Oponentský posudek na doktorskou disertační práci Mgr. Jakuba Slavíka "Evolutionary differential equations in unbounded domains"

Tato doktorská disertační práce se zabývá asymptotickými vlastnostmi disipativních evolučních parciálních diferenciálních rovnic v neomezených oblastech v rámci lokálně uniformních prostorů. Jako hlavní výsledek autor dokazuje pro několik vybraných evolučních systémů existenci lokálně kompaktních atraktorů a uvádí horní odhady jejich Kolmogorovovy ε-entropie. Za specifikovaných podmínek také studuje existenci nekonečně dimenzionálních exponenciálních atraktorů. Práce je rozdělena do 7 kapitol.

V první kapitole autor definuje základní funkční prostory: vhodné váhové prostory, lokálně uniformní prostory a jejich parabolické varianty. Tyto prostory jsou vhodné pro studium evolučních rovnic v neomezených oblastech.

Druhá kapitola je věnována definicím základních pojmů z teorie dynamických systémů, atraktoru, tzv. bi-space atraktoru, exponenciálnímu atraktoru a Kolmogorovovy ε-entropie. Analogickým pojmem pro pojem exponenciálního atraktoru pro evoluční rovnice v neomezených oblastech studovaných v rámci lokálně uniformních prostorů je pojem nekonečně dimenzionálního exponenciálního atraktoru. Jeho definice je odložena do páté kapitoly, kde je pro jistý abstraktní dynamický systém nejprve definován diskrétní nekonečně dimenzionální exponenciální atraktor.

Třetí kapitola stručně popisuje hlavní výsledky dosažené v práci.

Hlavní částí práce jsou čtvrtá až sedmá kapitola, které jsou tvořeny čtyřmi články. Dva z těchto článků, které byly napsány J.Slavíkem a spoluautory, byly publikovány v impaktovaných časopisech. Další dva články jsou napsány výhradně J.Slavíkem a v době podání disertační práce existovaly pouze ve formě preprintů.

Čtvrtá kapitola je věnována studiu nelineárního reakčně-difúzního systému v neomezených oblastech s nelineárním difúzním členem a zpožděným reakčním členem. Pro tento systém je dokázána existence lokálně kompaktního atraktoru a odhady entropie tohoto atraktoru. Nejprve je problém přesně definován a je dokázána existence a jednoznačnost globálního řešení. Při důkazu existence je řešení získáno jako limita řešení problémů na omezených oblastech. Bohužel řešení u není spojité v lokálně uniformním prostoru $L^2_b(\Omega)$ a není možné použít metodu Ljapunovských exponentů, což je kompenzováno použitím váhových prostorů a metody l-trajektorií. Tato metoda je založena na faktu, že asymptotické chování řešení dynamického systému v původním fázovém prostoru lze ekvivalentně popsat asymptotickým chováním tzv. l-trajektorií, což jsou části trajektorií řešení parametrizované časem na intervalu délky l. Namísto původní semigrupy $S(t)$ tak autor pracuje s vhodnější semigrupou trajektorií $L(t)$ a pro dynamický systém trajektorií dokazuje existenci atraktoru a horní odhad jeho entropie. Lipschitzovská spojitost tzv. end point mapping pak umožňuje dokázat i existenci a horní odhad entropie atraktoru původního dynamického systému.

Otázka: V případě diferenciálních rovnic v konečných oblastech je často dokázán horní odhad pro fraktální dimenzi globálního atraktoru, což umožňuje pracovat s tzv. Maňé's projection. Existuje nějaká analogie pro tuto projekci i pro systémy studované v této práci? Dále předpokládám, že Theorem 5.3 není správně uvedena.

V roce 2003 dokázal D.Pražák nutnou a postačující podmínku pro existenci exponenciálního atraktoru. Analogicky tomuto výsledku prezentuje autor v páté kapitole nutnou a postačující podmínku pro existenci diskrétního nekonečně dimenzionálního exponenciálního atraktoru v lokálně uniformních prostorech. Podmínka je prezentována pro abstraktní model lokálně uniformního prostoru a posléze aplikována na konkrétní nelineární reakčně-difúzní rovnici. Existence a jednoznačnost řešení této rovnice jsou dokázány v literatuře, stejně jako existence uzavřené positivně invariantní absorbující množiny a dostatečná regularita řešení. Existence diskrétního nekonečně dimenzionálního exponenciálního atraktoru příslušného dynamického systému je nyní dokázána metodou l-trajektorií, aplikací výše uvedené podmínky a standardním rozšířením na spojitý dynamický systém.

Otázka: Jak obecná je aplikovatelnost uvedené podmínky. Lze ji například použít i pro důkaz existence exponenciálního atraktoru pro další rovnice studované v práci?

V šesté kapitole je studována vlnová rovnice s nelineárním tlumením v lokálně uniformních prostorech. Je dokázána existence a jednoznačnost slabého řešení, existence lokálně kompaktního atraktoru a horní odhad Kolmogorovovy ε-entropie metodou trajektorií. V úvodu autoři uvádějí výsledky z literatury, které byly dosaženy zejména pro omezené oblasti. Předmět jejich pozornosti, nelineární tlumení, nebylo dosud v kontextu lokálně uniformních prostorů studováno. Důkaz existence řešení probíhá ve třech krocích. Nejprve je diskutována existence a jednoznačnost silných řešení na omezených oblastech. Tato řešení jsou potom uniformně odhadována ve váhových Lebesgueových prostorech a finální slabé řešení je získáno jako limita aproximativních řešení. Dále je definována řešící semigrupa (Th 3.2). Protože v dané situaci energie řešení nemusí klesat v čase, jsou předpokládány dvě možné podmínky zajišťující disipaci energie. Dále je použita metoda l-trajektorií a je ukázáno, že řešící operátor v prostoru trajektorií splňuje lokální variantu tzv. squezing property, což v důsledku vede k důkazu existence lokálně kompaktního atraktoru a hornímu odhadu Kolmogorovovy ε-entropie.

Otázka: Na str. 20 je uveden v Lemmatu 6.1 odhad Kolmogorovovy ε-entropie a je zde uvedeno, že tento odhad lze údajně použít pro důkaz existence nekonečně dimenzionálního exponenciálního atraktoru. Uvedený problém je odložen na další článek. Bylo zde později pokračováno?

V sedmé kapitole je studována vlnová rovnice se silným tlumením v lokálně uniformních prostorech pro subkritický případ. Metodou trajektorií je dokázán horní odhad Kolmogorovovy ε-entropie lokálně kompaktního atraktoru. Autor nejprve uvádí stručný přehled výsledků dosažených dosud pro omezené i neomezené oblasti. Zatímco v předchozí kapitole byla použita tzv. squezing property díky konečné rychlosti propagace, v případě studované rovnice je argumentace lehce pozměněna.

Otázka: Je zkoumána (podobně jako tomu je pro NSE) otázka, zda jsou existující atraktory vnořeny do nějakých hladkých manifoldů?

Celkové hodnocení: Předložená disertační práce má velmi dobrou úroveň. Je napsána téměř bez chyb a velmi přehledně. Autor si osvojil řadu netriviálních technik z teorie PDR a dokáže je tvořivým způsobem rozvíjet. Dvě kapitoly jsou publikovány v dobrých časopisech a celkově práce přináší kvalitní vědecké výsledky v oblasti asymptotického chování evolučních disipativních rovnic v neomezených oblastech.

Práce vypovídá o schopnosti autora k samostatné a tvořivé vědecké práci. Proto doporučuji, aby v případě úspěšné obhajoby disertační práce byl J. Slavíkovi udělen titul PhD.

V Praze, 10.9.2017 Doc. RNDr. Zdeněk Skalák, CSc.