



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**RIGORÓZNÍ PRÁCE**

David Šerý

**Numerické řešení rovnic mělké vody**

Katedra numerické matematiky

Vedoucí rigorózní práce: prof. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Numerická a výpočtová matematika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto rigorózní práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Rád bych poděkoval Pánu Bohu, panu prof. Vítu Dolejšímu za trpělivost, rady a věnovaný čas a své rodině a manželce za psychickou podporu.

Název práce: Numerické řešení rovnic mělké vody

Autor: David Šerý

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí rigorózní práce: prof. RNDr. Vít Dolejší, PhD., DSc., Katedra numerické matematiky

Abstrakt: Práce se zabývá numerickým řešením parciálních diferenciálních rovnic popisujících proudění tzv. *mělké vody*, kde zanedbáváme toky ve svislém směru. Tyto rovnice jsou hyperbolického typu 1. řádu s reaktivním členem daným topologií dna. Výsledný systém rovnic diskretizujeme pomocí implicitní časoprostorově nespojitě Galerkinovy metody (STDGM). V literatuře se obvykle užívají explicitní techniky, implicitní STDGM je vhodná především pro adaptivní metody, jelikož přirozeně umožňuje použití různých sítí na různých časových hladinách. V této práci odvodíme příslušnou metodu a adaptivní algoritmus. Nakonec prezentujeme použití metody na několika testovacích úlohách.

Klíčová slova: rovnice mělké vody, numerická simulace, hyperbolické rovnice, nespojitá Galerkinova metoda

Title: Numerical solution of the shallow water equations

Author: David Šerý

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Vít Dolejší, PhD., DSc., Department of Numerical Mathematics

Abstract: The thesis deals with the numerical solution of partial differential equations describing the flow of the so-called shallow water neglecting the flow in the vertical direction. These equations are of hyperbolic type of the first order with a reactive term representing the bottom topology. We discretize the resulting system of equations by the implicit space-time discontinuous Galerkin method (STDGM). In the literature, the explicit techniques are used most of the time. The implicit approach is suitable especially for adaptive methods, because it allows the usage of different meshes for different time levels. In the thesis we derive the corresponding method and an adaptive algorithm. Finally, we present usage of the method in several examples.

Keywords: shallow water equations, numerical simulation, hyperbolic equations, discontinuous Galerkin method

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Rovnice mělké vody</b>	<b>3</b>
2.1	Předpoklady a okrajové podmínky . . . . .	3
2.2	Odvození rovnic mělké vody . . . . .	4
2.3	Základní vlastnosti SWE . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Numerické řešení SWE</b>	<b>9</b>
3.1	Diskretizace pomocí STDGM . . . . .	9
3.2	Numerický tok . . . . .	11
3.2.1	Odvození numerického toku . . . . .	12
3.3	Okrajové podmínky a linearizovaný Riemannův problém . . . . .	13
3.3.1	Propustná okrajová podmínka . . . . .	13
3.3.2	Nepropustná okrajová podmínka . . . . .	14
3.4	Stabilizace . . . . .	15
3.5	Formulace problému . . . . .	16
3.6	Newtonova metoda . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Algoritmus řešení</b>	<b>19</b>
4.1	Limitující faktor . . . . .	19
4.2	Odhady chyb . . . . .	20
4.3	Adaptivita . . . . .	23
4.3.1	Adaptivita časového kroku . . . . .	23
4.3.2	Adaptivita sítě a stupně polynomiálních aproximací . . . . .	24
4.4	Algoritmus . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Numerické experimenty</b>	<b>26</b>
5.1	1D úlohy . . . . .	26
5.1.1	Klidná hladina . . . . .	27
5.1.2	Transkritické proudění přes hrb . . . . .	27
5.1.3	Podkritické proudění přes hrb . . . . .	29
5.1.4	Výpusť přes hrb . . . . .	31
5.2	2D úlohy . . . . .	32
5.2.1	Funkce vykreslující řešení . . . . .	32
5.2.2	4 propustné stěny . . . . .	33
5.2.3	4 nepropustné stěny . . . . .	33
5.2.4	3 nepropustné stěny . . . . .	35
5.2.5	Problém sucha . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>38</b>
	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>39</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>41</b>

# 1. Úvod

Pomocí rovnic mělké vody (SWE) se modeluje obtékání překážek, proudění vody v řekách a vylití vody z koryta řek při záplavách či protržení hráze. SWE nacházejí uplatnění také při modelování lavin, sesuvů půdy a proudění atmosféry. Své využití našly SWE také ve filmovém a herním průmyslu. V neposlední řadě lze SWE použít k odhadování škod způsobených vlnou tsunami. Pro tuto aplikaci se používá modifikovaná verze SWE tzv. *sférické rovnice mělké vody*.

SWE tvoří systém nelineárních parciálních diferenciálních rovnic popisující proudění vody působené gravitační silou a topologií dna. Předpoklad mělkosti vody umožňuje řešení obecných 3D úloh na dvoudimenzionálních oblastech.

Vzhledem k četnému využití byly rovnice SWE již dost zkoumány a vícero publikací se zabývalo jejich řešením. Navrhnuté modely používají různé metody, od plně explicitní metody v (Thuerey a Hess, 2012) přes *metodu konečných objemů* v (Felcman a Havle, 2011) k *nespojité Galerkinově metodě* v (Lea), (Remacle a kol., 2006), (Escobar-Vargas a kol., 2012) a (Giraldo a kol., 2002). Článek (Lea) pro časovou aproximaci využívá *Leapfrog* schéma, rovnici potom řeší semiimplicitní Galerkinovou metodou. Články (Remacle a kol., 2006), (Escobar-Vargas a kol., 2012) a (Giraldo a kol., 2002) k časové diskretizaci využívají různé metody typu *Runge-Kutta*. Článek (Sollie a kol., 2011) zavádí metodu kombinující časoprostorově nespojitou Galerkinovu metodu (STDGM) a metodu typu *Level set*, uvádí možné využití v SWE, nijak dále však tuto možnost nerozebírá.

Cílem této práce je navrhnout a implementovat metodu využívající plně implicitní STDGM. Tato metoda umožňuje v porovnání s metodou konečných objemů volbu dlouhého časového kroku a v kombinaci s vysokým polynomiálním stupněm aproximace vede k dosažení dostatečné přesnosti při rozumných výpočetních nákladech. Nespojitá aproximace je vhodná k řešení hyperbolických úloh, kde řešení mohou být nespojitá. Navíc STDGM umožňuje přirozeně kombinovat různé sítě na různých časových hladinách, což je výhodné pro adaptivní metody.

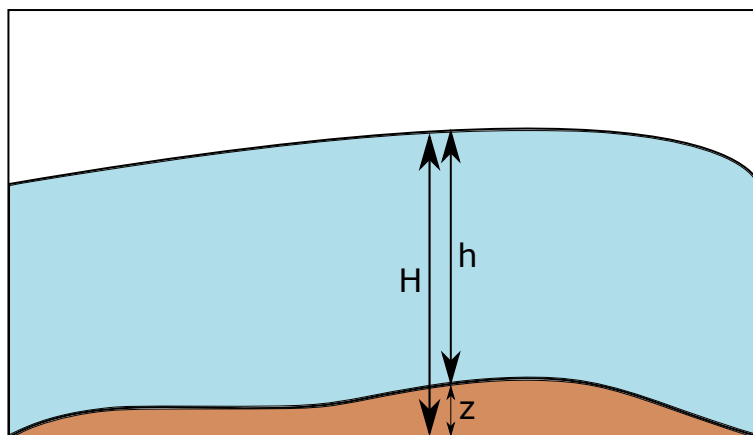
V práci nejprve odvodíme rovnice mělké vody ze základních vztahů popisující proudění nevazké nestlačitelné tekutiny a uvedeme několik jejich vlastností relevantních k navrhnutému modelu. V kapitole 3 *slabou formulací* dojdeme k definici přibližného řešení. Rozebereme také metodu vypořádání se s okrajovými podmínkami, volbu *numerického toku* a zavedeme do modelu pomocnou stabilizaci. Následující kapitola 4 se zabývá implementačními detaily metody a formuluje její výsledný algoritmus. Pro stanovení kvality metody spočteme v poslední kapitole 5 příklady standardně používané při hodnocení metod řešících SWE z (Gallouet a kol., 2003) a přidáme několik 2D úloh, pro něž neexistují standardní porovnávací testy. Uvedeme parametry modelu použité při simulaci i komplikace, jež se v průběhu simulací objevily.

## 2. Rovnice mělké vody

V této kapitole odvodíme rovnice mělké vody (SWE) a uvedeme jejich základní vlastnosti používané v dalších kapitolách. Při odvozování vycházíme z článku (Felcman a Havle, 2011).

Ve všech rovnicích používáme tzv. *eulerovský popis*, tedy nesledujeme pohyb částice tekutiny, nýbrž pevnou souřadnici  $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ .

**2.0.1. Značení.** Symbolem  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$  označme oblast, na níž sledujeme proudění,  $z = z(x_1, x_2)$  profil dna,  $H = H(x_1, x_2, t)$  výšku hladiny a  $h = h(x_1, x_2, t) = H(x_1, x_2, t) - z(x_1, x_2)$  výšku vody.



Obrázek 2.1: Znázornění veličin  $h$ ,  $H$  a  $z$

### 2.1 Předpoklady a okrajové podmínky

Vyjděme ze základních vztahů popisujících proudění nevazké nestlačitelné tekutiny, viz. (Feistauer, 1993).

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho(0, 0, -g)^\top - \nabla p, \quad (2.2)$$

kde  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$  značí *materiálovou derivaci*,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$  rychlost proudění tekutiny,  $\rho$  hustotu tekutiny,  $p$  tlak a  $g$  představuje gravitační zrychlení,  $g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$ .

*Mělkou vodou* rozumíme takové proudění, jehož výška je zanedbatelná v porovnání s rozměry dna oblasti proudění.

Uvažujme nepropustné dno, tedy

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) \cdot \mathbf{n}(x_1, x_2) = 0 \quad \forall t \in I \quad \forall (x_1, x_2, x_3)^\top \in \tilde{\Omega} \text{ takové, že } x_3 = z(x_1, x_2),$$

kde  $\mathbf{n}(x_1, x_2)$  značí normálový vektor ke dnu v bodě  $(x_1, x_2, x_3)^\top$ .

**2.1.1. Pozorování.** Podmínka nepropustnosti dna je ekvivalentní s  $\frac{D(x_3-z)}{Dt} = 0$  pro  $x_3 = z(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned}\frac{D(x_3 - z)}{Dt} &= \frac{\partial(x_3 - z)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(x_3 - z) \\ &= 0 + (v_3 - v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n},\end{aligned}$$

neboť plochu  $z$  lze vyjádřit pomocí implicitní funkce  $F(x_1, x_2, w) = 0$ , kde

$$F(x_1, x_2, w) = w - z(x_1, x_2),$$

a normálovým vektorem k implicitně zadané funkci je její gradient.

Dále požadujeme nulový tok ve směru  $x_3$  na hladině. Podobně jako u nepropustnosti dna můžeme odvodit, že je tato podmínka ekvivalentní první části podmínky 2.3. Tlak uvažujeme pouze hydrostatický, tedy předepisujeme jeho nulovost na hladině. Nakonec zanedbáme závislost  $v_1$  a  $v_2$  na  $x_3$  a položíme změnu rychlosti částice ve směru  $x_3$  rovnou nule.

Celkem dostáváme následující předpoklady:

$$\begin{aligned}\frac{D(x_3 - H)}{Dt}(x_1, x_2, x_3, t) = 0 ; p(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3)^\top \in \tilde{\Omega} \\ \forall t \in I \text{ takové, že } x_3 = H(x_1, x_2, t),\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\frac{D(x_3 - z)}{Dt}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3)^\top \in \Omega \text{ takové, že } x_3 = z(x_1, x_2),\tag{2.4}$$

$$\frac{Dv_3}{Dt}(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3)^\top \in \tilde{\Omega}, \quad \forall t \in I,\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}v_1 &= v_1(x_1, x_2, t), \\ v_2 &= v_2(x_1, x_2, t).\end{aligned}\tag{2.6}$$

## 2.2 Odvození rovnic mělké vody

Dosazením předpokladu (2.5) do třetí složky rovnice (2.2) dostáváme

$$0 = \rho \frac{Dv_3}{Dt} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial x_3}$$

a tedy

$$\rho g = -\frac{\partial p}{\partial x_3}.\tag{2.7}$$

Integrací rovnice (2.7) přes interval  $(x_3, H)$  podle  $x_3$

$$\int_{x_3}^H \rho g d\tilde{x}_3 = - \int_{x_3}^H \frac{\partial p}{\partial x_3} d\tilde{x}_3$$

po integraci, použití podmínky (2.3) a úpravě

$$p = \rho g(H - x_3).\tag{2.8}$$



Integrujme nyní rovnici (2.1) podle  $x_3$  přes interval  $(z, H)$

$$\int_z^H \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_3 = 0, \quad (2.9)$$

rozepišme podmínku nulového toku ve směru  $x_3$  na hladině a užieme nezávislost  $H$  na  $x_3$ :

$$\left. \frac{D(x_3 - H)}{Dt} \right|_{x_3=H} = v_3|_{x_3=H} - \left( \frac{\partial H}{\partial t} + v_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Podobně pro podmínku nepropustnosti dna dostaneme

$$\left. \frac{D(x_3 - z)}{Dt} \right|_{x_3=z} = v_3|_{x_3=z} - \left( v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Díky nezávislosti  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $z$  a  $H$  na  $x_3$  platí pro první dva členy levé strany rovnosti (2.9)

$$\int_z^H \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_3 = (H - z) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( (H - z)v_1 \right) + v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad (2.12)$$

$$\int_z^H \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_3 = (H - z) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( (H - z)v_2 \right) + v_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} - v_2 \frac{\partial H}{\partial x_2}. \quad (2.13)$$

Dosazením pomocných rovností (2.12), (2.13), (2.10) a (2.11) do vztahu (2.9) a užitím nezávislosti  $z$  na  $t$  dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( (H - z)v_1 \right) + v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( (H - z)v_2 \right) + v_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} - v_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ & + \left( \frac{\partial H}{\partial t} + v_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) - \left( v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = 0, \end{aligned}$$

přeuspořádáním členů

$$\frac{\partial(H - z)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( (H - z)v_1 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( (H - z)v_2 \right) = 0,$$

a použitím  $h = H - z$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h v_2}{\partial x_2} = 0. \quad (2.14)$$

Dosaďme do první a druhé složky rovnice (2.2) vztah (2.8) a využijme podmínky (2.6) a vztah  $H = h + z$ .

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \rho v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} = -\rho g \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial x_i} \right); \quad i = 1, 2.$$

Vydělením kladným  $\rho$  dostáváme

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} = -g \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial x_i} \right); \quad i = 1, 2. \quad (2.15)$$

Sečtěme  $v_1$  násobek rovnice (2.14) s  $h$  násobkem první rovnice (2.15).

$$v_1 \frac{\partial h}{\partial t} + v_1 \frac{\partial h v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial h v_2}{\partial x_2} + h \frac{\partial v_1}{\partial t} + h v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + h v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -gh \frac{\partial h}{\partial x_1} - gh \frac{\partial z}{\partial x_1},$$

přeuspořádaním členů

$$\left( v_1 \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) + \left( v_1 \frac{\partial h v_1}{\partial x_1} + h v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + gh \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) + \left( v_1 \frac{\partial h v_2}{\partial x_2} + h v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = -gh \frac{\partial z}{\partial x_1}$$

a využitím věty o derivaci součinu

$$\frac{\partial h v_1}{\partial t} + \frac{\partial (h v_1 v_1 + \frac{1}{2} g h^2)}{\partial x_1} + \frac{\partial h v_1 v_2}{\partial x_2} = -gh \frac{\partial z}{\partial x_1}. \quad (2.16)$$

Obdobným postupem pro druhou rovnici (2.15) dostaneme

$$\frac{\partial h v_2}{\partial t} + \frac{\partial (h v_2 v_2 + \frac{1}{2} g h^2)}{\partial x_2} + \frac{\partial h v_2 v_1}{\partial x_1} = -gh \frac{\partial z}{\partial x_2}. \quad (2.17)$$

Rovnice (2.14), (2.16) a (2.17) můžeme souhrnně napsat jako

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_s} \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbf{s}(\mathbf{w}), \quad (2.18)$$

kde

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h v_1 \\ h v_2 \end{pmatrix}$$

je tzv. *stavový vektor*,

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_{s+1} \\ w_{s+1} \frac{w_2}{w_1} + \frac{1}{2} \delta_{s1} g w_1^2 \\ w_{s+1} \frac{w_3}{w_1} + \frac{1}{2} \delta_{s2} g w_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h v_s \\ h v_1 v_s + \frac{1}{2} \delta_{s1} g h^2 \\ h v_2 v_s + \frac{1}{2} \delta_{s2} g h^2 \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2$$

představuje fyzikální tok a

$$\mathbf{s}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g w_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ -g w_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ -gh \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

odpovídá působení síly dané topologií dna.

**2.2.1. Poznámka.** V dalším textu budeme používat oba tvary vektoru  $\mathbf{w}$  podle toho, který bude v dané situaci užitečnější. První tvar představuje tzv. *konzervativní proměnné*  $(w_1, w_2, w_3)^\top$ , druhý pak *fyzikální proměnné*  $(h, h v_1, h v_2)^\top$ .

## 2.3 Základní vlastnosti SWE

V této sekci uvedeme některé vlastnosti SWE, které jsou důležité k odvození námi navrženého numerického schématu.

**2.3.1. Lemma.** Jacobiho matice  $\mathbb{A}_1(\mathbf{w})$  funkce  $\mathbf{f}_1(\mathbf{w})$  definovaná jako

$$\left(\mathbb{A}_1(\mathbf{w})\right)_{i,j} = \frac{\partial f_{1,i}}{\partial w_j}$$

má tvar

$$\mathbb{A}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_1^{-2}w_2^2 + gw_1 & 2w_1^{-1}w_2 & 0 \\ -w_1^{-2}w_2w_3 & w_1^{-1}w_3 & w_1^{-1}w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v_1^2 + gh & 2v_1 & 0 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 \end{pmatrix}.$$

*Důkaz.* Přímou derivací  $\mathbf{f}_1(\mathbf{w})$  podle  $w_i$ ,  $i = 1,2,3$ . □

**2.3.2. Lemma.** Vlastní čísla a příslušné vlastní vektory matice  $\mathbb{A}_1$  jsou

$$\lambda_1(\mathbf{w}) = w_1^{-1}w_2 - c, \quad \lambda_2(\mathbf{w}) = w_1^{-1}w_2, \quad \lambda_3(\mathbf{w}) = w_1^{-1}w_2 + c,$$

$$\boldsymbol{\zeta}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ w_1^{-1}w_2 - c \\ w_1^{-1}w_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}_2(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}_3(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ w_1^{-1}w_2 + c \\ w_1^{-1}w_3 \end{pmatrix},$$

kde  $c = \sqrt{gw_1}$ .

*Důkaz.* Stačí ověřit, že  $\mathbb{A}_1(\mathbf{w})v_i(\mathbf{w}) = \lambda_i(\mathbf{w})v_i(\mathbf{w})$ ,  $i = 1,2,3$ . □

Vlastní vektory  $\boldsymbol{\zeta}_1$ ,  $\boldsymbol{\zeta}_2$  a  $\boldsymbol{\zeta}_3$  jsou lineárně nezávislé pro libovolné  $\mathbf{w}$  a tvoří tedy bázi  $\mathbb{R}^3$ . Proto

$$\mathbb{A}_1(\mathbf{w}) = \mathbf{T}(\mathbf{w})\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{w})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{w})$$

pro

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}) = \left(\boldsymbol{\zeta}_1(\mathbf{w}), \boldsymbol{\zeta}_2(\mathbf{w}), \boldsymbol{\zeta}_3(\mathbf{w})\right), \quad \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{w}) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(\mathbf{w}) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(\mathbf{w}) \end{pmatrix}.$$

**2.3.3. Značení.** Zavedme matice

$$\mathbb{A}_1^\pm(\mathbf{w}) = \mathbf{T}(\mathbf{w})\boldsymbol{\Lambda}^\pm(\mathbf{w})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{w}),$$

kde

$$\boldsymbol{\Lambda}^\pm(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm(\mathbf{w}) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm(\mathbf{w}) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^\pm(\mathbf{w}) \end{pmatrix},$$

$$\lambda_i^\pm = \max(\pm\lambda_i, 0).$$

**2.3.4. Lemma.** Pro SWE platí

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gw_1^2\delta_{s1} \\ \frac{1}{2}gw_1^2\delta_{s2} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

kde  $\mathbb{A}_s(\mathbf{w})$  je Jacobiho matice  $\mathbf{f}_s(\mathbf{w})$ .

*Důkaz.* Pro  $s = 1$  dostáváme dle lemmatu 2.3.1

$$\mathbb{A}_1(\mathbf{w})\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v_1^2 + gh & 2v_1 & 0 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ hv_1 \\ hv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hv_1 \\ hv_1^2 + gh^2 \\ hv_1v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Důkaz pro  $s = 2$  by se provedl analogicky. □

**2.3.5. Věta.** Necht  $D = \{\mathbf{w} = (h, hv_1, hv_2)^\top \in \mathbb{R}^3; h > 0\}$ ,  $\mathbf{w} \in D$  a  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ . Potom

$$\sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w})n_s = \mathbb{Q}^{-1}\mathbf{f}_1(\mathbb{Q}\mathbf{w}),$$

kde

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{Q}_0 = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{pmatrix}$$

*Důkaz.* Viz. (Felcman a Havle, 2011, pp. 5163) □

# 3. Numerické řešení SWE

V kapitole odvodíme úplnou diskretizaci SWE pomocí nespojité Galerkinovy metody, jež vede na soustavu nelineárních algebraických rovnic. Popíšeme volbu okrajových podmínek a stabilizaci umožňující částečně odstranit oscilace řešení v blízkosti nespojitostí.

## 3.1 Diskretizace pomocí STDGM

Nechť  $r \in \mathbb{N}$ ,  $I = (0, T)$  je časový interval a  $I \times \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  časoprostorový válec, na němž hledáme řešení. Zvolme dělení intervalu  $I$  dané

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = T$$

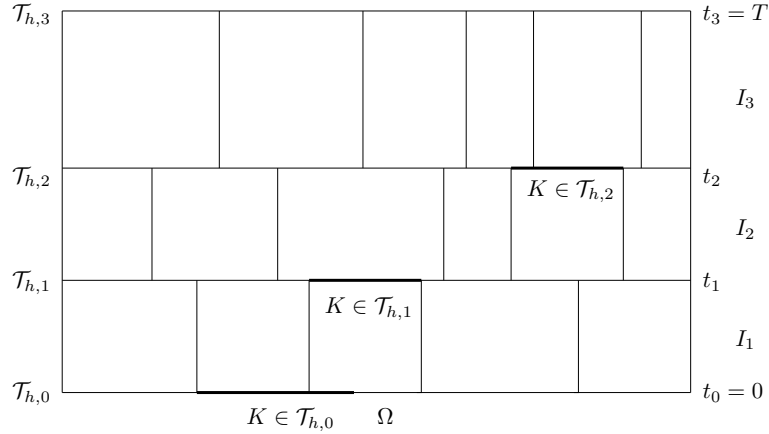
a definujme

$$I_m = (t_{m-1}, t_m), \quad m = 1, \dots, r,$$

$$\tau_m = t_m - t_{m-1}, \quad m = 1, \dots, r.$$

Pro každé  $m = 0, \dots, r - 1$  definujme dělení  $T_{h,m}$  oblasti  $\bar{\Omega}$ . Tyto triangulace mohou být různé pro různá  $m$ .

**3.1.1. Poznámka.** Obvykle se pro  $T_{h,m}$  používají triangulace. Nespojitá Galerkinova metoda však umožňuje použití jiných elementů, dokonce kombinaci různých jejich typů.



Obrázek 3.1: Časoprostorová síť

**3.1.2. Poznámka.** Nechť  $\bar{h} > 0$  je dáno. Od sítě  $T_{h,m}$ ,  $h \in (0, \bar{h})$  požadujeme tvarovou regularitu, tedy existenci konstanty  $C_R$  takové, že

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C_R \quad \forall m = 1, \dots, r \quad \forall h \in (0, \bar{h}) \quad \forall K \in T_{h,m},$$

kde  $h_K$  a  $\rho_K$  značí průměr elementu  $K$  a poloměr kružnice mu vepsané.

Další podrobnosti o této podmínce a *podmínce ekvivalence* lze nalézt např. v (Dolejší a Feistauer, 2015, pp. 33-35). Podmínku ekvivalence nevyžadujeme, neboť SWE neobsahují difúzní člen.

**3.1.3. Definice** (prostor funkcí po částech Sobolevovských). Necht  $k \in \mathbb{N}$ , oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a  $T_{h,m}$  jsou dělení  $\Omega$  definovaná dříve. *Prostorem funkcí po částech Sobolevovských*  $k$ -tého řádu nazveme

$$\begin{aligned} H^k(\Omega, T_{h,m}) &= \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, v|_K \in H^k(K) \quad \forall K \in T_{h,m}\}, \\ \mathbf{H}^k(\Omega, T_{h,m}) &= H^k(\Omega, T_{h,m})^3. \end{aligned}$$

**3.1.4. Značení.** Označme symbolem  $F_{h,m}$  množinu všech hran dělení  $T_{h,m}$  a  $F_{h,m}^I$  množinu všech vnitřních hran dělení  $T_{h,m}$ .

**3.1.5. Značení.** Necht  $\Gamma \in F_{h,m}$  je hrana společná elementům  $K_\Gamma^L, K_\Gamma^R \in T_{h,m}$ . K této hraně uvažujeme jednotkovou normálu  $\mathbf{n}_\Gamma$ . Elementy značíme tak, aby normálový vektor směřoval směrem od levého elementu ( $K_\Gamma^L$ ) k pravému ( $K_\Gamma^R$ ). Normálové vektory volíme libovolně pro vnitřní hrany, pro hrany  $\Gamma \in \partial\Omega$  volíme vnější normálový vektor. Označme  $v_\Gamma^L$  a  $v_\Gamma^R$  stopy  $v|_{K_\Gamma^L}$  a  $v|_{K_\Gamma^R}$  na hraně  $\Gamma$ ,

$$\begin{aligned} [v] &= [v]|_\Gamma = v_\Gamma^L - v_\Gamma^R, \Gamma \in F_{h,m}^I, \quad v \in H^k(\Omega, T_{h,m}) \\ [v] &= [v]|_\Gamma = v_\Gamma^L, \Gamma \subset \partial\Omega, \quad v \in H^k(\Omega, T_{h,m}) \end{aligned}$$

skok proměnné na hraně  $\Gamma$  a

$$\{\phi\}_m = \phi_m^+ - \phi_m^-, \quad m = 0, \dots, r-1 \quad \phi : \langle 0, T \rangle \rightarrow B$$

skok proměnné vzhledem k času, kde  $B$  značí libovolný Banachův prostor a

$$\phi_m^\pm = \lim_{t \rightarrow t_m^\pm} \phi(t), \quad m = 0, \dots, r-1 \quad \phi : \langle 0, T \rangle \rightarrow B.$$

Pro  $m = 0$  hodnotu zleva později předepíšeme počáteční podmínkou.

Necht nejprve  $\mathbf{w} \in C^1(0, T, \mathbf{H}^1(\Omega))$ ,  $m \in \{1, \dots, r\}$  a  $\tilde{t}_m \in I_m$  jsou fixní. Rovnici (2.18) skalárně vynásobíme testovací funkcí  $\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega, T_{h,m})$ , integrujeme přes  $K$  a sečteme přes všechny elementy  $K \in T_k$ . Symbolem  $(\cdot, \cdot)_{L^2(K)}$  značíme  $\mathbf{L}^2$  skalární součin přes množinu  $K$ . Pro zkrácení zápisu budeme nahrazovat  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$  pomocí  $(\cdot, \cdot)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{h,m}} \left( \frac{\partial \mathbf{w}(\tilde{t}_m)}{\partial t}, \varphi \right)_{L^2(K)} + \sum_{K \in T_{h,m}} \sum_{s=1}^2 \left( \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\tilde{t}_m))}{\partial x_s}, \varphi \right)_{L^2(K)} \\ = \sum_{K \in T_{h,m}} \left( \mathbf{s}(\tilde{t}_m), \varphi \right)_{L^2(K)}, \end{aligned}$$

spojením skalárních součinů

$$\left( \frac{\partial \mathbf{w}(\tilde{t}_m)}{\partial t}, \varphi \right) + \sum_{K \in T_{h,m}} \sum_{s=1}^2 \left( \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\tilde{t}_m))}{\partial x_s}, \varphi \right)_{L^2(K)} = \left( \mathbf{s}(\tilde{t}_m), \varphi \right),$$

a aplikováním Greenovy věty a využitím hladkosti  $\mathbf{w}$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{w}(\tilde{t}_m)}{\partial t}, \varphi \right) - \sum_{K \in T_{h,m}} \sum_{s=1}^2 \left( \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\tilde{t}_m)), \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \right)_{L^2(K)} + \\ \sum_{\Gamma \in F_{h,m}} \int_\Gamma \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\tilde{t}_m)) n_s \cdot [\varphi] dS = \left( \mathbf{s}(\tilde{t}_m), \varphi \right). \end{aligned}$$

Aproximujeme  $\sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}|_{\Gamma}) n_s|_{\Gamma} \approx \mathcal{H}(\mathbf{w}_{\Gamma}^L, \mathbf{w}_{\Gamma}^R, \mathbf{n}_{\Gamma})$ , kde  $\mathcal{H}$  je tzv. *numerický tok* podrobněji rozebraný v sekci 3.2.

Označme

$$b_{h,m}(\mathbf{w}, \varphi) = - \sum_{K \in T_{h,m}} \sum_{s=1}^2 \left( \mathbf{f}_s(\mathbf{w}), \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \right)_{L^2(K)} + \sum_{\Gamma \in F_{h,m}} \int_{\Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{w}_{\Gamma}^L, \mathbf{w}_{\Gamma}^R, \mathbf{n}) \cdot [\varphi] dS.$$

Pro úplnou časoprostorovou diskretizaci skalárně násobíme testovací funkcí  $\phi \in S^q = \{u \in L^2((0,T)), u|_{I_m} \in P^q(I_m)\}$

$$\int_{I_m} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \varphi \right) + b_{h,m}(\mathbf{w}, \varphi) \right) \phi dt = \int_{I_m} (\mathbf{s}, \varphi) \phi dt \quad \forall m = 1, \dots, r. \quad (3.1)$$

Rozepíšme člen  $\int_{I_m} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \phi dt$  pomocí dvojí integrace *per partes*.

$$\begin{aligned} \int_{I_m} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \phi dt &\stackrel{\text{P.P.}}{=} - \int_{I_m} \mathbf{w} \phi' dt + \mathbf{w}_m^- \phi_m^- - \mathbf{w}_{m-1}^+ \phi_{m-1}^+ \\ &= - \int_{I_m} \mathbf{w} \phi' dt + \mathbf{w}_m^- \phi_m^- - \mathbf{w}_{m-1}^- \phi_{m-1}^+ \\ &\stackrel{\text{P.P.}}{=} \int_{I_m} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \phi dt + \mathbf{w}_{m-1}^+ \phi_{m-1}^+ - \mathbf{w}_{m-1}^- \phi_{m-1}^+ \\ &= \int_{I_m} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \phi dt + \{\mathbf{w}\}_{m-1} \phi_{m-1}^+, \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde jsme využili spojitost  $\mathbf{w}$  vzhledem k času. Výsledný výraz budeme vyžadovat i od přibližného řešení. Využitím *Fubiniovy věty* v rovnici (3.1) a následným dosazením vztahu (3.2) dostáváme výsledný vzorec

$$\int_{I_m} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \varphi \right) + b_{h,m}(\mathbf{w}, \varphi) \right) \phi dt + (\{\mathbf{w}\}_{m-1}, \varphi) \phi_{m-1}^+ = \int_{I_m} (\mathbf{s}, \varphi) \phi dt \quad \forall m = 1, \dots, r.$$

**3.1.6. Poznámka.** V dalším textu budeme nahrazovat  $\psi = \varphi \phi$ .

## 3.2 Numerický tok

V předchozí sekci jsme zavedli aproximaci hraničních integrálů pomocí tzv. numerického toku. Nyní uvedeme požadavky na něj a odvození toku námi použitého.

**3.2.1. Značení** (numerický tok). Funkci  $\mathcal{H}, \mathcal{H} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazveme *numerickým tokem*, pokud  $\forall \Gamma \in F_{h,m} \mathcal{H}(\mathbf{w}_{\Gamma}^L, \mathbf{w}_{\Gamma}^R, \mathbf{n}_{\Gamma}) \approx \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}|_{\Gamma})(\mathbf{n}_{\Gamma})_s$ .

**3.2.2. Poznámka.** Od numerického toku vyžadujeme *lipschitzovskou spojitost, konzistenci* danou

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{u}) n_s \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \mathbf{n} \in B_1,$$

kde  $B_1$  značí *jednotkovou kouli* v  $\mathbb{R}^2$  definovanou jako

$$B_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{v}\| = 1,\}$$

a *konzervativitu*, tedy

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = -\mathcal{H}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{n}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \mathbf{n} \in B_1.$$

Numerický tok se v hojné míře využívá a studuje v *metodě konečných objemů* (FVM), např. viz. (Toro, 2009). Pro STDGM není jeho volba tak zásadní jako pro FVM, neboť skoky mezi veličinami nejsou tak výrazné díky aproximaci vyššími polynomiálními stupni. Volba níže uvedeného toku je vhodná pro linearizaci zmíněnou v sekci 3.6.

### 3.2.1 Odvození numerického toku

Nechť  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{A}_1^\pm$  jsou matice definované výše. Soustavu (2.18) transformujeme pomocí matice  $\mathbb{Q}$  definované dříve, aby transformovaná souřadnice  $\tilde{x}_1$  splývala s normálovým vektorem ke hraně  $\Gamma$ , a zanedbáme toky ve směrech  $\tilde{x}_2$  a  $\tilde{x}_3$ . Tím se dostaneme k rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{w}})}{\partial \tilde{x}_1} &= 0 \quad \text{v } (-\infty, \infty) \times (0, \infty), \\ \tilde{\mathbf{w}}(\tilde{x}_1, 0) &= \mathbb{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}_L \quad \text{pro } \tilde{x}_1 < 0, \\ \tilde{\mathbf{w}}(\tilde{x}_1, 0) &= \mathbb{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}_R \quad \text{pro } \tilde{x}_1 > 0. \end{aligned}$$

Vyřešením této rovnice dostáváme aproximaci  $\tilde{\mathbf{w}} \approx \mathbb{Q}\mathbf{w}$ . Řešení úlohy je pro  $\tilde{x}_1 = 0$  konstantní v čase pro všechna  $\tau > 0$ . Nechť tedy  $\tau > 0$  je libovolné pevné. Použitím věty 2.3.5a zmíněné aproximace získáme

$$\sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\cdot, t))n_s|_\Gamma \approx \mathbb{Q}^{-1}\mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{w}}(\cdot, \tau)) \quad \forall t \in I. \quad (3.3)$$

Zavedeme *přibližný Riemannův řešič*  $\mathbf{g}_G(\cdot, \cdot)$  aproximující *přesný Riemannův řešič*, tedy člen  $\mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{w}}(\tau))$ , *Godunovova typu*, konkrétně

$$\mathbf{g}_G(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_1(\mathbf{w}_L) + \mathbf{f}_1(\mathbf{w}_R)) - \int_\eta |\mathbb{A}_1(\mathbf{w})| d\mathbf{w}, \quad (3.4)$$

pro  $|\mathbb{A}_1(\mathbf{w})| = \mathbb{A}_1^+(\mathbf{w}) - \mathbb{A}_1^-(\mathbf{w})$  a  $\eta$  vhodnou integrační cestu mezi  $\mathbf{w}_L$  a  $\mathbf{w}_R$ . Dále použijeme lemma 2.3.4 a aproximujeme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{f}_1(\mathbf{w}_L) + \mathbf{f}_1(\mathbf{w}_R)) &\approx \mathbf{f}_1\left(\frac{\mathbf{w}_L + \mathbf{w}_R}{2}\right) = \\ &= \mathbb{A}_1\left(\frac{\mathbf{w}_L + \mathbf{w}_R}{2}\right)\left(\frac{\mathbf{w}_L + \mathbf{w}_R}{2}\right) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2}g\left(\frac{\mathbf{w}_{1,L} + \mathbf{w}_{1,R}}{2}\right)^2 \\ 0 \end{array}\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$



Integrál  $\int_{\eta} |\mathbb{A}_1(\mathbf{w})| d\mathbf{w}$  aproximujeme numerickou kvadraturou

$$\int_{\eta} |\mathbb{A}_1(\mathbf{w})| d\mathbf{w} \approx \left| \mathbb{A}_1 \left( \frac{\mathbf{w}_L + \mathbf{w}_R}{2} \right) \right| (\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L). \quad (3.6)$$

dosazením odhadů (3.5) a (3.6) do vzorce (3.4) a užitím aproximace (3.3) se dostáváme k numerickému toku  $\mathcal{H}$  daného předpisem

$$\mathcal{H}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R, \mathbf{n}) = \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{g}(\mathbb{Q}\mathbf{w}_L, \mathbb{Q}\mathbf{w}_R),$$

kde

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \mathbb{A}_1^+ \left( \frac{\mathbf{w}_L + \mathbf{w}_R}{2} \right) \mathbf{w}_L + \mathbb{A}_1^- \left( \frac{\mathbf{w}_L + \mathbf{w}_R}{2} \right) \mathbf{w}_R - \frac{g}{2} \left( \frac{h_L + h_R}{2} \right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pro matice  $\mathbb{A}_1^+$  a  $\mathbb{A}_1^-$  zavedené v 2.3.3 a

$$\mathbf{w}_L = \begin{pmatrix} h_L \\ h_L v_{1L} \\ h_L v_{2L} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_R = \begin{pmatrix} h_R \\ h_R v_{1R} \\ h_R v_{2R} \end{pmatrix}.$$

Na hranici  $\partial\Omega$  numerický tok dále modifikujeme podle typu hranice, viz. sekce 3.3.

### 3.3 Okrajové podmínky a linearizovaný Riemannův problém

Nechť  $\Omega = \partial\Omega_{IO} \cup \partial\Omega_W$ . V praxi uvažujeme dva typy okrajových podmínek. Na hranici  $\partial\Omega_{IO}$  předepisujeme *propustnou okrajovou podmínku*, zatímco na  $\partial\Omega_W$  nepropustnou. Propustná okrajová podmínka simuluje pokračování výpočetní oblasti, tekutina jí tedy volně přitéká, případně odtéká. Při použití nepropustné okrajové podmínky naopak tekutina protékat nemůže.

#### 3.3.1 Propustná okrajová podmínka

Vzhledem k tomu, že jsou SWE *hyperbolický* problém, nemůžeme v numerickém toku jednoduše předepsat pevný počet okrajových podmínek. Pro lineární hyperbolické systémy lze ukázat, že můžeme předepsat pouze některé veličiny na hranici, např.  $h$  na vstupu a  $\mathbf{v}$  na výstupu. Počet předepsaných okrajových podmínek je dán počtem tzv. *výstupních charakteristik*, tedy počtem kladných vlastních čísel Jacobiho matice toku  $\sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) \mathbf{n}_s$ . Pro nelineární hyperbolické systémy ovšem takové poznatky nemáme, používají se tedy různé heuristiky. Jedna možnost je použít stejný postup jako pro lineární systémy. My využíváme Riemannův řešič linearizovaného problému kombinující umělé předepsané okrajové podmínky a proudění v okolí hranice.

Definujeme celý vektor  $\mathbf{w}_{IO}$ . V numerickém toku  $\mathcal{H}$  poté nahradíme člen  $\mathbf{w}_R$  modifikovaným členem  $\mathbf{q}$ , řešícím *linearizovaný Riemannův problém*, tedy najít

$\mathbf{q}(0, \tau)$ ,  $\tau > 0$ , kde  $\mathbf{q}$  řeší rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \bar{\mathbb{A}}_1(\mathbb{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}_L) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{x}_1} &= 0 \text{ v } (-\infty, \infty) \times (0, \infty), \\ \mathbf{q}(\bar{x}_1, 0) &= \mathbb{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}_L \text{ pro } \bar{x}_1 < 0, \\ \mathbf{q}(\bar{x}_1, 0) &= \mathbb{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}_{IO} \text{ pro } \bar{x}_1 > 0, \end{aligned}$$

pro

$$\bar{\mathbb{A}}_1(\mathbf{w}) = \mathbb{A}_1(\mathbf{w}) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}gh & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tento problém již lze řešit analyticky. Místo matice  $\mathbb{A}_1$  používáme  $\bar{\mathbb{A}}_1$ , pro niž  $\mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = \bar{\mathbb{A}}_1(\mathbf{w})\mathbf{w}$ . Použití matice  $\bar{\mathbb{A}}_1$  je částečně motivováno vlastností *homogeneity Eulerových rovnic*. Experimenty ukázaly, že matice  $\bar{\mathbb{A}}_1$  vede k lepším výsledkům než matice  $\mathbb{A}_1$ . Jelikož pro matici  $\bar{\mathbb{A}}_1$  není obtížné nalézt vlastní čísla a vlastní vektory, používáme k řešení rovnice *metodu charakteristik*.

Použití linearizovaného Riemannova problému odstraňuje anomálie ve spočteném řešení, zejména při odrazech vln od hranice  $\partial\Omega_W$ .

**3.3.1. Poznámka.** Další používanou možností, jak se vypořádat s propustnou okrajovou podmínkou, je zavést tzv. *perfectly matched layer* zavedenou v (Benger, 1994). Kolem výpočetní oblasti se vytvoří další vrstvy elementů, do nichž může kapalina proudit bez potřeby modifikací úlohy. Případně lze použít nějaký více či méně heuristický přístup, jako například *Higdonovu okrajovou podmínku* s odhadem  $c = \sqrt{gh}$  jako v (Thuerey a Hess, 2012). Ani jedním z těchto přístupů jsme se nezabývali.

### 3.3.2 Nepropustná okrajová podmínka

*Nepropustnou okrajovou podmínkou* rozumíme  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Tuto podmínku lze realizovat dvěma způsoby.

1. Rozepíšeme-li  $\sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w})n_s$ , dostáváme:

$$\sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w})n_s = \begin{pmatrix} h(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \\ hv_1(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2}gh^2n_1 \\ hv_2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2}gh^2n_2 \end{pmatrix}.$$

Dosazením  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  dojdeme k numerickému toku

$$\mathcal{H}(\mathbf{w}_\Gamma^L, \mathbf{w}_\Gamma^R, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2n_1 \\ \frac{1}{2}gh^2n_2 \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{w}_L = \begin{pmatrix} h \\ hv_1 \\ hv_2 \end{pmatrix}.$$

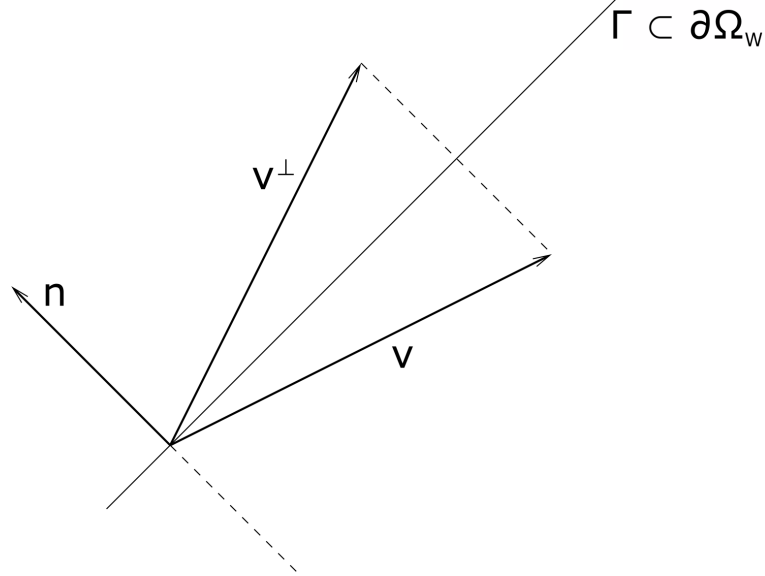
2. Při odrazu vlny od stěny zůstane zachována její výška, rychlosti se zrcadlí podél stěny. Alternativně tedy můžeme použít *zrcadlící operátor*  $\mathcal{M}$  viz.

např. (Dolejší a Feistauer, 2015, pp. 415). Necht  $\mathbf{w} = (h, hv_1, hv_2)$ . Definujme  $\mathcal{M}$  pomocí

$$\mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n},$$

$$\mathcal{M}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = (h, hv^\perp)^\top.$$

V numerickém toku  $\mathcal{H}$  nahradíme  $\mathbf{w}_R$  členem  $\mathcal{M}(\mathbf{w}_L, \mathbf{n})$ .



Obrázek 3.2: Zrcadlíci operátor

**3.3.2. Značení.** Člen  $b_{h,m}(\mathbf{w}, \varphi)$  nahradíme členem  $\bar{b}_{h,m}(\mathbf{w}, \varphi)$  vycházejícího z poznatků této podkapitoly:

$$\begin{aligned} \bar{b}_{h,m}(\mathbf{w}, \varphi) = & - \sum_{K \in T_{h,m}} \sum_{s=1}^2 \left( \mathbf{f}_s(\mathbf{w}), \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \right)_{L^2(K)} + \sum_{\Gamma \in F_{h,m}^I} \int_{\Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{w}_\Gamma^L, \mathbf{w}_\Gamma^R, \mathbf{n}) \cdot [\varphi] dS + \\ & + \sum_{\Gamma \in F_{h,m}^{IO}} \int_{\Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{w}_\Gamma^L, \mathbf{q}, \mathbf{n}) \cdot \varphi dS + \sum_{\Gamma \in F_{h,m}^W} \int_{\Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{w}_\Gamma^L, \mathcal{M}(\mathbf{w}_L, \mathbf{n}), \mathbf{n}) \cdot \varphi dS, \end{aligned}$$

kde  $F_{h,m}^{IO}$   $F_{h,m}^W$  jsou množiny hran  $T_{h,m}$  na časové hladině  $m$  na nichž předepisujeme propustnou, respektive nepropustnou, okrajovou podmínku.

## 3.4 Stabilizace

Aproximace vyššími polynomiálními stupni však způsobuje oscilace (*Gibbsův jev*). K jejich odstranění tedy zavádíme umělou vazkost v místech, kde není řešení dostatečně regulární. Abychom tato místa lokalizovali, zavedme nejprve pro element  $K$  indikátor skoku  $g_K$  a jeho upravenou verzi  $G_K$  jako

$$g_K(\mathbf{w}) = \frac{\int_{\partial K \cap \Omega} [w_1]^2 dS}{|K| \sum_{\Gamma \subset \partial K \cap \Omega} |\Gamma|},$$

$$G_K(\mathbf{w}) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \left( \pi \left( g_K(\mathbf{w}) - \frac{1}{2} \right) \right) & \text{pro } g_K(\mathbf{w}) \in [0,1], \\ \sqrt{g_K(\mathbf{w})} & \text{pro } g_K(\mathbf{w}) > 1, \end{cases}$$

kde  $|K|$  značí objem (obsah) elementu  $K$  a  $|\Gamma|$  průměr (délku) hrany  $\Gamma$ .

**3.4.1. Poznámka.** Pro hladké  $\mathbf{w} \in C^\infty(\Omega)$  je  $g_K$  řádu  $O(h^{2p})$ , zatímco pro  $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)$  je člen  $g_K$  řádu  $O(h^{-2})$ . Tím pro zmenšující se  $h$  dostáváme velké hodnoty v místech s malou regularitou a zanedbatelné pro oblasti dost hladké. Člen  $G_K$  mírně upravuje průběh této závislosti aniž by změnil její kvalitativní vlastnosti.

Nyní můžeme zavést dva pomocné členy, kterými modifikujeme řešenou soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \beta_h(\mathbf{w}, \varphi) &= \nu_1 \sum_{K \in T_{h,m}} G_K(\mathbf{w}) h_K^{\alpha_1} \int_K \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \varphi dx, \\ \gamma_h(\mathbf{w}, \varphi) &= \nu_2 \sum_{\Gamma \in F_{h,m}^I} \frac{1}{2} (G_{K_\Gamma^L}(\mathbf{w}) + G_{K_\Gamma^R}(\mathbf{w})) h_\Gamma^{\alpha_2} \int_\Gamma [\mathbf{w}] \cdot [\varphi] dS, \end{aligned}$$

pro stabilizační konstanty  $\nu_1, \nu_2, \alpha_1$  a  $\alpha_2$ . Na základě zkušeností volíme  $\alpha_1 = 2$  a  $\alpha_2 = 0.5$ , nebudeme je tedy uvádět ve výčtu zvolených parametrů.

Stabilizačními členy modifikujeme člen  $\bar{b}_{h,m}(\mathbf{w}, \varphi)$  následovně:

$$\tilde{b}_{h,m}(\mathbf{w}, \varphi) = \bar{b}_{h,m}(\mathbf{w}, \varphi) + \beta_h(\mathbf{w}, \varphi) + \gamma_h(\mathbf{w}, \varphi).$$

**3.4.2. Poznámka.** Nastavením  $\nu_1 = \nu_2 = 0$  vypneme stabilizaci, v dalším textu budeme tedy BÚNO odkazovat jen na  $\tilde{b}_{h,m}$  místo  $\bar{b}_{h,m}$ .

## 3.5 Formulace problému

Nyní již máme připraveno vše, co potřebujeme, abychom mohli definovat řešení časoprostorové diskretizace SWE.

**3.5.1. Definice.** Zavedme prostory funkcí

$$\mathbf{S}_{hp}^{\tau q} = \left\{ \mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3, \left( \mathbf{u}|_{I_m}(t, x) \right)_i = \sum_{j=1}^q t^j \varphi_{m,i,j}(x), \varphi_{m,i,j}|_K \in P^{\tilde{p}(K \times I_m)}(K) \right. \\ \left. \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, r\} \quad \forall K \in T_{h,m} \right\},$$

$$\mathbf{S}_{hp,m} = \left\{ \mathbf{u} : \Omega \times I_m \rightarrow \mathbb{R}^3, \left( \mathbf{u}|_{I_m}(t, x) \right)_i = \sum_{j=1}^q t^j \varphi_{m,i,j}(x), \varphi_{m,i,j}|_K \in P^{\tilde{p}(K \times I_m)}(K) \right. \\ \left. \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \forall K \in T_{h,m} \right\}, \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, r\},$$

$$\mathbf{S}_{hp,0} = \left\{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \left( \mathbf{u}|_K \right)_i \in P^{\tilde{p}(K \times I_1)}(K) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \forall K \in T_{h,m} \right\},$$

pro  $\tilde{p} : \Omega \times I \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$  zobrazení udávající stupeň polynomu vzhledem k prostoru pro daný časoprostorový hranol a konstantu  $q$  udávající stupeň polynomu vzhledem k času.

**3.5.2. Definice.** Funkci  $\mathbf{w}_h \in \mathbf{S}_{hp}^{\tau q}$  nazveme řešením časoprostorové diskretizace rovnic mělké vody, pokud

$$\int_{I_m} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial t}, \boldsymbol{\psi} \right) + \tilde{b}_{h,m}(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\psi}) \right) dt + (\{\mathbf{w}_h\}_{m-1}, \boldsymbol{\psi}_{m-1}^+) = \int_{I_m} (\mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) dt, \quad (3.7)$$

$$\forall m = 1, \dots, r, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{S}_{hp}^{\tau q},$$

$$((\mathbf{w}_h)_0^-, \boldsymbol{\varphi}) = (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{S}_{hp,0}.$$

**3.5.3. Poznámka.** Systém (3.7) tvoří soustavu nelineárních algebraických rovnic. Důkaz existence jejího řešení zůstává otevřeným problémem. Numerické řešení této soustavy popíšeme v kapitole 4.

## 3.6 Newtonova metoda

Přepíšeme systém (3.7) modifikovaný limitujícím faktorem viz. sekce 4.1 do tvaru

$$\int_{I_m} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial t}, \boldsymbol{\psi} \right) + \tilde{b}_{h,m}(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\psi}) \right) dt + (\{\mathbf{w}_h\}_{m-1}, \boldsymbol{\psi}_{m-1}^+) - \int_{I_m} (\mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) dt = 0$$

$$\forall m = 1, \dots, r, \quad (3.8)$$

a rozepíšeme  $\mathbf{w}_h$  jako lineární kombinaci bázových funkcí prostoru  $\mathbf{S}_{hp}^{\tau q}$  s neznámými koeficienty  $\boldsymbol{\xi}^m$  pro  $m = 1, 2, \dots, r$ , tedy

$$\mathbf{w}_h|_{I_m} = \sum_{i=1}^{N_m} \xi_i^m \boldsymbol{\eta}_i^m, \quad (3.9)$$

kde  $\boldsymbol{\eta}_i^m$  jsou bázové funkce prostoru  $\mathbf{S}_{hp,m}$  a  $N_m$  dimenze tohoto prostoru, tedy

$$N_m = 3 \sum_{K \in T_{h,m}} (q+1) \frac{(p_K+1)(p_K+2)}{2}$$

pro  $p_K = \tilde{p}(K \times I_m)$ .

Dostáváme se k problému ekvivalentnímu problému (3.7), konkrétně nalézt  $\boldsymbol{\xi}^m, m = 1, \dots, r$  tak, aby

$$\mathbf{F}_{h,m}(\boldsymbol{\xi}^m) = 0, \quad \forall m = 1, 2, \dots, r, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{S}_{hp}^{\tau q}$$

$$((\mathbf{w}_h)_0^-, \boldsymbol{\varphi}) = (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{S}_{hp,0}.$$

kde  $\mathbf{F}_{h,m}(\boldsymbol{\xi}^m)$  se rovná levé straně rovnice (3.8) a  $\mathbf{w}_h$  je dáno vzorcem (3.9).

K vyřešení této soustavy nelineárních rovnic používáme *tlumenou Newtonovu metodu* spojenou s metodou *GMRES* předpodmíněnou *blokovým neúplným LU rozkladem* (ILU(0)) k vyřešení vzniklé lineární soustavy rovnic.

Počítáme aproximace  $\boldsymbol{\xi}^{m,k}, k = 0, 1, 2, \dots$  dané předpisem

$$\boldsymbol{\xi}^{m,0} = \boldsymbol{\xi}^{m-1} \quad m = 1, 2, \dots, r$$

$$\boldsymbol{\xi}^{m,k+1} = \boldsymbol{\xi}^{m,k} + \lambda \mathbf{z}^k$$

$$J_{\mathbf{F}_{h,m}}(\boldsymbol{\xi}^{m,k}) \mathbf{z}^k = -\mathbf{F}_{h,m}(\boldsymbol{\xi}^{m,k}),$$

kde  $J_{\mathbf{F}_{h,m}}$  představuje Jacobiho matici  $\mathbf{F}_{h,m}$  a  $\lambda \in (0,1)$  *tlumící faktor* zaručuje globální konvergenci metody. Vektor  $\boldsymbol{\xi}^0$  získáme  $\mathbf{L}^2$  projekcí počáteční podmínky na prostor  $\mathbf{S}_{hp,0}$ . Volba  $\lambda$  se provádí pomocí *monitorovací funkce* tak, aby došlo k poklesu rezidua  $\|\mathbf{F}_{h,m}(\boldsymbol{\xi}^{m,k})\|$ . Detaily lze nalézt v (Deuffhard, 2011) a (Dolejší a kol., 2015).

Díky vhodné volbě numerického toku  $\mathcal{H}$  můžeme přepsat

$$\tilde{b}_{h,m}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \tilde{b}_{h,m}^L(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - \mathbf{d}_{h,m}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad (3.10)$$

kde  $\tilde{b}_{h,m}^L$  a  $\mathbf{d}_{h,m}$  jsou operátory nelineárně závislé na svém prvním argumentu a lineárně závislé na ostatních argumentech. Operátor  $\tilde{b}_{h,m}^L$  reprezentuje linearizaci  $\tilde{b}_{h,m}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$ . Explicitní vyjádření těchto členů lze nalézt například v (Dolejší, 2013).

Zadefinujme matici

$$C_{h,m}(\boldsymbol{\xi}) = \left( \int_{I_m} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_j}{\partial t}, \boldsymbol{\eta}_i \right) + \tilde{b}_{h,m}^L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\eta}_i) dt + \left( (\boldsymbol{\eta}_j)_{m-1}^+, (\boldsymbol{\eta}_i)_{m-1}^+ \right) \right)_{i,j=1}^{N_m} \quad (3.11)$$

a vektor

$$\mathbf{q}_{h,m}(\boldsymbol{\xi}) = \left( \left( \mathbf{w}_{m-1}^-, (\boldsymbol{\eta}_i)_{m-1}^+ \right) + \mathbf{d}_{h,m}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}_i) \right)_i^{N_m}, \quad (3.12)$$

pro  $\boldsymbol{\xi}$  koeficienty  $\mathbf{w}$  vyjádřeného jako lineární kombinace bázevých funkcí.

Použitím vztahů (3.10), (3.11), (3.12) a definice  $\mathbf{F}$  dostáváme

$$\mathbf{F}_{h,m}(\boldsymbol{\xi}^k) = C_{h,m}(\boldsymbol{\xi}_m) \boldsymbol{\xi}_m - \mathbf{q}_{h,m}(\boldsymbol{\xi}_m), \quad m = 1, \dots, r. \quad (3.13)$$

Matice  $C_{h,m}$  i  $J_{\mathbf{F}_{h,m}}$  mají shodnou řádkost. Spolu s rovností (3.13) nás tento fakt motivuje k aproximaci  $J_{\mathbf{F}_{h,m}}$  pomocí matice  $C_{h,m}$ .

Pro další uspořnění výpočetního času se matice  $C_{h,m}$  přepočítává jen každých 20 iterací Newtonovy metody, nebo když metoda konverguje příliš pomalu. Iterace GMRES zastavíme, jakmile je aktuální reziduum menší než 1% vstupního rezidua. Navíc je nutné ošetřit speciální případy, jako např. když vstupní reziduum je nulové, případně blízko strojové přesnosti. Zastavovací kritérium Newtonovy metody je popsáno v sekci 4.3.

## 4. Algoritmus řešení

V této kapitole popíšeme algoritmus řešení SWE včetně metody a podmínek adaptace časového kroku a časoprostorové sítě. Zmíníme také implementační detaily potřebné ke správné funkčnosti numerického modelu.

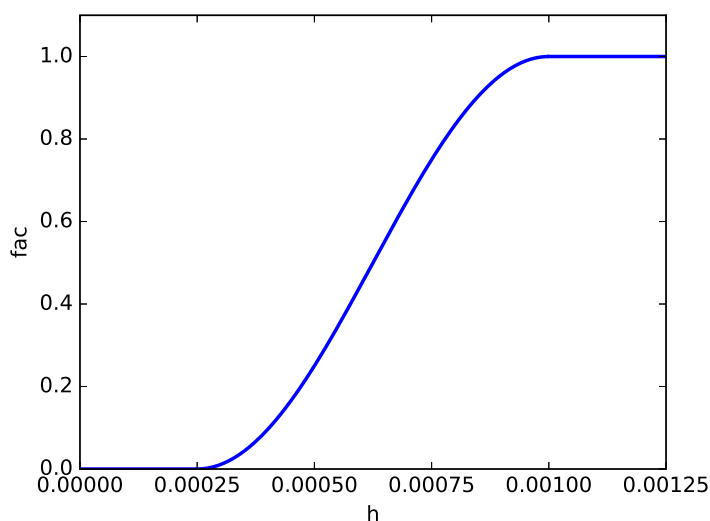
### 4.1 Limitující faktor

V algoritmu často potřebujeme přistupovat přímo k rychlostem  $v_1$  a  $v_2$ . Počítány jsou ale veličiny  $\mathbf{w}$ , k získání rychlostí tedy musíme dělit první složkou vektoru  $\mathbf{w}$ , neboť  $v_i = w_{i+1}/w_1$ . Tím ovšem přicházejí komplikace v podobě dělení nulou či číslem nule blízkým, což vede v konečné aritmetice k nestabilitám.

Abychom se tomuto problému vyhnuli, zavádíme *limitující faktor*  $fac$  předpisem

$$fac(h) = \begin{cases} 0, & \text{pro } h \leq min, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi(h-min)}{max-min}\right), & \text{pro } h \in (min, max), \\ 1, & \text{pro } h \geq max, \end{cases}$$

kde volíme  $max = 0.001$  a  $min = \frac{1}{4}max$ . Funkce  $fac$  hladce přechází z 0 do 1 v intervalu  $(min, max)$  jako v grafu (4.1).



Obrázek 4.1: Limitující faktor

Faktorem  $fac$  násobíme členy  $\mathbf{f}_s$ ,  $\mathbb{A}_s$ ,  $\mathbb{A}_s^\pm$ , pokud sám není nulový. Pokud ano, zmíněné členy ani nepočítáme a rovnou je považujeme za nulové. Tímto postupem se vyhneme numerickým nestabilitám.

Algoritmus je znázorněn v (1).

```
Data: soughtVariable, h
1 factor = fac(h);
2 if fac == 0 then
3   | return 0;
4 else
5   | variable = compute(soughtVariable);
6   | return variable · factor
7 end
```

**Algoritmus 1:** Limitující faktor

Abychom se vyhnuli numerickým problémům popsáným v sekci 5.2, zkoušeli jsme stejnou metodou modifikovat i linearizovaný Riemannův řešič užívaný pro propustnou okrajovou podmínku, viz. sekce 3.3.1, kde by teoreticky mohlo také nastat dělení nulou. Modifikace však nepřinesla žádnou kvalitativní změnu vypočteného řešení.

## 4.2 Odhady chyb

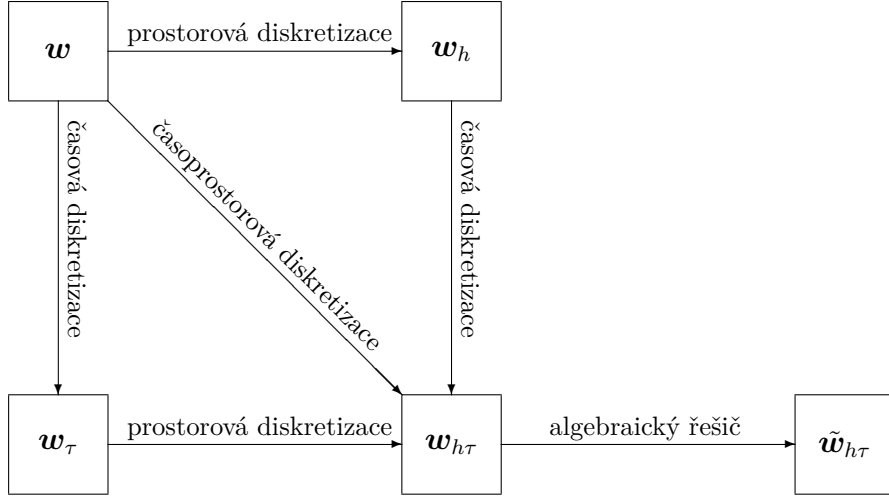
Abychom mohli dobře adaptovat síť a časový krok, případně ukončit ve vhodný okamžik Newtonovu metodu při hledání řešení aktuálního časového kroku, je potřeba analyzovat chybu vzniklou daným numerickým procesem. Pro ideální funkčnost řešiče potřebujeme vybalancovat jak chyby vzniklé časovou a prostorovou diskretizací, tak algebraické chyby vzniklé Newtonovou a *GMRES* metodou.

Algebraickou chybu lze eliminovat více kroky Newtonovy, případně GMRES metody, prostorovou zjemněním triangulace či vyšším stupněm polynomiální aproximace vzhledem k prostoru a podobně časovou chybu pomocí kratšího kroku či vyššího stupně polynomiální aproximace vzhledem k času.

K přesné chybě diskretizací případně algebraické chybě bychom se dostali jen za předpokladu, že bychom měli k dispozici přesná řešení úlohy diskretizované pouze vzhledem k času, pouze vzhledem k prostoru a přesné řešení časoprostorové diskretizace. V praxi ale máme pouze řešení  $\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}$  ovlivněné všemi chybami a k jejich separaci musíme využít vhodnou aproximaci.

Označíme-li  $\mathbf{w}$  přesné řešení úlohy (2.18),  $\mathbf{w}_h$  přesné řešení prostorové diskretizace úlohy (2.18),  $\mathbf{w}_\tau$  přesné řešení časové diskretizace úlohy (2.18),  $\mathbf{w}_{h\tau}$  přesné řešení úlohy (3.7) a  $\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}$  spočtené řešení úlohy (3.7), můžeme jejich vzájemný vztah vyjádřit diagramem 4.2.





Obrázek 4.2: Typy řešení a vztahy mezi nimi

Označíme-li  $\widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}$  operátor definovaný jako

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \sum_{m=1}^r \int_{I_m} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \boldsymbol{\psi} \right) + \tilde{b}_{h,m}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) \right) dt + (\{\mathbf{w}\}_{m-1}, \boldsymbol{\psi}_{m-1}^+) - \int_{I_m} (\mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) dt,$$

přesné řešení časoprostorové diskretizace  $\mathbf{w}_{h\tau}$  splňuje

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}(\mathbf{w}_{h\tau}, \boldsymbol{\psi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \mathbf{S}_{hp}^{\tau q}.$$

Tento fakt nás motivuje k definování *algebraické chyby*  $\eta_A$  pro námi spočtené přibližné řešení  $\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}$  pomocí *duální normy* dané operátorem  $\widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}$ , tedy

$$\eta_A(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}) = \sup_{\boldsymbol{\psi}_h \in \mathbf{S}_{hp}^{\tau q}, \boldsymbol{\psi}_h \neq 0} \frac{\widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}, \boldsymbol{\psi}_h) - \widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}(\mathbf{w}_{h\tau}, \boldsymbol{\psi}_h)}{\|\boldsymbol{\psi}_h\|_X} = \sup_{\boldsymbol{\psi}_h \in \mathbf{S}_{hp}^{\tau q}, \boldsymbol{\psi}_h \neq 0} \frac{\widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}, \boldsymbol{\psi}_h)}{\|\boldsymbol{\psi}_h\|_X},$$

kde norma  $\|\cdot\|_X$  je na základě experimentů zvolena jako norma *Bochnerova prostoru*  $H^1(I, \mathbf{L}^2(\Omega))$ , tedy

$$\|\mathbf{w}\|_X = \left( \int_0^T \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Časovou (prostorovou) chybou rozumíme  $\mathbf{w}_h - \tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}$  (resp.  $\mathbf{w}_\tau - \tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}$ ), neboť nemáme k dispozici dostatečné informace pro odhady  $\mathbf{w} - \mathbf{w}_\tau$  (resp.  $\mathbf{w} - \mathbf{w}_h$ ). Pro odhad těchto chyb potřebujeme hledat supremum přes větší prostor funkcí vzhledem k času (ideálně  $H^1$ ), respektive prostoru (ideálně  $\mathbf{H}^2$ ). Abychom zároveň dosáhli nízké výpočetní náročnosti odhadu chyb, zavedme pomocné po částech polynomiální prostory.

**4.2.1. Definice.** Definujme prostory

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{hp+1}^{\tau q} &= \left\{ \mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3, (\mathbf{u}|_{I_m}(t, x))_i = \sum_{j=1}^q t^j \varphi_{m,i,j}(x), \right. \\ &\quad \left. \varphi_{m,i,j}|_K \in P^{\widetilde{p+1}(K \times I_m)}(K) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, r\} \quad \forall K \in T_{h,m} \right\}, \\ \mathbf{S}_{hp}^{\tau q+1} &= \left\{ \mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3, (\mathbf{u}|_{I_m}(t, x))_i = \sum_{j=1}^{q+1} t^j \varphi_{m,i,j}(x), \right. \\ &\quad \left. \varphi_{m,i,j}|_K \in P^{\widetilde{p}(K \times I_m)}(K) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, r\} \quad \forall K \in T_{h,m} \right\}, \\ \mathbf{S}_{hp+1}^{\tau q+1} &= \left\{ \mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3, (\mathbf{u}|_{I_m}(t, x))_i = \sum_{j=1}^{q+1} t^j \varphi_{m,i,j}(x), \right. \\ &\quad \left. \varphi_{m,i,j}|_K \in P^{\widetilde{p+1}(K \times I_m)}(K) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, r\} \quad \forall K \in T_{h,m} \right\} \end{aligned}$$

pro  $\widetilde{p}$  a  $\widetilde{q}$  zobrazení z definice 3.5.1 a

$$\begin{aligned} \widetilde{p+1}(K \times I_m) &= \widetilde{p}(K \times I_m) + 1, \\ \widetilde{q+1}(K \times I_m) &= \widetilde{q}(K \times I_m) + 1. \end{aligned}$$

**4.2.2. Definice.** *Odhad chyby časové diskretizace  $\eta_T$ , odhad chyby prostorové diskretizace  $\eta_S$  a odhad chyby časoprostorové diskretizace  $\eta_{ST}$  definujeme vzorci*

$$\begin{aligned} \eta_T(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}) &= \sup_{\psi_h \in \mathbf{S}_{hp}^{\tau q+1}, \psi_h \neq 0} \frac{\widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}, \psi_h)}{\|\psi_h\|_X}, \\ \eta_S(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}) &= \sup_{\psi_h \in \mathbf{S}_{hp+1}^{\tau q}, \psi_h \neq 0} \frac{\widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}, \psi_h)}{\|\psi_h\|_X}, \\ \eta_{ST}(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}) &= \sup_{\psi_h \in \mathbf{S}_{hp+1}^{\tau q+1}, \psi_h \neq 0} \frac{\widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}, \psi_h)}{\|\psi_h\|_X}. \end{aligned}$$

Z definice platí

$$\begin{aligned} \eta_A &\leq \eta_T \leq \eta_{ST} \\ \eta_A &\leq \eta_S \leq \eta_{ST}. \end{aligned}$$

V praxi se nám bude ale více hodit lokální odhad vzhledem k časovému intervalu, případně časoprostorovému válci. Definujeme tedy

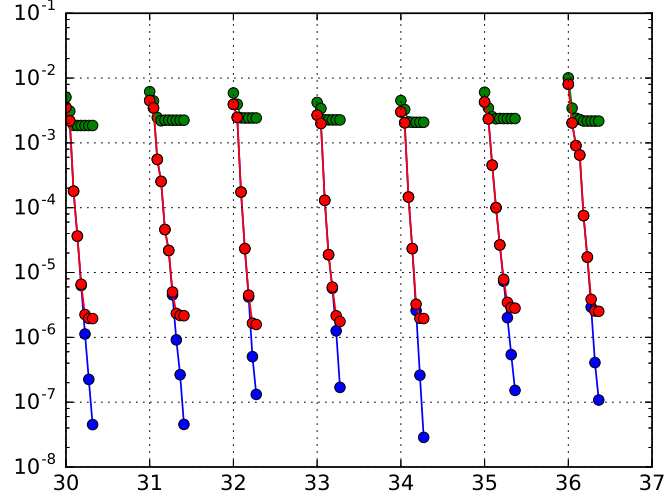
$$\eta_\star^m(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}) = \sup_{\substack{\psi_h \in X_\star, \psi_h \neq 0 \\ \text{supp}(\psi) \subset \Omega \times I_m}} \frac{\widetilde{\mathbf{A}}_{h\tau}(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}, \psi_h)}{\|\psi_h\|_X}, \quad m = 1, \dots, r$$

pro  $\star \in \{S, T, ST\}$  a  $X_\star$  prostor příslušný  $\star$  podle předchozí definice.

Z definice platí

$$\eta_*(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau})^2 = \sum_{m=1}^r (\eta_*^m(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}))^2.$$

Vlastnosti těchto odhadů a způsob hledání uvedených suprem lze nalézt v (Dolejší a kol., 2015).



Obrázek 4.3: Odhady diskretizačních a algebraických chyb při simulaci úlohy 5.2.2 v časových krocích 30 až 36. Zeleně  $\eta_S^m$ , červeně  $\eta_T^m$  a modře  $\eta_A^m$

## 4.3 Adaptivita

Pro daný problém definujeme konstanty  $C_A$ ,  $C_T$  a  $C_{ST}$ . Obvykle volíme  $C_A \in [10^{-3}, 10^{-2}]$ . Označme  $\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}^m = \tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}|_{I_m}$ .

Idea adaptivního algoritmu je následující. Newtonovy iterace zastavíme, pokud odhad algebraické chyby výrazně poklesne pod prostorovou chybu, konkrétně

$$\eta_A^m(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}^m) \leq C_A \eta_S^m(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}^m).$$

### 4.3.1 Adaptivita časového kroku

V algoritmu počítáme časové kroky  $\tau_m$ ,  $m = 2, \dots, r$ . Časový krok  $\tau_1$  zadá uživatel. Pokud tento krok není zvolen vhodně, adaptivní metoda ho upraví. Dělení  $\{t_m\}_{m=0}^r$  je dáno předpisem

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_m &= t_{m-1} + \tau_m, \quad m = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Od časového kroku  $\tau_m$  požadujeme, aby chyba časové diskretizace výrazně neovlivňovala prostorovou chybu. Podmínkou pro zachování časového kroku volíme

$$\eta_T^m(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}^m) \leq C_T \eta_S^m(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}^m).$$

Pokud není podmínka splněna, definujeme nový časový krok podle vzorce

$$\tau_m^{opt} = 0.9\tau_m \left( \frac{C_T \eta_S^m(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}^m)}{\eta_T^m(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}^m)} \right)^{\frac{1}{q+1}}$$

a opakujeme krok algoritmu s  $\tau_m^{opt}$ . Tato metoda je běžně používaná a podrobnosti k ní lze nalézt např. v (Hairer a kol., 1993) a (Dolejší a Kůs, 2008).

### 4.3.2 Adaptivita sítě a stupně polynomiálních aproximací

Finálním cílem je, aby  $\eta_{ST} < C_{ST}$ . Jednou z možností, jak této podmínky dosáhnou je tzv. *princip rovnoměrného rozložení chyby*. V něm definujeme pomocné veličiny  $C_{ST}^m = C_{ST} \sqrt{\tau_m/T}$ ,  $m = 1, \dots, r$ . Definujeme podmínku

$$\eta_{ST}^m(\tilde{\mathbf{w}}_{h\tau}^m) \leq C_{ST}^m \tag{4.1}$$

při jejímž porušení adaptujeme síť a stupně polynomiální aproximace vzhledem k prostoru pro  $m$ -tou časovou hladinu. Používáme *anisotropickou adaptaci sítě* (AMA), jež minimalizuje počet stupňů volnosti za podmínky zachování podmínky (4.1). Algoritmus je kombinací algoritmů popsanych v (Dolejší a kol., to appear) a (Dolejší, 2015).

**4.3.1. Poznámka.** V praxi definujeme místo konstanty  $C_{ST}$  interval  $(C_{ST,1}, C_{ST,2})$ . Síť adaptujeme nejen pro příliš velkou chybu, ale také pro příliš malou. Tím se vyhneme použití příliš jemné sítě v místě, kde to již není potřeba.

## 4.4 Algoritmus

Nechť jsou dány parametry  $C_A$ ,  $C_T$ ,  $C_{ST}$ , stabilizační parametry  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ , počáteční krok  $\tau_1$ , počáteční síť  $T_{h,0}$  a čas simulace  $T$ .

Výsledný algoritmus je dán následujícím schématem.

<p><b>Data:</b> <math>C_A, C_T, C_{ST}, T_{h,0}, \tau_1, T, \nu_1, \nu_2</math></p> <p>1 <math>m = 1;</math></p> <p>2 do <math>L^2</math> projection of <math>\mathbf{w}_0</math> on <math>S_{hp,0};</math></p> <p>3 <math>t_1 = t_0 + \tau_1;</math></p> <p>4 <b>while</b> <math>t_m &lt; T</math> <b>do</b></p> <p>5     <b>while</b> <math>\eta_A^m &gt; C_A \eta_S^m</math> <b>do</b></p> <p>6         do another step of Newton method</p> <p>7     <b>end</b></p> <p>8     <b>if</b> <math>\eta_T^m &gt; C_T \eta_S^m</math> <b>then</b></p> <p>9         adapt <math>\tau_m;</math></p> <p>10        go to line 3</p> <p>11     <b>end</b></p> <p>12     <b>if</b> <math>\eta_{ST}^m &gt; C_{ST}^m</math> <b>then</b></p> <p>13         adapt <math>T_{h,m};</math></p> <p>14         go to line 3</p> <p>15     <b>end</b></p> <p>16     <math>T_{h,m+1} = T_{h,m} ;</math></p> <p>17     <math>\tau_{m+1} = \tau_m^{opt} ;</math></p> <p>18     <math>t_{m+1} = t_m + \tau_{m+1} ;</math></p> <p>19     <math>m = m + 1</math></p> <p>20 <b>end</b></p> <p>21 return solution</p>
--

**Algoritmus 2:** Algoritmus řešení SWE

**4.4.1. Poznámka.** Samozřejmě můžeme časovou i/nebo prostorovou adaptivitu vypnout. V tom případě by se algoritmus lehce upravil, např. by se přeskočil krok počítání optimálního časového kroku.

# 5. Numerické experimenty

V následující kapitole prezentujeme několik numerických výsledků. Zmíníme jak parametry použité pro simulaci, tak numerické potíže, které se v průběhu výpočtů objevovaly.

Na konci každého příkladu přiložíme tabulku parametrů použitých pro finální simulaci a několik grafů ilustrujících tuto simulaci.

**5.0.1. Poznámka.** Při vytváření grafu řešení spočteného vyššími polynomiálními stupni nevykresluje řešení pouze ve vrcholech triangulace původní sítě, ale také vyhodnocené řešení ve vrcholech fiktivní zjemněné sítě. Tím dostaneme vizuálně hladší graf.

## 5.1 1D úlohy

Pro verifikaci kvality řešiče porovnáme řešení příkladů z (Gallouet a kol., 2003). Ve všech 1D úlohách počítáme na oblasti  $\Omega = (0,25) \times (0,0.1)$  s topologií dna  $z$  danou předpisem

$$z(x_1, x_2) = \max\left(0, \frac{1}{5} - \frac{1}{20}(x_1 - 10)^2\right).$$

Jako počáteční podmínku volíme vždy klidnou hladinu s výškou  $h_0$  podle konkrétního příkladu, tedy

$$\mathbf{w}_0(x_1, x_2) = \left(\max(0, h_0 - z(x_1, x_2)), 0, 0\right)^\top.$$

**5.1.1. Poznámka.** Abychom nemuseli upravovat řešič, řešíme 1D úlohy jako 2D s nulovými toky ve směru  $x_2$ . Stěny odpovídající 1D úloze označíme jako *vstupní* a *výstupní*. Na zbylých dvou stěnách definujeme nepropustnou okrajovou podmínku. Okrajové podmínky na vstupní a výstupní stěně dále upřesníme podle řešeného příkladu.

Hladinu vody vykresluje modře a dno zeleně.

**5.1.2. Definice.** Proudění v čase  $t \in [0, T]$  nazveme *podkritické*, pokud

$$|v_1(\mathbf{x}, t)| < \sqrt{gh(\mathbf{x}, t)}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

*nadkritické*, pokud

$$|v_1(\mathbf{x}, t)| > \sqrt{gh(\mathbf{x}, t)}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

a *transkritické*, pokud existují  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ , že

$$\begin{aligned} |v_1(\mathbf{x}_1, t)| &> \sqrt{gh(\mathbf{x}_1, t)}, \\ |v_1(\mathbf{x}_2, t)| &< \sqrt{gh(\mathbf{x}_2, t)}. \end{aligned}$$

**5.1.3. Poznámka.** Matice  $\sum_{s=1}^2 n_s \mathbb{A}_s$  podkritického proudění má jak kladná, tak záporná vlastní čísla, zatímco u nadkritického proudění jsou všechna vlastní čísla kladná nebo všechna záporná v závislosti na orientaci vektoru  $\mathbf{n}$ .

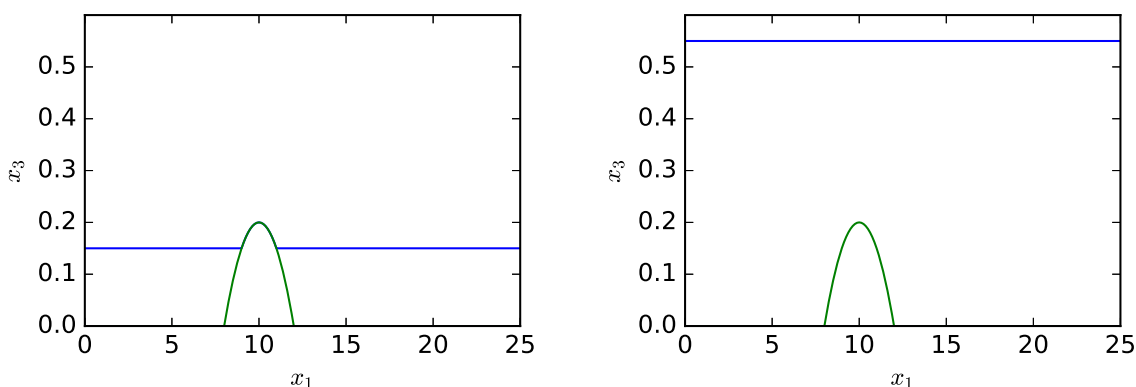
### 5.1.1 Klidná hladina

Nejprve ověříme, že řešič zachová klidnou hladinu s různými výškami  $h_0$ . Volme tedy okrajovou podmínku rovnou počáteční pro všechny časy na obou stranách 1D problému.

Zkusíme postupně  $h_0 \in \{0, 0.15, 0.55\}$ , abychom ověřili, že hladina opravdu zůstane klidná nezávisle na poloze dna vůči vodě. Ve všech případech se požadavek potvrdil.

Tabulka 5.1: Parametry použité pro simulaci úlohy 5.1.1

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
$T$	100.0	$C_A$	$10^{-3}$
$\nu_1, \nu_2$	100,100	$C_T$   pevný krok	0   $10^{-1}$
$p, q$	2,1	$C_{ST}$   pevný počet elementů	0   100



Obrázek 5.1: Simulace úlohy 5.1.1 - Proudění s  $h_0 = 0.15$  a  $h_0 = 0.55$  obojí v čase 3

### 5.1.2 Transkritické proudění přes hrb

V článku (Gallouet a kol., 2003) se definují pouze vstupní rychlost a výstupní výška hladiny. Pro naše potřeby je nutné zadat celé vektory  $\mathbf{w}$ , viz. sekce 3.3. Definujeme tedy

$$\mathbf{w}_{IO} = (1, 1.53, 0)^\top \text{ na vstupní stěně,}$$

$$\mathbf{w}_{IO} = (0.66, 2.295, 0)^\top \text{ na výstupní stěně,}$$

kde jsou zbylé veličiny dopočítané tak, aby se rovnalo množství kapaliny vstupující do oblasti a z ní vystupující.

Počáteční výšku hladiny  $h_0$  volíme rovnu 0.66.

V simulaci se objevily nefyzikální oscilace částečně odstranitelné adaptací sítě a časového kroku. Adaptace sítě ale není optimalizovaná pro úlohu proudění s nerovným dnem a kvůli nepřesnosti aproximace dna do řešení vstupovaly impulzy vyvolávající jemné vlnění v oblasti hrbu.

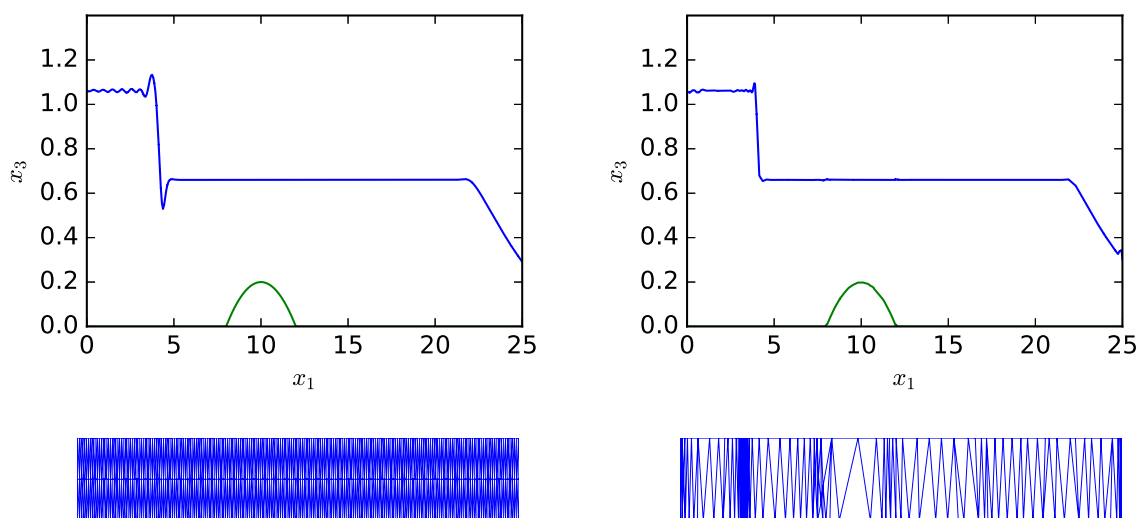
Ať ale adaptivita použita byla či nikoli, výsledný stacionární stav odpovídal tomu z článku.

Tabulka 5.2: Parametry použité pro simulaci úlohy 5.1.2 - bez adaptivity

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
$T$	100.0	$C_A$	$10^{-2}$
$\nu_1, \nu_2$	100,100	$C_T$   pevný krok	0   $10^{-1}$
$p, q$	2,1	$C_{ST}$   pevný počet elementů	0   200

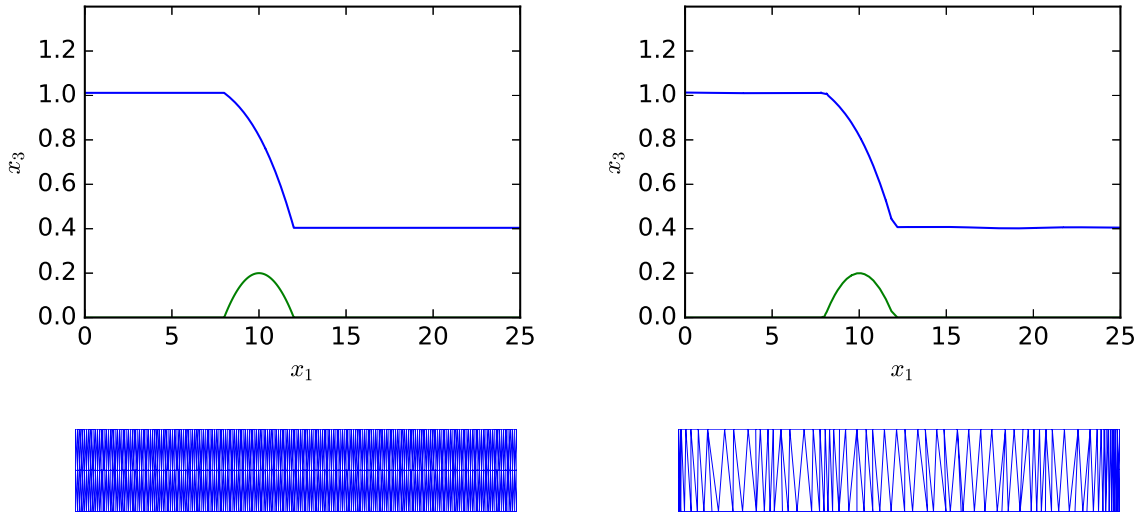
Tabulka 5.3: Parametry použité pro simulaci úlohy 5.1.2 - s adaptivitou

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
$T$	100.0	$C_A$	$10^{-3}$
$\nu_1, \nu_2$	100,100	$C_T$   pevný krok	$10^{-1}$   0
$p, q$	2,1	$C_{ST}$   pevný počet elementů	$(10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4})$   0



Obrázek 5.2: Simulace úlohy 5.1.2 - vlevo vypnutá adaptivita sítě a času; vpravo zapnutá, proudění a triangulace v čase 1.1





Obrázek 5.3: Simulace úlohy 5.1.2 - vlevo vypnutá adaptivita sítě a času; vpravo zapnutá, proudění a triangulace v čase 34

### 5.1.3 Podkritické proudění přes hrb

Volíme  $h_0 = 2$  a okrajové podmínky

$$\mathbf{w} = (2, u_0, 0)^\top \text{ na vstupní stěně,}$$

$$\mathbf{w} = (2, u_0, 0)^\top \text{ na výstupní stěně,}$$

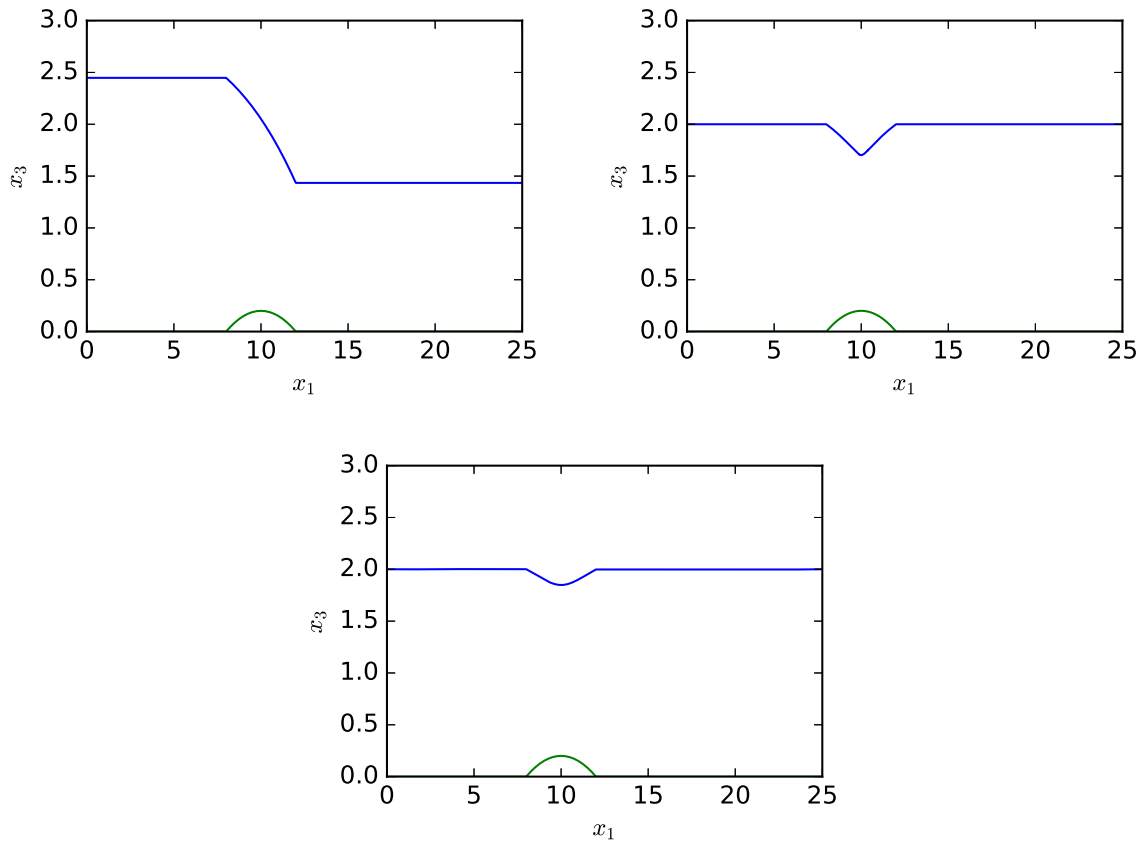
pro různé hodnoty parametru  $u_0$ .

Podkritické proudění by v tomto případě mělo být proudění s rychlostí menší než přibližně 4.43. Testovací příklad používá rychlost 4.42.

Námi spočtené řešení ovšem nevykazuje chování podkritického proudění. Další experimenty ukazují, že až hodnoty rychlosti menší než 2.75 nesou očekávané výsledky. Hodnota 2.75 vede ke stacionárnímu stavu, jenž je téměř transkritický.

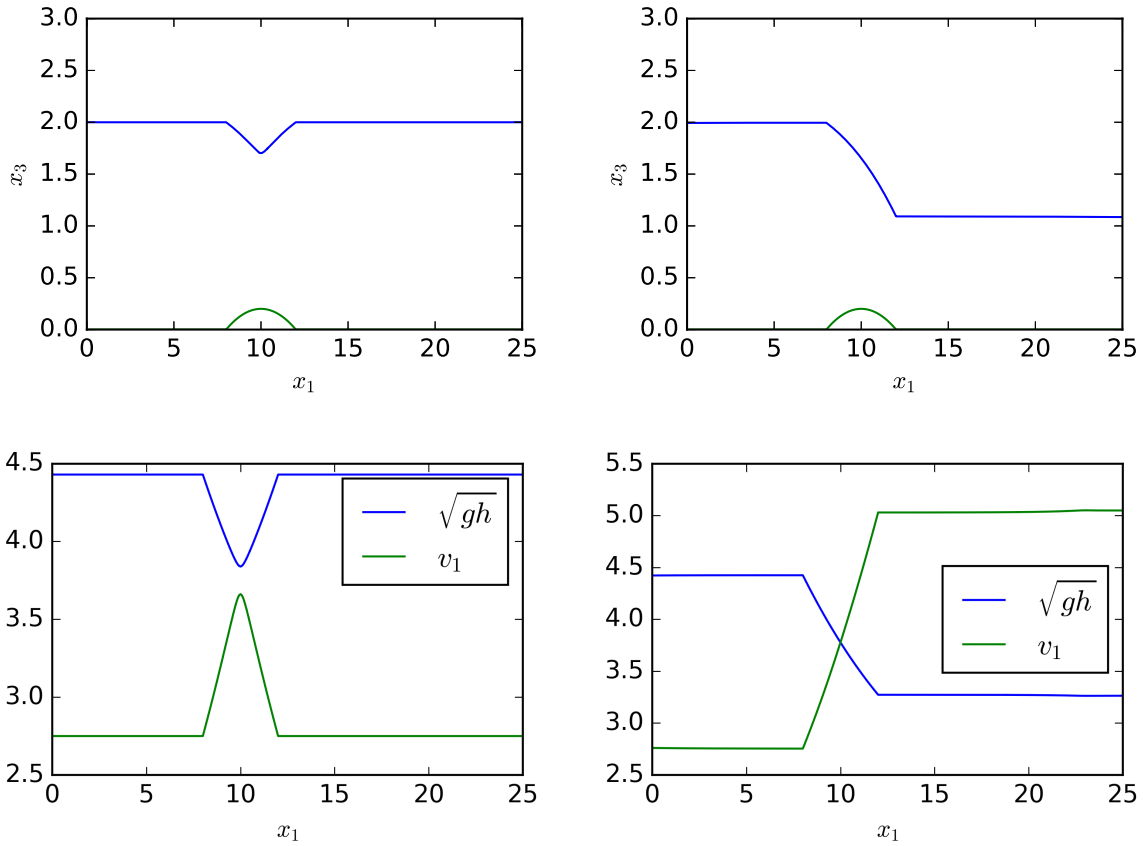
Tabulka 5.4: Parametry použité pro simulaci úlohy 5.1.3

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
$T$	100.0	$C_A$	$10^{-3}$
$\nu_1, \nu_2$	100,100	$C_T$   pevný krok	0   $5 \cdot 10^{-3}$
$p, q$	2,1	$C_{ST}$   pevný počet elementů	0   200



Obrázek 5.4: Simulace úlohy 5.1.3, postupně s ( $u_0 = 4.0$  v čase 45.0), ( $u_0 = 2.75$  v čase 100.0) a ( $u_0 = 2.5$  v čase 28.0)

Díky použití Riemannova řešiče při zpracování okrajové podmínky se změnil průběh řešení pro stejnou úlohu s různými  $h_0$  i při zachování všech ostatních parametrů. Zajímavé ovšem je, že se změnil nejen průběh, ale i kritičnost problému. Pro okrajovou podmínku  $(2, 2.75, 0)^\top$  a počáteční výšku  $h_0 = 2$  dostáváme podkritické proudění, zatímco pro počáteční výšku  $h_0 = 0.5$  transkritické.



Obrázek 5.5: Nahoře : Stacionární stav úlohy 5.1.3, postupně pro počáteční výšku 2.0 a 0.5. Dole : Porovnání rychlosti vlny a rychlosti proudění úlohy 5.1.3 v časech dosažení stacionárního stavu, postupně pro počáteční výšku 2.0 a 0.5

### 5.1.4 Výpust' přes hrb

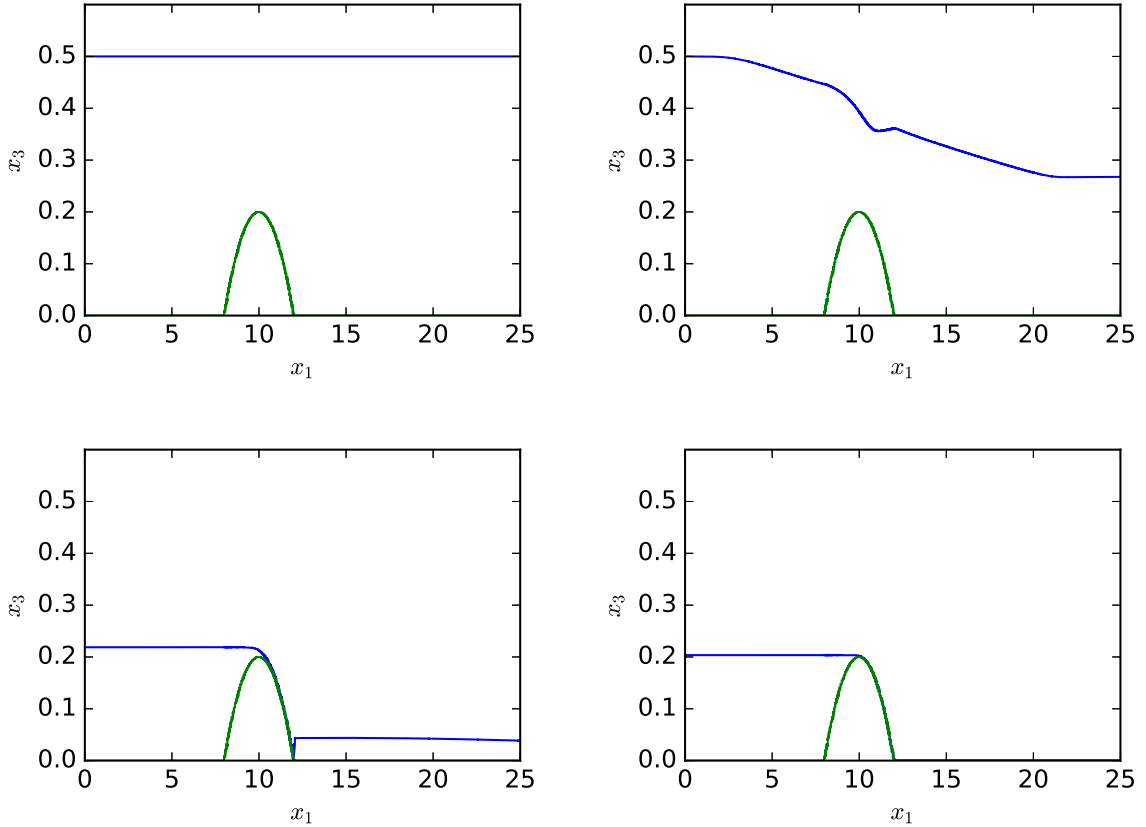
Nyní uvedeme praktičtější případ, kdy z jedné strany může tekutina vytéct a z druhé ne. Necht'  $h_0 = 0.5$ . Volíme výstupní stěnu propustnou a vstupní nepropustnou. Hrb v úloze bude působit jako hráz, jež zamezí odtoku vody na vstupní straně, zatímco na výstupní voda odtéče. Propustnou okrajovou podmínku definujeme jako

$$\mathbf{w}_{IO} = (0,0,0)^\top \text{ na výstupní stěně.}$$

V úloze docházelo k divergenci řešení pro prostorový stupeň polynomiální aproximace větší než 0 podobně jako v příkladu 5.2.3. Kvůli časové náročnosti byla podrobná studie závislosti parametrů na konvergenci příkladu provedena jen u příkladu 5.2.3.

Tabulka 5.5: Parametry použité pro simulaci úlohy 5.1.4

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
$T$	1000.0	$C_A$	$10^{-3}$
$\nu_1, \nu_2$	100,100	$C_T$   pevný krok	0   $5 \cdot 10^{-2}$
$p, q$	0,1	$C_{ST}$   pevný počet elementů	0   400



Obrázek 5.6: Simulace úlohy 5.1.4, postupně v časech 0, 10.0, 70.0 a 190.0

## 5.2 2D úlohy

Ve všech 2D úlohách řešíme na  $\Omega = (0,1) \times (0,1)$  s topologií dna  $z$  danou předpisem

$$z(x_1, x_2) = \max \left( 0, \frac{1}{25} - \left( x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 - \left( x_2 - \frac{1}{2} \right)^2 \right)$$

a počáteční podmínkou  $\mathbf{w}_0(x_1, x_2) = (z(x_1, x_2), 0, 0)^\top$ .

Tato podmínka je nefyzikální. Byla použita, protože na ní lze dobře testovat jak propustné, tak nepropustné stěny.

### 5.2.1 Funkce vykreslující řešení

Při vykreslování řešení generujeme barvu povrchu jako kombinaci barvy vody a barvy dna v závislosti na výšce hladiny. K tomu využíváme váženého průměru tak, aby pro  $h = 10^{-3}$  byly váhy shodné. Výsledná barva  $c$  je tedy dána vzorcem

$$\begin{aligned} \text{blue} &= [222, 184, 135] \\ \text{brown} &= [0, 128, 255] \\ c &= \frac{\text{brown} + 1000h \cdot \text{blue}}{1 + 1000h}. \end{aligned}$$

Kreslicí skript navíc spojuje hladinu sousedních elementů, aby získal spojitý obraz. Tento fakt je zanedbatelný u všech aproximací kromě po částech konstantní vzhledem k prostoru, neboť řešíme dostatečně regulární úlohy.

## 5.2.2 4 propustné stěny

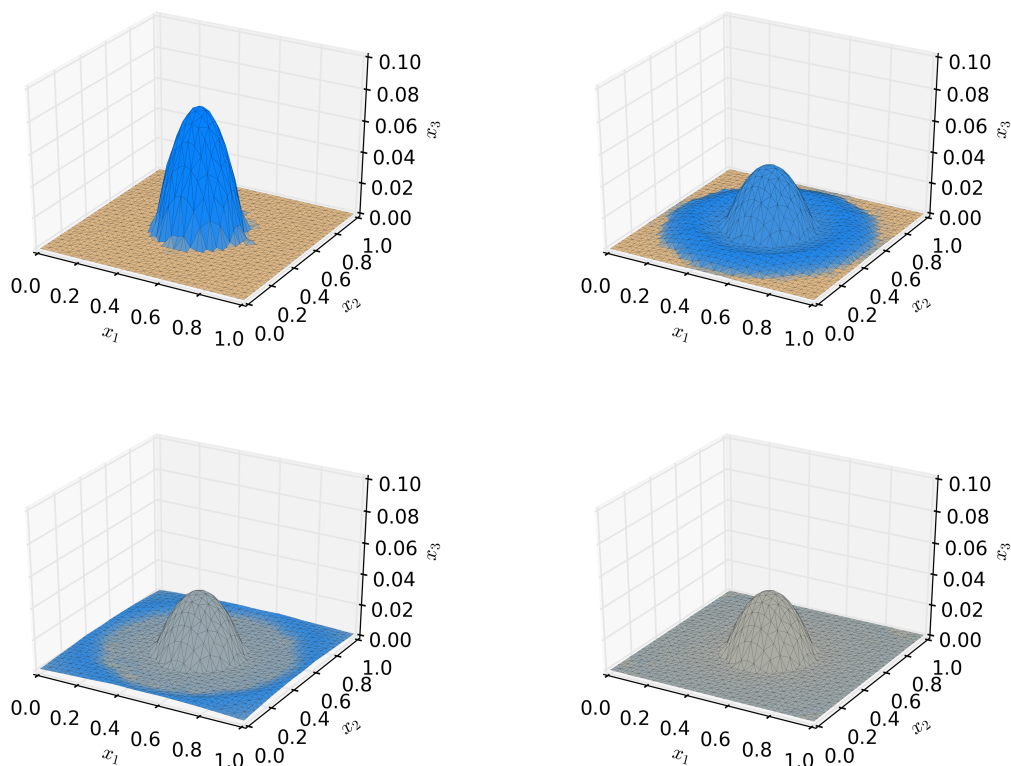
Zvolme všechny strany oblasti propustné. Kapalina má být schopna bez odporu volně protékat stěnami oblasti, volme tedy nulovou okrajovou podmínku

$$\mathbf{w}_{IO}(\mathbf{x}, t) = (0, 0, 0)^\top \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{IO} \quad \forall t \in I.$$

V této úloze jsme nenarazili na žádné numerické komplikace poté, co byl zaveden limitující faktor viz. sekce 4.1.

Tabulka 5.6: Parametry použité pro simulaci úlohy 5.2.2

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
$T$	5.0	$C_A$	$10^{-2}$
$\nu_1, \nu_2$	100, 100	$C_T$   pevný krok	0   $10^{-2}$
$p, q$	2, 1	$C_{ST}$   pevný počet elementů	0   500



Obrázek 5.7: Simulace úlohy 5.2.2, postupně v časech 0, 0.38, 0.65 a 1.12

## 5.2.3 4 nepropustné stěny

Nyní volíme všechny stěny nepropustné. V tomto případě docházelo k nekonvergenci řešení při odrazu vody od stěn oblasti. Nepomohlo ani přidání limitující-

cího faktoru a stabilizace. Volba práce s nepropustnou okrajovou podmínkou zmíněná v sekci 3.3.2 zdánlivě neměla na řešení žádný vliv. Byly provedeny pokusy jak s konstantním časovým krokem a prostorovou sítí, tak s jejich adaptivní aproximací. Některé adaptivní aproximace dosáhly dříve zmenšení časového kroku na hodnoty řádu  $10^{-7}$  než nastala divergence. Takové simulace jsme zastavili, protože nebylo pravděpodobné, že by úspěšně skončily v přijatelném výpočetním čase.

Parametry, s nimiž byly simulace testované, jsou znázorněny v následujících tabulkách.

Tabulka 5.7: Výchozí parametry pro parametrickou studii úlohy 5.2.3

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
$T$	5.0	$C_A$	$10^{-2}$
$\nu_1, \nu_2$	0,0	$C_T$   pevný krok	0   $10^{-2}$
$p, q$	2,1	$C_{ST}$   pevný počet elementů	0   250

Každý řádek tabulky 5.8 odpovídá jednomu provedenému testu. Uvedené jsou pouze parametry lišící se od výchozích. Ostatní byly převzány z tabulky 5.7.

Tabulka 5.8: Test parametrů úlohy 5.2.3

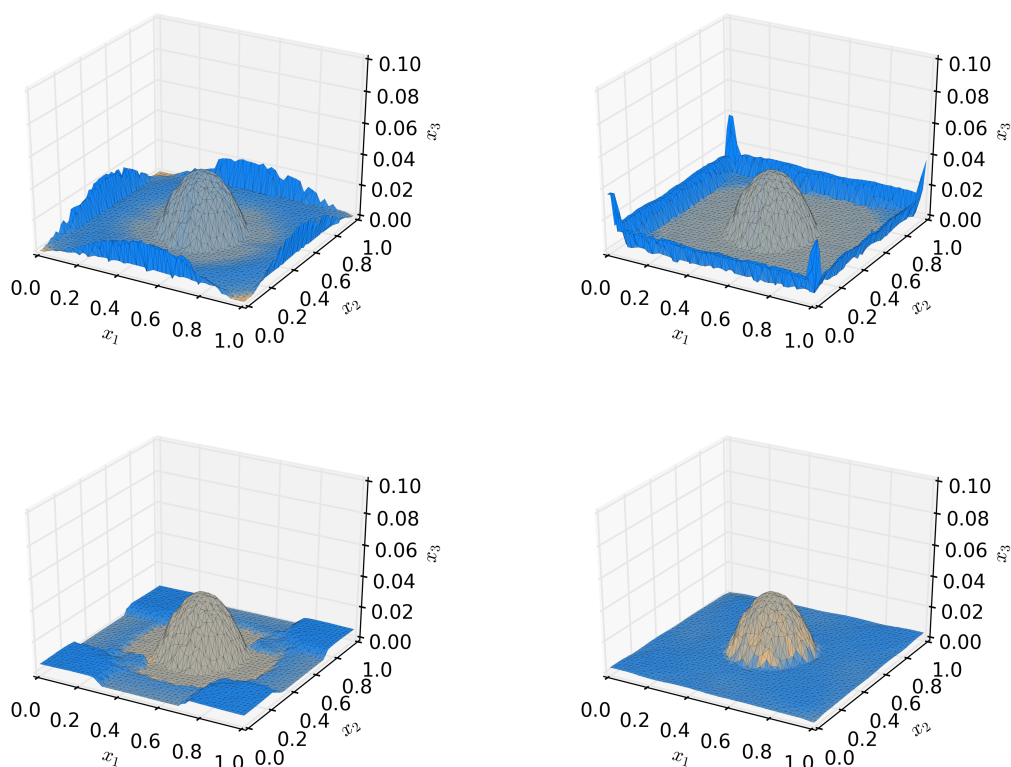
Nastavení parametrů	t divergence   t kdy $\tau < 10^{-7}$
$\nu_1 = \nu_2 = 0.1$	5.8
$\nu_1 = \nu_2 = 0.5$	5.6
$\nu_1 = \nu_2 = 1$	5.9
$\nu_1 = \nu_2 = 5$	5.7
$\nu_1 = \nu_2 = 10$	5.5
$\nu_1 = 1$	5.5
$\nu_2 = 1$	5.5
$C_T = 10^{-2}, C_{ST} = (10^{-3}, 10^{-2})$	0   3.8
sít s 500 elementy	5.2
nepravidelná síť s 500 elementy	4.7
2. typ pravidelné sítě s 1000 elementy	4.4
3. typ pravidelné sítě s 500 elementy	5.3
3. typ pravidelné sítě s 2000 elementy	4.5
$C_T = 10^{-2}$	0   6.2
pevný časový krok $5 \cdot 10^{-4}$	6.745
BDF aproximace času řádu 1	6.6
$q = 2$	6.2
$p = 0, q = 0$	úspěch
$p = 0, q = 1$	úspěch
$p = 1, q = 0$ síť s 500 elementy	5.0
$p = 1, q = 0$ síť s 1000 elementy	4.5
$p = 1, q = 1$ síť s 1000 elementy	4.7
$p = 1, q = 0, C_T = 5 \cdot 10^{-3}$ síť s 1000 elem.	0   4.8
$p = 1, q = 0, C_T = 10^{-1}$ síť s 1000 elem.	4.4
$p = 1, q = 0, C_T = 10^{-2}$ síť s 1000 elem.	4.8
$p = 1, q = 0, C_T = 10^{-2}$ síť s 4000 elem.	4.4

Od testu *sít s 500 elementy* již všechny testy používaly  $\nu_1 = \nu_2 = 1$ . Jako jediné fungující kombinace se ukázaly *metoda konečných objemů* ( $p = q = 0$ ) a situace  $p = 0$ , a  $q = 1$ , tedy po částech konstantní aproximace vzhledem k prostoru a po částech lineární vzhledem k času.

Vzhledem k nestabilitě v momentě odrazů vln od stěn (v té chvíli došlo k divergencím všech neúspěšných simulací) bychom pro vyšší stupně polynomiální aproximace vzhledem k prostoru museli buď zavést robustnější stabilizaci, nebo přepínat stupně aproximace podle aktuálního stavu úlohy. Tím bychom však snížili řád konvergence.

Tabulka 5.9: Parametry použité pro simulaci úlohy 5.2.3

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
$T$	10.0	$C_A$	$10^{-2}$
$\nu_1, \nu_2$	1,1	$C_T$   pevný krok	0   $5 \cdot 10^{-4}$
$p, q$	0,1	$C_{ST}$   pevný počet elementů	0   4000

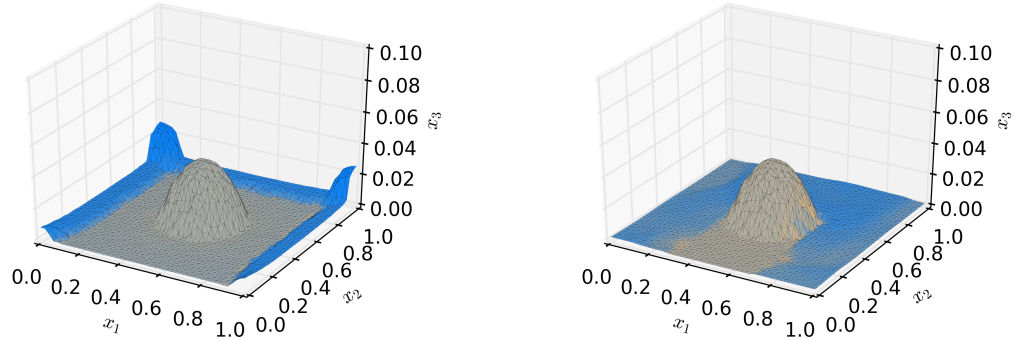


Obrázek 5.8: Simulace úlohy 5.2.3, postupně v časech 5.8, 7.6, 16.8 a 49.0

### 5.2.4 3 nepropustné stěny

U třech nepropustných stěn se opakovala situace příkladu čtyř nepropustných stěn, tedy problémy s konvergencí. Kvůli časové náročnosti nebyly provedeny všechny kombinace parametrů minulé úlohy, z provedených kombinací docházíme ke stejnému výsledku jako u minulé úlohy.

Ve vyobrazené simulaci všechny parametry zůstaly společné s parametry simulace úlohy 4 nepropustných stěn.



Obrázek 5.9: Simulace úlohy 5.2.4, postupně v časech 10.0 a 45.0

### 5.2.5 Problém sucha

Zopakujeme příklady 5.2.2 a 5.2.3, tentokrát však s počáteční podmínkou

$$\mathbf{w}_0(x_1, x_2) = (z(x_1, x_2) + 0.04, 0, 0)^\top.$$

Okrajové podmínky varianty s propustnými stěnami také posuneme o 0.04. Konkrétně volíme

$$\mathbf{w}_{IO}(\mathbf{x}, t) = (0.04, 0, 0)^\top \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{IO} \quad \forall t \in I.$$

Volbou této okrajové podmínky simulujeme situaci, kdy se za hranicí oblasti rozprostírá nekonečná klidná hladina s výškou 0.04.

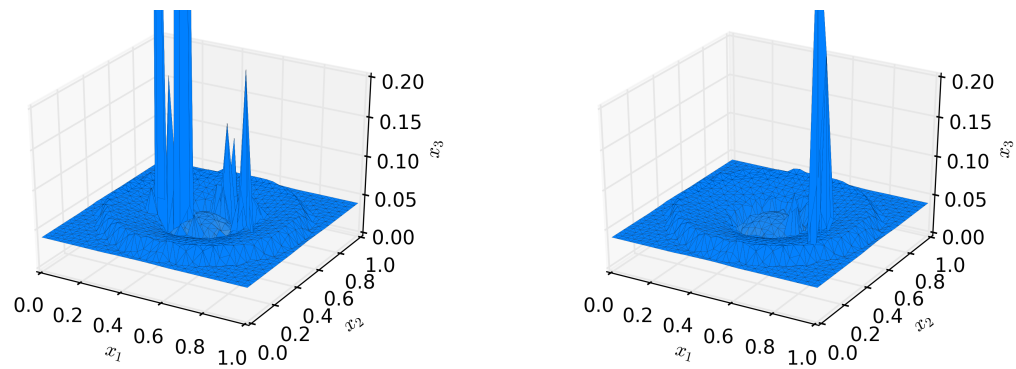
Narozdíl od dřívějších úloh v této úloze selhávají aproximace vyššími polynomiálními stupni vzhledem k prostoru jak pro propustné, tak pro nepropustné stěny. K divergenci dochází v čase 3.4, kdy je navíc hladina u stěn stále klidná. Můžeme tedy skoro jistě usoudit, že problémy s konvergencí jsou způsobeny ošetřením oblastí sucha, jenž se v čase 3.4 poprvé objevuje.

Podobně jako v ostatních úlohách metoda funguje spolehlivě pro  $p = 0$ ,  $q = 1$  a  $p = 0$ ,  $q = 0$ . Jejich ilustrace neuvádíme, neboť jsou obdobné dřívějším příkladům.

Tabulka 5.10: Neúspěšná simulace úlohy 5.2.5

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
$T$	5.0	$C_A$	$10^{-2}$
$\nu_1, \nu_2$	100,100	$C_T$   pevný krok	0   $10^{-2}$
$p, q$	1,1	$C_{ST}$   pevný počet elementů	0   2000





Obrázek 5.10: Neúspěšná simulace úlohy 5.2.5, vlevo propustná okrajová podmínka, vpravo nepropustná, obojí v čase 3.4

## 6. Závěr

V práci jsme navrhli a implementovali metodu založenou na plně implicitní časoprostorové Galerkinově metodě. Tu jsme dále rozšířili o stabilizaci, limitující faktor umožňující počítat na suchých a skoro suchých oblastech a speciální zpracování okrajových podmínek.

Na numerických experimentech jsme ukázali kvalitu navrhnutého modelu a jeho limitace. Oproti referenčnímu článku (Gallouet a kol., 2003) metoda jinak rozlišuje mezi podkritickým a nadkritickým prouděním. Dokonce o tom rozhoduje i počáteční podmínka. Také se ukázalo, že metoda v určitých situacích nezvládne modelovat úlohu polynomiální aproximací vzhledem k prostoru stupně vyššího než 0.

Jako další rozšíření práce se nabízí zlepšení robustnosti metody, aby nedocházelo k divergencím při nevhodně nastavených parametrech, či studie kritičnosti proudění a případná oprava modelu či skriptu, ukázal-li by se jako chybný.

# Seznam použité literatury

- The shallow water equations. URL [https://www.gfdl.noaa.gov/wp-content/uploads/files/user\\_files/pjp/shallow.pdf](https://www.gfdl.noaa.gov/wp-content/uploads/files/user_files/pjp/shallow.pdf).
- BERENGER, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, **114**, 185–200.
- DEUFLHARD, P. (2011). *Newton Methods for Nonlinear Problems*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-23898-7.
- DOLEJŠÍ, V. (2013). A design of residual error estimates for a high order BDF-DGFE method applied to compressible flows. *Numerical Methods in Fluids*, **73**, 523–559.
- DOLEJŠÍ, V. (2015). Anisotropic *hp*-adaptive discontinuous Galerkin method for the numerical solution of time dependent PDEs. *Applied Mathematics and Computation*, **267**, 682–697.
- DOLEJŠÍ, V. a FEISTAUER, M. (2015). *Discontinuous Galerkin Method*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, New York. ISBN 978-3-319-19266-6.
- DOLEJŠÍ, V. a KŮS, P. (2008). Adaptive backward difference formula–discontinuous Galerkin finite element method for the solution of conservation laws. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **73**, 1739–1766.
- DOLEJŠÍ, V., ROSKOVEC, F. a VLASÁK, M. (2015). Residual based error estimates for the space-time discontinuous Galerkin method applied to the compressible flows. *Computers & Fluids*, **117**, 304–324.
- DOLEJŠÍ, V., MAY, G., ROSKOVEC, F. a SOLIN, P. (to appear). Anisotropic *hp*-mesh optimization technique based on the continuous mesh and error models. *Applied Mathematics and Computation*.
- ESCOBAR-VARGAS, J. A., DIAMESSIS, P. J. a GIRALDO, F. X. (2012). High-order discontinuous element-based schemes for the inviscid shallow water equations: Spectral multidomain penalty and discontinuous Galerkin methods. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 4825–4848.
- FEISTAUER, M. (1993). *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 67. Longman Scientific & Technical. ISBN 0-582-20988-9.
- FELCMAN, J. a HAVLE, O. (2011). On a numerical flux for the shallow water equations. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 5160–5170.
- GALLOUET, T., HÉRALD, J.-M. a SEGUIN, N. (2003). Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Computers & Fluids*, **32**, 479–513.

- GIRALDO, F. X., HESTHAVEN, J. S. a WARBURTON, T. (2002). Nodal high-order discontinuous Galerkin methods for the spherical shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, **181**, 499–525.
- HAIRER, E., NØRSETT, S. P. a WANNER, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations. I: Nonstiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, Berlin. ISBN 978-3-540-56670-0.
- REMACLE, J.-F., FRAZÃO, S. S., LI, X. a SHEPHARD, M. S. (2006). An adaptive discretization of shallow-water equations based on discontinuous Galerkin methods. *Numerical Methods in Fluids*, **52**, 902–923.
- SOLLIE, W. E. H., BOHKOVE, O. a VAN DER VEGT, J. J. W. (2011). Space-time discontinuous Galerkin finite element method for two-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, **230**, 789–817.
- THUREY, N. a HESS, P. (2012). Shallow water equations.
- TORO, E. F. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin. ISBN 978-3-540-25202-3.

# Seznam obrázků

2.1	Znázornění veličin $h$ , $H$ a $z$ . . . . .	3
3.1	Časoprostorová síť . . . . .	9
3.2	Zrcadlíci operátor . . . . .	15
4.1	Limitující faktor . . . . .	19
4.2	Typy řešení a vztahy mezi nimi . . . . .	21
4.3	Odhady diskretizačních a algebraických chyb . . . . .	23
5.1	1D - klidná hladina . . . . .	27
5.2	1D - transkritické proudění - adaptivita . . . . .	28
5.3	1D - transkritické proudění - adaptivita . . . . .	29
5.4	1D - podkritické proudění . . . . .	30
5.5	1D - podkritické proudění - vliv počáteční výšky . . . . .	31
5.6	1D - výpusť přes hrb . . . . .	32
5.7	2D - 4 propustné stěny . . . . .	33
5.8	2D - 4 nepropustné stěny . . . . .	35
5.9	2D - 3 nepropustné stěny . . . . .	36
5.10	2D - Problém sucha . . . . .	37