose je vykreslen čas t , na svislé pak hlavní poloosy a , pericentra q a apocentra Q obřích planet, jejichž vývojové linie jsou označeny názvem příslušné planety.

2.3 Porovnání integrátorů s předepsanou migrací

Popíšeme nyní test, který slouží jako porovnání obou integrátorů s předepsaným vývojem obřích planet a s jehož pomocí lze jednoznačně určit, který integrátor je pro náš účel vhodnější. Zaměřili jsme se na vývoj drah planetek v dnešní sluneční

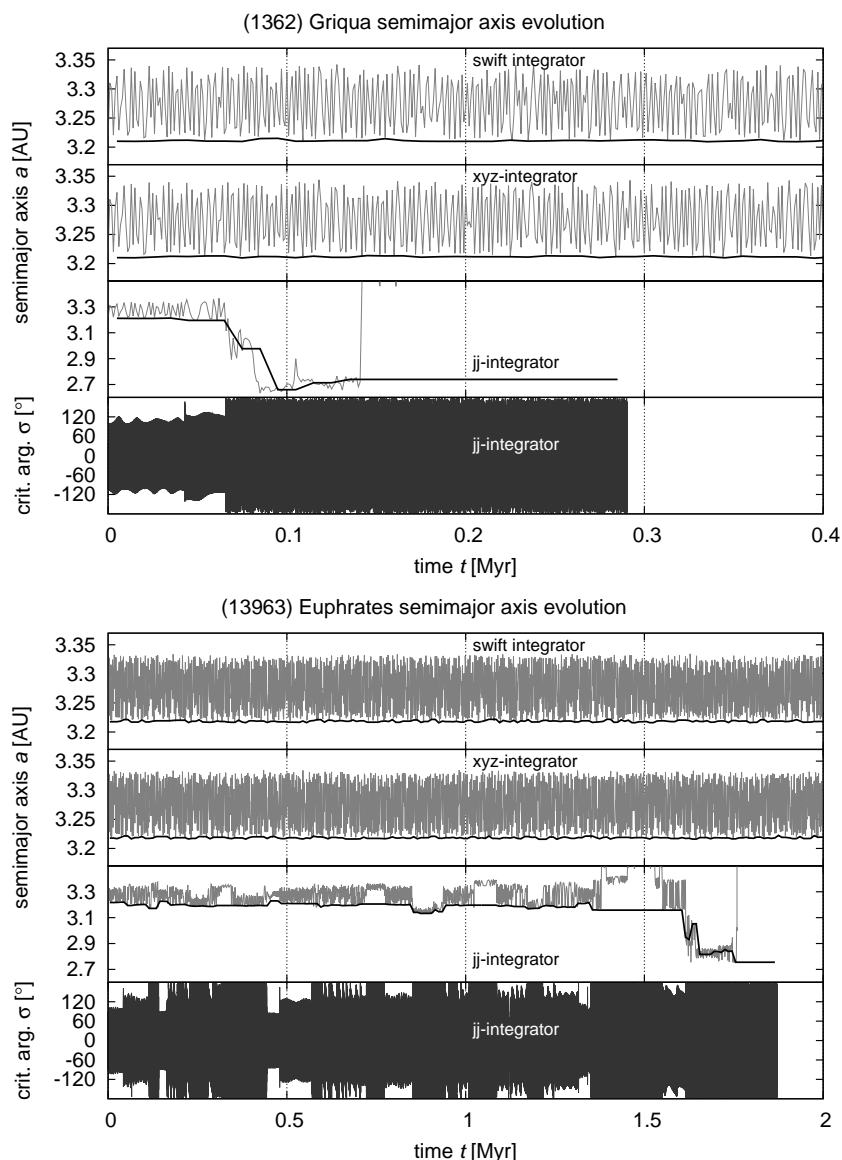
soustavě, protože v této konfiguraci je pro nás snazší vyhodnotit, zda se testovací částice vyvíjejí správně — z kapitoly 1.3 máme totiž informaci o životních dobách pozorovaných planetek.

V prvním kroku jsme pomocí stejného integrátoru, který jsme použili v kapitole 1.1, provedli úplnou simulaci vývoje obřích planet v jejich současné konfiguraci a jako testovací částice jsme zvolili tři planetky: (1362) Griqua a (13963) Euphrates spadající do kategorie marginálně stabilních těles, a (14871) Pyramus představující těleso s dynamickou životní dobou větší než 1 Gyr. Integrační doba této simulace byla $\tau = 10 \text{ Myr}$ a zaznamenávali jsme během ní oskulační elementy všech těles s krokem 1 yr, v případě testovacích částic jsme též zaznamenávali rezonanční elementy. Podrobný výstup nám v případě testovacích částic umožňuje prozkoumat vývoj kritického argumentu σ . V případě hmotných těles nám též poskytuje soubor, který jsme následně použili jako vstup s předepsaným vývojem pro JJ-integrátor a XYZ-integrátor.

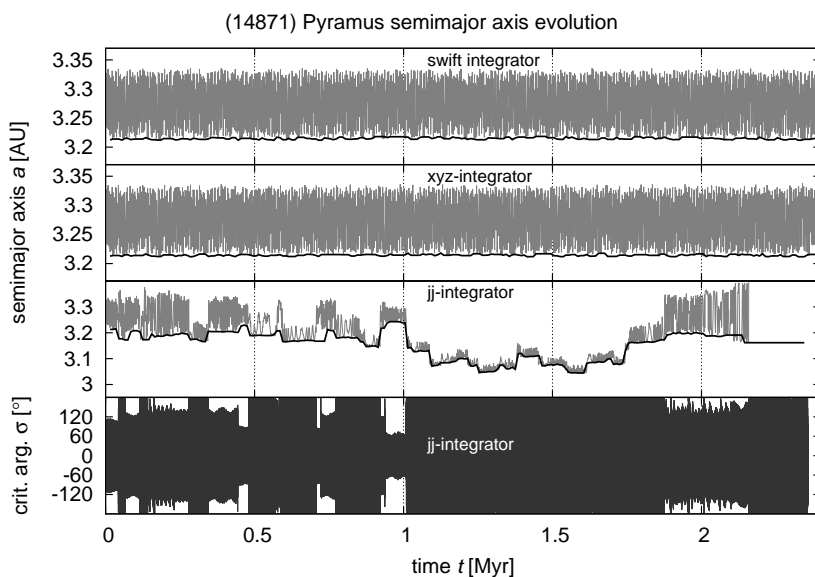
Pro JJ-integrátor jsme vzorkování vstupu zředili na $\Delta t_{\text{vstup}} = 100 \text{ yr}$, aby odpovídalo simulacím z práce Chrenka (2013). Pro XYZ-integrátor jsme ponechali co nejpodrobnější vzorkování $\Delta t_{\text{vstup}} = 1 \text{ yr}$. Do obou integrátorů jsme rovněž doplnili digitální filtry pro výpočet rezonančních elementů a následně jsme simulovali vývoj těchto planetek jako v simulaci úplné.

Na obrázcích 11 a 12 je vyneseno vývoj oskulačních a rezonančních hlavních poloos asteroidů získaný pomocí použitých integrátorů; v případě JJ-integrátoru je navíc vyneseno vývoj kritického rezonančního argumentu σ . Pokud porovnáme orbitální vývoj spočtený neupraveným integrátorem SWIFT a XYZ-integrátorem, lze říci, že evoluce je kvalitativně stejná. Míra oscilace oskulační hlavní poloosy nabývá stejné amplitudy, rezonanční hlavní poloosa zůstává v čase téměř konstantní.

Naproti tomu vývoj spočtený JJ-integrátorem se výrazně liší. Řádově za 0,1 Myr jsou všechny studované planetky poprvé vyřazeny z rezonance. V některých případech se planetka do rezonance znovu dostane, avšak pouze dočasně. To je ovšem v rozporu s dynamickými vlastnostmi, které jsme pro pozorovanou populaci odvodili v kapitole 1.3; stabilní populace se chová jako vysoce nestabilní!



Obrázek 11: Porovnání vývoje marginálně stabilních rezonančních planetek na základě výpočtů pomocí původního symplektického integrátoru SWIFT (jedná se o verzi SWIFT_MVS2), integrátoru s interpolací předepsaného vývoje planet v kartézských souřadnicích (označujeme jako XYZ-integrátor) a integrátoru s interpolací v orbitálních elementech (označujeme jako JJ-integrátor). Ve všech integrátorech byly doplněny digitální filtry pro výpočet rezonančních elementů. Horní panel odpovídá planetce (1362) Griqua a spodní panel planetce (13963) Euphrates. Pro výpočet provedený JJ-integrátorem vykreslujeme navíc vývoj kritického rezonančního argumentu σ .



Obrázek 12: Totéž jako na obrázku 11, nyní pro stabilní planetku (14871) Pyramus.

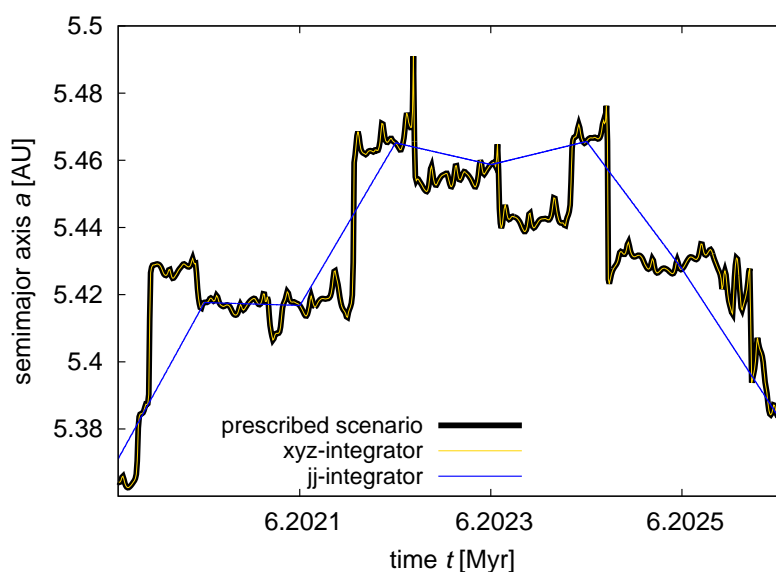
Dále jsme studovali, jak se situace změní, pokud pro JJ-integrátor použijeme vstupní soubor se vzorkováním $t_{\text{vstup}} = 2 \text{ yr}$ namísto $t_{\text{vstup}} = 100 \text{ yr}$. Ukázalo se, že se prodlouží doba, po kterou planetky vykazují librace kritického argumentu, a to v případě asteroidů (1362) Griqua a (13963) Euphrates přibližně na 1 Myr, v případě planetky (13871) Pyramus asi na 3 Myr. Avšak životní doba stále není slučitelná se stabilním charakterem drah, který bychom očekávali.

Rychlé vyřazení planetek z rezonance při použití JJ-integrátoru naznačuje, že vývoj obřích planet je při lineární interpolaci v orbitálních elementech aproximován tak, že je narušen protekční mechanismus, který dává vzniknout stabilním ostrovům ve 2:1 rezonanci. Důvody jsme stanovili následující:

- Lineární interpolace zřejmě vyhlazuje krátkoperiodické oscilace orbitálních elementů obřích planet (viz obrázek 13). Tím mohou být ovlivněny základní frekvence planetárního systému.
- Integrátor počítá střední anomálii M takovým způsobem, že na základě předepsaných po sobě jdoucích datových bodů spočte efektivní střední pohyb tělesa \bar{n} , při němž střední anomálie roste přesně tak, aby v předepsaných datových

bodech byl její vývoj spojitý. Důsledkem toho je, že během interpolace střední pohyb přesně neodpovídá aktuální oskulační hlavní poloose a , neboť je v každém interpolovaném úseku konstantní, ovšem poloosa se lineárně mění. Planeta tedy v různých částech interpolovaného úseku „zrychluje“ nebo „zpomaluje“ oproti předpokládanému vývoji v dráze, aby na konci hodnota její střední anomálie odpovídala hodnotě předepsané. Na tento nesoulad mezi dráhou a postupem planety musí planetky v jakékoliv rezonanci středního pohybu reagovat.

- Metoda jako taková je zřejmě příliš hrubou aproximací; interpolace v orbitálních elementech nezaručuje, že se přiblížíme reálnému vývoji, který se odehrává v kartézském prostoru.



Obrázek 13: Detail vývoje oskulační hlavní poloosy Jupiteru během nestability jeho dráhy při migraci planet. Černá křivka představuje původní vývoj spočtený v práci Nesvorného & Morbidelliho (2012), který slouží jako předepsaný scénář. Zbývající dvě křivky představují vývoj reprodukováný integrátory s předepsanou migrací: žlutá křivka odpovídá XYZ-integrátoru, modrá JJ-integrátoru. V případě interpolace v kartézských souřadnicích je použito vzorkování předepsaného scénáře $\Delta t_{\text{vstup}} = 1 \text{ yr}$, v případě interpolace v orbitálních elementech je $\Delta t_{\text{vstup}} = 100 \text{ yr}$.

Z provedeného testu je patrné, že JJ-integrátor není vhodným nástrojem pro zamýšlené simulace, protože nedokáže reprodukovat ani vývoj rezonance v dnešní konfiguraci planet, která je ve srovnání s obdobím migrace výrazně méně proměnlivá. Implementace XYZ-integrátoru se tedy ukázala jako velmi podstatná pro zlepšení přesnosti našich simulací.

Zároveň je zřejmé, že při užití XYZ-integrátoru musíme změnit originální postup při konstrukci dynamických modelů (viz kapitola 2.1). Není totiž možné aplikovat hladký drift planet před a po migraci, protože pro XYZ-integrátor máme s dostatečným vzorkováním k dispozici pouze samotný migrační scénář. Abychom vůbec mohli diskutovat, jak se vyvíjejí stabilní planetky během migrace, je třeba znát pozici stabilních ostrovů ve fázovém prostoru na začátku i na konci migrace. Pro tuto úlohu užíváme metodu dynamického mapování, kterou jsme představili v kapitole 1.2.

Nový postup při konstrukci dynamických modelů, který užíváme v dalších dvou kapitolách, je tedy následující:

1. Definujeme syntetickou počáteční populaci testovacích částic.
 - Primordiální populace: Pomocí dynamické mapy nalezneme analogy stabilních ostrovů v konfiguraci planet na začátku migrace. Testovací částice umístíme pouze do nich.
 - Zachycovaná populace: Testovací částice umístíme v oblasti vnějšího hlavního pásu, přes kterou se pohybuje migrující rezonance 2:1. Žádná testovací částice na začátku simulace neleží přímo v rezonanci.
2. Simulujeme migraci planet s nestabilitou „skákačícího Jupiteru“ pomocí XYZ-integrátoru. Využíváme výhradně novější scénář s pěti obřimi planetami z práce Nesvorného & Morbidelliho (2012.) Zdůrazňujeme, že simulujeme pouze období nestability, pozdní hladké migraci je věnována zvláštní kapitola 5.
3. Po skončení migrace lokalizujeme testovací částice, které se nacházejí na stabilních drahách. Užíváme k tomu dynamickou mapu spočtenou pro konfiguraci planet na konci migrace, která je mírně odlišná od konfigurace současné

sluneční soustavy.

4. Přeškálujeme počty testovacích částic podle předpokládaných počtů planetek v období před skokem Jupiteru.
5. Zohledníme dynamický rozpad stabilní populace v rezonanci 2:1 od konce migrace do současnosti aplikací exponenciálního zákona (1.8) odvozeného v kapitole 1.5.
6. Nezávisle je třeba ověřit, jakou chybu představuje zanedbání pozdní hladké migrace, během které může ještě nastat rezonance mezi periodou P_{GI} velké nerovnosti Jupiteru a Saturnu a periody P_{σ} librace planetek v J2/1.

3. Zachycování planetek z hlavního pásu při skoku Jupiteru

V této kapitole zkoumáme možnost zachycení asteroidů z vnějšího hlavního pásu do rezonance 2:1 středního pohybu s Jupiterem. Na základě výsledků několika desítek pomocných dynamických modelů jsme dále testovali správnou funkci XYZ-integrátoru a odvodili jsme počáteční podmínky pro simulaci zachycování. Její průběh a naše hlavní závěry nyní budeme diskutovat.

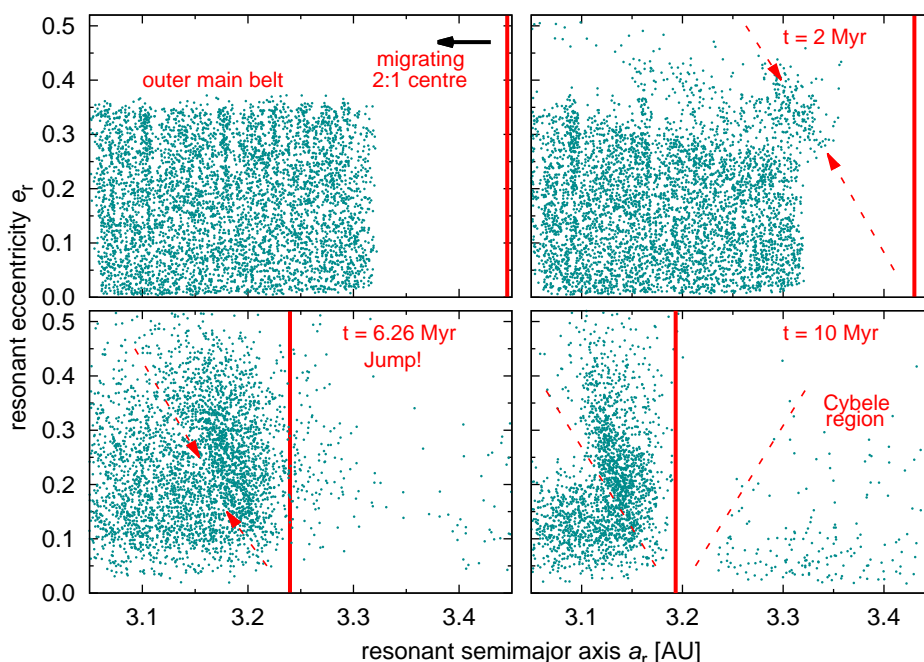
3.1 Počáteční podmínky a vývoj testovacích částic

Pro vytvoření počáteční populace jsme umístili 5 000 testovacích částic do oblasti fázového prostoru, kterou během migrace prochází rezonance 2:1. Protože dopředu známe vývoj hlavní poloosy Jupiteru, lze vhodné rozmezí jednoduše odhadnout použitím třetího Keplerova zákona. Zvolili jsme proto interval hlavních poloos počáteční populace jako $a \in (3,06; 3,32)$ AU, přičemž každé testovací částici jsme z něj přiřadili náhodnou hodnotu. Rozdělení excentricit a sklonů jsme taktéž zvolili rovnoměrné, odpovídající středně excitovanému hlavnímu pásu: $e \in (0; 0,35)$, $I \in (0^\circ; 15^\circ)$.

Během samotné integrace jsme zaznamenali časové řady rezonančních elementů testovacích částic a následně jsme je zpracovali pomocí Savitzky–Golayova vyhlazovacího filtru s polynomem druhého stupně a s šířkou klouzavého okna $\Delta t_{SG} = 0,1$ Myr.

Výsledek simulace ukazuje obrázek 14. Zdůrazňujeme, že pro jednoduchost jsou použity rezonanční elementy pro *všechny* testovací částice, tedy i pro částice ležící mimo rezonanci¹. Ve stavu krátce po začátku migrace se testovací částice příliš nevzdalují od počátečního rovnoměrného rozdělení, ve kterém si lze všimnout několika rezonancí středního pohybu vyšších řádů. Mezera, která se nachází mezi

¹ Rezananční elementy nemají pro planetky ležící mimo rezonanci zvláštní fyzikální význam, nicméně odpovídají extrému sekulární variace oskulačních elementů, jak jej udává rovnice (1.5).



Obrázek 14: Simulace rezonančního zachycení z vnějšího hlavního pásu ve scénáři s pěti obřími planetami (Nesvorný & Morbidelli, 2012). Zobrazen je vývoj testovacích částic v rovině (a_r, e_r) . Vertikální linie vyznačuje přibližnou polohu centra rezonance 2:1, které migruje dovnitř společně s Jupiterem. Integrovaný čas je uveden ve třech panelech ($t = 0, 2, 6,26$ a 10 Myr) a odpovídá časové ose v obrázku 10. Čárkované šipky respektive čáry naznačují rozsah librační zóny v případě migrující, respektive ustálené rezonance. Jednotlivé panely ukazují (shora dolů a zleva doprava): počáteční podmínky, relaxovanou populaci testovacích částic před skokem, stav během nestability „skákájího Jupiteru“ a konečný stav. Poznamenejme, že všechny testovací částice (i ležící mimo rezonanci) jsou pro jednodučnost zobrazeny v prostoru rezonančních elementů.

testovacími částicemi a rezonancí 2:1 je důsledkem volby počátečních podmínek – chceme simulovat zachycování do rezonance z vnějšku.

Po 2 Myr se na populaci ve vnějším hlavním pásu začínají projevovat relaxační procesy. Rezonance 2:1 mění svou polohu vzhledem k počátečnímu stavu a začíná perturbovat některé excentrické dráhy na okraji syntetické populace. Většina těchto drah přejde do nestabilní části rezonance 2:1 (diskutované v práci Brože a kol. (2005)). Rezonance středního pohybu vyšších řádů začínají zvyšovat excentricitu částicím, které v nich setrvávají.

V čase 6,26 Myr dochází k diskontinuitě sekulárního vývoje, známé jako „skok Jupiteru“. Rezonance pohybující se se skákajícím Jupiterem velmi náhle a výrazně změní svou polohu a v důsledku proniká značné množství testovacích částic do librační zóny, zatímco zbylé jsou excitovány a vyřazeny, případně přežijí migraci ve vynořující se oblasti Cybele.

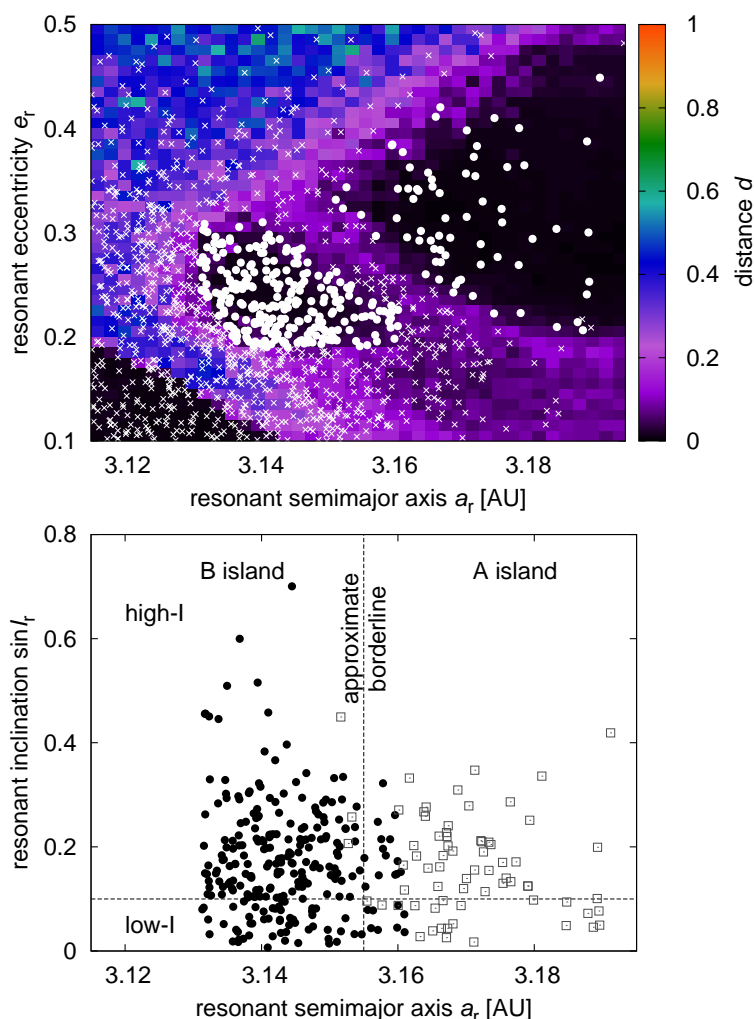
Nakonec po 10 Myr je mezi levou separatrix a libračním centrem stabilizována početná skupina testovacích částic jakožto výsledek rezonančního zachycení. Tělesa vně levé separatrix jsou prostě zbytkem počáteční populace ve vnějším hlavním pásu.

3.2 Zachycené planetky a porovnání s pozorováním

Identifikace stabilních planetek. Abychom určili stabilitu těles ze zachycené populace, konstruujeme dynamickou mapu pro konfiguraci planet na konci migrace. Ta nám umožňuje identifikovat analogy stabilních ostrovů A a B ve fázovém prostoru. Následně lze za planetky, které by měly vykazovat dlouhodobou stabilitu, označit ty testovací částice, které spadají do rozmezí některého z ostrovů.

Příslušná dynamická mapa je součástí obrázku 15. Pokrývá fázový prostor v intervalech $a_r \in (3,115; 3,195)$ AU, $e_r \in (0,1; 0,5)$ a $I_r \in (0^\circ; 25^\circ)$, které byly rozděleny na síť $40 \times 40 \times 5$ buněk (a výsledná mapa je výsledkem průměrování přes všechny řezy ve sklonech). Pro konstrukci mapy jsme do každé buňky umístili tři testovací částice a sledovali jejich vývoj po dobu 10 Myr.

Porovnáme-li mapu s obrázkem 3, okamžitě rozpoznáváme obdobné struktury. Stabilní ostrovy A a B jsou přítomny a jsou odděleny sekulární rezonancí ν_{16} . Separatrix Kozaiovy rezonance je také možno rozeznat. Hlavním rozdílem je tvar a velikost ostrova A — sekulární rezonance ν_5 není přítomna v zobrazené části fázového prostoru, což ostrov A efektivně zvětšuje vzhledem k jeho dnešní pozorované velikosti. Tato skutečnost ovšem výsledek příliš neovlivňuje, protože jen málo těles je v ostrově A zachyceno na vysoce excentrických drahách, jak je patrné z obrázku 15, kde jsou zároveň vyznačeny stabilní dráhy zachycené populace. Užitím dynamické mapy jsme našli $N_A^{\text{synth}} = 69$ stabilních planetek v ostrově A a $N_B^{\text{synth}} = 254$ stabil-



Obrázek 15: Výsledek zachycení planetek z vnějšího hlavního pásu do rezonance 2:1 v migračním scénáři pěti obřích planet. Nahoře: orbitální rozdělení v rovině (a_r, e_r) po skončení simulace nestability. Pozadí obrázku tvoří dynamická mapa rezonance 2:1 spočtená pro závěrečnou konfiguraci obřích planet. Bílé symboly reprezentují dráhy zachycených testovacích částic (odpovídají závěrečnému stavu na obrázku 14, ale zde vykreslujeme pouze omezenou část fázového prostoru, která obsahuje stabilní ostrovy). Testovací částice vnořené v tmavých izolovaných oblastech dynamické mapy považujeme za dynamicky stabilní a odlišujeme je kroužky. Ostatní testovací částice jsou označeny křížky. Dole: orbitální rozdělení v rovině $(a_r, \sin I_r)$. Vykreslujeme pouze částice, které jsme v horním panelu identifikovali jako stabilní. Černé kroužky odpovídají částicím zachyceným v ostrově B, šedé prázdné čtverce odpovídají částicím v ostrově A. Horizontální čárkovaná čára je pouze orientační — naznačuje, že většina pozorovaných stabilních planetek v ostrově B setrvává na sklonech $\sin I_r < 0,1$, zatímco planetky pozorované v ostrově A mají sklony $\sin I_r > 0,1$.

ních planetek v ostrově B. Z toho vyplývá, že nerovnoměrnost populace v ostrovech vzniká částečně samotným procesem zachycování.

Počet zachycených planetek. Dalším krokem bylo přeškálování počáteční populace testovacích částic tak, aby její částicová hustota dosahovala realistických hodnot. Vyšli jsme z částicové hustoty v pozorovaném hlavním pásu, přičemž jsme se omezili pouze na tělesa s velikostmi $D \geq 5$ km. To je nutné proto, abychom nesrovnávali výsledek simulací s pozorovanou populací v intervalu ovlivněném observační nedostatečností. Samozřejmě nelze očekávat, že pozorovaná populace bude úplná pro $D \geq 5$ km (důvodem je poloha rezonance ve vnějším hlavním pásu, výskyt převážně tmavých C-typů, apod.), nicméně silnější omezení volit nelze, protože pak by například v ostrově A nezbyly žádné planety pro porovnání.

Částicovou hustotu ve vnějším hlavním pásu jsme spočetli pro oblast $a_p \in (2,95; 3,21)$ AU, $e_p \in (0; 0,35)$ a $I_p \in (0^\circ; 15^\circ)$. Intervaly e a I odpovídají intervalům, ve kterých jsme rozmístili počáteční populaci testovacích částic. Interval hlavních poloos bylo ovšem nutné posunout do oblasti, která není v současné sluneční soustavě vyprázdněná díky přítomnosti 2:1 rezonance. Určenou částicovou hustotu jsme dále zvýšili faktorem tři (Minton & Malhotra, 2010), abychom zohlednili dynamický rozpad vnějšího hlavního pásu během posledních $\simeq 3,85$ Gyr od rekonfigurace planet. Při navýšení částicové hustoty v počáteční populaci stoupne odpovídajícím způsobem počet zachycených stabilních planetek větších než 5 km na $N_A^{\text{scaled}} = 1\,552$ a $N_B^{\text{scaled}} = 5\,857$ v ostrově A respektive B.

Dlouhodobý dynamický rozpad. Nakonec jsme uvážili, že míra dynamického rozpadu vlivem chaotické difuze je pro nalezené stabilní ostrovy stejná jako v případě pozorované konfigurace sluneční soustavy. Počet zachycených planetek určený v předchozím kroku jsme proto dále opravili užitím exponenciálního rozpadového zákona (1.8), abychom odhadli, kolik ze zachycených těles bychom měli v jednotlivých ostrovech pozorovat v současnosti. Jako charakteristické časy používáme hodnoty $\tau_A = (0,57 \pm 0,05)$ Gyr a $\tau_B = (0,94 \pm 0,05)$ Gyr. Tyto hodnoty jsme odvodili v kapitole 1.5, avšak zde používáme vyšší standardní odchylku (0,05 namísto 0,02). Důvodů je hned několik. Odchylka 0,02 byla získána jako chyba metody nejmenších čtverců a nijak v ní není zohledněna skutečnost, že jsme vycházeli z jediného dyna-

mického modelu s relativně nízkým počtem testovacích částic, zejména v případě ostrova A. Dále je třeba uvážit, že jsme v tomtéž modelu uvážili Jarkovského jev působící na tělesa *všech* velikostí, jenže v této kapitole se omezujeme na planety větší než 5 km.

Jakožto časovou škálu dynamického rozpadu jsme vzali $t = (3,9 \pm 0,1)$ Gyr. S využitím extrémálních hodnot určených nejistotou užitých veličin náš model zachycování předpovídá, že bychom v současnosti měli pozorovat $N_A^{\text{model}} = 1$ až 3 planety větší než 5 km v ostrově A a $N_B^{\text{model}} = 62$ až 121 v ostrově B. Porovnejme tyto hodnoty s pozorovaným počtem planetek: $N_A^{\text{obs}} = 2$ a $N_B^{\text{obs}} = 71$. Výsledky našeho modelu jsou v rámci nejistot v dobré shodě s pozorováním; proces rezonančního zachycení umožňuje vysvětlit počet těles v obou ostrovech stability.

Rozdělení sklonů. Zaměřme se nyní na dolní panel obrázku 15 a diskutujme, zda rozdělení sklonů zachycených testovacích částic může dlouhodobým vývojem přejít v rozdělení pozorované. V ostrově A je patrné, že množství planetek s nízkým sklonem je nižší než množství planetek s vysokým sklonem. Předpokládejme rovnoměrný dynamický rozpad populace ostrova A, který vede k přežití pouze 1 až 3 těles větších než $D = 5$ km do současnosti. Potom je statisticky pravděpodobnější, že přežijí tělesa na vyšších sklonech, jelikož jejich počet je po skončení migrace vyšší. To je v dobré shodě s pozorováním, protože pozorované planety ostrova A setrvávají převážně na skloněných drahách.

Zachycená populace v ostrově B je naproti tomu přibližně rovnoměrně rozložena přes široký interval sklonů, což je zřejmě důsledek našeho zjednodušeného rovnoměrného počátečního rozložení testovacích částic ve vnějším hlavním pásu. Uvážíme-li tvar pozorovaného ostrova B ve fázovém prostoru (viz obrázek 3), který se zmenšuje s rostoucím sklonem, je pravděpodobné, že dlouhodobá difuze částečně odstraní tělesa zachycená na vysokých sklonech. Nicméně je zřejmé, že abychom správně reprodukovali pozorovanou vysokou koncentrací drah s nízkým sklonem v ostrově B, musí i zdrojová populace, ze které zachycení probíhá, obsahovat značné množství planetek s nízkým sklonem ($\sin I_r < 0,1$).

4. Stabilita primordiální populace během migrace planet

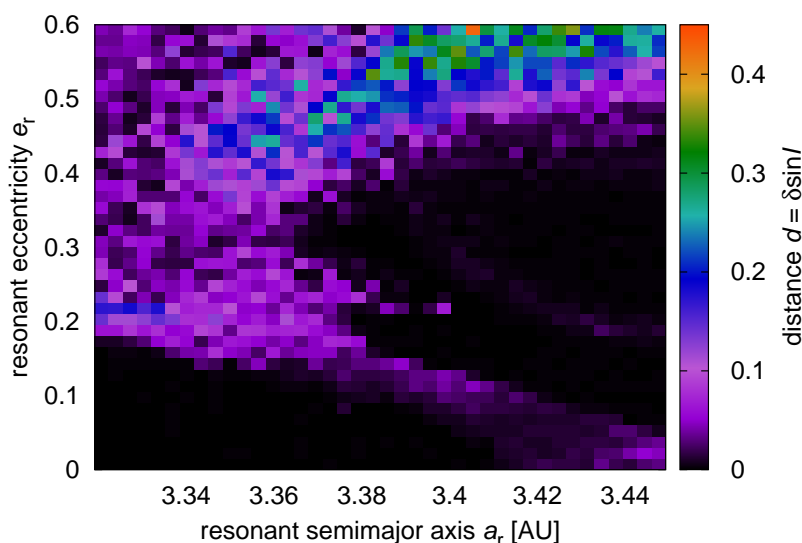
V této kapitole se zabýváme možností, že se v rezonanci 2:1 nacházely stabilní planetky od jejího vzniku spojeného se vznikem Jupiteru, a část z nich se udržela v ostrovech stability i v průběhu planetární migrace. Naše metoda je podobná přístupu z přecházející kapitoly, hlavní rozdíl je v sestavení počátečních podmínek. Zde je našim cílem studovat tělesa, která setrvávají v rezonanci 2:1 již na začátku simulace nestability planetárního systému. Další důležitou vlastností, kterou musí testovací částice splňovat, je dlouhodobá stabilita jejich drah — jinak bychom mohli nechtěně simulovat jiné efekty, například přežívání nestabilní populace, apod.

4.1 Počáteční podmínky a vývoj testovacích částic

Jak vytvořit soubor testovacích částic na stabilních drahách před započítáním migrace? Elegantním možným řešením je znovu využít dynamické mapování. Pro tento případ musíme mírně obměnit standardní postup popsany v kapitole 1.2. Integrace pro sestavení dynamické mapy není provedena v neměnné konfiguraci planet, namísto toho simulujeme prvních 5 Myr migračního scénáře, během kterých planety z počáteční konfigurace přejdou do stavu, který předchází skoku Jupiteru.

Dále je při konstrukci mapy nutné použít pouze záznam změn rezonančního sklonu $\delta \sin I_r$ (zanedbáváme tedy změny δa_r a δe_r při výpočtu metriky dané rovnicí 1.6). Důvodem je, že při migraci Jupiteru dovnitř sluneční soustavy stejným způsobem migruje i rezonance 2:1 a rezonanční hlavní poloosy planetek v ní systematicky klesají. To vyvolá změny rezonanční excentricity e_r kvůli adiabatické invarianci drah (viz rovnice 1.3). Tyto systematické změny však mají různé amplitudy v závislosti na charakteru librace jednotlivých drah. Z toho důvodu je není možné zahrnout do výpočtu vzdálenosti d , protože by to vedlo ke znehodnocení dynamické mapy. Nicméně naše numerické testy naznačují, že rezonanční sklon I_r pod vlivem migrujících obřích planet neprodělává podstatné systematické změny. Pokud

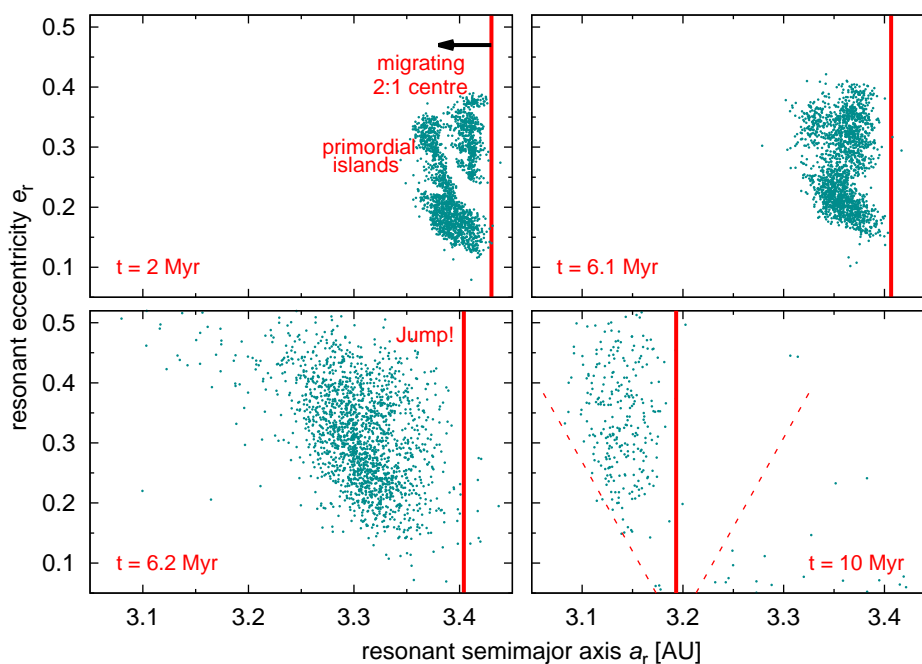
je pro některou testovací částici zaznamenána výrazná změna sklonu, pak to většinou znamená, že její dráhu ovlivnila některá sekulární nebo sekundární rezonance. Dynamická mapa vystavěná pouze na změnách rezonančního sklonu I_r by tedy měla obsahovat pozici oblastí, kde dochází ve fázovém prostoru ke křížení rezonancí, a rovněž pozici stabilních ostrovů odpovídající časovému období před skokem Jupiteru.



Obrázek 16: Dynamická mapa rezonance 2:1 středního pohybu s Jupiterem odpovídající období před nestabilitou „skáčejícího Jupiteru“. Mapa je zobrazena v rovině (a_r, e_r) a odpovídá sklonu $I_r = 2,5^\circ$. Poznamenejme, že dynamická stabilita v různých částech fázového prostoru je v tomto případě reprezentována pouze změnou rezonančního sklonu δI_r .

Mapu jsme zkonstruovali v rovině (a, e) v intervalech $a_r \in (3,32; 3,45)$ AU a $e_r \in (0; 0,06)$, které jsme rozdělili sítí 40×40 . Do každé vzniklé buňky jsme umístili šest testovacích částic, kterým jsme připsali pevnou velikost sklonu $I_r = 2,5^\circ$. Jak již bylo zmíněno, planetární migrace příliš nemění sklonu drah planetek, proto mapujeme oblast nízkých sklonů, v níž se nachází většina pozorované populace a nabízí se předpoklad, že tutéž vlastnost vykazovala i populace primordiální. Výsledná mapa odpovídající období před nestabilitou je na obrázku 16.

Pro účel simulace přežívání primordiálních asteroidů jsme do ostrovů nalezených pomocí dynamické mapy umístili 2000 testovacích částic (viz obrázek 17)



Obrázek 17: Simulace vývoje primordiální populace v migračním scénáři pěti obřích planet (Nesvorný & Morbidelli, 2012). Obrázky představují vývoj orbitálního rozdělení v rovině (a_r, e_r) . Svislá čára vyznačuje přibližnou polohu migrující rezonance 2:1. Počáteční populace byla umístěna v ostrovech nalezených pomocí obrázku 16. Horní levý panel představuje stav po 2 Myr od začátku simulace. Následující panely ukazují situaci během skoku Jupiteru a rovněž konečný stav.

s nízkými sklony $I_r < 5^\circ$. Úhlové oskulační elementy jsme volili tak, aby platila podmínka (1.4), a aby tedy generované oskulační elementy byly identické s elementy rezonančními v čase $t = 0$.

Obrázek 17 představuje vývoj primordiální populace během migrace s nestabilitou „skárajícího Jupiteru“. Dva miliony let po započetí migrace nejsou dráhy výrazně rozptýleny, což je v souladu s naším cílem studovat dynamicky stabilní rezonanční planetky. Po 6,1 Myr začínají probíhat těsná přiblížení obřích planet, vedoucí k perturbacím narušujícím ostrovy uvnitř rezonance 2:1. Během skoku Jupiteru jsou ostrovy částečně destabilizovány, což umožňuje značné části původně stabilních planetek uniknout do jiných částí rezonance 2:1 nebo mimo ni. Na konci simulace je 85% původní populace ztraceno a zbytek je rozptýlen po celé rezo-

nanční oblasti s výjimkou oblasti nízkých excentricit. Z toho vyplývá, že prakticky jedinou možnou změnou v rezonanční excentricitě při migraci Jupiteru je její nárůst.

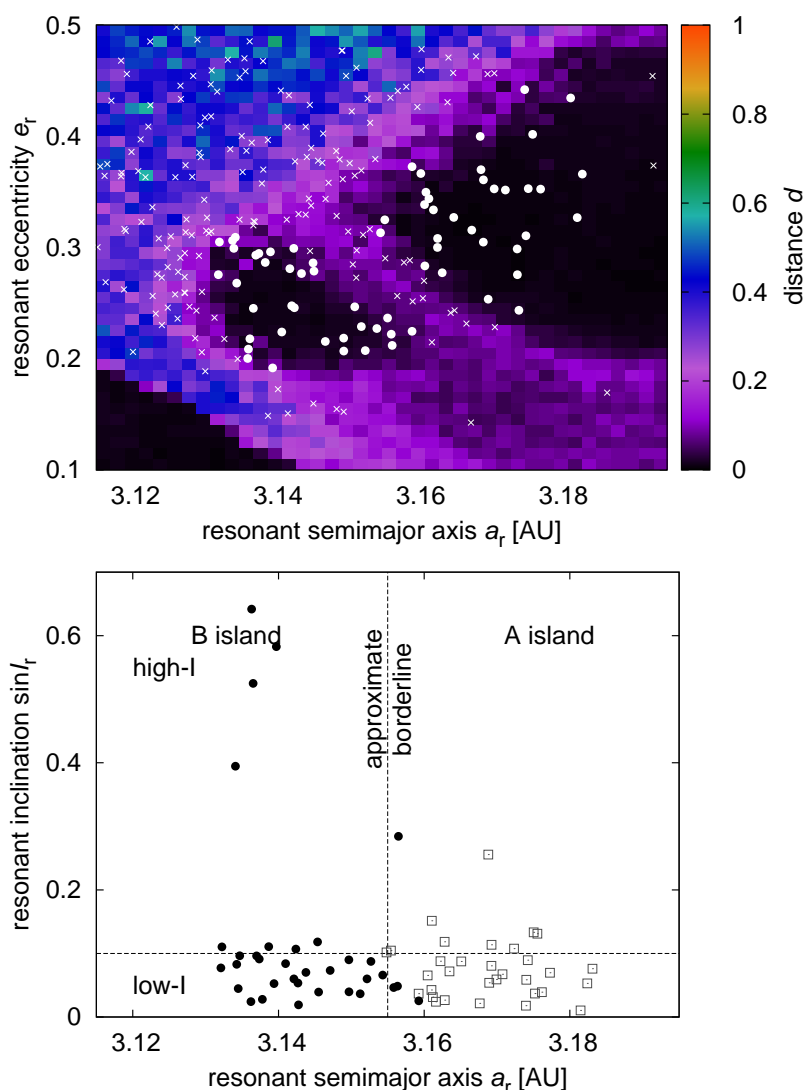
4.2 Primordiální planetky přežívající migraci

V návaznosti na náš postup z kapitoly 3 jsme použili dynamickou mapu pro konfiguraci planet na konci migrace pro nalezení přeživších stabilních planetek (viz obrázek 18), přeškálovali jsme počáteční primordiální populaci a zohlednili jsme dlouhodobý dynamický rozpad. Protože částicová hustota v hypotetické primordiální populaci není známá, měnili jsme jednoduše počáteční počet stabilních testovacích částic a odvodili jsme očekávaný počet primordiálních planetek přežívajících do dnešní doby.

Vybrané výsledky jsou shrnuty v tabulce 2 a porovnání je provedeno pro planetky větší než 5 km (připomeňme, že v pozorované populaci je $N_A^{\text{obs}} = 2$ a $N_B^{\text{obs}} = 71$ planetek). Pokud se budeme držet předpokladu částicové hustoty dle Mintona & Malhotry (2010), který jsme použili v kapitole 3, pak příspěvek primordiálních planetek k pozorované populaci je po dlouhodobém orbitálním vývoji zanedbatelný.

Aby byl příspěvek podstatný, částicová hustota v rezonanci 2:1 by musela být značně větší než v přilehlém hlavním pásu, a to nejméně faktorem deset. To by však vyžadovalo gradient částicové hustoty, který se nezdá velmi pravděpodobný, protože rezonance by musela být dynamicky chráněna proti perturbacím vzešlým například od planetárních embryí (O'Brien a kol., 2007) nebo od kompaktní primordiální konfigurace planetárních drah (Masset & Snellgrove, 2001; Roig & Nesvorný, 2014).

Zkoumali jsme rovněž, zda mohou dráhy z ostrova A přejít během migrace planet do ostrova B a naopak. Zjistili jsme, že $< 1\%$ asteroidů původně umístěných v ostrově A tam setrvá a 1% driftuje do ostrova B. Naproti tomu v ostrově B přežijí 2% z původní primordiální populace a 2% drah přejdou do ostrova A. Protože primordiální ostrov B je větší než A, nachází se v něm původně více asteroidů, za



Obrázek 18: Nahoře: stejná dynamická mapa jako na obrázku 15. Primordiální testovací částice, které v rezonanci přečkaly simulaci nestability, jsou vykresleny přes mapu. Kroužky představují stabilní dráhy, křížky ostatní dráhy. Dole: rozdělení přeživších testovacích částic v rovině $(a_r, \sin i_r)$. Vykreslujeme pouze částice, které jsme v horním panelu označili jako stabilní. Černé kroužky odpovídají tělesům ostrova B, šedé prázdné čtverce vyznačují dráhy spadající do ostrova A.

předpokladu homogenní částicové hustoty. Příspěvek ostrova B k přežívající populaci tedy převládá. Dále je třeba zmínit, že poměr počtu těles v obou ostrovech je na konci migrace $N_A/N_B \approx 1$, tedy destabilizace primordiální populace nevede k vy-

tvoření asymetrické populace — k tomu je nutný další orbitální vývoj, při kterém rychleji unikají planety z ostrova A.

Orbitální rozdělení v rovině (a_r, I_r) na konci planetární migrace odpovídá naší volbě počátečních podmínek. V obou ostrovech převažují nízké sklony. Abychom obdrželi vyšší sklony drah, které jsou pozorovány v ostrově A, bylo by třeba předpokládat přítomnost skloněných drah v ostrovech již před samotnou migrací. Řešení tohoto problému je ovšem nadbytečné, protože, jak jsme diskutovali výše, primordiální planety zřejmě nepřispívají k pozorované populaci.

$N_{\text{init}}(D \geq 5 \text{ km})$	$N_{\text{A}}^{\text{model}}$	$N_{\text{B}}^{\text{model}}$
2 000	0	0 až 1
5 000	0	1 až 2
10 000	0	2 až 4
100 000	1 až 3	18 až 35

Tabulka 2: Počet $N_{\text{A}}^{\text{model}}$ a $N_{\text{B}}^{\text{model}}$ planetek přežívajících v ostrovech A a B do současnosti podle našeho modelu primordiální populace. Tabulka ukazuje, jak se výsledná populace mění s rostoucím početností N_{init} primordiální populace. Uvažujeme pouze tělesa s $D \geq 5 \text{ km}$. První řádek přibližně odpovídá primordiální populaci s částicovou hustotou dnešního hlavního pásu, další dva řádky přibližně odpovídají částicové hustotě navržené v práci Minton & Malhotry (2010). V posledním řádku uvažujeme částicovou hustotu primordiálního hlavního pásu těsně po jeho vzniku, jak popisuje Morbidelli a kol. (2009); poznamenejme, že tento poslední případ je velmi nepravděpodobný pro období pozdní nestability, kterou studujeme.

5. Vliv velké nerovnosti Jupiteru a Saturnu

V předešlých dvou kapitolách jsme zkoumali vývoj populace v rezonanci 2:1 během nestability planetárního systému známé jako skok Jupiteru. Vycházeli jsme přitom z migračních scénářů Nesvorného & Morbidelliho (2012), avšak simulovali jsme pouze časový úsek nejprudšího vývoje v okolí nestability a zanedbávali jsme zbytkovou hladkou migraci planet na dnešní dráhy¹. Toto zjednodušení v principu nesnižuje naši schopnost detekovat stabilní planetky (protože máme k dispozici dynamické mapy) a odhadnout jejich životní doby (protože máme k dispozici model dlouhodobého orbitálního vývoje). Vystává ovšem přirozená otázka, zda během pozdní fáze migrace mohou vznikat perturbace, které by ovlivnily celkovou stabilitu rezonance 2:1 a změnily by například počet testovacích částic, který v našem dosavadním modelu vstupuje do výpočtu veličin N_A^{model} a N_B^{model} .

Chceme zejména ověřit, zda perioda P_σ librace rezonančních planetek může být v určité fázi migrace srovnatelná s periodou P_{GI} velké nerovnosti Jupiteru a Saturnu (což je perioda cirkulace úhlu $2\lambda_J - 5\lambda_S$) a jak by tím byla ovlivněná rezonanční populace (Ferraz-Mello a kol., 1998).

5.1 Simulace hladké migrace

Abychom simulovali pozdní hladkou migraci a uvedli obří planety na dnešní dráhy, použili jsme upravenou verzi integrátoru SWIFT_RMVS3, která byla vyvinuta v rámci práce Brože a kol. (2011). Do integrátoru je zahrnut ad hoc disipační člen, který modifikuje vektory rychlosti \mathbf{v} jednotlivých planet v každém časovém kroku

¹Jelikož v žádném migračním scénáři neskončí obří planety přesně na dnešních orbitách, považuje se obvykle za uspokojivý konečný stav taková konfigurace, ve které jsou poměry oběžných dob planet a přirozené frekvence systému blízké pozorovaným hodnotám.

Δt podle následujícího vztahu:

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) \left[1 + \frac{\Delta v}{v} \frac{\Delta t}{\tau_{\text{mig}}} \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_{\text{mig}}}\right) \right], \quad (5.1)$$

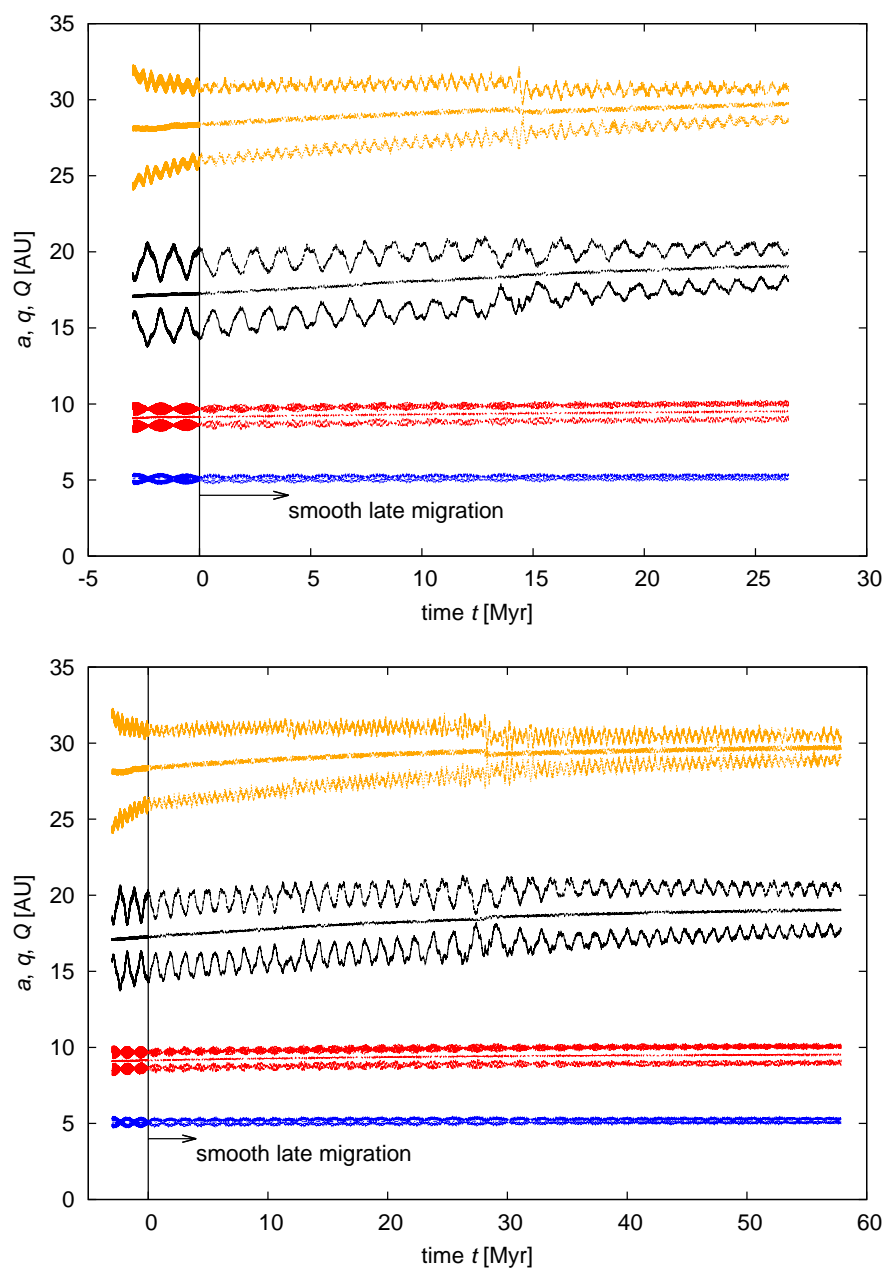
kde $\Delta v \equiv \sqrt{GM/a_{\text{init}}} - \sqrt{GM/a_{\text{fin}}}$ je celková disipace určená rozdílem mezi počáteční a požadovanou konečnou střední rychlostí, τ_{mig} je časová škála migrace, t je časová proměnná a t_0 je volitelný počáteční čas. V integrátoru je též implementováno tlumení excentricit a lze ho stanovit pro každou planetu zvlášť udáním parametru označovaného e_{damp} (Morbidelli a kol., 2010).

Pro sestavení dynamického modelu jsme vyšli z konečné konfigurace v simulaci rezonančního zachycení², ale použili jsme pouze testovací částice, které se nacházely ve stabilních ostrovech určených dynamickou mapou a jejich širším okolí. Tím jsme z modelu vyloučili podstatnou část nestabilní populace. Následně jsme spustili sadu integrací s různými hodnotami parametru e_{damp} a různými časovými škálami migrace, které jsme volili řádově srovnatelné se škálou $\tau_{\text{mig}} \simeq 30 \text{ Myr}$ původních migračních experimentů Nesvorného & Morbidelliho (2012). Po skončení integrací jsme pro další zpracování vybrali pouze simulace, ve kterých obří planety skončily s orbitálními parametry blízkými pozorovanému stavu a vyšetřili jsme výsledky v čase t_{fin} , kdy je $P_{\text{GI}} = 880 \text{ yr}$ a poměr oběžných period Saturnu a Jupiteru přibližně $P_{\text{S}}/P_{\text{J}} \simeq 2,49$.

5.2 Míra difuze stabilní populace

V dalším budeme diskutovat výsledky dvou simulací s časy $t_{\text{fin}} \simeq 27 \text{ Myr}$ a $t_{\text{fin}} \simeq 58 \text{ Myr}$, kdy perioda P_{GI} velké nerovnosti dosáhla dnešní hodnoty. Vývoj obřích planet v těchto simulacích je uveden na obrázku 19. Obrázek 20 ukazuje odpovídající časový vývoj počtu N testovacích částic, vývoj periody P_{GI} velké nerovnosti a periody P_{σ} librace dvou typických rezonančních planetek. Zatímco P_{σ} osciluje kolem hodnoty $\simeq 420 \text{ yr}$, která je téměř konstantní, P_{GI} ze začátku leží pod touto hodnotou

²Výsledek simulace s primordiálními asteroidy zde vůbec neuvažujeme, jelikož tyto planetky zřejmě nepřispívají k pozorované populaci.



Obrázek 19: Vývoj obřích planet ve dvou vybraných simulacích hladké pozdní migrace. Obrázky ukazují, jak se v čase t mění oskulační hlavní poloosy a , pericentra q a apocentra Q . Výpočty navazují na konec simulace nestability „skákajícího Jupiteru“, jejíž poslední 3 Myr jsou pro srovnání vykresleny v oblasti záporných časů t . Nahoře: případ s $t_{\text{fin}} \approx 27$ Myr. Dole: případ s $t_{\text{fin}} \approx 58$ Myr.

a hladce narůstá s tím, jak Jupiter a Saturn migrují od sebe a dochází k tlumení jejich excentricit. V okamžiku, kdy se P_{GI} začíná shodovat s oscilující P_{σ} , je rezonanční populace destabilizována, což se projevuje zvýšeným poklesem křivek $N(t)$. Míra úbytku těles je opět snížena, když P_{GI} vzroste nad hodnoty P_{σ} .

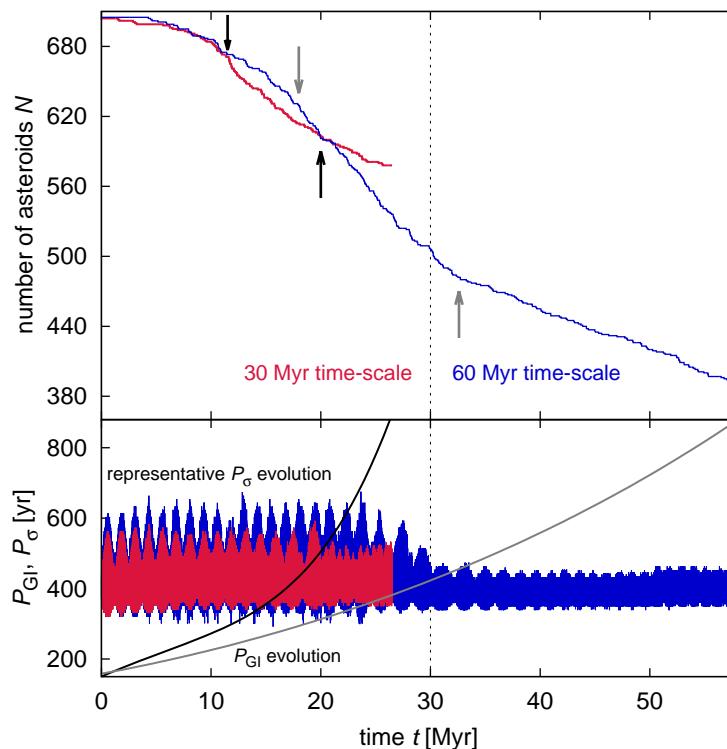
Abychom charakterizovali, jak rychlý je rozpad populace v jednotlivých úsecích simulace, definujeme míru rozpadu ΔN jako relativní změnu počátečního počtu planetek $N(0)$ za jednotku času. Odvodili jsme $\Delta N = 0,004 \text{ Myr}^{-1}$, když $P_{\text{GI}} < P_{\sigma}$, $\Delta N = 0,011 \text{ Myr}^{-1}$, když $P_{\text{GI}} \simeq P_{\sigma}$ a $\Delta N = 0,005 \text{ Myr}^{-1}$, když $P_{\text{GI}} > P_{\sigma}$ v modelu s $t_{\text{fin}} \simeq 27 \text{ Myr}$. Hodnoty v modelu s $t_{\text{fin}} \simeq 58 \text{ Myr}$ jsou $\Delta N = 0,006 \text{ Myr}^{-1}$, když $P_{\text{GI}} < P_{\sigma}$, $\Delta N = 0,014 \text{ Myr}^{-1}$, když $P_{\text{GI}} \simeq P_{\sigma}$ a $\Delta N = 0,005 \text{ Myr}^{-1}$, když $P_{\text{GI}} > P_{\sigma}$. Je zřejmé, že počet stabilních planetek přežívajících pozdní hladkou migraci závisí na délce časového intervalu, během něhož je $P_{\text{GI}} \simeq P_{\sigma}$; stabilní ostrovy jsou výrazněji vyprázdněny v simulaci s $t_{\text{fin}} \simeq 58 \text{ Myr}$.

Pro vyhodnocení simulací hladké pozdní migrace jsme nejprve identifikovali testovací částice, které se v čase t_{fin} nacházejí ve stabilních ostrovech. Jelikož v tomto čase je konfigurace obřích planet již velmi podobná té dnešní, lze pro identifikaci stabilních planetek použít dynamickou mapu spočtenou v současné konfiguraci sluneční soustavy. Následně jsme provedli přeškálování počáteční populace i aplikaci dlouhodobého dynamického rozpadu (viz kapitola 3), abychom odhadli počet planetek větších než 5 km, které bychom v ostrovech A a B měli pozorovat.

Spočetli jsme následující hodnoty: $N_{\text{A}}^{\text{model}} = 0$ až 1 a $N_{\text{B}}^{\text{model}} = 40$ až 78 v případě modelu s $t_{\text{fin}} \simeq 27 \text{ Myr}$, a $N_{\text{A}}^{\text{model}} = 0$ až 1 a $N_{\text{B}}^{\text{model}} = 22$ až 42 pro model s $t_{\text{fin}} \simeq 58 \text{ Myr}$ (zatímco pozorované hodnoty jsou $N_{\text{A}}^{\text{obs}} = 2$ a $N_{\text{B}}^{\text{obs}} = 71$). Z výsledků lze vyvodit, že hypotéza rezonančního zachycení je stále platná a vysvětluje existenci³ stabilní populace, pokud pozdní hladká migrace obřích planet proběhla na časové škála srovnatelné s $\tau_{\text{mig}} \simeq 30 \text{ Myr}$. Delší časová škála by vedla k pomalejšímu přechodu periody P_{GI} velké nerovnosti přes hodnoty librační periody v J2/1, a to by v důsledku způsobilo přílišné vyprázdnění stabilních ostrovů. I v takovém případě by však

³Ačkoliv hodnoty, které jsme zde odvodili, přesně nesouhlasí s pozorováním v případě ostrova A, rozdíl je pouze v jediném asteroidu. Máme za to, že tento nesouhlas není důležitý, jelikož porovnáme jen malá celá čísla a vývoj populace je značně stochastický.

nezanedbatelná část pozorované populace pocházela z rezonančního zachycení.



Obrázek 20: Výsledek dvou simulací hladké pozdní migrace a její působení na rezonanční populaci. Červené a černé křivky a šipky odpovídají simulaci s $t_{\text{fin}} \simeq 27$ Myr, zatímco modré a šedé křivky a šipky odpovídají simulaci s $t_{\text{fin}} \simeq 58$ Myr (původně jsme volili časové škály migrace jako $\tau_{\text{mig}} = 30$ Myr a $\tau_{\text{mig}} = 60$ Myr, ale integrace vyhodnocujeme pouze po okamžik, kdy perioda velké nerovnosti dosáhne hodnoty $P_{GI} = 880$ yr). Nahoře: časový vývoj počtu testovacích částic N . Dole: časové vývoje periody P_{GI} velké nerovnosti a librační periody P_{σ} , která je vykreslena pro dva reprezentativní případy. Průchod P_{GI} přes P_{σ} způsobuje rychlejší pokles závislosti $N(t)$, což je vyznačeno šipkami v horním panelu. Poznamenejme, že „reálný“ vývoj P_{GI} je oscilující s malou amplitudou; zde pro přehlednost vykreslujeme polynomiální fit vývoje P_{GI} .

6. Kolizní vývoj stabilní populace v rezonanci 2:1

Naše výsledky dynamických modelů naznačují, že stabilní populace v J2/1 vznikla zachycením z vnějšího hlavního pásu při migraci planet. V této kapitole dále rozvíjíme tuto hypotézu. Studujeme kolizní vývoj 2:1 rezonance s cílem zjistit, zda rozdělení velikostí stabilní populace planetek mohlo v nestacionárním stavu přežít 4 Gyr kolizního vývoje. Musíme tudíž zohlednit také období velkého pozdního bombardování (Gomes a kol., 2005; Levison a kol., 2009), během něhož byl destabilizován transneptunický disk a podstatně vzrostl tok komet, tedy možných projektilů, skrze sluneční soustavu.

V našich kolizních modelech uvažujeme tři populace malých těles sluneční soustavy: planetky hlavního pásu, transneptunické komety a skupinu Zhongguo; tedy studujeme pouze podskupinu celé stabilní populace. Důvodem pro toto zjednodušení je, že pozorovaná rozdělení velikostí stabilní populace a jejich dynamických podskupin vykazují obdobné rysy (viz obrázek 6), ale skupina Zhongguo má nejvyšší sklon $\gamma = -5,1$. Naším cílem je řešit inverzní problém, tedy vznik počátečního rozdělení velikostí s ještě vyšším sklonem, které přejde na rozdělení pozorované vlivem srážek po dobu 4 Gyr. Díky jisté parametrické volnosti v kolizním modelování by stejný proces vzniku měl být aplikovatelný i na skupinu Griqua, která má pozorované rozdělení velikostí s nižším sklonem než skupina Zhongguo.

6.1 Vlastní pravděpodobnosti a rychlosti srážek

Jako první krok při sestřování kolizního modelu jsme spočetli vlastní pravděpodobnost P_i a střední rychlost dopadu V_i při srážkách asteroidů hlavního pásu a rezonančních planetek. Aplikovali jsme metodu z práce Bottkeho a kol. (1994) založenou na geometrickém formalismu zavedeném Greenbergem (1982). Pro výpočet jsme použili všechny stabilní dráhy v J2/1 a rovněž prvních 50 000 objektů hlavního pásu z katalogu AstOrb, aby vzorky drah byly dostatečně početné.

Rozdělili jsme stabilní populaci na skupiny Zhongguo, Griqua se sklony $I \leq 8^\circ$ a Griqua se sklony $I > 8^\circ$ a spočetli jsme pro ně odděleně vlastní pravděpodobnost P_i a střední váženou rychlost dopadu V_i . Tím chceme ověřit, zda se mohou kolizní parametry lišit pro jednotlivé podskupiny, což by mohlo vysvětlit rozdíly ve sklonu jejich rozdělení velikostí.

Výsledky jsou shrnuty v tabulce 3. Pro srovnání, Dahlgren (1998) odvodil $P_i = 3,1 \times 10^{-18} \text{ km}^{-2} \text{ yr}^{-1}$ a $V_i = 5,28 \text{ km s}^{-1}$ pro vzájemné srážky asteroidů hlavního pásu. Skupiny Zhongguo a Griqua na nízkých sklonech mají P_i a V_i mírně vyšší než uvedené referenční hodnoty. To je způsobeno tím, že v populaci J2/1 převažují mírně excentrické dráhy. Ty se pak pravděpodobněji kříží s orbitami v hlavním pásu. Vyšší rychlost srážky odpovídá tomu, že porovnáváme populaci vnějšího hlavního pásu s jeho zbytkem, což efektivně zvyšuje vzájemné relativní rychlosti.

Planetky skupiny Griqua s $I > 8^\circ$ díky vyšším orbitálním sklonům neprotínají některé dráhy hlavního pásu, díky čemuž je jejich vlastní pravděpodobnost přibližně dvakrát menší ve srovnání s referenční hodnotou. Na základě diskutovaných hodnot lze prohlásit, že rozdíly ve sklonu pozorovaných rozdělení velikostí (když jsou skupiny Griqua a Zhongguo separovány) *nemohou* být vysvětleny rozdílnými hodnotami P_i a V_i , protože plošší rozdělení skupiny Griqua by vyžadovalo vyšší vlastní pravděpodobnost P_i , aby ke srážkám docházelo častěji.

populace	P_i [$10^{-18} \text{ km}^{-2} \text{ yr}^{-1}$]	V_i [km s^{-1}]
skupina Zhongguo vs hlavní pás	3,82	5,36
skupina Griqua ($I \leq 8^\circ$) vs hlavní pás	3,65	5,52
skupina Griqua ($I > 8^\circ$) vs hlavní pás	1,81	7,57
průměr	3,09	6,15

Tabulka 3: Vlastní pravděpodobnosti P_i a střední rychlosti dopadu V_i pro kolize mezi planetkami hlavního pásu a tělesy v rezonanci 2:1.

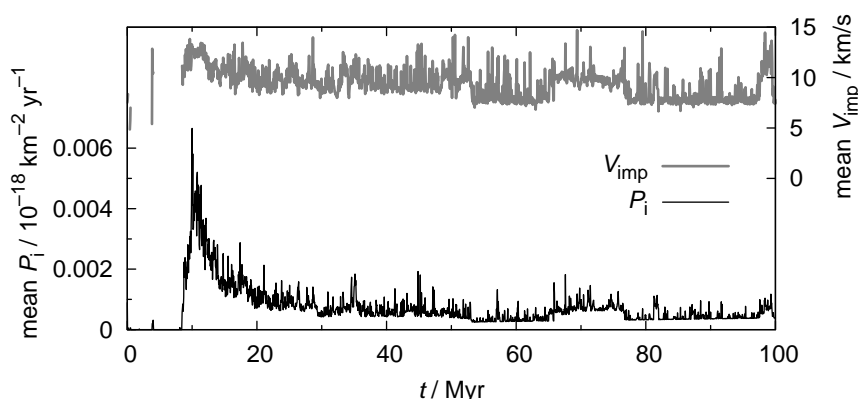
6.2 Asteroidy zachycené z pozad'ové populace hlavního pásu

Položme si otázku, zda může rozdělení velikostí v rezonanci 2:1 pocházet z rozdělení velikostí hlavního pásu. Předpokládejme, že rezonanční zachycení není závislé na velikosti planetek, zachycené rozdělení velikostí tedy bude odpovídat rozdělení hlavního pásu škálovanému dolů jistým numerickým faktorem. Naše volba tohoto faktoru bude taková, aby byl počet největších zachycených těles přibližně stejný, jako pozorovaný počet rezonančních planetek téže velikosti. To nám umožní ihned porovnat zachycené a pozorované rozdělení velikostí skupiny Zhongguo.

Hlavní pás byl před 4 Gyr zřejmě početnější než dnes (faktorem tři podle práce Minton & Malhotry (2010)), ale od skončení migrace planet setrval ve kvazistacionárním kolizním režimu (Bottke a kol., 2005a), jak dokládají pozorované krátery na tělesech sluneční soustavy. Jediná možná vývojová fáze, během níž mohl dočasně vzrůst sklon rozdělení velikostí v hlavním pásu, bylo velké pozdní bombardování. Budeme tedy studovat toto rané období kolizí mezi hlavním pásem a transneptunickými kometami. Zaměřujeme se na velikosti $D < 25$ km, abychom se přesvědčili, zda může být sklon rozdělení v tomto intervalu náhle zvýšen. Pokud ano, populace vzniklá zachycením z tohoto rozdělení by převzala jeho sklon.

Modelování kolizního vývoje. Používáme kolizní kód BOULDER (Morbidelli a kol., 2009), abychom zkonstruovali odpovídající model. Počáteční rozdělení velikostí definujeme kombinovanou mocninnou funkcí, která je charakterizovaná třemi diferenciálními indexy sklonu q_a , q_b a q_c na intervalech velikostí $D > D_1$, (D_2, D_1) a $D < D_2$. Rozdělení je normalizováno volbou počtu N_{norm} těles větších než D_1 . Následující hodnoty jsme použili pro počáteční rozdělení hlavního pásu: $D_1 = 100$ km, $D_2 = 14$ km, $q_a = -5,0$, $q_b = -2,3$, $q_c = -3,5$, $N_{\text{norm}} = 1110$. Navíc jsme přidali několik planetek s rozměrem dosahujícím $D = 500$ až 1000 km, aby rozdělení lépe reprodukovalo pozorovaný stav. S použitím stejných předpokladů jako Brož a kol. (2013) charakterizujeme kometární disk parametry: $D_1 = 100$ km, $q_a = -5,0$, $q_b = q_c = -3,0$, $N_{\text{norm}} = 5 \times 10^7$.

Jelikož je vývoj transneptunického disku dominován jeho rychlým dynamickým rozpadem, jsou vlastní pravděpodobnosti $P_i(t)$ a střední rychlosti $V_i(t)$ srážek s kometami časově závislé veličiny. Časový vývoj $P_i(t)$ a $V_i(t)$, který byl odvozen v práci Brože a kol. (2013), je uveden na obrázku 21. Tamtéž autoři diskutovali, že je nutné dále modifikovat tyto časové závislosti, aby byl zohledněn efekt spontánních rozpadů jader komet vlivem různých fyzikálních procesů. S přihlédnutím k těmto jevům odvodili hodnoty $\tilde{P}_i(t) = P_i(t)/3$ a $\tilde{V}_i(t) = V_i(t)/1,5$ jako vhodnou modifikaci závislostí z obrázku 21.



Obrázek 21: Časový vývoj vlastní pravděpodobnosti $P_i(t)$ (dolní křivka) a střední rychlosti dopadu $V_i(t)$ (horní křivka) pro srážky mezi transneptunickými kometami a hlavním pásem. Převzato z práce Brože a kol. (2013). Zdůrazňujeme, že uvedené závislosti jsme dále modifikovali numerickými faktory, abychom zohlednili realistické životní doby komet. Hodnoty $P_i/3$ a $V_i/1,5$ slouží jako vstupní parametry pro naše modely.

Specifickou energii Q_D^* , která představuje energii potřebnou k rozbití a rozptýlení 50% hmotnosti terče, popisujeme polynomiálním škálovacím zákonem (Benz & Asphaug, 1999):

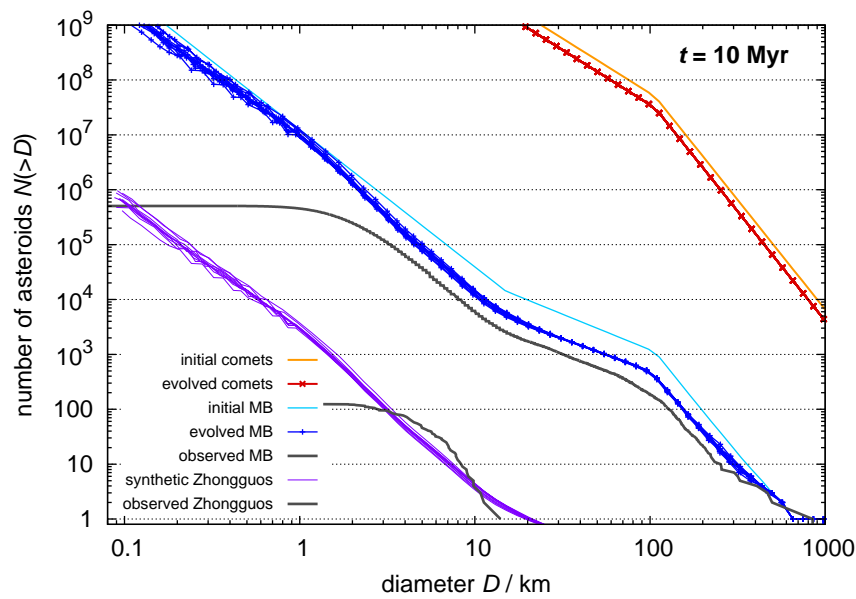
$$Q_D^*(r) = \frac{1}{q_{\text{fact}}} (Q_0 r^a + B \rho r^b), \quad (6.1)$$

kde r značí poloměr cíle v cm. Materiálové parametry ρ , Q_0 , a , B , b a q_{fact} pro bazalt (používaný v případě planetek) a vodní led (používaný v případě komet) jsou shrnuty v tabulce 4.

Simulovali jsme kolizní vývoj po dobu 10 Myr, během nichž $P_i(t)$ dosáhne svého

materiál	ρ [g cm ⁻³]	Q_0 [erg g ⁻¹]	a	B [erg g ⁻¹]	b	q_{fact}
bazalt	3,0	7×10^7	-0,45	2,1	1,19	1,0
vodní led	1,0	$1,6 \times 10^7$	-0,39	1,2	1,26	3,0

Tabulka 4: Materiálové parametry ρ , Q_0 , a , B , b a q_{fact} polynomiálního škálovacího zákona (viz rovnice (6.1)) převzatého z práce Benze & Asphauga (1999). První řádek parametrů používáme v případě planetek hlavního pásu nebo 2:1 rezonance, druhý řádek používáme pro komety.



Obrázek 22: Výsledek kolizního modelu vytvořeného pomocí kódu BOULDER (Morbidelli a kol., 2009) ve formě časového vývoje rozdělení velikostí. Popisky jednotlivých křivek jsou uvedeny v legendě. Křivky, které se vyvíjejí, jsou vykresleny v čase simulace $t = 10 \text{ Myr}$. Tento model by odpovídal vzniku syntetické skupiny Zhongguo zachycením z pozad'ové populace hlavního pásu postiženého kolizemi s transneptunickými kometami.

maxima (viz obrázek 21 a 22). Tok kometárních projektilů vyvolaný probíhající planetární migrací vrcholí a zdatelně ovlivňuje rozdělení velikostí hlavního pásu. Provedli jsme 100 numerických realizací modelu s různým nastavením implementovaného generátoru náhodných čísel, abychom zohlednili stochasticitu vývoje a málo pravděpodobné rozpady velkých planetek. Na konci simulace předpokládáme, že proběhne rezonanční zachycení s faktorem efektivity 10^{-4} . Strmou část zachycené-

ho rozdělení velikostí je možno charakterizovat indexem sklonu $\gamma = -3,0$. Ačkoliv oblast kilometrových těles je strmější než počáteční stav rozdělení velikostí hlavního pásu, není dostatečně strmá na to, aby dosáhla sklonu rozdělení velikostí pozorované skupiny Zhongguo. Tento scénář tedy považujeme za nepravděpodobný.

6.3 Katastrofický rozpad zachyceného mateřského tělesa

Z výsledků předcházejícího kolizního modelu je patrné, že pro vysvětlení strmého počátečního rozdělení velikostí je třeba jiného vysvětlení. Zde zkoumáme možnost, že bylo do rezonance náhodně zachyceno jedno velké mateřské těleso, došlo k jeho následnému rozpadu a fragmenty po srážce utvořily asteroidální rodinu.

Minimální velikost mateřského tělesa. Použili jsme nejdříve jednoduchý stacionární model, abychom odhadli pravděpodobnost takového katastrofického rozpadu. Bylo samozřejmě nutné určit spodní limit velikosti mateřského tělesa D_{PB} . Za tímto účelem jsme prohledali výsledky hydrodynamických simulací fragmentace mateřských těles (Durda a kol., 2007; Benavidez a kol., 2012), ze kterých jsme vybrali výsledky s rozdělením velikostí, které má přibližně stejný sklon jako rozdělení pozorované skupiny Zhongguo. Přeshkávali jsme velikosti syntetických mateřských těles v nalezených hydrodynamických simulacích tak, aby velikost největšího zbytku po rozpadu přibližně odpovídala velikosti největší stabilní planetky (3789) Zhongguo. Na základě přeshkávaných výsledků jsme odvodili rozsah možných velikostí mateřského tělesa $D_{PB} \in (50, 120)$ km, přičemž medián byl $\tilde{D}_{PB} = 70$ km.

Stacionární model. Následně jsme aplikovali vztah, který vyjadřuje počet N_{col} katastrofických rozpadů mateřského tělesa o velikosti D_{PB} v důsledku srážek s populací projektilů:

$$N_{col} = P_i N_{PB} N_{project} \frac{D_{PB}^2}{4} \Delta t, \quad (6.2)$$

D_{PB} [km]	d_{disrupt} [km]	N_{project}	N_{col}
50	6	25 821	0,18
70	9	7 837	0,10
100	15	2 589	0,07
120	19	1 777	0,07

Tabulka 5: Výsledek stacionárního kolizního modelu: počet N_{col} katastrofických rozpadů mateřského tělesa s velikostí D_{PB} za dobu 4 Gyr. Uvádíme též minimální nutnou velikost d_{disrupt} projektilů.

kde P_i značí vlastní pravděpodobnost, N_{PB} je počet mateřských těles, N_{project} je počet projektilů schopných rozbít mateřské těleso a Δt je uvažovaný časový interval.

Jelikož v pozorované rezonanční populaci nejsou žádné velké asteroidy, předpokládáme $N_{\text{PB}} = 1$. Abychom získali spodní limit na potřebnou velikost projektilů d_{disrupt} , používáme model Bottkeho a kol. (2005b):

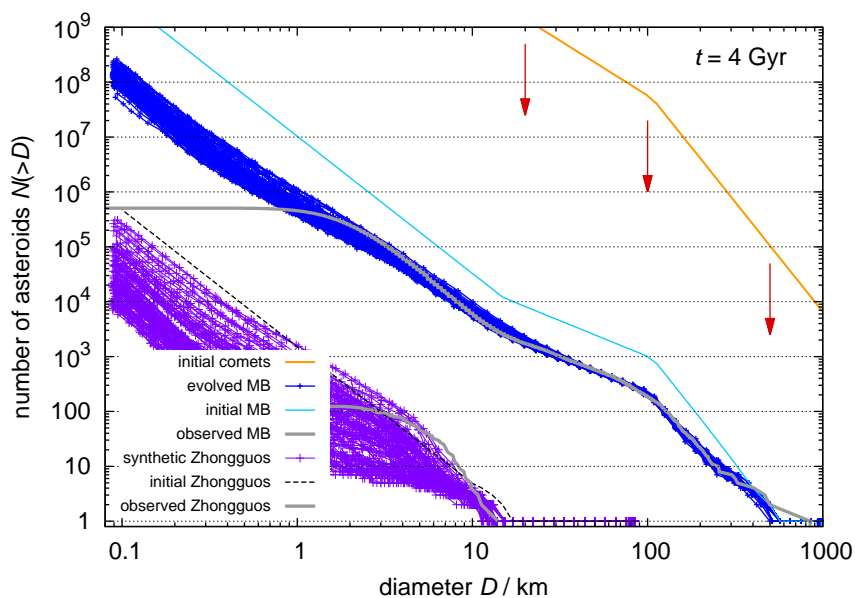
$$d_{\text{disrupt}} = \left(\frac{2Q_D^*}{V_i^2} \right)^{\frac{1}{3}} D_{\text{PB}}, \quad (6.3)$$

kde V_i je střední rychlost dopadu a kritickou hodnotu specifické energie Q_D^* určujeme pomocí škálovacího zákona (6.1) (Benz & Asphaug, 1999). Následně stanovujeme N_{project} pro různé hodnoty d_{disrupt} jako počet planetek hlavního pásu s velikostmi $D \geq d_{\text{disrupt}}$. Několik výsledných hodnot počtu katastrofických rozpadů N_{col} za časový interval $\Delta t = 4$ Gyr uvádíme v tabulce 5. Jak vychází najevo, pravděpodobnost katastrofického rozpadu přímo v rezonanci je $\leq 18\%$, pokud uvažujeme jediný terč. Poznamenejme, že v tomto *stacionárním* modelu není zohledněn kolizní ani orbitální vývoj vzniklé rodiny.

Je třeba si uvědomit, že pro sestavení realističtějšího modelu bychom museli uvážit, že v rezonanci není pozorovatelný shluk fragmentů, tudíž hypotetický rozpad mateřského tělesa by musel nastat více než před 1 Gyr (Brož a kol., 2005). Dosud jsme také nevzali v úvahu vliv komet během velkého pozdního bombardování, které mohlo dočasně zvýšit frekvenci srážek, ale také urychlit vývoj rozdělení velikostí fragmentů.

Kolizní model. Hypotézu katastrofického rozpadu jsme tedy znovu testovali v sofistikovanějším modelu pomocí kódu BOULDER a zohlednili jsme i vliv komet. Počáteční podmínky pro asteroidy hlavního pásu a komety jsou tytéž jako v kapitole 6.2, stejně jako rozdělení velikostí syntetické populace Zhongguo, které jsme pouze modifikovali přidáním jediného asteroidu s $D \simeq 100$ km — mateřského tělesa. Vlastní pravděpodobnost a střední rychlost srážky pro kolize hlavního pásu a skupiny Zhongguo jsme vzali jako průměrné hodnoty z tabulky 3. Simulovali jsme 4 Gyr kolizního vývoje.

Obrázek 23 představuje sadu sta realizací našeho modelu. Na začátku simulace je syntetická skupina Zhongguo silně postižena tokem komet, který nejčastěji způsobuje kráterování velkého rezonančního asteroidu a kromě toho vznikne v několika simulacích asteroidální rodina. Zároveň však přítomnost komet urychluje kolizní vývoj rozdělení velikostí v oblasti středně velkých asteroidů. Veškeré vzniklé rodiny jsou příliš postiženy kolizemi a strmost jejich rozdělení velikostí klesá pod pozorovanou hodnotu pro skupinu Zhongguo.



Obrázek 23: Totéž jako na obrázku 22, nyní je však do syntetické populace Zhongguo přidán jeden asteroid s $D \simeq 100$ km a studujeme možnost jeho katastrofického rozpadu za dobu 4 Gyr.

Zaměříme se tedy na vznik rodin po velkém pozdním bombardování. Vyberme pouze případy, kdy velikost největšího fragmentu (nebo zbytku po mateřském tělese, je-li přítomen) je $D_{LF} \geq 10$ km, abychom vždy obdrželi těleso srovnatelné s (3789) Zhongguo. Tři takové případy nastaly v čase simulace $t = 2,1, 2,8$ a $3,1$ Gyr. Mateřské těleso velikosti $D_{PB} \simeq 85$ km bylo roztrženo na rodinu s největším fragmentem o velikosti $D_{LF} \simeq 18$ km a největším zbytkem majícím průměr $D_{LR} \simeq 60$ km. Odpovídající rozdělení velikostí se shodují¹ s pozorovaným, až na přítomnost největšího zbytku.

Můžeme prohlásit, že vznik rodiny uvnitř rezonance 2:1 je nepravděpodobný proces, protože by musel být najednou splněn následující komplexní soubor podmínek: musel by nastat katastrofický rozpad navzdory jeho nízké pravděpodobnosti, která je typicky 10% podle stacionárního modelu, nebo 3% podle sofistikovanějšího kolizního modelu. Vzniklé rozdělení velikostí by muselo být značně strmé a pokud možno bez přítomnosti zbytku po mateřském tělese. Pokud by byl zbytek přítomen, museli bychom se „spolehnout“ na jeho následné odstranění vlivem dynamického rozpadu, neboť v rezonanci žádný velký asteroid není pozorován. Rozpad by se zároveň musel odehrát po velkém pozdním bombardování ale dost brzy na to, aby mohlo dojít k rozptýlení shluku fragmentů v orbitálním rozdělení.

6.4 Vznik strmého rozdělení velikostí zachycením z rodiny

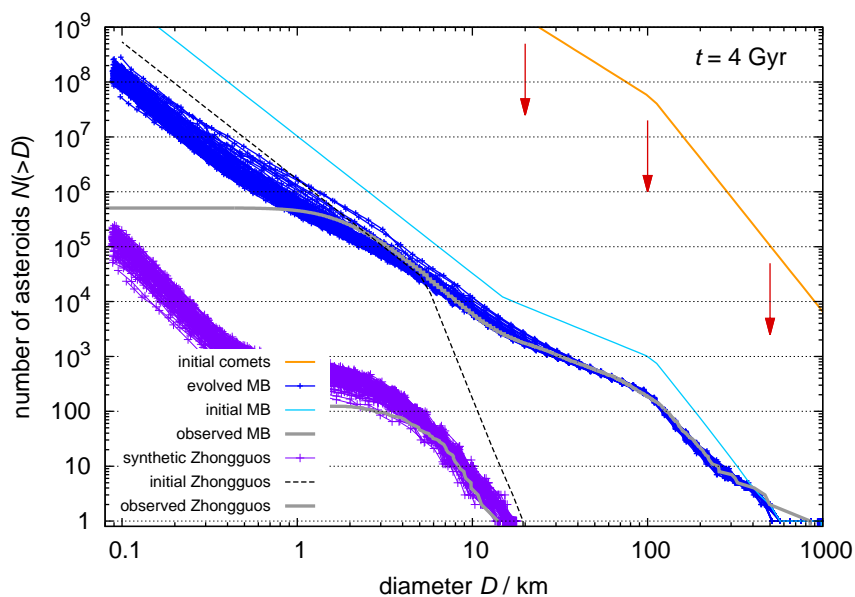
Na základě kolizních modelů popsaných v předchozích dvou podkapitolách jsme ukázali, že je obtížné vysvětlit strmé rozdělení velikostí skupiny Zhongguo „běžnými“ procesy (jako jsou přímé zachycení z pozadřové populace hlavního pásu nebo vznik asteroidální rodiny), které mohly proběhnout během rezonančního zachycení nebo později. V této části jsme se tedy rozhodli nejprve nalézt počáteční parametry, které by rozdělení velikostí muselo mít, aby kolizním vývojem po dobu 4 Gyr přešlo

¹Abychom byli přesnější, rozdělení velikostí získaná v našich simulacích leží mírně pod úrovní pozorovaného rozdělení, tato neshoda může být ovšem snadno odstraněna, pokud bychom do iniciální populace zařadili o trochu větší mateřské těleso.

v rozdělení pozorované. Následně budeme diskutovat proces, při kterém se takové rozdělení mohlo vytvořit.

Počáteční parametry. Užitím přístupu pokusu a omylu jsme dospěli k vhodnému počátečnímu rozdělení velikostí s následujícími parametry: $D_1 = 10$ km, $D_2 = 5$ km, $q_a = -6,6$, $q_b = -6,6$, $q_c = -3,5$, $N_{\text{norm}} = 12$. Změna sklonu v místě D_2 je nutná z toho důvodu, aby úhrnná hmota obsažená v populaci nabývala realistických hodnot. Rozdělení velikostí hlavního pásu a disku komet jsou stejná jako v předcházejících modelech.

Výsledek 100 běhů kolizního kódu je uveden na obrázku 24. Vyvinuté rozdělení velikostí rezonanční populace velmi dobře reprodukuje rozdělení pozorované. Strmé části mají stejný sklon, jediným rozdílem je nadbytek malých asteroidů v rozdělení syntetické populace. Je však třeba si uvědomit, že pozorované rozdělení je zřejmě s klesajícím D zatíženo observační nedostatečností, proto není nalezení dokonalé shody v oblasti malých asteroidů našim záměrem.

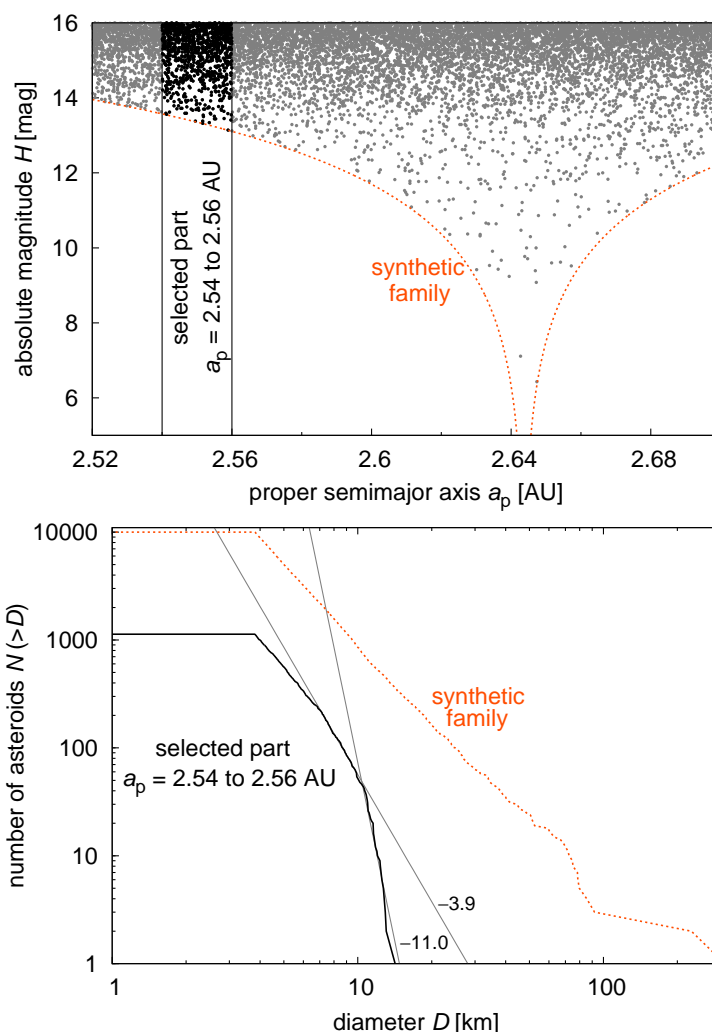


Obrázek 24: Obdoba obrázků 22 a 23, nyní však přímo hledáme počáteční parametry pro syntetickou skupinu Zhongguo, které jsou potřebné k tomu, aby se její rozdělení velikostí vyvinulo vlivem kolizí v rozdělení pozorované.

Zachycení z rodiny. Mechanismus, jež by mohl být zodpovědný za vznik vysokého počátečního sklonu, by mohl být následující (a je úzce spjat s efektem popsaným Carrubou a kol. (2014)). Předpokládáme, že rezonanční zachycení proběhlo z hypotetické asteroidální rodiny ležící ve vnějším hlavním pásu, namísto zachycení z pozadřové populace. Do stabilních ostrovů se může zachytit pouze část rodiny, protože skok 2:1 rezonance je náhlý (nejedná se o *sweeping*), efektivita zachycení je omezená (viz kapitola 3) a šířka ostrovů v hlavní poloose je relativně malá (viz například obrázek 3). Pokud část shluku fragmentů, která je do rezonance zachycena, leží původně dál od počáteční pozice mateřského tělesa, bude její rozdělení velikostí velmi strmé. Důvodem je vyšší rychlost výhozu malých fragmentů — ty se pak mohou dostávat na dráhy, které jsou mateřskému tělesu vzdálené, zatímco velké fragmenty setrvávají poblíž mateřského tělesa (Vokrouhlický a kol., 2006).

Pro otestování popsané hypotézy jsme použili jednoduchý test Monte–Carlo. Vygenerovali jsme rovnoměrné rozdělení 10 000 testovacích částic omezené nerovnostmi $2,52 \leq a \leq 2,70 \text{ AU}$ a $\log_{10}(|a - a_c|/2 \cdot 10^{-4})/0,2 \leq H \leq 16 \text{ mag}$ v rovině (a, H) , kde $a_c \approx 2,64 \text{ AU}$ je centrální hodnota hlavní poloosy a H je absolutní hvězdná velikost (tímto postupem jsme vytvořili syntetickou rodinu s typickým rozdělením v rovině (a, H) , které ve srovnání s pozorovanými rodinami připomíná například rodinu Eunomia). Nakonec jsme testovacím částicím přiřadili velikosti D na základě jejich absolutních hvězdných velikostí H , za předpokladu jediné hodnoty vizuálního geometrického albeda $p_v = 0,05$. Následně jsme ze syntetického shluku fragmentů náhodně vybírali podskupiny spadající do intervalu hlavních poloos o šířce $\Delta a = 0,02 \text{ AU}$. V takto vybraných podskupinách jsme monitorovali rozdělení velikostí a porovnávali ho s rozdělením celé syntetické rodiny.

Příklad takového srovnání je vidět na obrázku 25. Je zřejmé, že při zachycení části rodiny mohou vznikat velice strmá rozdělení velikostí. Výsledný sklon je dokonce ještě vyšší, než je potřebný počáteční sklon rozdělení velikostí skupiny Zhongguo. Poznamenejme, že popsaný mechanismus nevyžaduje, aby strmé rozdělení měla rodina jako taková. Vysokého sklonu je dosaženo později — selektivním zachycením z vhodné oblasti.



Obrázek 25: Závislost absolutní hvězdné velikosti H na vlastní hlavní poloose a_p pro syntetickou rodinu planetek (horní panel). Rodinu používáme pro jednoduchý test Monte–Carlo, ve kterém studujeme, jak se mění tvar a sklon rozdělení velikostí, pokud vybereme pouze část rodiny. Příklad porovnání rozdělení velikostí, pro část vymezenou v horním panelu svislými čarami, ukazuje spodní panel. Porovnáváme kumulativní rozdělení velikostí celé syntetické rodiny (čárkovaná čára) a její části (plná čára). Strmé části rozdělení jsou posléze aproximovány mocninnou funkcí, jejíž exponent je uveden vedle příslušných fitů. V tomto konkrétním případě je pro vybranou část rodiny dosaženo vysoké hodnoty indexu sklonu $\gamma = -11$.

Provázání s dynamickými modely. Mezi kolizním modelem, který předpokládá zachycení z rodiny, a dynamickým modelem, který jsme popsali v kapitole 3, lze nalézt zajímavou vazbu. V závěru kapitoly 3 jsme diskutovali, že by zdrojová populace pro rezonanční zachycení měla obsahovat nadbytek asteroidů s nízkým sklonem, aby bylo možné vysvětlit vysokou koncentraci planetek na málo skloněných dráhách ($I_r < 0,1$) v ostrově B. Takovou vhodnou zdrojovou populací by mohla být právě asteroidální rodina. A naopak lze samozřejmě tvrdit, že pokud rezonanční zachycení skutečně proběhlo z hypotetické rodiny ve vnějším hlavním pásu, musela se tato rodina původně nacházet na nízkých sklonech.

Závěr a budoucí práce

Aktualizace populace. V této práci jsme provedli revizi populace asteroidů, které se nacházejí v rezonanci 2:1 středního pohybu s Jupiterem, a to na základě nejnovějších observačních dat. Aktualizovaná populace nyní obsahuje 370 planetek, které mohou být rozděleny do skupiny 140 dynamicky nestabilních a skupiny 230 stabilních asteroidů. Odvozené fyzikální vlastnosti jsou v dobré shodě s předcházejícími pracemi, které se rezonanční populací zabývaly (Roig a kol., 2002; Brož & Vokrouhlický, 2008). Nově bylo možné získat odhad středního albeda $\bar{p}_V = (0,08 \pm 0,03)$, založený na datech z databáze WISE (Masiero a kol., 2011).

Studovali jsme dlouhodobou dynamiku dvou kvazistabilních ostrovů A a B, s použitím výsledků práce Skoulidou a kol. (v přípravě), kde byl sestaven dynamický model zohledňující též perturbace pocházející od terestrických planet a Jarkovského drift v hlavní poloose. Populace v ostrovech se dynamicky rozpadá přibližně podle exponenciálního zákona, ale míra difuze je vyšší v ostrově A. Charakteristické časy exponenciálního poklesu jsou 0,57 Gyr v případě ostrova A a 0,94 Gyr v případě ostrova B. Dynamický vývoj na škálách miliard let tedy vede k diferenciální difuzi planetek z ostrovů, což je jeden z důvodů pro pozorovanou asymetrii v poměru populací A/B.

Numerické metody. Revidovali jsme dynamické simulace s předepsanou migrací obřích planet, které byly použity v bakalářské práci Chrenka (2013). Ukázali jsme, že původní přístup s využitím integrátoru, který předepsaný migrační scénář lineárně interpoluje v orbitálních elementech, není pro studium 2:1 rezonance vhodný, neboť neumožňuje přesně reprodukovat orbitální vývoj v rezonanci v současné sluneční soustavě. Vyvinuli jsme proto integrátor, který využívá algoritmus interpolace v kartézských souřadnicích a rychlostech, a provedli jsme jeho verifikaci. Rovněž jsme přehodnotili jednotlivé kroky, podle nichž jsme dále postupovali při počítání dynamických modelů ve scénáři pěti obřích planet s nestabilitou „skákájícího Jupiteru“ (Nesvorný & Morbidelli, 2012).

Testované hypotézy. Hlavním cílem práce bylo vysvětlit vznik dynamicky stabilní populace, samozřejmě s přihlédnutím k observačním omezením (zejména k a-

symetrii v počtu asteroidů v ostrovech A/B, k rozdílům v jejich orbitálních sklonech, a ke strmému rozdělení velikostí). Testovali jsme přitom dvě hypotézy:

1. zachycení planetek z vnějšího hlavního pásu a
2. přežití primordiálních stabilních planetek; obojí během migrace planet se skokem Jupiteru.

Výsledky dynamických modelů. Naše simulace nestability planetárního systému naznačují, že v principu jsou oba procesy možné. Zachycení samotné, spolu s následnou difuzí během dlouhodobého dynamického vývoje, umožňuje vysvětlit pozorovanou populaci v obou ostrovech, pokud předpokládáme, že počet planetek v hlavním pásu byl před 4 Gyr třikrát vyšší než v současnosti, jak navrhli Minton & Malhotra (2010). Náš model předpovídá, že bychom v současnosti měli v ostrově A pozorovat $N_A^{\text{model}} = 1$ až 3 planetky větší než $D = 5$ km. V ostrově B by se mělo nacházet $N_B^{\text{model}} = 62$ až 121 těles s $D \geq 5$ km. Pro srovnání uvedme pozorované hodnoty $N_A^{\text{obs}} = 2$ a $N_B^{\text{obs}} = 71$. Model a pozorování se v rámci nejistot velmi dobře shodují.

Modelovali jsme též pozdní hladkou fázi planetární migrace, abychom prozkoumali možnost rezonance mezi librační periodou P_σ těles v J2/1 a rostoucí periodou P_{GI} velké nerovnosti Jupiteru a Saturnu. Vliv tohoto efektu na stabilní populaci závisí na časové škále pozdní migrace. Pokud proběhla za $\tau \simeq 30$ Myr (což odpovídá scénářům z práce Nesvorného & Morbidelliho (2012)), destabilizace ostrovů by nebyla podstatná a umožnila by zachycené populaci přežít ve stavu, který je srovnatelný s pozorováním. Model se zohledněnou pozdní migrací předpovídá $N_A^{\text{model}} = 0$ až 1 a $N_B^{\text{model}} = 40$ až 78. Pokud však byla časová škála pozdní migrace $\tau \simeq 60$ Myr, chaos ve stabilních ostrovech by byl zesílen po dobu dostatečně dlouhou na to, aby početnost stabilní populace značně poklesla, a to na hodnoty $N_A^{\text{model}} = 0$ až 1 a $N_B^{\text{model}} = 22$ až 42, což by neodpovídalo pozorováním.

V případě primordiálních planetek jsme z našich simulací vyvodili, že přibližně 1% těles z ostrova A a 4% těles z ostrova B mohou přežít migraci na stabilních drahách. Nicméně jsme diskutovali, že příspěvek primordiálních planetek k pozorované populaci je patrně zanedbatelný. Aby totiž primordiální populace přečkala

i 4 Gyr orbitálního vývoje po skončení migrace, musela by na počátku vykazovat částicovou hustotu větší, než navrhli Minton & Malhotra (2010), alespoň faktorem deset. Avšak pro tak výraznou odlišnost částicových hustot hlavního pásu a rezonanční populace zřejmě neexistuje rozumný důvod.

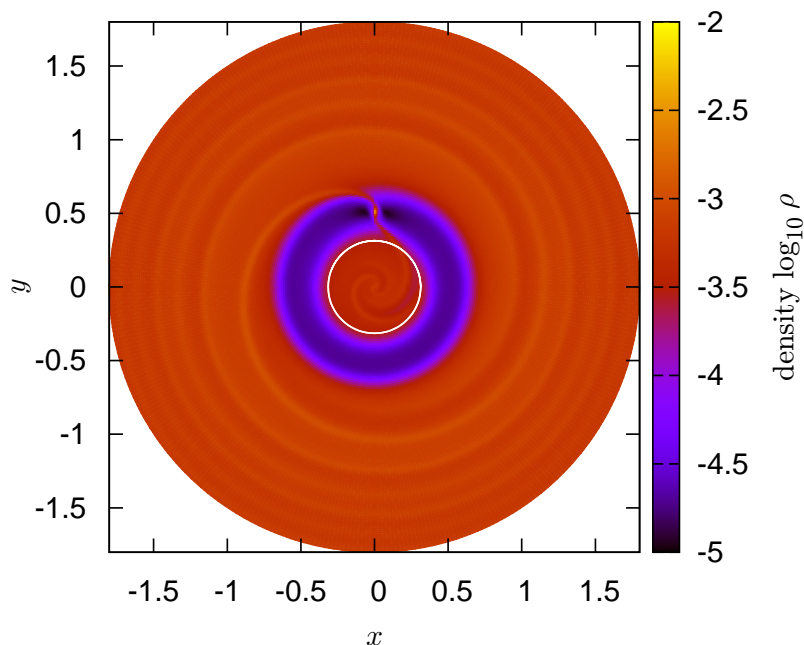
Výsledky kolizních modelů. Zkonstruovali jsme několik kolizních modelů, pomocí nichž jsme ukázali, že pozorované strmé rozdělení velikostí stabilních planetek nemůže být vysvětleno pomocí zachycení z pozařové populace hlavního pásu postiženého velkým pozdním bombardováním. Ukázali jsme rovněž, že vznik asteroidální rodiny katastrofickým rozpadem uvnitř rezonance 2:1 je nepravděpodobný.

Závěr a výstupy práce. Naším hlavním závěrem je, že stabilní populace vznikla zachycením části hypotetické rodiny, která se původně, před skokem Jupiteru, nacházela ve vnějším hlavním pásu. Je-li naše hypotéza správná, pak stabilní asteroidy v rezonanci 2:1 představují patrně nejstarší identifikovatelné zbytky asteroidální rodiny v hlavním pásu.

Řešení diplomové práce a získané výsledky posloužily jako podklad pro další vědecky hodnotné výstupy. Především se jedná o odborný článek s názvem *The origin of long-lived asteroids in the 2:1 mean-motion resonance with Jupiter*, který byl podán do časopisu *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Článek byl připravován v mezinárodní spolupráci s dalšími vědci z oboru — Davidem Nesvorným a Kleomenisem Tsiganisem. Dále jsme výsledky prezentovali formou přednášky na vrcholné konferenci oboru planetárních věd AAS DPS 2014 v Tucsonu (Arizona, USA). Výzkum jsme zároveň prováděli v rámci grantového projektu GA UK č. 1062214.

Budoucí práce. Jako budoucí práci, o kterou by šlo stávající studii rozšířit, navrhujeme zkonstruovat provázaný model dynamického i kolizního vývoje stabilní populace, neboť dosud jsme orbitální vývoj a srážky simulovali odděleně. Dále by bylo vhodné prostudovat hypotetickou primordiální populaci v období před samotnou nestabilitou „skákáčického Jupiteru“, abychom posoudili, zda se částicová hustota uvnitř ostrovů stability mohla lišit od přilehlého hlavního pásu. To by ovšem vyžadovalo hydrodynamické simulace protoplanetárního plynného disku (Masset,

2000), který ovlivňoval pohyby obřích planet, přičemž aerodynamické tření o plyn bezpochyby působilo i na tělesa nacházející se v rezonanci 2:1 (viz obrázek 26).



Obrázek 26: Ukázka 2D hydrodynamické simulace vývoje plynného protoplanetárního disku s vnořenou obří planetou, kterou jsme spočetli pomocí kódu FARGO (Masset, 2000). Planeta o hmotnosti Jupiteru je umístěna na fixní kruhové dráze. Disk je parametrizován kinematickou viskozitou $\nu = 10^{-5}$ a spadá do limity tenkých disků ($H/r = 0,05$, kde H je tloušťka disku a r je radiální souřadnice). Výpočetní síť rozděluje disk na 128 úseků v radiálním a 384 úseků v azimutálním směru. Na obrázku se systém nachází ve stavu po 500 obězích planety. Zobrazovanou veličinou je plošná hustota, resp. její logaritmus. Bílá kružnice vyznačuje přibližnou polohu rezonance 2:1 středního pohybu s planetou.

A. Článek The origin of long-lived asteroids in the 2:1 mean-motion resonance with Jupiter

V této příloze přetiskujeme odborný článek, který byl vypracován na základě výsledků popsanych v hlavním textu diplomové práce. Článek vznikl ve spolupráci se zahraničními pracovišti v USA a Řecku. Předložená verze odpovídá stavu článku při jeho podání do časopisu *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* ke dni 4. 4. 2015 (článek v době vydání diplomové práce teprve procházel recenzním řízením).

The origin of long-lived asteroids in the 2:1 mean-motion resonance with Jupiter

O. Chrenko^{1*}, M. Brož¹, D. Nesvorný², K. Tsiganis³, D. Skoulidou³

¹*Institute of Astronomy, Charles University in Prague, V Holešovičkách 2, CZ-18000 Prague 8, Czech Republic*

²*Department of Space Studies, Southwest Research Institute, 1050 Walnut Street, Suite 300, Boulder, CO-80302, USA*

³*Department of Physics, Aristotle University of Thessaloniki, GR-54124 Thessaloniki, Greece*

in original form 2015 April 4

ABSTRACT

The 2:1 mean-motion resonance with Jupiter harbours two distinct groups of asteroids. The short-lived population is known to be a transient group sustained in steady state by the Yarkovsky semimajor axis drift. The long-lived asteroids, which can exhibit dynamical lifetimes comparable to 4 Gyr, reside near two similar isolated stable islands denoted A and B, with an uneven population ratio $B/A \simeq 10$. Moreover, the inclinations of B-island asteroids are mostly low, unlike those of A-island asteroids. Finally, their size-frequency distribution is steep but the orbital distribution lacks any evidence of a collisional cluster. These observational constraints are somehow puzzling and therefore the origin of the long-lived asteroids has not been explained so far.

We use new observational data and also recent advances on the theories of planetary migration to provide a viable explanation. First, we update the resonant population and revisit its physical properties. Using an N -body model with complete planetary system and the Yarkovsky effect included, we demonstrate that the dynamical depletion of island A is faster, in comparison with island B. Then we investigate (i) the survivability of primordial resonant asteroids and (ii) capture of the population during planetary migration, following a recently described scenario with an escaping fifth giant planet and a jumping-Jupiter instability. We also model the collisional evolution of the resonant population over past 4 Gyr. Our simulations and dynamical maps imply that 5 per cent of the primordial population can survive the migration and resonant capture occurs with 6.5 per cent efficiency, but we also suggest that primordial asteroids were not numerous enough to substantially contribute to the observed population. We conclude that the long-lived group was probably created by resonant capture from a hypothetical outer main-belt family during planetary migration.

Key words: minor planets, asteroids: general – methods: numerical.

1 INTRODUCTION

The 2:1 mean-motion resonance with Jupiter, hereinafter denoted as J2/1, is one of the major first-order Jovian resonances intersecting the main asteroid belt. It is associated with the Kirkwood gap known as the Hecuba gap (Kirkwood 1867; Schweizer 1969), which is commonly considered to be the borderline separating the outer main belt and the Cybele region. Its name is derived from (108) Hecuba which is an outer main-belt asteroid but technically does not exhibit the exact 2:1 commensurability (Schubart 1964).

The 2:1 resonance, which was originally believed to be depleted of asteroids, harbours several small-sized bodies

as it was realised by observations in the 20th century (the first resonant asteroid (1362) Griqua was recognized in 1943 (Rabe 1959)). The follow-up studies based on analytical and semi-analytical methods (e.g. Murray 1986; Moons, Morbidelli & Migliorini 1998), symplectic mapping (e.g. Roig & Ferraz-Mello 1999) and frequency analysis (e.g. Nesvorný & Ferraz-Mello 1997) helped to get insight to the internal structure of the resonance and to investigate the character of various resonant orbits affected by a complicated interplay between the J2/1 and overlapping secular (Morbidelli & Moons 1993) and secondary resonances (Wisdom 1987; Henrard, Watanabe & Moons 1995). In particular, it was discovered that while the regions of the overlap give rise to a strongly chaotic behaviour of the asteroidal orbits, there are two separate regions of quasi-regular motion located in-

* E-mail: chrenko@sirrah.troja.mff.cuni.cz

side the resonant part of the phase space (Franklin 1994; Michtchenko & Ferraz-Mello 1997). These regions were designated as stable islands A and B (Nesvorný & Ferraz-Mello 1997, see e.g. Fig. 1).

However, it was also suggested by Ferraz-Mello, Michtchenko & Roig (1998) that the stability of the islands could have been weakened in the past. The mechanism responsible for this increase of chaos was introduced as 1:1 resonance of the J2/1 libration period with the period of Jupiter-Saturn great inequality (GI). Although the present value of the GI period is 880 yr, it was probably smaller when configuration of planetary orbits was more compact and it slowly increased during Jupiter's and Saturn's divergent migration. If the value of the GI period was temporarily comparable with the libration period of the J2/1 asteroids (which is typically $\simeq 420$ yr), the aforementioned resonance would have occurred.

With ongoing improvements of the observation techniques and sky surveys, it was discovered that there is a population of asteroids inside the J2/1 which is numerous enough to be analyzed statistically with numerical methods. Long-term integrations in the simplified model with four giant planets were performed by Roig, Nesvorný & Ferraz-Mello (2002) who identified both short-lived and long-lived asteroids within the observed population, which consisted of 53 bodies by then. Investigating resident lifetimes of the resonant asteroids, Roig et al. (2002) demonstrated that part of the population escapes from the resonance on time-scales ~ 10 Myr, while other asteroids may have dynamical lifetimes comparable to the age of the Solar System. The orbits of these long-lived asteroids were embodied in island B and part of them was also present in its surroundings, being affected by chaotic diffusion. Surprisingly, the stable island A was empty.

In a series of papers focused on the 2:1 mean-motion resonance, Brož et al. (2005) and Brož & Vokrouhlický (2008) identified significantly more bodies as resonant. The latter catalogue contained 92 short-lived and 182 long-lived asteroids. They also realised that nine of the long-lived asteroids were located in island A, while the rest was residing in the island B and its vicinity. They successfully explained the origin of the short-lived asteroids by a numerical steady-state model, in which the resonant population was replenished by an inflow of outer main-belt asteroids driven by the Yarkovsky semimajor axis drift. However, this model fails in the case of the long-lived population which was thought to be created by Yarkovsky induced injection of the nearby Themis family asteroids that exhibit similar inclinations as the B-island asteroids. Brož et al. (2005) showed that the objects transported from Themis are usually perturbed shortly after entering the resonance and rarely reach the islands.

Roig et al. (2002) argued that the steep size-frequency distribution (SFD) of the long-lived asteroids, which was far from a steady-state situation (Dohnanyi 1969), could imply recent collisional origin. On the contrary, there was no collisional cluster identified in the orbital distribution by Brož & Vokrouhlický (2008), thus a collisional family would have to be older than 1 Gyr. Moreover, the presence of the high inclined A-island asteroids would require unrealistic ejection velocities, assuming that the disruption occurred in the more populated island B.

As there is no self-consistent explanation, the main goal

of this paper is to provide a reasonable model for the formation and evolution of the long-lived population, taking into account the paucity of bodies in island A, the differences in the inclination and the non-equilibrium size distribution.

The long dynamical lifetimes of the dynamically stable asteroids, together with the failure of the aforementioned hypotheses, strongly indicates that their origin may be traced back to the epoch of planetary migration. Recent advances in migration theories suggest that a primordial compact configuration of planetary orbits and subsequent violent planetary migration might have led to a destabilization of several regions that are otherwise stable under the current planetary configuration. The populations of Trojans and Hildas (Nesvorný, Vokrouhlický & Morbidelli 2013; Roig & Nesvorný 2014) may serve as examples of such a process: the primordial populations in the 1:1 and 3:2 resonances with Jupiter were totally dispersed and the observed populations were formed by resonant capture of bodies, originating either in the outer main belt or in the transneptunian disc of comets. It seems inevitable that the 2:1 resonance with Jupiter also undergoes significant changes of its location, inner secular structure and asteroid population, during the planetary migration.

The structure of the paper is as follows. We first use the latest observational data from the databases AstOrb, AstDyS, WISE and SDSS to update the observed population in Section 2. We also briefly review the characterization of resonant orbits and describe a method of dynamical mapping. In Section 3, we study whether the planetary migration may cause depletion or repopulation of the long-lived J2/1 asteroids. The dynamical models we create are based on simulations with prescribed evolution of planets in context of the modern migration scenario with five giant planets and *jumping-Jupiter instability* (Nesvorný & Morbidelli 2012). Section 4 is focused on dynamical simulations covering the late stage of planetary migration during which the GI period evolution might have influenced the stability of the long-lived asteroids. In Section 5, we examine the effects of collisions on the long-lived population. Finally, Section 6 is devoted to conclusions.

2 OBSERVED RESONANT POPULATION

In this section, we first describe methods we use for identification and description of resonant orbits as well as for dynamical mapping of the resonance. Our approach is similar to the one used by Roig et al. (2002). We identify resonant orbits in a recent catalogue of osculating orbital elements and we study their dynamical lifetimes on the basis of long-term numerical integrations in a simplified model with four giant planets only. Our goal is also to survey available data for physical properties of the population, namely the absolute magnitudes, sizes and albedos. In the last subsection, we revisit results of Skoulidou et al. (in preparation) in order to compare the simplified four-giant-planet model with a more sophisticated framework including terrestrial planets and the Yarkovsky effect. Especially, we look for the differences in the dynamical decay rates in the stable islands A and B.

2.1 Characterization of resonant orbits

The 2:1 resonance critical angle is defined as:

$$\sigma \equiv 2\lambda_J - \lambda - \varpi, \quad (1)$$

where λ_J and λ are the mean longitudes of Jupiter and of an asteroid, respectively, ϖ is the asteroid's longitude of perihelion. The critical argument of any body trapped inside the J2/1 resonance librates (quasi-periodically changes on an interval $< 2\pi$) with a typical period of about 420 yr. On the other hand, the critical argument of the asteroids outside the resonance circulates. This provides us a useful tool for the identification of the resonant asteroids.

The libration of σ is linked to periodic changes of the osculating semimajor axis a , the eccentricity e and the inclination I . These changes are coupled together as described by the adiabatic invariant N of the asteroid's motion in the circular and planar restricted Sun–Jupiter–asteroid system

$$N = \sqrt{a} \left(2 - \sqrt{1 - e^2} \cos I \right). \quad (2)$$

The presence of other planets and variable eccentricity of Jupiter's orbit give rise to multiple perturbations in the J2/1 and prevent integrability of the orbits.

None the less, the a, e, I coupling is preserved to a certain degree. Semimajor axis oscillates around the libration centre, which is positioned approximately at the exact resonance $a_{\text{res}} \simeq 3.27$ AU. The eccentricity and inclination attain their maximal values when the oscillation of a is at its minimum and vice versa.

An inconvenient consequence of this behaviour is that the standard averaging methods for the computation of proper elements (Knežević & Milani 2003) do not retain any information about the libration amplitude (i.e. the proper semimajor axes of all resonant asteroids approach the value of a_{res}). Therefore the proper elements are not the appropriate choice when studying resonant orbits.

In order to properly characterize the libration amplitude, we use an alternative set of resonant (or pseudo-proper) elements (Roig et al. 2002). The idea is to record the osculating orbital elements at the moment when they reach their extremal values during the libration cycle. These values can be found as the intersections with a suitably defined reference plane in the osculating elements space. A set of conditions determining this plane can be written as

$$\sigma = 0 \wedge \frac{d\sigma}{dt} > 0 \wedge \varpi - \varpi_J = 0 \wedge \Omega - \Omega_J = 0, \quad (3)$$

where Ω denotes the longitude of node and subscript J is used for Jupiter, and it enables the resonant elements to be recorded when the osculating semimajor axis a reaches its minimum, the eccentricity e and the inclination I attain maxima. Note that as a consequence, the J2/1 asteroids are always depicted on the left-hand side (closer to the Sun) of the libration centre in the resonant elements space (see e.g. Fig. 2).

Moreover, temporal evolution of resonant elements may serve as the first indicator of the stability. The reason is that stable orbits exhibit stable libration with only a small variation around the mean value. Therefore, successive intersections with the reference plane do not considerably move and the recorded resonant elements are nearly exact constants of motion. The situation for the unstable orbits is just the

opposite and the intersections slowly disperse in time. This fact propagates numerically to the resulting resonant elements, if we compute their standard deviation as an error of the mean value obtained over a significant period of time (~ 100 kyr).

Nevertheless, due to higher order perturbations and secular effects, the above conditions are seldom satisfied exactly and one has to use less confined criteria in the following form when numerically integrating the orbits:

$$|\sigma| < 5^\circ \wedge \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} > 0 \wedge |\varpi - \varpi_J| < 5^\circ. \quad (4)$$

We use the difference between successive numerical time steps (denoted as $\Delta\sigma$) rather than the time derivative. Note that we completely omit the condition for Ω . This simplification can be compensated by verifying that the maximal value of the inclination is reached when recording the resonant elements.

2.2 Dynamical maps

In this section, we summarize our approach to dynamical mapping of the 2:1 resonance and its secular structure. Our method is verified by comparing the map computed for the present configuration of planets with the separatrices and locations of secular resonances derived by Moons et al. (1998). An important outcome is our ability to record global changes inside the resonance when the planetary orbits are reconfigured and also to examine dynamical stability in various regions of the resonant phase space.

Our method employs the definition of the resonant elements. The respective values should change systematically in the case of unstable resonant orbits and on contrary, they should only oscillate with small variations in the case of stable orbits. The same behaviour is exhibited by actions of a dynamical system; time series of their extremal or mean values are therefore often used for dynamical mapping (e.g. Laskar 1994; Morbidelli 1997; Tsiganis, Knežević & Varvoglis 2007).

We proceed as follows. Divide an investigated part of the phase space into the boxes of the same size. Let the central coordinates (a, e, I) of each box represent a set of initial resonant elements (this is accomplished by setting the osculating angular elements so that condition (3) is fulfilled). Integrate the initial orbits over several millions of years and track the evolution of the resonant elements. Determine the differences δa_r , δe_r and $\delta \sin I_r$ between the initial and final (or the last recorded) resonant elements. These values represent the dynamical stability of the initial orbit and we use them as a characteristics of the entire box.

For the purpose of expressing the total displacement in the phase space, we define the distance

$$d \equiv \sqrt{\left(\frac{\delta a_r}{\bar{a}_r} \right)^2 + (\delta e_r)^2 + (\delta \sin I_r)^2}, \quad (5)$$

where \bar{a}_r denotes the arithmetic mean of the initial and final resonant semimajor axis. The distance d is similar to the metric used in the Hierarchical Clustering Method (Zappalà et al. 1995) for family identification.

In order to verify our method, we constructed a dynamical map of the 2:1 resonance in the *present* configuration of planets. We investigated the phase space in the intervals

$a \in (3.195, 3.275)$ AU, $e \in (0.1, 0.5)$, $I \in (0^\circ, 25^\circ)$ and split them into a grid of $40 \times 40 \times 5$ boxes. With the aim to improve our statistics, we randomly generated two more test particles in the vicinity of each central particle (the dispersion of particles is not exceeding 20 per cent of the box size). In this way we created the initial conditions for 24,000 test particles.

In the next step, we integrated the orbits for $t_{\text{span}} = 10$ Myr. For all these simulations, we use the symplectic integrator SWIFT (Levison & Duncan 1994) with a built-in second-order symplectic scheme (Laskar & Robutel 2001) and with an implementation of digital filters for the computation of the resonant elements based on criterion (4) (Brož et al. 2005). This symplectic integrator enables us to use a time-step $\Delta t = 91.3125$ d. The simulations we perform are simplified: as we study the outer main-belt we take into account only the gravitational interactions with the Sun and the four giant planets. The terrestrial planets are neglected, except for a barycentric correction applied to the initial conditions. We use the Laplace plane to define our initial frame of reference. We do not consider any non-gravitational acceleration at this point.

The final step was to calculate the distance d for each test particle. The average value \bar{d} for the particles initially placed in the same box was taken as a measure of the dynamical instability in the box. Note that there is no temporal measure in this method, i.e. the map reflects the maximal displacement in each box during the integration timespan t_{span} but it does not say how fast did this displacement occur.

We plot the mean values \bar{d} in the top panel of Figure 1. The map is an average projection of all sections in $\sin I_r$ to the (a_r, e_r) plane. It can be compared with several separatrices derived by Moons et al. (1998). It is clear the map reflects the inner secular structure of the 2:1 resonance very well: we can locate both the stable islands A and B, separated by the ν_{16} secular resonance. The borderline at higher values of e_r is formed by the Kozai and ν_5 separatrices. The low-eccentricity region near the libration centre is affected by presence of multiple secondary resonances (Roig & Ferraz-Mello 1999).

The bottom panel of Fig. 1 displays the projection of our map to the $(a_r, \sin I_r)$ plane but this time for a small interval of e_r , because the shape of the separatrices and stable islands strongly depends on e_r . The map demonstrates how the shape of the stable islands changes with the resonant inclination I_r .

Let us conclude that the suitability of the resonant elements for the dynamical mapping serves as an independent confirmation that they indeed reflect the regularity of resonant orbits and they retain important properties of the proper elements at the same time.

2.3 Lifetimes of asteroids in the 2:1 resonance

Let us now discuss our approach to the identification and classification of the resonant asteroids. We numerically propagated the orbits of known numbered and multi-opposition asteroids in the broad surroundings of the J2/1 to identify those trapped inside, using a time series of the critical argument σ . We extracted the osculating elements of the main-belt objects from the AstOrb database (Bowell 2012) as of

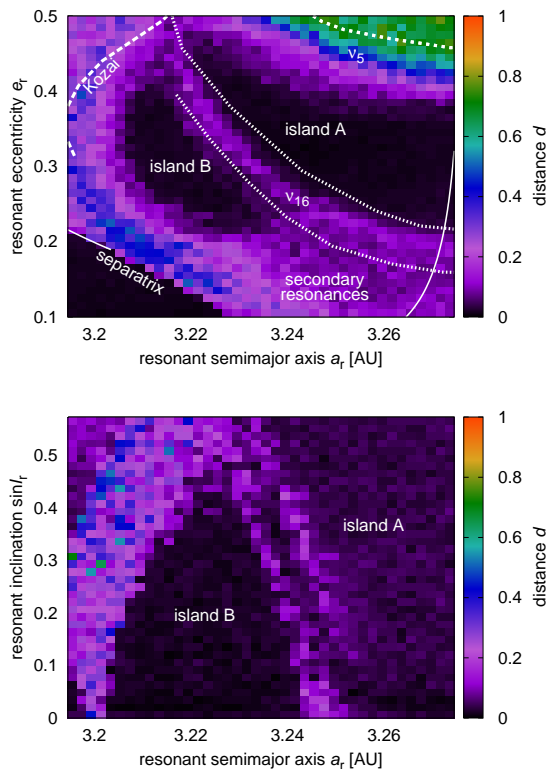


Figure 1. A dynamical map of the 2:1 mean-motion resonance with Jupiter computed in the present configuration of giant planets. Top panel: the map is plotted in the resonant semimajor axis a_r vs resonant eccentricity e_r plane and it is averaged over five sections in the resonant inclination $\sin I_r$. The color coding of boxes represents the average distance d in the phase space travelled by a test particle with initial orbital elements placed within the box. Additionally, separatrices and borders of the secular resonances, which were computed by Moons et al. (1998), are plotted over the map. The left solid line corresponds to the separatrix of the J2/1. The near-vertical solid line is the libration centre of the J2/1. The dotted lines indicate the ν_{16} and ν_5 resonance, and the dashed line represents the Kozai resonance. We mark the stable islands denoted A and B and also the region of overlapping secondary resonances (Roig & Ferraz-Mello 1999). Bottom panel: the map plotted in the resonant semimajor axis a_r vs sine of resonant inclination $\sin I_r$ plane. It was computed for test particles with the resonant eccentricity $e_r = 0.25$.

2012 November 15 to set-up the initial conditions for the first short-term integration. Our choice of the borders in the osculating (a, e) plane was $e_1 = 0.45(a - 3.24) / (3.1 - 3.24)$ and $e_2 = 0.5(a - 3.24) / (3.46 - 3.24)$. We ended up with 11,469 orbits. The corresponding planetary ephemeris were taken from JPL DE405 (Standish 2004) for the given Julian date. We numerically integrated the orbits for 10 kyr and we recorded the critical argument σ for each asteroid during the simulation. We have found 374 librating asteroids.

The following long-term integration requires a different approach. Our goal is to determine the future orbital evolution of the resonant asteroids and estimate their dynamical

lifetime. However, we are limited by strong chaotic diffusion in the J2/1. In other words, even a slight change of the initial conditions can significantly alter the orbital evolution. Because the orbital elements of each observed asteroid are only known with a finite accuracy, one should consider all values within the observational uncertainty as possible initial conditions to cover all alternatives of future orbital evolution.

To account for this chaotic behaviour, we first matched the AstOrb data for librating asteroids with corresponding AstDyS uncertainties (Knežević & Milani 2003). The matching failed in four cases¹ only and hence we discarded these bodies from the J2/1 population. We then used a pseudo-random generator to create a bundle of 10 synthetic orbits for each asteroid which are close to its nominal orbit. The generated orbital elements fall within the Gaussian distribution (over $\pm 3\sigma$ interval) in the nonsingular osculating element space. These synthetic test particles are called close clones. In this manner, we obtained 4,070 orbits (1 nominal and 10 synthetic for each body) which we integrated over 1 Gyr. By this procedure, we can study several possible realisations of future orbital motion.

Following again Roig et al. (2002), we define the dynamical lifetime τ as the asteroid's timespan of residence inside the resonance. Test particles leaving the resonance are usually discarded due to highly eccentric or inclined orbits, which lead to planetary crossing or fall into the Sun. We calculated the median dynamical lifetime $\bar{\tau}$ as the median value of the residence lifetimes of close clones.

We divided the J2/1 asteroids into three groups by virtue of their median dynamical lifetime $\bar{\tau}$ as follows:

- $\bar{\tau} \leq 70$ Myr: short-lived/unstable/Zulus. Number of identified bodies: 140.
- $\bar{\tau} \in (70, 1000)$ Myr: long-lived/marginally stable/Griquas. Number of identified bodies: 106.
- $\bar{\tau} \geq 1$ Gyr: long-lived/stable/Zhongguos. Number of identified bodies: 124.

For reference, the numbers of resonant asteroids identified in the previous paper Brož & Vokrouhlický (2008) were 92 short-lived and 182 long-lived asteroids.

We used the same long-term integration of the resonant orbits to construct orbital distribution of asteroids in the J2/1. We calculated average values of the resonant elements for each asteroid and each close clone over the time interval of 1 Myr; then we computed the arithmetic mean for the asteroid and its close clones together. We define the standard deviation of the resonant elements as the uncertainty of the arithmetic mean².

We depict the resulting mean resonant elements as pro-

¹ These particular bodies have the following designations: 2003 EO31, 2003 HH4, 2006 SE403 and 2006 UF152. The reason for the databases mismatch might be in different methods used for orbit identification.

² Let us note that the standard deviations of the mean resonant elements will be slightly overestimated. The reason for this arises from our approach to the generation of initial conditions because the initial elements of the close clones are generated *randomly* thus resulting in uncorrelated sets of quantities even though they should be correlated, as described by the correlation matrices available in orbital elements databases.

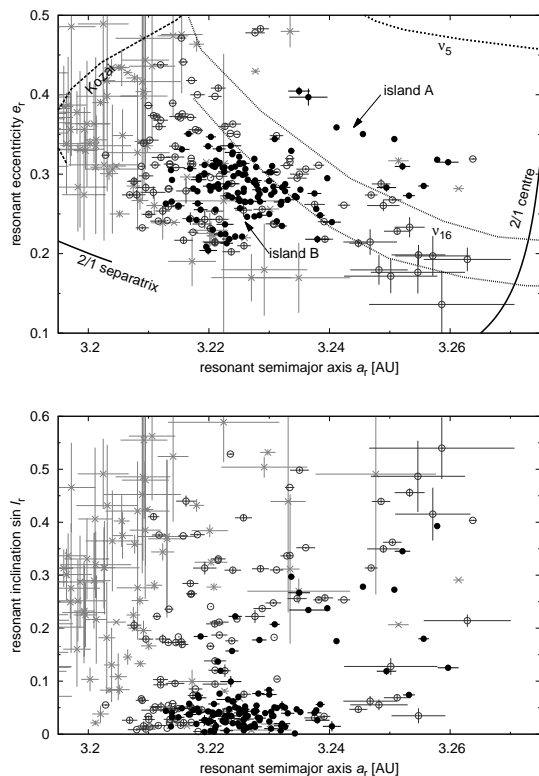


Figure 2. Orbital distribution of the J2/1 asteroids in the resonant semimajor axis a_r vs the resonant eccentricity e_r plane (top) and in a_r vs sine of the resonant inclination $\sin I_r$ plane (bottom). The symbols correspond to the dynamical lifetime of each body: filled circles denote dynamically stable Zhongguos, empty circles marginally stable Griquas, crosses unstable Zulus. The error bars indicate standard deviations of the computed orbits. We show the same borders and structures as in Fig. 1. Only a relatively small part of the unstable population is depicted.

jections to the (a_r, e_r) and $(a_r, \sin I_r)$ planes in Fig. 2. The orbital distribution exhibits similar properties as in the previous studies. Zhongguos reside at the very centre of the stable islands, 11 Zhongguos in island A and 113 in island B. The majority of B-island Zhongguos have low resonant inclinations while A-island Zhongguos are more inclined. Griquas partially overlap with the Zhongguo group, but they either reside on orbits with lower semimajor axis or higher inclination than Zhongguos. There is no clear separation between the orbits of Griquas and Zhongguos. It is therefore questionable whether the division of the long-lived population into these two groups has a solid physical foundation, apart from the dynamical lifetime. The orbital position of Griquas with respect to Zhongguos indicates that Griquas might be chaotically diffusing part of Zhongguos which have haphazardly entered the periphery regions of the stable islands.

Since we focus on the long-lived population, a great part of the short-lived bodies is not displayed in Fig. 2 (they are located outside the range of the plot). The depicted short-

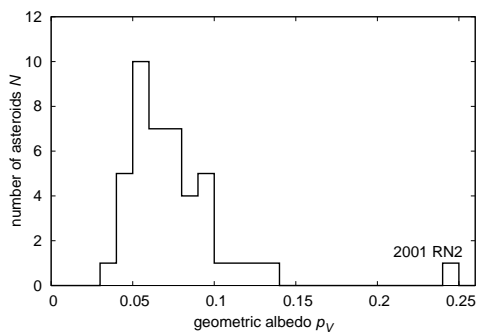


Figure 3. A histogram of the albedo distribution among the J2/1 asteroids: the visual geometric albedo p_V vs the number of asteroids N . The data for 44 asteroids were available in Masiero et al. (2011).

lived asteroids are chaotically drifting towards the Kozai separatrix.

2.4 Albedo, colour and size-frequency distributions

In order to study the basic physical properties of the J2/1 population, we first searched the WISE database. We were able to extract the visual geometric albedos p_V and the effective diameters D , inferred from NEATM thermal models by Masiero et al. (2011), for 44 asteroids inside the J2/1 (out of 370).

The data obtained allow us to examine the albedo distribution in the resonance (Fig. 3). The lowest albedo is (0.034 ± 0.002) while the largest value is (0.24 ± 0.03) . This relatively large albedo belongs to 2001 RN2 and indicates that this particular asteroid is likely the taxonomic type S. The majority of the asteroids (98 per cent) have albedo lower or equal to (0.136 ± 0.004) . The shape of the albedo distribution is typical for the outer main-belt region where C-types dominate.

As the next step, we investigated the diameters of asteroids. For the 44 cases we simply use the value D and its uncertainty. For the rest of the asteroids we calculate their approximate diameter using the following relation (Harris 1998):

$$D = \frac{1329}{\sqrt{p_V}} 10^{-\frac{H}{5}}, \quad (6)$$

where we insert the absolute magnitude H from the AstOrb catalogue and we use the mean albedo $\bar{p}_V = (0.08 \pm 0.03)$. The standard deviation of D is then computed as the propagated uncertainty of both H and \bar{p}_V .

We construct the cumulative size-frequency distributions (SFDs) of the resonant population and individual groups, as shown in Fig. 4. We fit the steep part of the distribution with a power-law function $N(>D) \propto D^\gamma$ to estimate the slope parameter γ for further comparison. The value of γ clearly depends on the chosen interval of diameters over which we approximate the SFDs with the power law. We set the nominal fitted interval as $D \in (7.5, 18)$ km. The SFDs start to bend at the lower limit of this nominal

group	nominal γ	variation of γ
short-lived	-3.2	(-2.5, -3.7)
long-lived	-4.3	(-3.7, -5.1)
Griquas	-3.0	(-3.0, -3.3)
Zhongguos	-5.1	(-3.9, -5.1)

Table 1. The slopes γ resulting from the method of least squares which we applied to fit the SFDs of dynamical groups with a power law function $N(>D) \propto D^\gamma$. The middle column shows the result of the fit in the nominal interval of diameters $D \in (7.5, 18)$ km, the third column reflects the variation of γ if the limits of the interval are shifted.

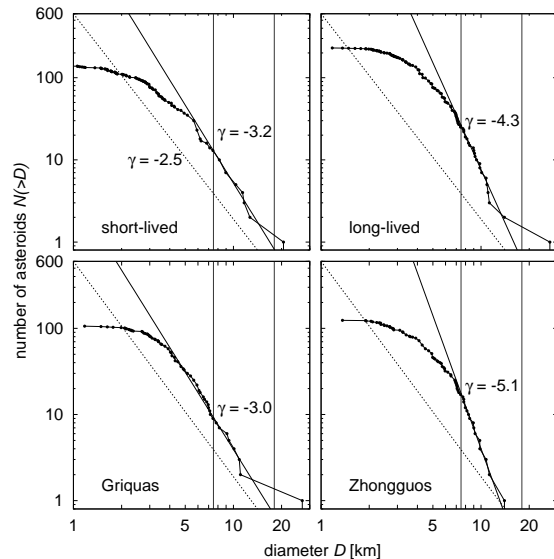


Figure 4. Size-frequency distributions (SFDs) of individual dynamical groups residing inside the J2/1: the diameter D vs the cumulative number $N(>D)$ of asteroids larger than D . A logarithmic scaling is used in the plot. The distributions correspond to the short-lived population (top left) and long-lived population (top right), which is then divided to marginally stable Griquas (bottom left) and stable Zhongguos (bottom right). The steep part of each distribution is approximated with a power-law $N(>D) \propto D^\gamma$. The nominal borders of the fitted regions (ranging from 7.5 km to 18 km) are shown by vertical lines. The value of the slope γ is also given. We also plot stationary Dohnanyi-like slope ($\gamma = -2.5$) for comparison.

interval except for SFD of Griquas which remains steep up to $D \simeq 4$ km. We also record the variation of the slope γ by slightly changing the fitted range of diameters. The results are summarized in Table 1.

Unlike results of Brož et al. (2005), the SFD of updated Griquas is not shallower than a Dohnanyi-like SFD with $\gamma = -2.5$ (Dohnanyi 1969). Moreover, one can notice that SFDs of Griquas, Zhongguos and the undivided long-lived population have similar overall shape (although the slopes are different). We consider it another argument for common origin of the entire long-lived population. In Section 5, we shall use these observed SFDs for comparison with the outcomes of our collisional models.

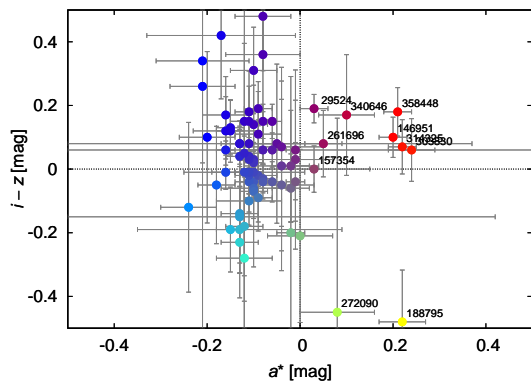


Figure 5. The optimized colour a^* vs the $i - z$ colour diagram of the J2/1 resonant asteroids found in the SDSS MOC catalogue. Error bars represent the standard deviations of the displayed quantities. The outliers with $a^* > 0$ are labeled with corresponding catalogue numbers.

Finally, we also searched the SDSS MOC catalogue (Parker et al. 2008). We found astrometric and photometric data for 81 resonant bodies for which we constructed a colour-colour diagram (see Fig. 5). The principal component denoted as a^* is defined on the basis of measurements in filters r , i and g as $a^* = 0.89(g - r) + 0.45(r - i) - 0.57$ and it can be used to distinguish C-complex ($a^* < 0$) and S-complex ($a^* > 0$) asteroids. The distribution in the diagram is typical for outer main-belt C-type asteroids, but one can also see several outliers with $a^* > 0$. We did not find any significant relation between the colours and the orbital distribution.

2.5 The long-term stability of the islands A and B

The observed resonant population has likely evolved over Gyr-long time-scales. Hence, it is important to assess its dynamical stability over similarly long time-spans. This problem was recently revisited by Skoulidou, Tsiganis & Varvoglis (2014). Here we will use the main results of this study that are relevant for our work; a complete dynamical study will be presented in a different paper (Skoulidou et al. in preparation).

When studying the outer asteroid belt, we typically ignore the weak perturbative effects of the terrestrial planets, as this speeds-up the numerical propagation. Skoulidou et al. (2014) showed that this is not a safe option, when studying the 2:1 resonant population for time-spans longer than 1 Gyr, as numerous weak encounters with Mars actually induce small-scale chaotic variations. These variations build-up slowly with time and eventually assist in breaking the phase-protection mechanism that would otherwise prevent asteroids on moderately eccentric orbits ($e \sim 0.4$) from encountering Jupiter on this time-span. Moreover, when the Yarkovsky effect is added, asteroids with $D < 20$ km can escape from the resonance more efficiently. This is because, as also shown in Brož & Vokrouhlický (2008), the combined action of resonance and slow Yarkovsky drift forces the asteroid orbits to slowly develop higher eccentricities as a consequence of adiabatic invariance. The computations presented

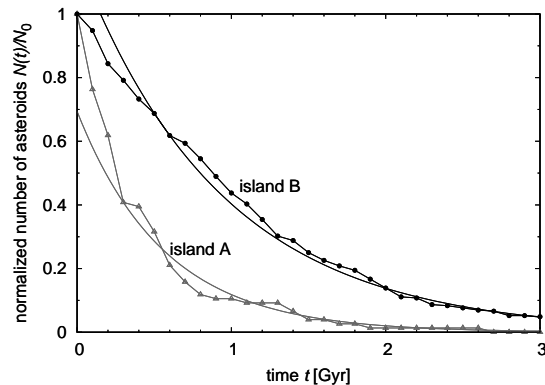


Figure 6. Time evolution of the number of resonant objects, $(N(t)/N_0)$, normalized to the initial value. This is the result of a 3 Gyr-long simulation, within the framework of the 7-planets model and including Yarkovsky-induced drift in a . The two curves refer to the two islands (A=open triangles and B=solid circles). Overimposed are the least-square fitted exponentials, yielding e-folding times of $\tau_A = (0.57 \pm 0.02)$ Gyr and $\tau_B = (0.94 \pm 0.02)$ Gyr, respectively.

in Skoulidou et al. (2014) show that, in a physical model that takes into account the aforementioned phenomena, the 2:1 population would decay roughly exponentially in time, with an e-folding time of order 1 Gyr.

In Fig. 6 we present the results of a similar simulation that spanned 3 Gyr, in a model that contained the seven major planets (Venus to Neptune; ‘7pl’ model). This simulation treated the 2:1 population, as was defined by Brož & Vokrouhlický (2008). Also, an approximate treatment of the Yarkovsky acceleration was included in the equations of motion, assuming a constant drift rate in semimajor axis equal to $2.7 \times 10^{-4} D^{-1}$ AU Myr $^{-1}$. For each object its diameter D was estimated, using its catalogued H value and assuming an albedo of 0.06–0.08, and a value of either 0° or 180° obliquity was randomly assigned. The population was found to decay exponentially in time, according to what was described in the previous paragraph.

However, what is more interesting here is that the two sub-populations that are contained in the two quasi-stable resonant islands are not diffusing out at the same rate. Fig. 6 shows two sets of curves (one for each island): clearly island A is depleted faster than island B. Fitting exponentials on the data, we get the corresponding e-folding times: $\tau_A = (0.57 \pm 0.02)$ Gyr for island A and $\tau_B = (0.94 \pm 0.02)$ Gyr for island B. This uneven depletion is an important dynamical property of the resonance and is likely one of the reasons behind the observed A/B asymmetry. The importance of this observation will become more evident in the following sections.

3 EFFECTS OF THE JUMPING-JUPITER INSTABILITY

We investigate the role of the jumping-Jupiter instability on the depletion and eventual repopulation of the J2/1 in this section. We study survival of a hypothetical primor-

dial population, and resonant capture from the outer main belt, both in the fifth giant planet scenario (Nesvorný & Morbidelli 2012). Our simulations cover only the instability phase itself, demonstrating at first which process is plausible.

3.1 Simulations with prescribed migration

We adopt the technique suggested by Nesvorný et al. (2013) for simulating the jumping-Jupiter instability. We modified the SWIFT_RMVS3 integrator (Levison & Duncan 1994), so that the evolution of massive bodies is given by a prescribed input file and the evolution of test particles is computed by the standard symplectic algorithm. This method allows us to exclude the transneptunian disc of planetesimals from our integrations, because its damping and scattering effects are no longer needed; planets evolve ‘the way they are told’ by the input file. Moreover, the exact progress of the migration scenario is then repeatedly reproducible.

The evolution of migrating planets is prescribed by the fifth giant planet scenario, developed in Nesvorný & Morbidelli (2012) (see Fig. 7). This scenario has already been proved reliable in terms of reproducing the orbital architecture of planetary orbits, the period ratios and secular frequencies, and several distributions of minor solar-system bodies. The prescribed input file is the result of a complete self-consistent simulation with five giant planets and a massive transneptunian disc of planetesimals ($M_{\text{disc}} = 20 M_{\text{Earth}}$). We use only a 10 Myr portion of the simulation, containing the jumping-Jupiter phase. The input data sampling is $\Delta t_{\text{input}} = 1 \text{ yr}$ which is sufficient for our purpose.

Our integrator transforms the input data to the Cartesian coordinates (i.e. orbital elements to positions and velocities) and interpolates them according to the integration time step $\Delta t = 0.25 \text{ yr}$. The interpolation is done by a forward/backward drift along Keplerian ellipses, starting at input data point preceding/forthcoming to required time value. The results of both drifts are averaged using the weighted mean, where the weight depends on temporal distance between the data points and the required time value.

3.2 Capture from the outer main belt

We investigated a possibility that the resonant asteroids were captured from outer main-belt orbits near the J2/1 during Jupiter’s jump. We present a simulation of the capture in this section.

Initial conditions. Initially, we placed 5,000 test particles uniformly over the region which is about to be covered by the moving 2:1 resonance. This can be estimated easily by the third Kepler law since we know the evolution of Jupiter’s semimajor axis a priori. Our choice of the semimajor axes distribution was $a \in (3.06, 3.32) \text{ AU}$. The distribution of eccentricities and inclinations was also chosen as uniform and corresponds to the extent of a moderately excited main belt: $e \in (0, 0.35)$, $I \in (0^\circ, 15^\circ)$. The angular elements were randomly distributed over $(0^\circ, 360^\circ)$ interval.

Evolution of test particles. We recorded the time series of resonant elements of the test particles during the integration and processed them off-line using Savitzky–Golay

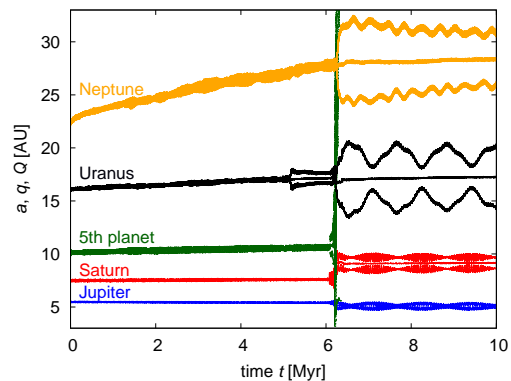


Figure 7. Orbital evolution of giant planets in the fifth giant planet scenario, adopted from Nesvorný & Morbidelli (2012), during the jumping-Jupiter instability, as it was reproduced by our modified integrator. We plot the time t vs the semimajor axis a , the pericentre q and the apocentre Q . Each evolutionary track is labeled with the name of the corresponding giant planet.

smoothing filter with 0.1 Myr range of the running window and a second order smoothing polynomial.

The result of our simulation is shown in Fig. 8. Note that for the sake of simplicity, we use the resonant elements for *all* particles, even for those not trapped inside the J2/1³. Shortly after the onset of migration, the test particles still retain the uniform character of the initial distribution. A few minor mean-motion resonances can be identified. The apparent gap between the resonance centre and the synthetic population is intentional, because we do not want any of the test particles to be initially placed inside the resonance.

After 2 Myr, the relaxation processes start to take place. The 2:1 resonance changes its position with respect to the initial one and starts to perturb several eccentric orbits at the outskirts of the synthetic population. All of the perturbed asteroids fall into the short-lived unstable zone (discussed in Brož et al. 2005). The minor mean-motion resonances begin to pump the eccentricity of the test particles residing inside them.

At 6.26 Myr, an instantaneous discontinuity, known as *Jupiter’s jump*, occurs. The 2:1 resonance, co-moving with jumping Jupiter, changes its location suddenly and a large number of test particles flow through the libration zone, while others are excited and ejected, or left behind in the emerging inner Cybele region.

Finally at 10 Myr, a population between the left-hand separatrix and the libration centre is stabilised, as the result of the resonant capture. The bodies outside the left-hand separatrix are simply remnants of the initial population of test particles. A few bodies between the libration centre and the right-hand separatrix are in fact outside the 2:1 resonance, as well as the asteroids in the Cybele region.

³ The resonant elements of the non-resonant asteroids do not have any special physical meaning, but they correspond to the extremal secular variations of osculating elements as given by equation (4).

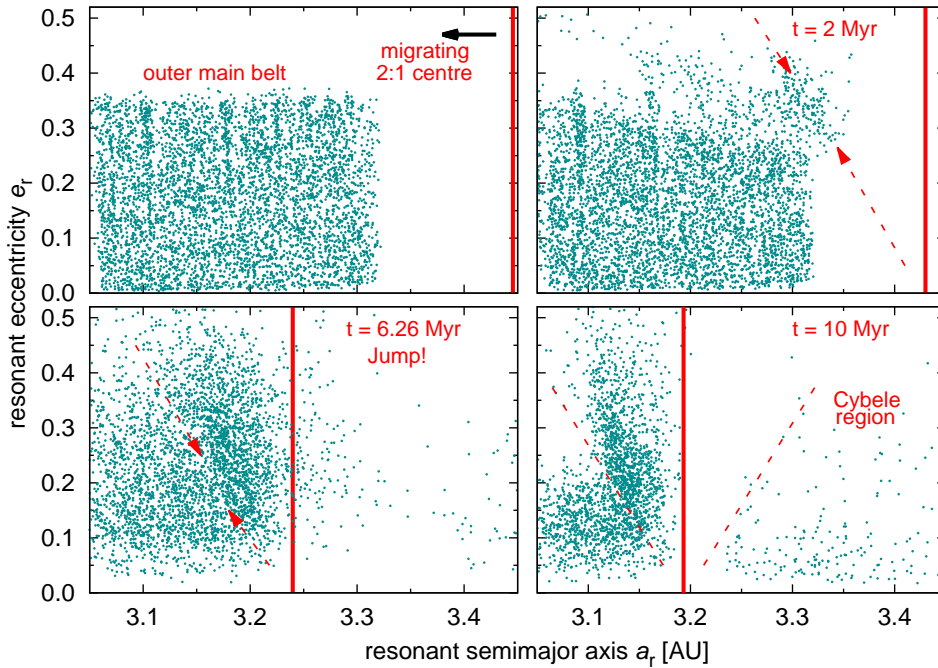


Figure 8. A simulation of the resonant capture from the outer main belt in the fifth giant planet scenario (Nesvorný & Morbidelli 2012). We plot the evolution of test particles in the resonant semimajor axis a_r vs resonant eccentricity e_r plane. The vertical line indicates an approximate location of the 2:1 resonance centre which migrates inwards together with Jupiter. The integration time is shown in three of panels ($t = 0, 2, 6.26$ and 10 Myr) and corresponds to the timeline in Fig. 7. The dashed arrows and lines indicate an approximate extent of the libration zone in case of the migrating and stable resonance, respectively. From top to bottom and left to right, the plots show: the initial conditions, the relaxed population of test particles prior to jump, the state during the jumping-Jupiter instability and the final state. Note that all test particles are depicted in terms of resonant elements for simplicity (even the non-resonant orbits).

Captured population. Instead of another long-term integration, we use rather efficient dynamical mapping (introduced in Section 2.2) for checking the stability of the captured population in the post-migration configuration of planets. This allows us to identify analogues of the stable islands A and B in the phase space for this planetary configuration. Hence, we can trace the long-lived candidates of our captured bodies simply by selecting particles with resonant elements falling within the range of the islands.

The dynamical map for the 2:1 resonance is shown in the Fig. 9. It covers the phase space in the intervals $a \in (3.115, 3.195)$ AU, $e \in (0.1, 0.5)$ and $I \in (0^\circ, 25^\circ)$, which were divided into a grid of $40 \times 40 \times 5$ boxes (and we finally took an average over all sections in the inclination). We set up and followed three test particles per box for up to 10 Myr.

Comparing the map with Fig. 1, one can see very similar structures. The stable islands A and B are there, separated by the ν_{16} secular resonance. The Kozai resonance separatrix can also be easily identified. A major difference is the shape and size of the A island – the ν_5 resonance is not present in the depicted part of the phase space, which effectively enlarges the A island with respect to the present state. The selected candidates for long-lived orbits are also shown in Fig. 9. Note that there are very few A-island bodies captured on highly eccentric orbits, therefore the aforementioned difference in shape of island A should not strongly

affect the results. Using the dynamical mapping, we identified $N_A^{\text{synth}} = 69$ candidates in island A and $N_B^{\text{synth}} = 254$ candidates in island B.

The next step is a rescaling of the initial population so its particle density would reach realistic values. We used the observed particle density in the main belt for bodies with diameters $D \geq 5$ km within the following region: $a \in (2.95, 3.21)$ AU, $e \in (0, 0.35)$, $I \in (0^\circ, 15^\circ)$. The intervals of e and I correspond to those of our synthetic initial population. On the other hand, the interval of semimajor axes was shifted into the region which is currently not depleted by the presence of the J2/1. We further increased this particle density by a factor of three (Minton & Malhotra 2010) to account for the dynamical depletion of the main belt after the reconfiguration of planets during the last $\simeq 3.85$ Gyr. If we increase the particle density throughout the initial population, the number of captured long-lived bodies larger than 5 km would be $N_A^{\text{scaled}} = 1552$ and $N_B^{\text{scaled}} = 5857$ in island A and B, respectively.

Finally, we assume that the dynamical depletion rate due to chaotic diffusion is the same for the post-migration islands as for the islands in the observed configuration. Knowing the approximate number of captured long-lived asteroids, we employ an exponential decay law and the ex-

tremal values⁴ of the e-folding times in island A and B $\tau_A = (0.57 \pm 0.05)$ Gyr and $\tau_B = (0.94 \pm 0.05)$ Gyr. We use $t = (3.9 \pm 0.1)$ Gyr as a value of the decay time period. Combining the results together and identifying the limit values, our model predicts that we should observe $N_A^{\text{model}} = 1\text{--}3$ long-lived bodies larger than 5 km in island A and $N_B^{\text{model}} = 62\text{--}121$ asteroids in island B. The observed values are $N_A^{\text{obs}} = 2$ and $N_B^{\text{obs}} = 71$. The results of our model and the observed values are in good agreement, which supports the resonant capture scenario.

Turning our attention to the bottom panel in Fig. 9, we can discuss whether the inclination distribution of captured synthetic bodies can evolve towards the observed one. It can be clearly seen that the number of low- I asteroids in island A is lower than the number of high- I asteroids. Assuming strong depletion of the whole island and considering that only 1–3 objects larger than 5 km may survive up to the present according to our model, the low- I asteroids are more likely to be depleted completely. That is in agreement with the observations because the observed asteroids in island A reside exclusively on highly inclined orbits.

On the other hand, the population captured in island B stretches almost uniformly over a relatively large interval of inclinations. Considering the shape of the real island shown in Fig. 1, which shrinks with increasing inclination, the long-term diffusion in the high- I region will partially deplete this part of the captured population. But in order to reproduce the observed state in island B, it is necessary for the source population to contain low- I asteroids predominantly.

3.3 Survival of the primordial population

Let us study hypothetical long-lived primordial orbits and their survival during the planetary migration. The procedure is similar to that in the previous section, the major difference is of course in the initial conditions setup. Here we aim to study only the bodies which reside inside the J2/1 when the instability simulation begins. Another important property that should be satisfied is the long-term stability of the initial orbits – otherwise one could unintentionally simulate different effects such as survival of the short-lived population, etc.

Initial conditions. How to create a set of test particles on the long-lived orbits at the beginning of the migration scenario? The only viable solution is to use the dynamical mapping once again. To this point, we slightly modify the standard procedure described in Section 2.2. First, the integration is not done in a stable unvarying configuration of planets. It is instead carried out during the first 5 Myr of the prescribed migration scenario, starting in the pre-migration configuration of planets and evolving into a configuration closely preceding the instability.

⁴ These values were derived in Section 2.5 but we use a slightly higher standard deviation (0.05 instead of 0.02). The reason is that the e-folding times were obtained from a model with seven planets and the Yarkovsky drift included, with long-lived asteroids of *all* sizes. In this section, however, we focus on asteroids larger than 5 km and consequently, the e-folding times are rather upper limits for us. We thus artificially increase the original deviation to account for this difference.

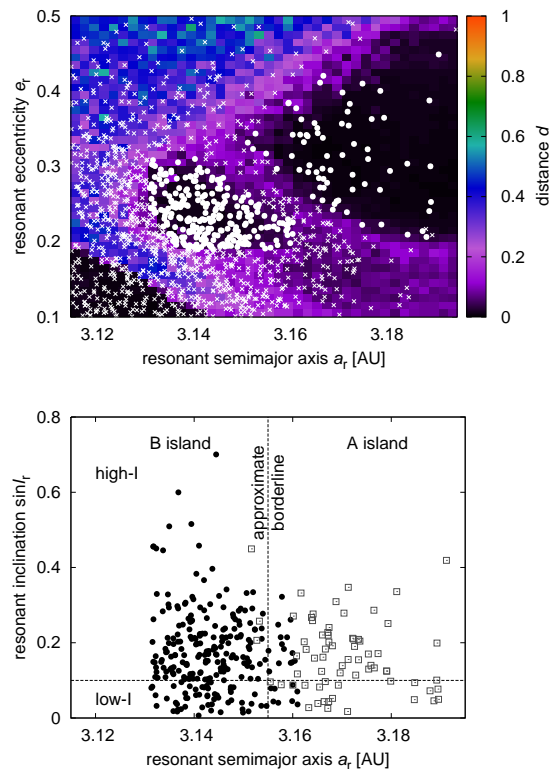


Figure 9. A final result of resonant capture from the outer main belt in the fifth giant planet scenario. Top: the resonant semimajor axis a_r vs the resonant eccentricity e_r . The background of the plot is the dynamical map of the 2:1 mean-motion resonance with Jupiter computed for the post-migration configuration of the giant planets. All white symbols indicate orbits of test particles captured during the simulation (they correspond to the final state in Fig. 8, but only a part of the phase space containing the stable islands is plotted). Test particles embedded in the dark regions of the dynamical map are candidates for a long-term stability and we distinguish them by circles. Other particles are marked by crosses. Bottom: the resonant semimajor axis a_r vs sine of the resonant inclination $\sin i_r$. We plot only the particles captured inside the stable islands. Black circles indicate test particles captured in island B and gray open squares indicate those captured in A island. The horizontal dashed line is plotted for reference, because vast majority of the observed B-island Zhongguos reside on low inclinations $\sin i_r \leq 0.1$ and all of the observed A-island Zhongguos have high inclinations $\sin i_r \geq 0.1$.

Second, we use only the recorded changes of the resonant inclination $\delta \sin i_r$ when constructing the map (i.e. we omit δa_r and δe_r when evaluating the metric given by equation (5)). This is necessary because as Jupiter migrates inwards, the resonance follows and the resonant semimajor axis a_r of bodies residing inside decreases. This in turn changes the resonant eccentricity e_r because of the adiabatic invariance of resonant orbits. These changes are systematic and have different amplitudes for different orbits. Consequently, they should not be incorporated when calculating the distance d . On the other hand, our numerical runs sug-

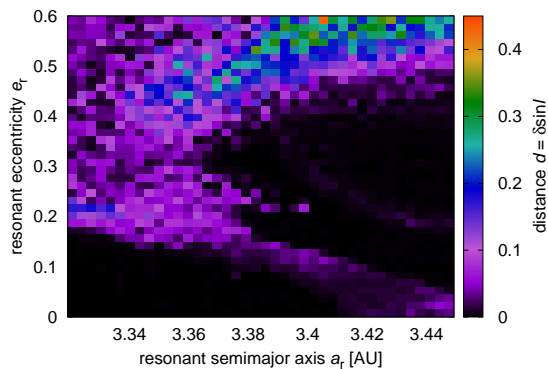


Figure 10. A dynamical map of the 2:1 mean-motion resonance with Jupiter computed during the pre-instability evolution of giant planets. The map is displayed in the resonant (a_r, e_r) plane corresponding to $I_r = 2.5^\circ$. Note that only the displacement in the resonant inclination δI_r is used to represent the dynamical stability.

gest that the resonant inclination I_r of test particles does not undergo substantial systematic changes under the influence of migrating giant planets. If a large change in inclination is registered, it usually means that a secular resonance affected the orbit. The resulting dynamical map thus represents what we need – the location of regions crossed by secular resonances and the stable islands laying in between for the time period before Jupiter’s jump.

Our choice of boundaries in the phase space to construct the dynamical map was $a \in (3.32, 3.45)$ AU and $e \in (0, 0.6)$. We created 40×40 grid in the (a, e) plane and covered it uniformly with six particles per each cell, assigning a fixed value of $I = 2.5^\circ$ to all of them. As already mentioned, the planetary migration is not able to strongly change the inclinations, that is why we map the region of low inclinations where the observed long-lived population dominates. The resulting pre-instability dynamical map is displayed in Fig. 10.

We randomly distributed a group of 2,000 test particles over the identified stable islands (see Fig. 11) with low inclinations $I < 5^\circ$ to set up a synthetic primordial population for our simulation. The angular osculating elements were chosen in a way that condition (3) holds and the osculating elements are therefore identical to the resonant elements at $t = 0$.

Evolution of test particles. 2 Myr after the onset of the migration, the orbits are not significantly dispersed which is in agreement with our aim to study only the dynamically stable resonant bodies. After 6.1 Myr, the close encounters of giant planets begin to occur and start to perturb the islands inside the J2/1. Progression of Jupiter’s jump partially destabilizes the islands and enables significant number of bodies to leak out and also to populate other regions of the 2:1 resonance. At the end of migration, 85 per cent of the initial population is lost and the rest is dispersed all over the resonant region, except for the low eccentricity region. This indicates that the only possible change in resonant eccentricity during the migration of Jupiter is to increase.

$N_{\text{init}}(D \geq 5 \text{ km})$	$N_{\text{A}}^{\text{model}}$	$N_{\text{B}}^{\text{model}}$
2000	0	0 – 1
5000	0	1 – 2
10000	0	2 – 4
100000	1 – 3	18 – 35

Table 2. The numbers $N_{\text{A}}^{\text{model}}$ and $N_{\text{B}}^{\text{model}}$ of the asteroids surviving in the islands A and B up to the present as predicted by our model of the primordial population survival. The table represents how the resulting population changes with increasing number N_{init} of initial primordial asteroids. The bodies with $D \geq 5$ km are considered. First line roughly corresponds to the primordial population with particle density of the present outer main belt, the next two cases approximately consider the particle density proposed in Minton & Malhotra (2010). In the last line, we assume particle density of primordial main belt shortly after its creation, as suggested by Morbidelli et al. (2009); we note that this case is not very probable.

Surviving population. Following our procedure from Section 3.2, we used the same dynamical map to identify the long-lived asteroids (see Fig. 12) and we applied the rescaling and the long-term dynamical decay. Because the particle density in a hypothetical primordial population is not known, we varied the number of initial synthetic long-lived particles and calculated the expected number of asteroids in islands A and B surviving up to the present.

The selected results are listed in Table 2 and the comparison is made for asteroids with $D \geq 5$ km (we remind the reader that there are $N_{\text{A}}^{\text{obs}} = 2$ and $N_{\text{B}}^{\text{obs}} = 71$ larger than 5 km in the observed population). If we assume the particle density from Minton & Malhotra (2010), which we also used in Section 3.2, the contribution of the primordial asteroids to the observed population is negligible after long-term dynamical evolution.

In order to observe a substantial contribution, the particle density in the J2/1 would have to be considerably larger than in the neighbouring main belt (at least ten times larger). Such particle density gradient is not very probable, because the 2:1 resonance would have to be dynamically protected against depleting mechanisms and perturbations, arising e.g. from planetary embryos (O’Brien, Morbidelli & Bottke 2007) or due to the compact primordial configuration of planetary orbits (Masset & Snellgrove 2001; Roig & Nesvorný 2014).

We also investigated if A-island orbits can become B-island and vice versa. We found that < 1 per cent of the asteroids initially placed inside island A survive there and 1 per cent drift into B island during the migration. On the other hand, the primordial population of island B preserves 2 per cent of the original bodies and 2 per cent of them populate island A. Because the primordial B island is larger than the A island, it harbours more primordial asteroids under the assumption of homogeneous particle density. The contribution of island B to the surviving long-lived population therefore dominates. Also note that after the migration the ratio $N_{\text{A}}/N_{\text{B}} \approx 1$, thus the migration itself is not able to create an asymmetric population out of surviving primordial asteroids. Further orbital evolution is needed in this case.

The orbital distribution in the (a_r, I_r) plane at the end of the planetary migration indeed resembles the initial in-

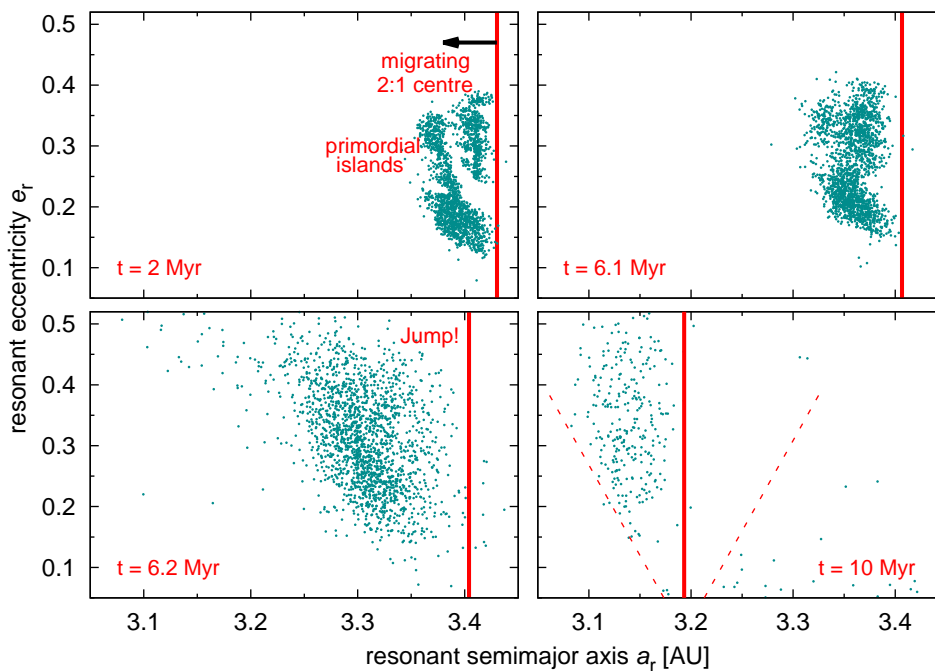


Figure 11. A simulation of the primordial population survival in the fifth giant planet scenario (Nesvorný & Morbidelli 2012). The evolution of primordial long-lived orbits in the (a_r, e_r) plane is displayed. The vertical line indicates the migrating 2:1 resonance. The initial population was placed inside the islands identified in Fig. 10, top left panel represents its orbital distribution 2 Myr after the onset of the migration. The following panels show the situation during Jupiter’s jump and also the final state.

terval of inclinations, as both islands are populated by low- I orbits. To obtain high- I orbits, which are observed in island A, we would have to assume the presence of their analogues in the pre-migration islands. But this problem is redundant since the primordial population probably do not survive up to the present, as we argued above.

4 EFFECTS OF JUPITER–SATURN GREAT INEQUALITY

In Section 3, we investigated evolution of the resonant population during a major instability of the planetary system known as Jupiter’s jump. In the original migration experiments performed in Nesvorný & Morbidelli (2012), the violent evolution of planetary orbits was usually followed by a residual smooth migration during which giant planets slowly approached their current orbits. We are in a similar situation, the planetary configuration at the end of our instability simulations slightly differs from the observed one. In principle, this fact does not affect our ability to locate and describe the long-lived resonant population of test particles because we employed fast and efficient method of dynamical mapping. But natural question arises, whether the late migration stages can invoke perturbations that would affect the overall stability of the 2:1 resonance significantly.

In particular, we want to check whether the period P_σ of libration of the resonant asteroids can be comparable with the Jupiter–Saturn great inequality period P_{GI} (which is the

period of circulation of the $2\lambda_J - 5\lambda_S$ angle) and what effect would it have on the resonant population (Ferraz-Mello et al. 1998, see also Section 1).

In order to mimic the smooth late planetary migration and lead giant planets towards their current orbits, we used a modified version of the SWIFT_RMVS3 integrator developed in Brož et al. (2011). The integrator introduces an ad hoc dissipation term which modifies planetary velocity vectors \mathbf{v} in each time step Δt according to the following relation:

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) \left[1 + \frac{\Delta v}{v} \frac{\Delta t}{\tau_{\text{mig}}} \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_{\text{mig}}}\right) \right], \quad (7)$$

where $\Delta v = \sqrt{GM/a_{\text{init}}} - \sqrt{GM/a_{\text{fin}}}$ is the total dissipation determined as the difference of the initial and final mean velocity, τ_{mig} is the migration time-scale, t is the time variable and t_0 is an arbitrary initial time. The eccentricity damping is also included and can be set independently for each planet by choosing the damping parameter denoted as e_{damp} (Morbidelli et al. 2010).

To set up the model, we used the final configuration of giant planets and test particles from our simulations of resonant capture⁵, but we only selected test particles located in broader surroundings of the stable islands to discard major part of short-lived asteroids. After this procedure, we launched a set of integrations with different values of e_{damp}

⁵ The results of simulations with primordial asteroids are not considered here, as these asteroids probably do not significantly contribute to the observed population.

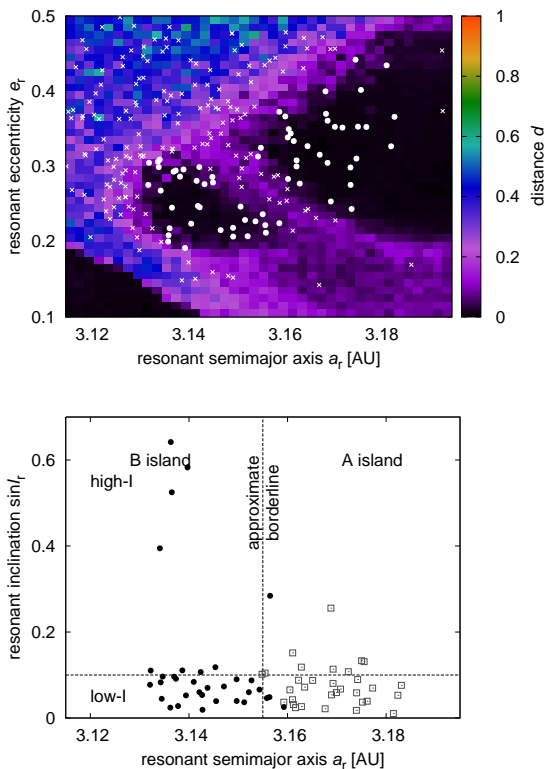


Figure 12. Top: The same post-migration dynamical map as in Fig. 9. The primordial test particles surviving the jumping-Jupiter instability are plotted over the map. Circles represent candidates for long-lived orbits and crosses are the surrounding orbits. Bottom: the resonant semimajor axis a_r vs sine of the resonant inclination $\sin i_r$. We plot only the particles identified above as long-lived. Black circles indicate those residing in the island B and gray open squares indicate those residing in the A island.

and different migration time-scales, bearing in mind that the time-scale of the original experiments in Nesvorný & Morbidelli (2012) was $\tau_{\text{mig}} \simeq 30$ Myr. When the integrations finished, we selected only the runs in which giant planets ended up with orbital parameters similar to the observed ones and we investigated the results at the time t_{fin} when $P_{\text{GI}} = 880$ yr and the ratio of the Saturn’s and Jupiter’s orbital periods is approximately $P_{\text{S}}/P_{\text{J}} \simeq 2.49$.

In the following, we will discuss results of two runs with $t_{\text{fin}} \simeq 27$ Myr and $t_{\text{fin}} \simeq 58$ Myr. Fig. 13 shows the temporal evolution of the number N of test particles in these two runs, the GI period P_{GI} and the libration period P_{σ} of two typical resonant asteroids. While P_{σ} oscillates around nearly constant value $\simeq 420$ yr, P_{GI} initially lies below this value and raises smoothly as Jupiter and Saturn undergo divergent migration, and their eccentricities are damped. At the moment when P_{GI} approaches minimum values of P_{σ} , the resonant population is being destabilized which corresponds to an intensified drop of the $N(t)$ curves. On contrary, the depletion rate is reduced when P_{GI} raises above values covered by oscillating P_{σ} .

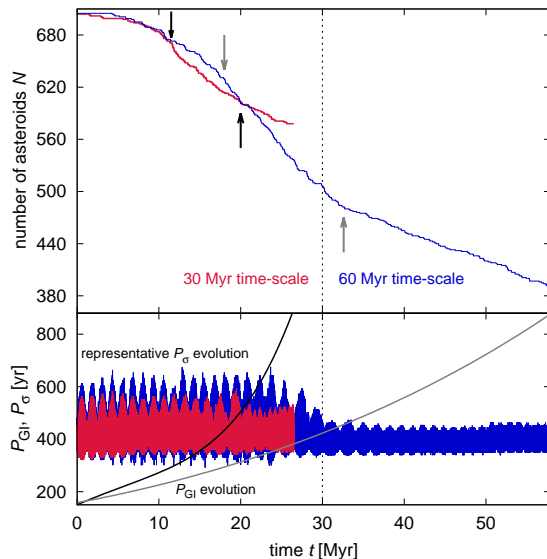


Figure 13. Results of two simulations of smooth late migration and its effects on the resonant population. Two runs with $t_{\text{fin}} \simeq 27$ Myr (red and black curves and arrows) and $t_{\text{fin}} \simeq 58$ Myr (blue and gray curves and arrows) are presented (migration time-scales $\tau_{\text{mig}} = 30$ Myr and $\tau_{\text{mig}} = 60$ Myr were initially chosen but the integration is evaluated only until the GI period reaches 880 yr). Top: temporal evolution of the number N of test particles. Bottom: temporal evolution of the GI period P_{GI} and the libration period P_{σ} . The latter is plotted for two representative cases. The passage of P_{GI} over P_{σ} values induces a drop in the $N(t)$ curves which is marked with arrows in the top panel. We note that ‘real’ P_{GI} evolves in an oscillatory manner but only with a small amplitude; a polynomial fit of the real P_{GI} evolution is plotted here for clarity.

In order to characterize how the population decays, we define the decay rate ΔN as the fractional change of the initial number of asteroids $N(0)$ per unit of time. We obtained $\Delta N = 0.004 \text{ Myr}^{-1}$ when $P_{\text{GI}} < P_{\sigma}$, $\Delta N = 0.011 \text{ Myr}^{-1}$ when $P_{\text{GI}} \simeq P_{\sigma}$ and $\Delta N = 0.005 \text{ Myr}^{-1}$ when $P_{\text{GI}} > P_{\sigma}$ in the model with $t_{\text{fin}} \simeq 27$ Myr. Similarly, the values for the model with $t_{\text{fin}} \simeq 58$ Myr are $\Delta N = 0.006 \text{ Myr}^{-1}$ when $P_{\text{GI}} < P_{\sigma}$, $\Delta N = 0.014 \text{ Myr}^{-1}$ when $P_{\text{GI}} \simeq P_{\sigma}$ and $\Delta N = 0.005 \text{ Myr}^{-1}$ when $P_{\text{GI}} > P_{\sigma}$. Clearly, the number of asteroids surviving the smooth late migration depends mainly on the length of the time interval during which $P_{\text{GI}} \simeq P_{\sigma}$; the population is more depleted in the run with $t_{\text{fin}} \simeq 58$ Myr.

With aim to evaluate the result of the models with residual migration included, we first identified test particles which were localized inside the stable islands at the time t_{fin} . At this time, the orbital architecture of giant planets approximately corresponds to the observed one and therefore the identification of long-lived asteroids can be achieved using the *current* dynamical map. Finally, we derived expected numbers $N_{\text{A}}^{\text{model}}$ and $N_{\text{B}}^{\text{model}}$ of asteroids that should be observable in the stable islands after 4 Gyr of orbital evolution. For this purpose, we rescaled the initial population of test particles and we applied simple exponential dynamical decay law, exactly as in Section 3.2.

We calculated following values for asteroids larger than 5 km: $N_A^{\text{model}} = 0-1$ and $N_B^{\text{model}} = 40-78$ in case of $t_{\text{fin}} \simeq 27$ Myr and $N_A^{\text{model}} = 0-1$ and $N_B^{\text{model}} = 22-42$ in case of $t_{\text{fin}} \simeq 58$ Myr (while the observed values are $N_A = 2$ and $N_B = 71$). We can conclude that the hypothesis of resonant capture is still valid and explains the existence⁶ of the long-lived population, if the giant planets finished their late stage migration on a time-scale comparable to $\tau_{\text{mig}} \simeq 30$ Myr. Larger time-scales lead to a slower passage of the GI period over the values of the J2/1 libration period and this in turn causes an enhanced depletion of the stable islands. Even in such a case, a significant part of the observed population should originate from the resonant capture.

5 COLLISIONAL MODELS

Our results of Section 3 and 4 imply that the long-lived J2/1 population was created by resonant capture during planetary migration. In this section, we further develop the framework of this hypothesis. We study collisional evolution of the J2/1 in order to confirm whether the size-frequency distribution of the long-lived resonant asteroids can survive a time period of 4 Gyr in a non-stationary state. We thus have to also account for the epoch of the late heavy bombardment (LHB) (Gomes et al. 2005; Levison et al. 2009) during which the transneptunian disc was destabilized and the flux of cometary projectiles through the solar system increased substantially.

In the following collisional models, three populations of minor solar-system bodies are included: main-belt asteroids, transneptunian comets and Zhongguos, i.e. we consider only a subset of the long-lived population. The reason for this simplification is that the observed SFDs of long-lived population and its dynamical subgroups share similar features (see Fig. 4), but Zhongguos have the steepest slope $\gamma = -5.1$. Solving an inverse problem, we aim to explain the formation of an initial SFD with an even steeper slope, which would evolve towards the observed one due to collisions over the 4 Gyr timespan. Because of certain level of parametric freedom in collisional models, the same process of formation should also apply to Griquas with shallower observed SFD.

5.1 Intrinsic probabilities and impact velocities

As the first step in the construction of a collisional model, we compute the intrinsic probability P_i and the mean impact velocity V_i of colliding main-belt and long-lived resonant asteroids. We adopt the method of Bottke et al. (1994) based on a geometrical formalism of orbital encounters introduced by Greenberg (1982). To make our samples of orbits large enough, we input all long-lived orbits and the first 50,000 main-belt objects from the AstOrb catalogue.

We split the long-lived population into Zhongguos, Griquas with inclination $I \leq 8^\circ$ and Griquas with inclination $I > 8^\circ$ and calculate the intrinsic probability P_i and

⁶ Although the values derived here do not overlap the observations in case of island A, the difference is only one asteroid. We think that this discrepancy is not significant as we are comparing small numbers and the evolution is definitely stochastic.

colliding populations	P_i [$10^{-18} \text{ km}^{-2} \text{ yr}^{-1}$]	V_i [km s^{-1}]
Zhongguos vs MB	3.82	5.36
Griquas ($I \leq 8^\circ$) vs MB	3.65	5.52
Griquas ($I > 8^\circ$) vs MB	1.81	7.57
average	3.09	6.15

Table 3. The intrinsic probability P_i and the mean impact velocity V_i for collisions of main-belt and long-lived J2/1 asteroids.

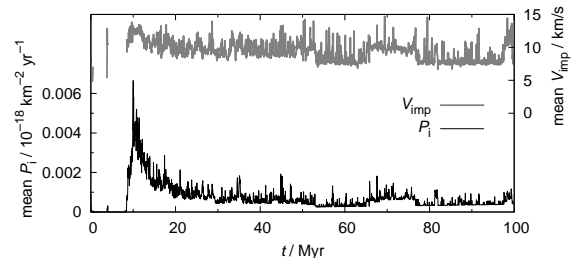


Figure 14. Temporal evolution of the intrinsic probability $P_i(t)$ (bottom curve) and the mean impact velocity $V_i(t)$ (top curve) for collisions between transneptunian comets and main-belt asteroids, as it was calculated in Brož et al. (2013). We emphasize that we modify these dependences by numerical factors to allow for realistic lifetimes of comets. The values $P_i/3$ and $V_i/1.5$ serve as an input for our models.

weighted mean impact velocity V_i for them, separately. Using this separation, we want to check if the intrinsic probabilities for Griquas may differ from Zhongguos significantly.

The results are summarized in the Table 3. For reference, Dahlgren (1998) computed $P_i = 3.1 \times 10^{-18} \text{ km}^{-2} \text{ yr}^{-1}$ and $V_i = 5.28 \text{ km s}^{-1}$ for collisions between main-belt asteroids. We can see that both Zhongguos and low-inclined Griquas have P_i and V_i only slightly higher than these reference values. This is caused by the moderate values of eccentricities in the J2/1 population. The orbits then more likely intersect with those in the main belt. The higher collisional velocity is also plausible because we are comparing an outer main-belt population with the rest of the main belt.

On the other hand, Griquas with high inclinations can avoid intersecting some of main-belt orbits, thus their intrinsic probability is about twice lower. Even at this point, we can conclude that the observed difference in slopes of SFDs (when Griquas and Zhongguos are separated) *cannot* be explained by the differences in P_i and V_i because the shallower SFD of Griquas would require higher P_i in order to collide more often.

5.2 Capture from the main-belt population

Let us ask a question whether the J2/1 SFD can originate from the main-belt SFD. We assume that the capture of the resonant population is *not* size dependent and thus the captured SFD resembles that of the main belt at the time of planetary migration, scaled down by a numerical factor. Our arbitrary choice of this factor is such that the number of the largest captured bodies is approximately the same as

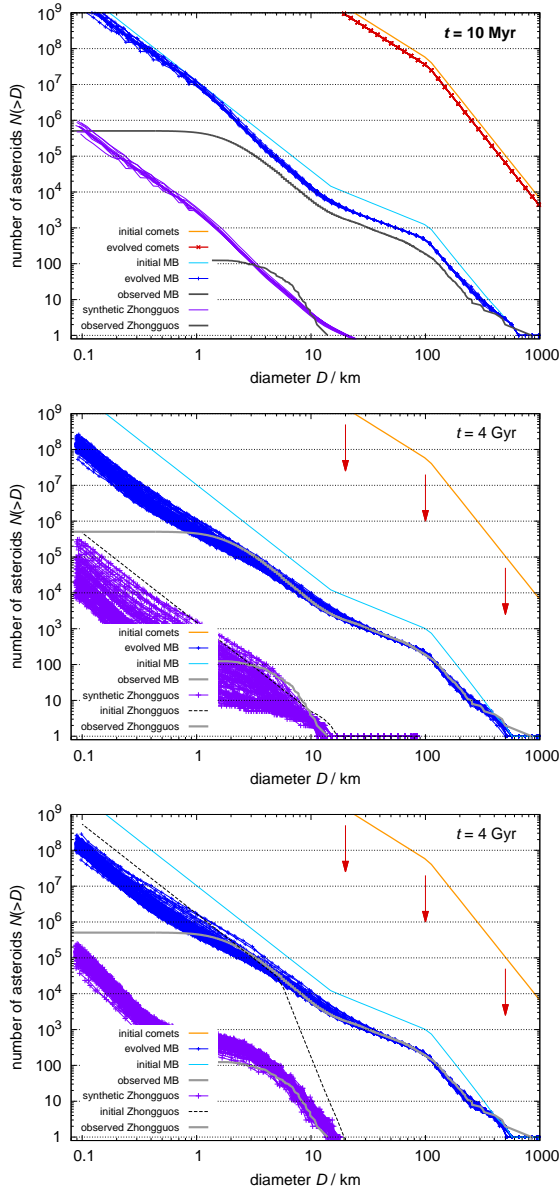


Figure 15. Results of collisional models created with the BOULDER code, plotted as temporal evolution of the SFDs. Description of individual curves is given in the legend of each plot. The evolving curves are displayed in the time of the simulation t , which is also shown. Top: synthetic Zhongguos are created by capture from the main-belt background population affected by collisions with transneptunian comets (see also Section 5.2). Middle: the situation from top left panel is reproduced, but a single $D \simeq 100$ km asteroid is added to Zhongguos and we study the possibility of its catastrophic breakup over 4 Gyr (see also Section 5.3). Bottom: we demonstrate what parameters of the initial SFD of Zhongguos are needed in order to evolve it towards the observed one due to collisions (see Section 5.4 for discussion).

ρ [g cm ⁻³]	Q_0 [erg g ⁻¹]	a	B [erg g ⁻¹]	b	q_{fact}
Basalt:					
3.0	7×10^7	-0.45	2.1	1.19	1.0
Water ice:					
1.0	1.6×10^7	-0.39	1.2	1.26	3.0

Table 4. Material parameters ρ , Q_0 , a , B , b and q_{fact} of the polynomial scaling law (see equation (8)) adopted from Benz & Asphaug (1999). The first line is used in case of main-belt or resonant asteroids and the second line is used for comets.

we observe in the J2/1 population. This allows us to immediately compare the slope of captured and observed SFD of Zhongguos.

The main belt itself was likely more populous 4 Gyr ago (by a factor of three according to Minton & Malhotra (2010)) but has remained in a near-stationary collisional regime ever since (Bottke et al. 2005a). The only possible stage of evolution, which could have temporarily increase the slope of the main belt SFD, was the late heavy bombardment. We therefore investigate this early period of collisions between the main belt and transneptunian comets. We focus on diameters $D < 25$ km to see whether the steepness in this interval can be instantaneously increased – if so, a population captured from such SFD would adopt that slope.

We use the BOULDER code (Morbidelli et al. 2009) to construct a suitable collisional model. We setup initial SFDs by a piecewise power law function which is characterized by three differential slope indices q_a , q_b and q_c in the intervals of diameters $D > D_1$, (D_2, D_1) and $D < D_2$, respectively. The SFD is normalized by setting the number N_{norm} of bodies larger than D_1 . The following values are used in case of the main-belt SFD: $D_1 = 100$ km, $D_2 = 14$ km, $q_a = -5.0$, $q_b = -2.3$, $q_c = -3.5$, $N_{\text{norm}} = 1110$. A few $D \sim 1000$ km asteroids are added in order to properly reproduce the present state. Using the same assumptions as Brož et al. (2013), the cometary disc is characterized as: $D_1 = 100$ km, $q_a = -5.0$, $q_b = q_c = -3.0$, $N_{\text{norm}} = 5 \times 10^7$.

Because the evolution of the transneptunian disc is dominated by its fast dynamical dispersion, the intrinsic probability $P_i(t)$ and mean impact velocity $V_i(t)$ of collisions with comets are time-dependent quantities. The temporal evolution of $P_i(t)$ and $V_i(t)$, which was derived in Brož et al. (2013), is shown in Fig. 14. Brož et al. (2013) also argued that it is necessary to modify this dependence in order to mimic the effects of spontaneous cometary breakups due to various physical processes. Regarding these effects, they derived quantities $\tilde{P}_i(t) = P_i(t)/3$ and $\tilde{V}_i(t) = V_i(t)/1.5$ as a feasible modification.

The specific energy Q_D^* required to disperse 50 per cent of the shattered target is described by the polynomial scaling law (Benz & Asphaug 1999)

$$Q_D^*(r) = \frac{1}{q_{\text{fact}}} \left(Q_0 r^a + B \rho r^b \right), \quad (8)$$

where r denotes the target's radius in cm. Material parameters ρ , Q_0 , a , B , b and q_{fact} for basaltic rock (used for asteroids) and water ice (used for comets) are listed in Table 4.

We simulated the collisional evolution for a time period

of 10 Myr in which $P_1(t)$ reaches its maximum (see Fig. 14 and top panel of Fig. 15). The flux of cometary projectiles induced by ongoing planetary migration reaches its climax and strongly affects the main-belt SFD. We performed 100 numerical realisations of the model with different seeds of the built-in random-number generator to account for stochasticity of the evolution and possible low-probability breakups. At the end of the simulation, we assume the resonant capture takes place with the efficiency factor 10^{-4} . The steep part of the captured SFD can be characterized by the slope $\gamma = -3.0$. Although the region of the km-sized bodies is steeper with respect to the initial state of the main-belt SFD, it is not steep enough to reach the slope of the SFD of observed Zhongguos. We thus consider this scenario unlikely.

5.3 Catastrophic disruption of a captured parent body

From the result of the previous section, it is obvious that a different explanation of the steep initial SFD is needed. Here we test the possibility that a large parent body was captured inside the 2:1 resonance by chance, it was subsequently disrupted and its fragments formed a family.

We first use a stationary model to investigate the probability of such a catastrophic breakup event. As a prerequisite, we estimated a lower limit of the parent body size D_{PB} . To achieve that, we searched the outcomes of hydrodynamic disruption models Durda et al. (2007) and Benavidez et al. (2012) for SFDs which have approximately the same slope as the observed SFD of Zhongguos. We rescaled the sizes of synthetic asteroids in these datasets so that the diameter of the largest remnant would correspond approximately to the size of (3789) Zhongguo. We selected all reasonable fits and derived range of admissible values $D_{\text{PB}} \in (50, 120)$ km with the median value $\tilde{D}_{\text{PB}} = 70$ km.

We then use the following relation expressing the number N_{col} of catastrophic disruptions of parent bodies with the diameter D_{PB} due to collisions with a population of projectiles:

$$N_{\text{col}} = P_1 N_{\text{PB}} N_{\text{project}} \frac{D_{\text{PB}}^2}{4} \Delta t, \quad (9)$$

where P_1 denotes the intrinsic probability, N_{PB} is the number of parent bodies, N_{project} is the number of projectiles capable of disrupting the parent body and Δt is the considered timespan.

Since there are *no* large bodies observed in the current J2/1 population, we assume $N_{\text{PB}} = 1$. To provide the lower limit on the diameter of the projectiles d_{disrupt} , we use the model of Bottke et al. (2005b) in combination with the scaling law given by equation (8) (Benz & Asphaug 1999). We then take N_{project} for different values of d_{disrupt} as the number of main-belt asteroids with diameters $D \geq d_{\text{disrupt}}$. Several resulting values of N_{col} over $\Delta t = 4$ Gyr timespan are given in Table 5. It turns out that the probability of a catastrophic disruption is ≤ 18 per cent when considering a single target only.

Note that a more realistic case should take into consideration that there is no observable evidence of a collisional cluster, thus the hypothetical breakup event must have occurred more than 1 Gyr ago (Brož et al. 2005). Of course, one should also account for the influence of cometary flux

D_{PB} [km]	d_{disrupt} [km]	N_{project}	N_{col}
50	6	25821	0.18
70	9	7837	0.10
100	15	2589	0.07
120	19	1777	0.07

Table 5. The results of a stationary collisional model: the number N_{col} of catastrophic breakups of a parent body with the diameter D_{PB} over 4 Gyr timespan. We also list the minimal size d_{disrupt} and the number N_{project} of suitable projectiles.

during LHB which can temporarily increase the rate of collisions but also tends to speed up the evolution of SFDs.

We therefore test the possibility of a catastrophic breakup once again in the more sophisticated framework of the BOULDER code and we also check the influence of comets. The setup for main-belt asteroids and comets is the same as in Section 5.2, as well as the SFD of synthetic Zhongguos, which is only modified by adding a single $D \simeq 100$ km asteroid. The intrinsic probability and the mean impact velocity for MB vs. Zhongguos collisions are taken as the average of values from Table 3. We simulated 4 Gyr of collisional evolution.

Middle panel of Fig. 15 represents a set of 100 realisations of our model. At the beginning of the simulations, the synthetic population of Zhongguos is strongly affected by the cometary flux, which mostly causes cratering of the large resonant body and moreover, a family-forming event takes place in a few runs. Simultaneously, the comets speed up the collisional evolution in and below the region of mid sized asteroids. As a result, families inside the J2/1 are comminuted too fast and the steepness of their SFDs drops below the observed one.

When studying the family-forming events after the LHB, we focused only on cases with the size of the largest fragment (or remnant) $D_{\text{LF}} \geq 10$ km to obtain a body similar to (3789) Zhongguo. In three such cases, which occurred at the time of simulation $t = 2.1, 2.8$ and 3.1 Gyr, a parent body with the diameter $D_{\text{PB}} \simeq 85$ km was shattered into a family with the largest fragment having $D_{\text{LF}} \simeq 18$ km and the largest remnant having $D_{\text{LR}} \simeq 60$ km. Corresponding evolved SFDs match⁷ the observed one, except for the presence of the parent-body remnant.

We can conclude that a family-forming event inside the 2:1 resonance is a very unlikely process because a complex set of constraints has to be satisfied: A major collision would have to occur despite its low probability, which is typically 10 per cent, as given by the stationary model, or 3 per cent, as derived from the more sophisticated model. The created SFD would have to be very steep, preferably without presence of a parent-body remnant. If the remnant was present, one would have to rely on its subsequent elimination due to dynamical depletion because there is no large asteroid observed in the J2/1. Finally, the breakup would have to take

⁷ In fact, the SFDs resulting from our simulations lie slightly below the observed case but this discrepancy can be easily removed assuming a bit larger parent body.

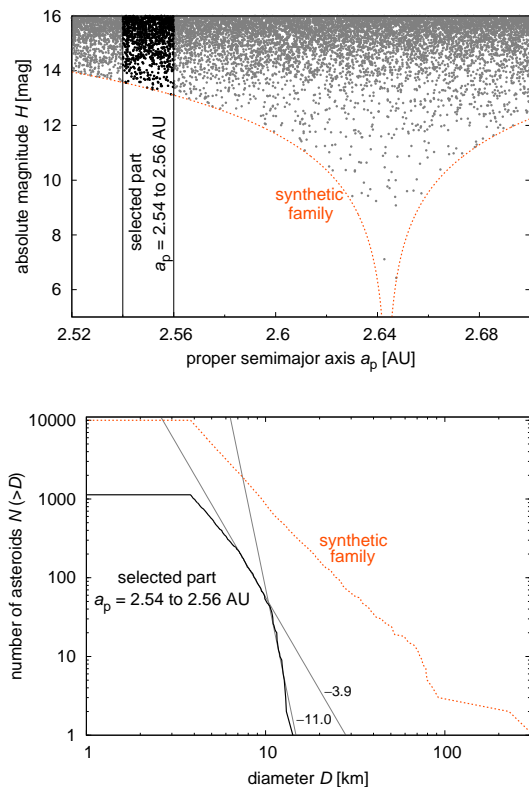


Figure 16. Dependence of the absolute magnitude H on the proper semi-major axis a_p for a synthetic family (top panel). The family is used in a simple Monte-Carlo test, in which we study how the shape of the SFD changes if we select only a part of the family. An example, for the part of the family bordered by the vertical lines, is given in the bottom panel. We compare cumulative size-frequency distributions of the entire synthetic family (dashed curve) and of its part (solid curve). The steep segments are approximated with a power law function and obtained slope indices are shown for reference.

place after the LHB, but early enough to allow for dispersion of the collisional cluster.

5.4 Capture from a family

Previous collisional models imply that it is difficult to explain the steep SFD of Zhongguos by standard processes (such as direct capture from the background main-belt population or family-forming event) that could have occurred during resonant capture or later on. We thus employ a sort of ‘reversed’ method in this section. We first try to discover what parameters of the initial SFD are needed in order to obtain the observed one after 4 Gyr of collisional evolution. Then we discuss possible process which could have led to formation of such an SFD.

Using trial and error approach, we established following initial SFD as an appropriate one: $D_1 = 10$ km, $D_2 = 5$ km, $q_a = -6.6$, $q_b = -6.6$, $q_c = -3.5$, $N_{\text{norm}} = 12$. The change of slope at D_2 is necessary to reasonably satisfy the mass

conservation law. The main-belt and cometary SFDs are the same as in the previous models.

The result of 100 runs of the collisional code is displayed in bottom panel of Fig. 15. The evolved SFD of the resonant population corresponds to the observed one very well. The steep parts have the same slope, the only difference can be seen in the region of small bodies where the synthetic SFD is abundant. But one has to realize that the observed SFD is probably biased in this region.

The mechanism responsible for creation of the high initial slope may be the following (and it is related to the effect described in Carruba, Aljbaae & Souami (2014)). Let us assume resonant capture from a hypothetical outer main-belt family instead of capture from the background main-belt population. The stable islands are able to capture only a fraction of this family because jump of the resonance is thought to be fast (it is not resonant sweeping), the capture efficiency is limited (see Section 3.2), and also the width of the islands in semimajor axis is relatively small (see e.g. Fig. 1). If the captured part of the family is located farther away from the original position of the parent body, its SFD will be very steep because smaller fragments have higher ejection velocities and therefore land at orbits that are more distant from the parent body.

We employed a simple Monte-Carlo test to investigate the described possibility. We generated a uniform distribution of 10,000 test particles bounded by inequalities $2.52 \leq a \leq 2.70$ AU and $\log(|a - a_c|/2 \times 10^{-4})/0.2 \leq H \leq 16$ in the (a, H) plane where $a_c \simeq 2.64$ AU is value of the central semimajor axis and H is the absolute magnitude. Finally, we assigned diameters D to the test particles on the basis of the H distribution, assuming single value of the geometric albedo $p_v = 0.05$ throughout our sample. This way we created a synthetic family (similar e.g. to Eunomia family). Then we randomly moved a $\Delta a = 0.02$ AU window in the semimajor axis over the collisional cluster and we monitored the SFDs in the successively selected regions.

An example is given in Fig. 16. Obviously, extremely high slope can be reached by this process. The resulting slope is well above the estimated lower limit which is needed for the initial SFD of Zhongguos. Note that this mechanism does not require the family *itself* to have steep SFD. The steepness is achieved afterwards by selective resonant capture from an appropriate region.

Finally, we remark that an interesting link can be found between the hypothesis of capture from a family and our dynamical simulations. In Section 3.2, we argued that a source population for resonant capture should contain greater number of asteroids with low inclination in order to explain the observed high concentration of low- I B-island bodies. Thus we can conclude that if the hypothetical outer main-belt family was indeed captured, it probably must have been located on low inclinations.

6 CONCLUSIONS

Let us briefly review the content of this paper. We updated the population of asteroids residing in the 2:1 mean-motion resonance with Jupiter using recent observational data. The new list of resonant objects now contains 370 bodies, which can be divided on the basis of their mean dynamical lifetime

to 140 short-lived and 230 long-lived asteroids. Our revision of physical properties of the resonant population is generally in agreement with the conclusions of previous studies; new result is our estimate of the mean albedo $\bar{p}_V = (0.08 \pm 0.03)$, based on the data from the WISE database.

The long-term dynamics of the two quasi-stable islands A and B was studied, using the results of Skoulidou et al. (in preparation) who took into account also the perturbations induced by the terrestrial planets and the semimajor axis drift caused by the Yarkovsky effect. The population in the islands decays exponentially, but the escape rate is significantly faster in island A, the e-folding times being 0.57 Gyr for island A and 0.94 Gyr for island B. Hence, the dynamical evolution on Gyr-long time-scales results into differential depletion of the islands, which is certainly one of the reasons for the observed asymmetric A/B population ratio.

The primary goal of this paper was to explain the formation of the long-lived population, satisfying the observational constraints. We tested two hypotheses:

- (i) capture from the outer main belt,
- (ii) survival of primordial long-lived resonant asteroids,

both in the framework of the five giant planets migration scenario (Nesvorný & Morbidelli 2012) with a jumping-Jupiter instability.

Our simulations of the instability imply that both processes could have been at work. The capture itself, together with subsequent differential depletion due to long-term dynamical evolution, can explain the observed population in both islands, if we assume that the number of asteroids in the main belt 4 Gyr ago was *three times larger* than the current one, as suggested by Minton & Malhotra (2010). Namely, the numbers of asteroids with $D \geq 5$ km, which should survive to this day, are $N_A^{\text{model}} = 1\text{--}3$ and $N_B^{\text{model}} = 62\text{--}121$, as predicted by our model. For comparison, the observed numbers are $N_A^{\text{obs}} = 2$ and $N_B^{\text{obs}} = 71$.

We also modeled the late residual planetary migration to check on the effect of possible resonance between the libration period in the 2:1 commensurability and the raising period of Jupiter–Saturn great inequality. The impact of this effect on the long-lived population depends on the time-scale of the late migration. If the time-scale was $\simeq 30$ Myr (which corresponds with the scenarios in Nesvorný & Morbidelli (2012)), the destabilization of the islands would be weak enough for the captured population to survive in a state similar to the observations. More specifically, if we account for the effect of great inequality in our model, the resulting values are $N_A^{\text{model}} = 0\text{--}1$ and $N_B^{\text{model}} = 40\text{--}78$. If the time-scale was $\simeq 60$ Myr, the chaos in the stable islands would be intensified for longer period of time and the depletion of the captured population would be more significant, leading to $N_A^{\text{model}} = 0\text{--}1$ and $N_B^{\text{model}} = 22\text{--}42$.

In case of primordial resonant objects, we discovered that approximately 1 per cent of A-island and 4 per cent of B-island asteroids survive Jupiter’s jump on long-lived orbits. However, we argued that the primordial asteroids probably do not contribute to the observed population at all. The reason is that the primordial population would have to exhibit particle density larger than the one proposed by Minton & Malhotra (2010) by a factor of ten, in order to survive 4 Gyr of post-migration dynamical evolution. Such

particle density would create a gradient with respect to the neighbouring main belt which we assume dubious.

Finally, creating several collisional models, we demonstrated that the observed steep SFD of the long-lived asteroids cannot be explained by capture from the background main-belt SFD, affected by the late heavy bombardment. We also proved that a family-forming catastrophic disruption inside the J2/1 is very unlikely.

Our main conclusion is that the long-lived J2/1 population was probably formed by capture from a hypothetical outer main-belt family during Jupiter’s jump. If this is the case, then the long-lived asteroids in the 2:1 resonance with Jupiter represent the oldest identifiable remnants of a main-belt asteroidal family.

There are several improvements that are needed to ‘finish’ the debate on the long-lived population in the 2:1 resonance and its origin. For example, it is appropriate to assess the possibility of the Themis family formation event as a contributor to the resonant population. Although we did not study this hypothesis in detail, we summarized several results of our preliminary tests in Appendix A. Our simulations suggest that this possibility is not viable and this in turn supports the hypothesis of resonant capture.

Other improvement of our work might be a development of a self-consistent model of both dynamical and collisional evolution of long-lived asteroids. Finally, we suggest to study the hypothetical primordial population in the epoch *before* the jumping-Jupiter instability in order to properly estimate primordial particle density inside the stable islands.

ACKNOWLEDGEMENTS

The work of OC and MB has been supported by the Grant Agency of the Czech Republic (grant no. 13-01308S) and by Charles University in Prague (project GA UK no. 1062214; project SVV-260089). The work of DN was supported by NASA’s Solar System Workings program.

REFERENCES

- Benavidez P. G., Durda D. D., Enke B. L., Bottke W. F., Nesvorný D., Richardson D. C., Asphaug E., Merline W. J., 2012, *Icarus*, 219, 57
- Benz W., Asphaug E., 1999, *Icarus*, 142, 5
- Bottke W. F., Durda D. D., Nesvorný D., Jedicke R., Morbidelli A., Vokrouhlický D., Levison H., 2005a, *Icarus*, 175, 111
- Bottke W. F., Durda D. D., Nesvorný D., Jedicke R., Morbidelli A., Vokrouhlický D., Levison H. F., 2005b, *Icarus*, 179, 63
- Bottke W. F., Nolan M. C., Greenberg R., Kolvoord R. A., 1994, *Icarus*, 107, 255
- Bowell E., 2012, The asteroid orbital elements database, <ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.html>
- Brož M., Morbidelli A., 2013, *Icarus*, 223, 844
- Brož M., Morbidelli A., Bottke W. F., Rozehnal J., Vokrouhlický D., Nesvorný D., 2013, *A&A*, 551, A117
- Brož M., Vokrouhlický D., 2008, *MNRAS*, 390, 715
- Brož M., Vokrouhlický D., Morbidelli A., Nesvorný D., Bottke W. F., 2011, *MNRAS*, 414, 2716

- Brož M., Vokrouhlický D., Roig F., Nesvorný D., Bottke W. F., Morbidelli A., 2005, *MNRAS*, 359, 1437
- Carruba V., Aljbaae S., Souami D., 2014, *ApJ*, 792, 46
- Dahlgren M., 1998, *A&A*, 336, 1056
- Dohnanyi J. S., 1969, *JGR*, 74, 2531
- Durda D. D., Bottke W. F., Nesvorný D., Enke B. L., Merline W. J., Asphaug E., Richardson D. C., 2007, *Icarus*, 186, 498
- Farinella P., Gonczi R., Froeschle C., 1993, *Icarus*, 101, 174
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Roig F., 1998, *AJ*, 116, 1491
- Franklin F. A., 1994, *AJ*, 107, 1890
- Gomes R., Levison H. F., Tsiganis K., Morbidelli A., 2005, *Nature*, 435, 466
- Greenberg R., 1982, *AJ*, 87, 184
- Harris A. W., 1998, *Icarus*, 131, 291
- Henrard J., Watanabe N., Moons M., 1995, *Icarus*, 115, 336
- Kirkwood D., 1867, *Meteoritic astronomy: a treatise on shooting-stars, fireballs, and aerolites*. J. B. Lippincott & co., Philadelphia
- Knežević Z., Milani A., 2003, *A&A*, 403, 1165
- Laskar J., 1994, *A&A*, 287, L9
- Laskar J., Robutel P., 2001, *CeMDA*, 80, 39
- Levison H. F., Bottke W. F., Gounelle M., Morbidelli A., Nesvorný D., Tsiganis K., 2009, *Nature*, 460, 364
- Levison H. F., Duncan M. J., 1994, *Icarus*, 108, 18
- Masiero J. R., et al., 2011, *ApJ*, 741, 68
- Masset F., Snellgrove M., 2001, *MNRAS*, 320, L55
- Michtchenko T., Ferraz-Mello S., 1997, *P&SS*, 45, 1587
- Minton D. A., Malhotra R., 2010, *Icarus*, 207, 744
- Moons M., Morbidelli A., Migliorini F., 1998, *Icarus*, 135, 458
- Morbidelli A., 1997, *Icarus*, 127, 1
- Morbidelli A., Bottke W. F., Nesvorný D., Levison H. F., 2009, *Icarus*, 204, 558
- Morbidelli A., Brasser R., Gomes R., Levison H. F., Tsiganis K., 2010, *AJ*, 140, 1391
- Morbidelli A., Moons M., 1993, *Icarus*, 102, 316
- Murray C. D., 1986, *Icarus*, 65, 70
- Nesvorný D., Ferraz-Mello S., 1997, *A&A*, 320, 672
- Nesvorný D., Morbidelli A., 2012, *AJ*, 144, 117
- Nesvorný D., Vokrouhlický D., Morbidelli A., 2013, *ApJ*, 768, 45
- O'Brien D. P., Morbidelli A., Bottke W. F., 2007, *Icarus*, 191, 434
- Parker A., Ivezić Ž., Jurić M., Lupton R., Sekora M. D., Kowalski A., 2008, *Icarus*, 198, 138
- Rabe E., 1959, *AJ*, 64, 53
- Roig F., Ferraz-Mello S., 1999, *P&SS*, 47, 653
- Roig F., Nesvorný D., Ferraz-Mello S., 2002, *MNRAS*, 335, 417
- Roig F. V., Nesvorný D., 2014, in *AAS DPS Meeting Abstracts Vol. 46, The Dynamical Evolution of the Inner Solar System in the Jumping-Jupiter Model*, 400.01
- Schubart J., 1964, *SAO Special Report*, 149
- Schweizer F., 1969, *AJ*, 74, 779
- Skoulidou D., Tsiganis K., Varvoglis H., 2014, in Knežević Z., Lemaître A., eds, *Complex Planetary Systems Proc. IAU Symp. 310, Long-term evolution of asteroids in the 2:1 mean-motion resonance*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 178
- Standish E. M., 2004, *A&A*, 417, 1165
- Tsiganis K., Knežević Z., Varvoglis H., 2007, *Icarus*, 186, 484
- Wisdom J., 1987, *Icarus*, 72, 241
- Zappalà V., Bendjoya P., Cellino A., Farinella P., Froeschlé C., 1995, *Icarus*, 116, 291

APPENDIX A: CONTRIBUTION OF THE THEMIS FAMILY EJECTA TO THE LONG-LIVED POPULATION

We shall briefly discuss a possible role of neighbouring Themis family in creation of the long-lived resonant population. Although Brož et al. (2005) demonstrated that the fragments from Themis family cannot be transported to the stable islands by the Yarkovsky semimajor axis drift, a possibility of direct injection during the Themis family formation event is still an open question. During the formation, fragments ejected at high velocities ($v_{ej} \simeq 400 \text{ m s}^{-1}$, or more) may fall directly in the J2/1 resonance and thus contribute somehow to the stable population. There are several caveats, however.

(i) One has to assume that a substantial part of fragments ($\simeq 10$ per cent) have very large ejection velocities with respect to (24) Themis, or the respective parent body with $D_{PB} \simeq 400 \text{ km}$. We tried to use an ‘extreme’ size-independent velocity field prescribed by Farinella, Gonczi & Froeschle (1993) relation, with parameters $v_{esc} = 170 \text{ m s}^{-1}$ and $\alpha = 3.25$. Then up to $N(D > 5 \text{ km}) = 10\text{--}30$ fragments land within island B, according to our tests. This number should be further decreased by a subsequent long-term orbital evolution, as Themis family is (2.5 ± 1.0) Gyr old (Brož et al. 2013). Let us also note that the collisional evolution of resonant bodies was accounted for automatically, as we did this simulation with the currently observed size-frequency distribution of Themis family.

(ii) At the same time, it is required that the breakup takes place when the true anomaly $f_{imp} \simeq 0^\circ$ for this ejection scenario to work; otherwise, the number of objects landing in the islands decreases as well. But this particular impact geometry does *not* seem to be compatible with the observed shape of Themis family, namely with a large eccentricity dispersion of the family below the J11/5 resonance, at $a_p = 3.03 \text{ AU}$ (see Fig. A1).

(iii) Starting with a more reasonable size-dependent velocity field – as used in Brož & Morbidelli (2013) for Eos family, which has a similar parent body size – makes the contribution to the long-lived population as low as $N(D > 5 \text{ km}) = 2$.

(iv) There is no way to explain the existence of asteroids in island A by the ejection, both the eccentricities and inclinations of the observed A-island objects are too large. Therefore, the ejection from Themis is not a viable hypothesis in case of island A.

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

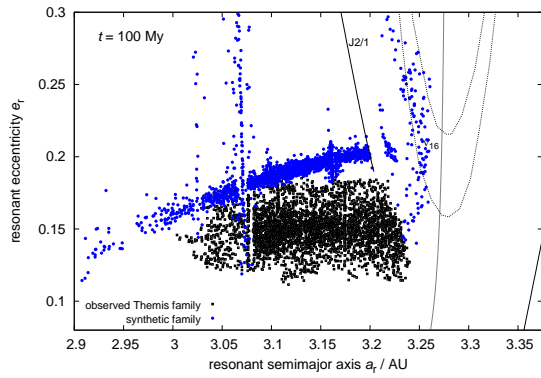


Figure A1. A simulation of a synthetic Themis-like family formation event. The figure represents the state 100 Myr after the breakup. The orbital distribution of observed Themis family is displayed in the proper elements (black squares), while the orbital distribution of the synthetic family is displayed in the resonant elements (blue circles). This causes the mutual shift in eccentricity. Note the differences in extent of both families and the eccentricity dispersion beyond the 11:5 mean-motion resonance with Jupiter.

B. Integrátor `swift_rmvs3_xyzinterp`

V této příloze stručně popíšeme nejdůležitější části zdrojového kódu integrátoru `SWIFT_RMVS3_XYZINTERP`. Program jsme vytvořili úpravou symplektického N -částicového integrátoru `SWIFT_RMVS3`, a to implementací algoritmu pro vývoj hmotných těles podle předepsaného souboru s interpolací v kartézských souřadnicích. Uvedeme dva hlavní podprogramy, které zajišťují průběžné načítání vstupních dat do paměti a jejich interpolaci.

Změny v hlavním programu. Hlavní program obsahuje několik nových proměnných, které slouží pro práci s předepsaným binárním souborem, v němž jsou uloženy předepsané pozice planet a jejich vývoj. Proměnná `binfile` obsahuje název souboru s předepsaným scénářem a v proměnné `ftype` je uložen typ binárního souboru (`integer`, `real*4` nebo `real*8`). Reálná proměnná `tunit` udává časové jednotky předepsaného souboru vyjádřené ve dnech. Reálná proměnná `tbf` představuje čas první sady načítaných orbitálních elementů v jednotkách Myr. Všechny tyto proměnné musejí být „manuálně“ zadány na vstupu při spuštění programu. Další změnou je zařazení integračního času t do *common blocku*, což umožňuje jeho jednoduché použití v podprogramech. Před hlavní smyčkou a během ní dochází k volání podprogramů `READ_NESVORNY` a `XYZ_INTERP` (viz níže), pokud to vyžaduje aktuální integrační čas.

Podprogram pro čtení předepsaného souboru. Tomuto podprogramu musí být předložen binární soubor, v němž jsou uloženy předepsané pozice hmotných těles a jejich vývoj. Primárně je určen pro práci s výstupy simulací Nesvorného & Morbidelliho (2012), nicméně funguje pro libovolný výstup simulací zapsaný v konvencích balíku `SWIFT` nebo `SYMBA`. Lze pracovat se souborem přesnosti `integer`, `real*4` nebo `real*8`. Podprogram má dvě části — první slouží k inicializaci dat před spuštěním hlavní výpočetní smyčky, druhá k načítání nových dat.

V první části jsou do paměti načteny první dva segmenty s orbitálními elementy planet, podle načtených excentricit je určen typ odpovídající kuželosečky a následně jsou orbitální elementy převedeny na kartézské polohy a rychlosti. Je zaznamenán čas obou segmentů $t_i(1)$ a $t_i(2)$.

Druhá část bývá spuštěna, pokud je $t + dt > t_i(2)$, kde t je integrační čas a dt je časový krok. Datový segment v čase $t_i(1)$ je přepsán segmentem s časem $t_i(2)$. Pro čas $t_i(2)$ je načten nový datový segment.

V průběhu podprogramu je kontrolováno, zda hlavní poloosy hmotných těles nedosahují podezřele velkých hodnot (podmínku na podezřelou velikost hlavní poloosy může stanovit uživatel; implicitně je $a_{\max} = 100 \text{ AU}$). Pokud kdykoliv při dalším načítání klesne počet hmotných těles v předepsaném souboru, předpokládá se, že bylo vyřazeno právě těleso, pro něž byla nalezena podezřele velká hlavní poloosa. To je důležité pro zbylé části integrátoru, ve kterých se nacházejí smyčky, které běží přes všechna hmotná tělesa.

Zdrojový kód:

```

subroutine read_nesvorny ( binfile , iu , nbod , tbf , mass ,
& ftype , tunit , dt)

    include ' ../ swift . inc '
35
c———Inputs
    character*80 binfile
    integer iu , ftype
    real*8 tbf , tunit , dt
40    real*8 mass (NPLMAX)
c———integration time in common block!
    real*8 t
    common /times/ t

45 c———Inputs/Outputs
    integer nbod

c———Internals
    include ' xv _ interp . inc '
50    include ' distant _ pl . inc '
    real*8 a , e , inc , capom , omega , capm
    integer id , i , j , k , ialpha , nbodbf , nleftbf , ierr , nread

55 c———Saving variables from include files
c———Saving & setting local variables
    save / xv _ interp / , / distant _ pl /
    save nread
    data nread / 0 /
60

```

```

c*****Executable code*****

c*****PART1*****
c  Fill planetary distance status array. Read the first
65 c  times ti(1) and ti(2) and corresponding datasets
c  from binfile.

      if (nread.eq.0) then

70 c  Set distance status of all planets to "normal"
      do j=2, nbod
          pl_disstat(j) = 0
      enddo

75      open(unit=iu, file=binfile, status='old',
& form='unformatted', iostat=ierr)
      if (ierr.ne.0) then
          write(*,*) 'read_nesvorny: Error opening ',
& 'file ', binfile
80      stop
      endif

      do 20 i=1, 2
          nread = nread + 1
85      call io_read_hdr_fotype(iu, ftype, ti(i), nbodbf,
& nleftbf)
c  transforms ti(i) to [day]
          ti(i) = ti(i)*tunit - tbf*365.25d6

90 c  ! nbodbf (=actual number of massive bodies in binary
c  file) and nbod (=number of massive bodies set in the
c  initial conditions) should be the same here
          do 30 j=2, nbod
              call io_read_line_fotype(iu, ftype,
95      & id, a, e, inc, capom, omega, capm)
c  determine ialpha parameter (type of a conic section)
              if (e.lt.1.0d0) then
                  ialpha = -1
              else if (e.eq.1.0d0) then
100             ialpha = 0
              else if (e.gt.1.0d0) then
                  ialpha = 1
              endif
c  angular orbital elements MUST be in radians for the
105 c  following subroutine
              call orbel_el2xv(mass(1)+mass(j), ialpha,
& a, e, inc, capom, omega, capm,
& xhi(j, i), yhi(j, i), zhi(j, i),

```

```

    &          vxhi(j , i) , vyhi(j , i) , vzhi(j , i))
110
30      enddo
20      enddo
      endif

115 c*****PART2*****
c Executed if t + dt (i.e. the interpolation time in
c step) is greater than time ti(2) of the second
c currently loaded dataset: replace the first
c dataset with the second dataset, read new dataset
120 c from binfile as the second dataset. Check number
c of massive bodies in binary file. If necessary,
c skip the ejected planet.

      do while ((t + dt).gt.ti(2))
125
          nread = nread + 1

          ti(1)=ti(2)
          do j=2, nbod
130              xhi(j,1) = xhi(j,2)
                  yhi(j,1) = yhi(j,2)
                  zhi(j,1) = zhi(j,2)
                  vxhi(j,1) = vxhi(j,2)
                  vyhi(j,1) = vyhi(j,2)
135                  vzhi(j,1) = vzhi(j,2)
          enddo

          call io_read_hdr_fotype(iu , ftype , ti(2) , nbodbf ,
&          nleftbf)
140

          ti(2) = ti(2)*tunit - tbf*365.25d6

          do j=2, nbod

145 c Set distance status of abnormally distant planet
c to ejected if number of massive bodies in binfile
c does not match nbod
          if ((nbodbf.ne.nbod) .and.
&          (pl_disstat(j).eq.1)) then
150              pl_disstat(j) = 2
          endif

          if (pl_disstat(j).ne.2) then
c do usual reading and transformation of elements
155          call io_read_line_fotype(iu , ftype ,
&          id , a , e , inc , capom , omega , capm)
```

```

c Set distance status of normally distant planet
c to abnormally distant, if its semimajor axis is
c larger than the value given in distant_pl.inc
160     if ((a.gt.a_max).and.
        & (pl_disstat(j).eq.0)) then
            pl_disstat(j) = 1
        endif
c Determine ialpha parameter (type of a conic section)
165     if (e.lt.1.0d0) then
            ialpha = -1
        else if (e.eq.1.0d0) then
            ialpha = 0
        else if (e.gt.1.0d0) then
170         ialpha = 1
        endif
        call orbel_el2xv(mass(1)+mass(j), ialpha ,
        & a, e, inc, capom, omega, capm,
        & xhi(j,2), yhi(j,2), zhi(j,2),
175     & vxhi(j,2), vyhi(j,2), vzhi(j,2))
        endif
        enddo
        enddo

180     return
        end

```

Podprogram pro interpolaci v kartézských souřadnicích. Tato část programu slouží k interpolaci vstupních dat tak, abychom získali vývoj hmotných částic se vzorkováním, které odpovídá zvolenému časovému kroku integrátoru. Označme jako t_{interp} čas, ve kterém chceme nalézt polohy \mathbf{r} a rychlosti \mathbf{v} hmotných těles v kartézských souřadnicích. Pokud je $|t_{\text{interp}} - t_i(1)| \leq \varepsilon$ nebo $|t_{\text{interp}} - t_i(2)| \leq \varepsilon$, lze použít přímo \mathbf{r} a \mathbf{v} v čase $t_i(1)$ nebo $t_i(2)$. Parametr přesnosti je implicitně $\varepsilon = 1$ d a je ho samozřejmě možné manuálně změnit.

Pokud čas t_{interp} není dostatečně blízký načteným datovým segmentům, je provedena interpolace. Předepsané polohy a rychlosti jsou převedeny z heliocentrických souřadnic do Jacobiho, v nich je proveden drift podél keplerovské elipsy do požadovaného času t_{interp} , a nakonec jsou výsledné polohy a rychlosti převedeny zpět do heliocentrického systému. V případě driftu v čase nazpět (z $t_i(2)$ do t_{interp}) je nutné vzít záporné komponenty rychlosti před a po provedení driftu, abychom získali požadovaný výsledek. Výsledky dopředného a zpětného driftu jsou průměrovány

pomocí váženého průměru, kde váhy určujeme podle časové odlehlosti času t_{interp} od $t_i(1)$ a $t_i(2)$.

Zdrojový kód:

```
      subroutine xyz_interp (nbod, mass, tinterp ,
&   xh, yh, zh, vxh, vyh, vzh)

35      include ' ../ swift .inc '

c-----Inputs
      real*8 mass(NPLMAX), tinterp
      integer nbod

40      c-----Inputs/Outputs
      real*8 xh(NPLMAX), yh(NPLMAX), zh(NPLMAX)
      real*8 vxh(NPLMAX), vyh(NPLMAX), vzh(NPLMAX)

45      c-----Internals
      real*8 xha(NPLMAX,2), yha(NPLMAX,2), zha(NPLMAX,2)
      real*8 vxha(NPLMAX,2), vyha(NPLMAX,2), vzha(NPLMAX,2)

      include 'xv_interp.inc'
50      include 'distant_pl.inc'
      real*8 deltat, w1, w2, w1n, w2n
      integer i, j
c-----Small parameter eps
      real*8 eps

55      c-----Constants
c Set value of eps (for example, 1 day is used as
c the default value)
      parameter(eps = 1.d0)

60      c-----Note that there is no SAVE statement in this place!

c*****Executable code*****

65      c If tinterp is very close to ti(i)
c use directly xhi(i, id), ..., vxhi(i, id), ...
c Parameter eps is used as the required precision
      if (abs(tinterp-ti(1)).le.eps) then
          do j=2, nbod
70          xh(j) = xhi(j,1)
          yh(j) = yhi(j,1)
          zh(j) = zhi(j,1)
          vxh(j) = vxhi(j,1)
          vyh(j) = vyhi(j,1)
```

```

75         vzh(j) = vzh(i,j,1)
           enddo

           else if (abs(tinterp-ti(2)).le.eps) then
           do j=2, nbod
80             xh(j) = xhi(j,2)
             yh(j) = yhi(j,2)
             zh(j) = zhi(j,2)
             vxh(j) = vxhi(j,2)
             vyh(j) = vyhi(j,2)
85             vzh(j) = vzh(i,j,2)
           enddo

       c else ti(1) < tinterp < ti(2)
       else
90
       c Set temp variables
       do i=1, 2
           do j=2, nbod
           xha(j,i) = xhi(j,i)
95           yha(j,i) = yhi(j,i)
           zha(j,i) = zhi(j,i)
           vxha(j,i) = vxhi(j,i)
           vyha(j,i) = vyhi(j,i)
           vzha(j,i) = vzh(i,j,i)
100          enddo
        enddo

        do i = 1, 2
       c Compute the time interval between ti(i) and tinterp
105         deltat = abs(ti(i)-tinterp)

       c To enable backward drift from ti(2) to t,
       c the velocities in ti(2) must be inverted
           if (i.eq.2) then
110             do j=2, nbod
           c ... skip ejected planets
           if (pl_disstat(j).ne.2) then
           vxha(j,i) = -vxha(j,i)
           vyha(j,i) = -vyha(j,i)
115           vzha(j,i) = -vzha(j,i)
           endif
           enddo
           endif

       c perform a drift from ti(i) to tinterp
120         call h2j_drift_j2h(nbod,mass,deltat,
           &         xha(1,i),yha(1,i),zha(1,i),
           &         vxha(1,i),vyha(1,i),vzha(1,i))

```

```

c NOTE THAT ONLY A "POINTER" TO THE BEGGINING OF A
c "MEMORY COLUMN" IS PASSED
125
c Invert the velocities obtained by backward drift
      if (i.eq.2) then
          do j=2, nbod
c ... skip ejected planets
130          if (pl_disstat(j).ne.2) then
              vxha(j,i)=-vxha(j,i)
              vyha(j,i)=-vyha(j,i)
              vzha(j,i)=-vzha(j,i)
          endif
135          enddo
      endif
      enddo

c The following part of the code computes weighted
140 c arithmetic mean from both drifts.
c Skips ejected planets.
      do j=2, nbod
          if (pl_disstat(j).ne.2) then
c Calculate weights
145          w1 = abs(ti(2)-ti(1))/abs(tinterp-ti(1))
          w2 = abs(ti(2)-ti(1))/abs(tinterp-ti(2))
c Normalize weigths
          w1n = w1/(w1+w2)
          w2n = w2/(w1+w2)
150 c Calculate mean values of coordinates and velocities for
c time tinterp
          xh(j)=w1n*xha(j,1)+w2n*xha(j,2)
          yh(j)=w1n*yha(j,1)+w2n*yha(j,2)
          zh(j)=w1n*zha(j,1)+w2n*zha(j,2)
155          vxh(j)=w1n*vxha(j,1)+w2n*vxha(j,2)
          vyh(j)=w1n*vyha(j,1)+w2n*vyha(j,2)
          vzh(j)=w1n*vzha(j,1)+w2n*vzha(j,2)
      endif
          enddo
160 endif

      return
      end

```

Literatura

- Armitage P. J., Clarke C. J., Palla F., 2003, MNRAS, 342, 1139
- Benavidez P. G., Durda D. D., Enke B. L., Bottke W. F., Nesvorný D., Richardson D. C., Asphaug E., Merline W. J., 2012, Icarus, 219, 57
- Benz W., Asphaug E., 1999, Icarus, 142, 5
- Bitsch B., Johansen A., Lambrechts M., Morbidelli A., 2015, A&A, 575, A28
- Bottke W. F., Durda D. D., Nesvorný D., Jedicke R., Morbidelli A., Vokrouhlický D., Levison H., 2005a, Icarus, 175, 111
- Bottke W. F., Durda D. D., Nesvorný D., Jedicke R., Morbidelli A., Vokrouhlický D., Levison H. F., 2005b, Icarus, 179, 63
- Bottke W. F., Nolan M. C., Greenberg R., Kolvoord R. A., 1994, Icarus, 107, 255
- Bowell E., 2012, The asteroid orbital elements database [online], [cit. 2012-11-15], <ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.html>
- Brasser R., Morbidelli A., Gomes R., Tsiganis K., Levison H. F., 2009, A&A, 507, 1053
- Brož M., Morbidelli A., Bottke W. F., Rozehnal J., Vokrouhlický D., Nesvorný D., 2013, A&A, 551, A117
- Brož M., Vokrouhlický D., 2008, MNRAS, 390, 715
- Brož M., Vokrouhlický D., Morbidelli A., Nesvorný D., Bottke W. F., 2011, MNRAS, 414, 2716
- Brož M., Vokrouhlický D., Roig F., Nesvorný D., Bottke W. F., Morbidelli A., 2005, MNRAS, 359, 1437
- Brunini A., Benvenuto O. G., 2008, Icarus, 194, 800
- Carruba V., Aljbaae S., Souami D., 2014, ApJ, 792, 46
- Chrenko O., 2013, Původ asteroidů ve 2:1 rezonanci středního pohybu s Jupiterem. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze
- Dahlgren M., 1998, A&A, 336, 1056

- Dohnanyi J. S., 1969, JGR, 74, 2531
- Durda D. D., Bottke W. F., Nesvorný D., Enke B. L., Merline W. J., Asphaug E., Richardson D. C., 2007, Icarus, 186, 498
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Roig F., 1998, AJ, 116, 1491
- Franklin F. A., 1994, AJ, 107, 1890
- Gomes R., Levison H. F., Tsiganis K., Morbidelli A., 2005, Nature, 435, 466
- Greenberg R., 1982, AJ, 87, 184
- Harris A. W., 1998, Icarus, 131, 291
- Henrard J., Watanabe N., Moons M., 1995, Icarus, 115, 336
- Johnstone C. P., Jardine M., Gregory S. G., Donati J.-F., Hussain G., 2014, MNRAS, 437, 3202
- Kirkwood D., 1867, Meteoric astronomy: a treatise on shooting-stars, fireballs, and aerolites. J. B. Lippincott & co., Philadelphia
- Knežević Z., Milani A., 2003, A&A, 403, 1165
- Kozai Y., 1962, AJ, 67, 591
- Laskar J., 1994, A&A, 287, L9
- Laskar J., Robutel P., 2001, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 80, 39
- Levison H. F., Bottke W. F., Gounelle M., Morbidelli A., Nesvorný D., Tsiganis K., 2009, Nature, 460, 364
- Levison H. F., Duncan M. J., 1994, Icarus, 108, 18
- Levison H. F., Stewart G. R., 2001, Icarus, 153, 224
- Masiero J. R., a kol., 2011, ApJ, 741, 68
- Masset F., 2000, A&AS, 141, 165
- Masset F., Snellgrove M., 2001, MNRAS, 320, L55
- Michtchenko T., Ferraz-Mello S., 1997, P&SS, 45, 1587
- Minton D. A., Malhotra R., 2010, Icarus, 207, 744

-
- Moons M., Morbidelli A., Migliorini F., 1998, *Icarus*, 135, 458
- Morbidelli A., 1997, *Icarus*, 127, 1
- Morbidelli A., Bottke W. F., Nesvorný D., Levison H. F., 2009, *Icarus*, 204, 558
- Morbidelli A., Brasser R., Gomes R., Levison H. F., Tsiganis K., 2010, *AJ*, 140, 1391
- Morbidelli A., Brasser R., Tsiganis K., Gomes R., Levison H. F., 2009, *A&A*, 507, 1041
- Morbidelli A., Crida A., 2007, *Icarus*, 191, 158
- Morbidelli A., Moons M., 1993, *Icarus*, 102, 316
- Murray C. D., 1986, *Icarus*, 65, 70
- Nesvorný D., Ferraz-Mello S., 1997, *A&A*, 320, 672
- Nesvorný D., Morbidelli A., 2012, *AJ*, 144, 117
- Nesvorný D., Vokrouhlický D., Morbidelli A., 2013, *ApJ*, 768, 45
- O'Brien D. P., Morbidelli A., Bottke W. F., 2007, *Icarus*, 191, 434
- Parker A., Ivezić Ž., Jurić M., Lupton R., Sekora M. D., Kowalski A., 2008, *Icarus*, 198, 138
- Rabe E., 1959, *AJ*, 64, 53
- Roig F., Ferraz-Mello S., 1999, *P&SS*, 47, 653
- Roig F., Nesvorný D., Ferraz-Mello S., 2002, *MNRAS*, 335, 417
- Roig F. V., Nesvorný D., 2014, in *AAS DPS Meeting Abstracts Vol. 46, The Dynamical Evolution of the Inner Solar System in the Jumping-Jupiter Model*, 400.01
- Rozehnal J., 2013, *Rodiny planetek a jejich vztah k migraci planet. Diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze*
- Schweizer F., 1969, *AJ*, 74, 779
- Skoulidou D., Tsiganis K., Varvoglis H., 2014, in *Knežević Z., Lemaître A., eds, Complex Planetary Systems Proc. IAU Symp. 310, Long-term evolution of asteroids in the 2:1 mean-motion resonance*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 178
- Standish E. M., 2004, *A&A*, 417, 1165

LITERATURA

Tsiganis K., Gomes R., Morbidelli A., Levison H. F., 2005, *Nature*, 435, 459

Tsiganis K., Knežević Z., Varvoglis H., 2007, *Icarus*, 186, 484

Vokrouhlický D., Brož M., Bottke W. F., Nesvorný D., Morbidelli A., 2006, *Icarus*, 183, 349

Wisdom J., 1987, *Icarus*, 72, 241

Zappalà V., Bendjoya P., Cellino A., Farinella P., Froeschlé C., 1995, *Icarus*, 116, 291