MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Klára Alexandra Veselá

Antické definice kuželoseček

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání – Deskriptivní geometrie se zaměřením na vzdělávání

Praha 2017

Má poděkování směřují především mému vedoucímu bakalářské práce, který vždy ochotně rozptýlil veškeré mé obavy a usměrňoval tuto práci ke zdárnému konci. Rovněž mu děkuji za zapůjčení vzácných knih, ze kterých jsem mohla čerpat. Dále děkuji své přítelkyni Ing. Aleně Šeinerové za jazykové korektury, díky nimž se v textu nevyskytují žadné praboly místo parabol, a za milou podporu během tohoto hektického období, samozřejmě své rodině, že neztratila víru v mé schopnosti a nepřestala mě podporovat, také svým spolubydlícím Maxovi a Rachel za vytvoření klidného domácího prostředí a svým drahým přátelům za vlídná slova podpory.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 17. května 2017 Podpis autora

Název práce: Antické definice kuželoseček

Autor: Klára Alexandra Veselá

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Na středních školách jsou kuželosečky často definovány svými planimetrickými vlastnostmi a ojediněle jako řezy kuželové plochy. Studium antické matematiky nám může nabídnout inspirativní vhled do světa regulárních kuželoseček, který bývá opomenut v současné středoškolské matematice. Tato práce představuje výběr dochovaných prací antických matematiků o kuželosečkách. Po uvedení důležitých ukázek vybraných autorů jsou tyto ukázky a jejich metody přeformulovány do moderního jazyka a značení, aby byly srozumitelnější dnešním čtenářům.

Klíčová slova: kuželosečky, Apollónios z Pergé, Archimédés

Title: Ancient definitions of conic sections

Author: Klára Alexandra Veselá

Departement: Departement of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Departement of Mathematics Education

Abstract: In high school, conic sections are often taught by their planimetric properties and rarely as sections of a conic surface. Study of ancient mathematics can provide other inspirational insights into the world of regular conics and this is lost in modern-day mathematics teaching. This thesis presents a selection of ancient mathematicians' extant works on conic sections. After introducing key examples, opportunities to modernise the language, notation and methods used by the ancient works are explored so that comprehension and adoption by modern readers will be increased.

Keywords: conics, Apollonius of Perga, Archimedes

Obsah

1 Úvod

Naším úkolem je vydat se na starověkou stezku a pátrat po stopách kuželoseček v antice. Nalézt jejich objevitele není snadné. Většina starých rukopisů se ztratila již ve starověku a nedochovaly se ani opisy těchto prací. Eutokios i Proklos za objevitele kuželoseček shodně považují Menaichma. Na jeho práci navázali Aristaios a Eukleidés, jejich spisy se však naneštěstí nedochovaly. K mnoha poznatkům o kuželosečkách dospěl také Archimédés, který, ačkoliv vyslovil mnoho vět o kuželosečkách, pravděpodobně nikdy nevydal souborné dílo na toto téma. Až Apollóniovy *Kóniky* jsou jediným dochovaným uceleným souborem veškerých tehdejších poznatků o kuželosečkách doplněným jeho vlastními, mnohdy originálními poznatky. Apollóniův následník na sebe nechal dlouho čekat. Kuželosečkami se řádně zabýval až Pappos, který je zastřešil svou jednotnou definicí.

V této práci se budeme věnovat nejprve Menaichmovi, uvedeme dochovaný zlomek z jeho díla. Ten zpracujeme tak, aby byl snadno srozumitelný i dnešnímu studentovi střední školy. Z Archimédových děl uvedeme několik zmínek o kuželosečkách.

Nejobsáhlejší část této práce patří Apollóniovi a jeho přístupu ke kuželosečkám. Po krátkém úvodu se zaměříme na jeho definice potřebné k výstavbě teorie kuželoseček. Uvedeme, nakolik přínosný je stereometrický přístup ke kuželosečkám, a následně odvodíme jejich charakteristické vlastnosti. Těmto vlastnostem se budeme věnovat podrobněji. Ukážeme také, že názvy kuželoseček mají své opodstatnění, které můžeme nalézt v dřívějších textech. Jako další nás budou zajímat tečny kuželoseček, kde předvedeme některé zajímavé náhledy na jejich vlastnosti. Odvodíme také vztah, který udává, kdy je daná přímka je asymptotou hyperboly. Na závěr kapitoly o Apollóniovi provedeme diskusi o ohniscích kuželoseček, neboť jsme jich do té doby neužili, ačkoliv středoškolské planimetrické definice kuželoseček jsou právě na ohniscích závislé.

Poslední kapitolu věnujeme Pappovi z Alexandrie, který studoval mnohé z do té doby napsaných spisů a sám přidal k teorii kuželoseček zajímavé poznatky. Pappos narozdíl od svých předchůdců nepřistupoval ke kuželosečkám stereometricky, ale planimetricky. Všechny regulární kuželosečky zavedl jedinou definicí, která bude uvedena a rozebrána.

V průběhu celé práce budeme převádět antické texty do moderního značení a do jazyka rovnic, protože antický matematický text je soubor slovních popisů, a proto může být často vyčerpávající se v něm zorientovat. Co však z antické matematiky zůstane zachováno je to, že nebudeme rozlišovat mezi úsečkou a její délkou, to znamená, že při prezentaci antických výsledků nebudeme vyznačovat délku úsečky absolutní hodnotou.

2 Předapollóniovské definice kuželoseček

2.1 Menaichmos

Menaichmos (řecky Μέναιχμος) byl antický geometr a matematik ze 4. století před občanským letopočtem, narodil se v oblasti kolem Dardanelského průlivu. Byl žákem Eudoxa a Platóna a některé zdroje uvádí, že byl učitelem Alexandra Velikého. Eutokios z Askalónu, který zkoumal zlomky Menaichmových spisů, tvrdí, že se Menaichmos zabýval řešením problému *duplikace krychle,* známého také jako *Délský problém.* Hippokratés z Chiu tento problém převedl na ekvivalentní úlohu nalezení dvou středních úměrných a takto zjednodušený problém pak řešil Archýtás z Tarentu a Eudoxos z Knidu. Jejich přístupy ale nepřinesly přesnou konstrukci bodu, pouze demonstrovaly, že takový bod lze nalézt.

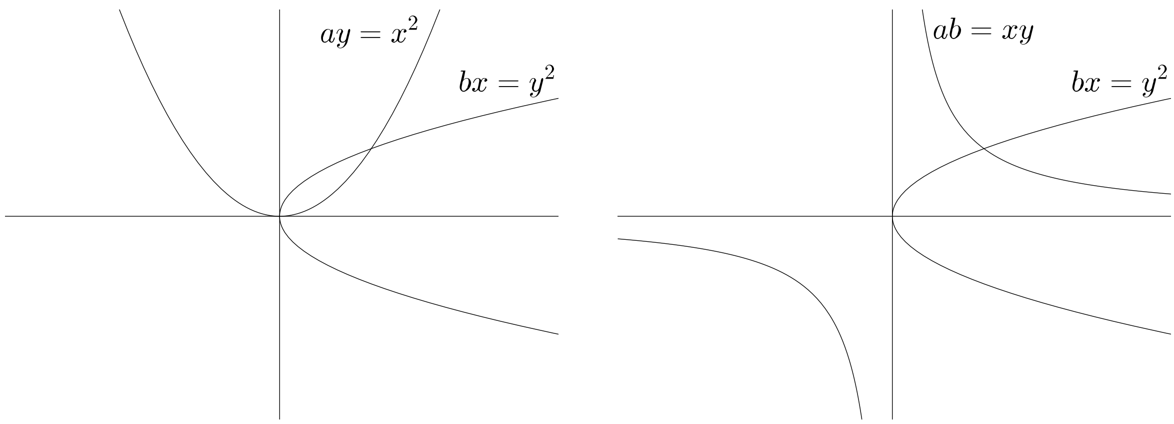
Menaichmos zaujal jiný originální pohled na problém nalezení dvou středních úměrných, a to za pomoci průsečíku hyperboly a paraboly nebo průsečíku dvou parabol. Dnes bychom řekli, že je dána úloha najít taková kladná x, y, aby pro dané kladné parametry a, b bylo splněno, že

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}\,.$$

Tuto soustavu můžeme, podobně jako Menaichmos, rozdělit na dvě dvojice rovností:

$$\begin{aligned} ay &= x^2\,, \qquad & bx &= y^2\,, \\ bx &= y^2\,, \qquad & ab &= xy\,. \end{aligned}$$

První dvojice rovností reprezentuje dvě paraboly a druhá parabolu a hyperbolu. Pro zvolené parametry se křivky [1] protínají v jednom bodě, který je řešením.



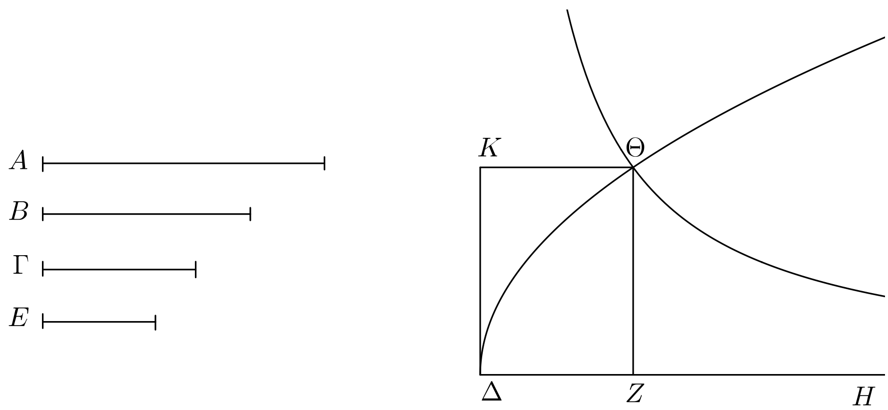
Menaichmos ale vzniklé křivky nenazývá „parabola“ a „hyperbola“. Pravděpodobně věděl, že tyto křivky vznikají řezem kužele, čemuž odpovídá skutečnost, že se ve zmíněném zlomku objevují křivky pouze této kategorie, a je také zřejmé, že věděl o existenci asymptot hyperboly.

[1] Vylučujeme průsečík parabol v jejich vrcholech.

J. L. Coolidge ve svém díle *A History of The Conic Sections and Quadric Surfaces* [1] předpokládá, že Menaichmos odvodil také vztah pro parametr,[2] který ve výše uvedených rovnicích odpovídá $\frac{a}{2}$ nebo $\frac{b}{2}$ pro získané paraboly. Nemůžeme s jistotou určit, nakolik byly Menaichmovy úvahy pokročilé, nicméně jeho přínos k teorii kuželoseček je nevyvratitelný.

Pro úplnost uvádíme i původní Menaichmovo řešení úlohy nalezení dvou středních úměrných pomocí průsečíku paraboly a hyperboly přeložené A. Šmídem v knize *Řecké matematické texty* [2], str. 93 a 95, které pochází z Eutokiova komentáře k druhé knize Archimédova spisu *O kouli a válci* vydaného a přeloženého Ch. Muglerem.

> *Nechť jsou dvě dané přímé*[3] *A a E; nyní je třeba nalézt k A a E dvě střední úměrné.*
>
> *Předpokládejme, že se tak stalo, a nechť to jsou B a Γ;*[4] *mějme přímou ΔH danou polohou, zakončenou bodem Δ a od bodu Δ budiž vymezena přímá ΔZ, která se rovná Γ, budiž ZΘ vedena kolmo tak, aby se rovnala B. Protože A, B, Γ jsou tři přímé v úměře, rovná se obdélník sevřený A a Γ čtverci nad B; obdélník sevřený danou přímou A a přímou Γ, to znamená přímou ΔZ, se tudíž rovná čtverci nad B, to znamená nad ZΘ. Bod Θ se pak nachází na parabole narýsované bodem Δ.*[5] *Nechť ΘK a ΔK jsou vedeny rovnoběžně s narýsovanými přímými. Protože obdélník sevřený B a Γ je dán, neboť se rovná obdélníku sevřenému A a E, je tedy dán i obdélník sevřený ΘK a ΔK. Bod Θ je tudíž dán, a tím i bod Z.*



> *Nyní se provede syntéza následujícím způsobem. Nechť jsou dány dvě přímé A a E a polohou dána i ΔH, zakončená v bodě Δ; bodem Δ budiž narýsována parabola taková, že její osa je ΔH, kolmá strana je A a přímé spuštěné z paraboly kolmo na ΔH se v mocnině rovnají plochám, jejichž výškou je A a jejichž šířky jsou přímé vedoucí od bodu Δ a končící na těchto kolmicích. Budiž narýsována parabola ΔΘ a AK kolmá k ΔH; budiž narýsována hyperbola o asymptotách KΔ a ΔZ taková, že přímé vedené*

[2] Rekonstrukci možného Menaichmova odvození parametru pro parabolu uvádíme v kapitole 3.5.2 .

[3] Termínem „přímá“ je myšlena přímá čára.

[4] Řecký popis konstrukce předpokládá, že úloha je vyřešena, a ukazuje, co musí v takovém případě platit.

[5] Bod Θ splňuje vztah $Z\Theta = A \cdot \Delta Z$, což je charakteristická vlastnost bodů na parabole, jak ukážeme v kapitole 3.5.2 .

od ní rovnoběžně s KΔ a ΔZ vytvoří plochu stejně velkou jako obdélník sevřený A a E; hyperbola nyní protne parabolu. Nechť ji protne v Θ a nechť jsou vedeny kolmice ΘK a ΘZ.

Protože se čtverec nad ZΘ rovná obdélníku sevřenému A a ΔZ, jako se má A k ZΘ, má se i ZΘ k ΔZ. Na druhé straně, protože se obdélník sevřený A a E rovná obdélníku sevřenému ZΘ a ΔZ, má se i ΔZ k E jako A k ZΘ. Takže se má jako A k ZΘ, má se i ZΘ k ΔZ; jako se tedy má A k ZΘ, má se i ZΘ k ΔZ i ΔZ k E. Budiž B vymezena tak, aby se rovnala ZΘ, a Γ tak, aby se rovnala ΔZ; takže se má A k B, má se i B ke Γ a Γ k E. Přímé A, B, Γ a E jsou tudíž po řadě v úměře. A to se mělo nalézt.

Můžeme si povšimnout, že se v překladu objevují slova „parabola“, „hyperbola“ a „asymptota“. Tyto termíny však nemohly být obsaženy v původním Menaichmově spisu, neboť je zavedl až o dvě století později Apollónios.

Tento text nám nabízí hned několik zajímavých pojetí kuželoseček. Jelikož Menaichmos na začátku dochovaného textu uvádí, co musí platit, aby byla předložená konstrukce řešením problému nalezení dvou středních úměrných, podíváme se až na jeho syntézu uvedenou ve třetím odstavci. Inspirací nám bude článek Z. Halase [3], z nějž čerpáme.

U Menaichma jsou dány dvě délky A a E, první odpovídá parametru a a druhá parametru b. Následně provádí konstrukci paraboly s danou osou *ΔH*, kde bod *Δ* je vrcholem této paraboly, a parametrem o délce A. Jak tuto konstrukci přesně provedl, není z textu patrné. Zřejmé však je, že věděl, že parabolu lze sestrojit, je-li dán parametr [6] a osa s vrcholem.

Dále je třeba zkonstruovat hyperbolu a zde právě nacházíme její zajímavou definici. Hyperbola je Menaichmem definována jako křivka, jejíž každý bod má součin vzdáleností od dvou různoběžných přímek, asymptot, roven dané kladné konstantě. V modernizované pobobě můžeme psát:

$$ab = xy\,.$$

Tuto rovnost znají již žáci základních škol, avšak v poněkud zjednodušené a upravené podobě

$$y = \frac{k}{x}$$

jako vztah nepřímé úměrnosti. Provedeme-li substituci $x = x' - y'$ a $y = x' + y'$ [7] dostaneme vztah

$$\frac{x'^2}{ab} - \frac{y'^2}{ab} = 1\,,$$

ve kterém studenti středních škol rozpoznají středový tvar rovnoosé hyperboly.

Nyní ukážeme, že Menaichmova definice hyperboly je ekvivalentní s její současnou reprezentací středovou rovnicí:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{2.1}$$

[6] Viz vztah pro bod Θ.

[7] Tato substituce představuje otočení okolo počátku kartézské soustavy souřadnic v záporném směru otáčení o úhel $\frac{\pi}{4}$.

Obecné rovnice asymptot u_1, u_2 můžeme vyjádřit následovně:

$$u_1 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0\,, \qquad u_2 : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0\,.$$

Vzdálenost libovolného bodu $A = [x, y]$ hyperboly od asymptot u_1 a u_2 můžeme vyjádřit takto:

$$d_1(A) = \frac{\mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \mid}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}\,, \qquad d_2(A) = \frac{\mid \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \mid}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}\,.$$

Dle definice má být součin těchto vzdáleností konstantní:

$$d_1(A) \cdot d_2(A) = \frac{\mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \mid}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{\mid \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \mid}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}\,.$$

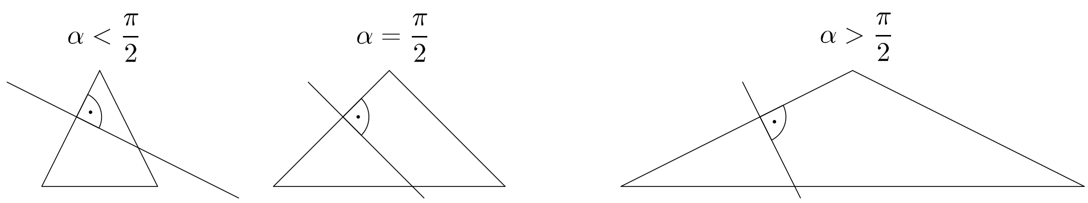
Po dosazení pravé strany rovnice (2.1) do předchozího vztahu dostaneme:

$$d_1(A) \cdot d_2(A) = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\,.$$

Vidíme, že výraz na pravé straně není závislý na proměnných x, y, a proto je konstantní. Menaichmova definice hyperboly je tudíž ekvivaletní se současnou definicí a nabízí nám zajímavý pohled na hyperboly a její asymptoty, který lze využít na střední škole, neboť studenti mají veškeré potřebné znalosti k práci s uvedenými vztahy.

2.2 Aristaios a Eukleidés

Aristaios starší (řecky Ἀρισταῖος) byl antický matematik ze 4. století př. o. l., který sepsal *Pět knih o kuželosečkách*. Tento spis se nedochoval, známe jej pouze z Pappových komentářů. V tomto díle Aristaios zavádí názvy pro kuželosečky podle toho, jakého kolmého kužele jsou řezem. Křivky jsou vždy získány jako řez rovinou kolmou k polomeridiánu daného kužele. Takto vznikly termíny *řez ostroúhlého kužele*, *řez pravoúhlého kužele* a *řez tupoúhlého kužele*, přičemž onen úhel vždy nacházíme u vrcholu.



Eukleidés (řecky Εὐκλείδης) byl bezpochyby jeden z nejvýznamnějších antických matematiků a geometrů, avšak o jeho životě mnoho nevíme. Narodil se ve druhé polovině 4. století př. o. l. a většinu svého života strávil v Alexandrii v Egyptě. Jeho nejvýznamnějším dílem jsou *Základy* (řecky Στοιχεία), které udaly směr matematiky a geometrie na dlouhá staletí. Eukleidés sepsal i spis o kuželosečkách, který se ale nedochoval. Některé zdroje uvádí, že toto dílo nebylo tolik pokročilé jako dílo Aristaiovo.

2.3 Archimédés

Náš přehled antických autorů zabývajících se kuželosečkami se zajisté nemůže obejít bez slavného Archiméda ze Syrákús. Archimédés (řecky Ἀρχιμήδης) se narodil na počátku 3. století př. o. l. v Syrákúsách na Sicílii, kde také žil a tvořil. Je známý především jako mechanik a vynálezce, byl však jedním z prvních, kdo použil matematické metody ve fyzice. Zabýval se především určováním obsahů a objemů různých geometrických útvarů, přičemž využíval Eudoxovu exhaustační metodu, ale také svou unikátní metodu založenou na zákoně rovnováhy na páce. Je praotcem infinitesimálního počtu, s velkou přesností odhadl hodnotu čísla π, a snad i proto bývá označován jako největší matematik své doby, někdy dokonce jako největší matematik všech dob. Napsal mnoho děl, z nichž můžeme jmenovat např. *O kouli a válci*, *O spirálách*, *O měření kruhu*, *Kvadratura paraboly* a *O kónoidech a sféroidech*.

O kuželosečkách se Archimédés zmiňuje v mnohých svých dílech. My se nyní zaměříme na díla *O kónoidech a sféroidech* a *Kvadratura paraboly* tak, jak jsou vyložena v Heathově publikaci o Archimédovi [4].

Dílo *O kónoidech a sféroidech* začíná dvěma pro nás zajímavými definicemi: [8]

Definice 1. Je-li kužel protnut rovinou, která prochází všemi stranami tohoto kužele, řezem bude buď kruh, nebo řez ostroúhlého kužele.[9]

Definice 2. A je-li válec protnut dvěma rovnoběžnými rovinami, které prochází všemi stranami tohoto válce, řezem budou buď kruhy, anebo řezy ostroúhlého kužele stejné a vzájemně si podobné.

Archimédés nespecifikuje, jak musí být roviny vedené, aby vznikla kružnice, či elipsa, což je dáno pravděpodobně tím, že se tím zaobírali dřívější autoři. Coolidge ve svém díle [1] považuje za pravděpodobné, že si Archimédés byl vědom skutečnosti, že tato křivka může vzniknout i jako řez kosého kužele, což by podporovala ta skutečnost, že opětovně uvádí definici dřívějších autorů, avšak doplněnou právě o případ kosého kužele. Druhá definice říká, že zmíněné dvě [10] kuželosečky lze také získat řezem válce, či válcové plochy.

Dílo pokračuje větami o kuželosečkách, které většinou nejsou dokázány s odkazem na díla Aristeia a Eukleida. Archimédés se zaměřuje na vztah obsahu kruhu a elipsy, dokazuje, že lze najít kužel, jehož řezem je zadaná elipsa, a také uvádí, jaké kuželosečky lze získat různými řezy podlouhlého i zploštělého rotačního elipsoidu, rotačního paraboloidu a jedné části [11] dvojdílného rotačního hyperboloidu.

Z díla uvádíme pouze jednu větu, jejíž číslo zachováváme dle původního textu.

Věta 4. Obsah elipsy se má k obsahu opsaného kruhu tak, jako se má vedlejší osa elipsy k hlavní.

[8] Přísně vzato, nejedná se o definice, ale o věty.

[9] Viz Aristaiův název pro elipsu.

[10] Kružnici a elipsu považujeme za dva různé typy kuželoseček.

[11] Archimédés vždy uvažuje pouze jednu větev hyperboly.

Tato věta je zajímavá hned z několika důvodů. Jednak ji Archimédés dokazuje pomocí exhaustační metody, zároveň si můžeme všimnout, že jsou užity pojmy „hlavní a vedlejší osa elipsy“. Tyto názvy vznikly úpravou do moderního jazyka během překladu, neboť Archimédés nazýval osy „průměry“, čímž se liší od současného pojetí tohoto termínu. Průměr, neboli úsečku vedenou středem kuželosečky spojující dva její body, prostě nazývá „přímá vedená středem“, a termín „osa“ zásadně užívá pro osu rotace.

V díle *Kvadratura paraboly* se zaměříme na první dvě věty, v nichž Archimédés dosahuje podobných výsledků o tečnách paraboly jako Apollónios. Důkazy těchto vět Archimédés neuvádí, pouze odkazuje na dřívější díla.

Věta 1. Je-li z bodu A na parabole vedena úsečka AB, a to buď osa, nebo rovnoběžka s osou, a je-li CD tětiva rovnoběžná s tečnou paraboly v bodě A procházející bodem B, pak $CB = BD$. Obráceně, je-li $CB = BD$, tětiva CD je rovnoběžná s tečnou v bodě A.

Věta 2. Je-li CD tětiva paraboly rovnoběžná s tečnou v bodě A a je-li bodem A vedena osa, či rovnoběžka s osou, která protíná tětivu CD v bodě B a tečna v bodě C protíná tuto osu, či rovnoběžku s ní v bodě E, pak platí, že $AB = AE$.

V další kapitole si ukážeme, že některé části těchto vět považuje Apollónios za definice a jiné dokazuje.[12]

Mimo tyto uvedené definice a věty se Archimédés zabývá především obsahy segmentů kuželoseček a objemy částí prostoru vymezených rotačními tělesy a rovinami.

3 Apollónios z Pergé

3.1 Biografický úvod

Apollónios z Pergé, (řecky Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος), byl významný antický geometr a matematik z přelomu 3. a 2. století př. o. l. Svými současníky byl nazýván „velký geometr“, o jeho životě však mnoho nevíme. Indicie nacházíme v jeho vlastních předmluvách k jednotlivým knihám *Kónik* a o jeho životě se zmiňují také komentátoři z pozdní antiky, zejména Pappos a Eutokios.

Apollónios se narodil ve městě Pergé v Pamfýlii, oblasti, kterou bychom dnes hledali na jižním pobřeží Malé Asie. Od Pappa se dozvídáme, že studoval v Alexandrii u Eukleidových žáků. Jak již bylo zmíněno, další útržky získáváme z předmluv. První dvě knihy *Kónik* věnoval svému staršímu příteli Eudémovi z Pergamu, předmluva ke třetí knize se naneštěstí ztratila a čtvrtou knihu již věnuje Attalovi, neboť v mezidobí Eudémos zemřel. O Attalovi nevíme mnoho, snad jen tolik, že se Apollóniovi svěřil se svým zájmem o dílo o kuželosečkách.

[12] Apollóniovy důkazy budou uvedeny v další kapitole.

3.2 Díla

Z Pappovy *Matematické sbírky* víme, že Apollónios napsal několik děl, z nichž můžeme jmenovat spisy *O řezu v daném poměru*, *O řezu dané plochy*, *O určeném řezu*, *O sklonech*, *O tečných kruzích* a *O rovinných místech*. Řecky se tato díla nedochovala, pouze arabský překlad spisu *O řezu v daném poměru* byl následně přeložen do latiny.[13]

My se však zaměříme na dílo *Kóniky*, nejrozsáhlejší pojednání o kuželosečkách v antice. Toto dílo se původně skládalo z osmi knih – první čtyři se dochovaly v řečtině, další tři v arabském překladu a osmá kniha je ztracena. Víme, že všech osm knih držel ve svých rukou Pappos ve 4. století občanského letopočtu a Eutokios ve století šestém.

Kónikám se nedostalo ve středověku stejné slávy jako Eukleidovým *Základům*, či Archimédovým spisům. Příčinu můžeme nalézt ve vysoké obtížnosti textu, objemnosti díla a nepříliš čtivému Apollóniovu stylu. I přesto se našli tací, kteří *Kóniky* studovali. Zmínit můžeme např. optika Witela ze 13. století, který studoval dílo v souvislosti s vlastním studiem perspektivy.

S renesancí přišel nárůst zájmu o antické spisy. *Kóniky* byly poprvé přeloženy do latiny v roce 1537, avšak tento překlad považujeme za nekvalitní a plný matematických chyb. Kvalitní překlad knih I–IV do latiny provedl Federico Commandino v roce 1566 a během následujícího století se rozšířil po Evropě. V roce 1710 byly společně vydány knihy I–IV přeložené z řečtiny do latiny a knihy V–VII přeložené z arabštiny, autor tohoto prvního uceleného vydání, E. Halley, dokonce provedl i pokus o rekonstrukci ztracené osmé knihy.[14]

3.3 Kóniky

První čtyři knihy *Kónik* Apollónios považuje za elementární úvod. V první knize konstruuje kuželosečky jako řezy kuželové plochy. Aristaiovo pojetí řezů kuželové plochy, kdy jsme požadovali, aby řez byl veden kolmo k polomeridiánu, Apollónios zobecňuje na libovolný řez kuželové plochy rovinou, které nenáleží vrchol. Z jedné dané kuželové plochy tak získává všechny kuželosečky, v čemž mimo jiné spočívá jeho originální přístup k tématu. Kuželovou plochu Apollónios definuje obecněji než jeho předchůdci, nepožaduje, aby byla rotační. Jako první uvažuje obě větve hyperboly. Následně zobecňuje základní vlastnosti kuželoseček, zkoumá jejich tečny a definuje jejich osy.

Druhá kniha začíná studiem asymptot hyperboly a věnuje se tečnám kuželoseček hlouběji. Ve třetí knize se zabývá polárními vlastnostmi kuželoseček, dokazuje některé ohniskové vlastnosti elipsy a hyperboly. Čtvrtá kniha rozvíjí téma polárních vlastností a jsou zkoumány průsečíky dvou kuželoseček.

My se zaměříme především na první knihu. Nejprve uvedeme Apollóniovy definice, porovnáme je se současnými a doplníme je o definice termínů, které budeme potřebovat v dalších kapitolách. Z vět, které se vyskytují v *Kónikách*, budeme nejpečlivěji studovat ty, které se zabývají řezy kuželové plochy. Dozvíme se, že existují dva směry řezu, kterými vzniknou kružnice.

[13] Apollonii Pergaei: *De sectione rationis libri duo.*

[14] Apollonii Pergaei: *Conicorum libri octo.*

U parabolických, hyperbolických a eliptických řezů se zaměříme na jejich parametr. V následující kapitole pak ukážeme, co musí platit pro tečny kuželoseček. Podíváme se i na asymptoty hyperboly a zkoumání *Kónik* uzavřeme rozpravou o ohniscích kuželoseček.

3.4 Definice

Naše zkoumání *Kónik* zahájíme převedením prvních osmi definic z první knihy do moderního jazyka. Užijeme k tomuto překlad z řečtiny v *Řeckých matematických textech* [2], str. 389–390, editované Z. Šírem, s přihlédnutím k anglickému překladu R. Catesby Taliaferra v knize *Conics, Books I–III* [5], str. 3–4.

Definice 1. Spojíme-li libovolný pevný bod se všemi body kružnice, která neleží s tímto bodem v téže rovině, přímkou, pak vzniklou plochu opsanou touto přímkou skládající se ze dvou částí stýkajících se v daném pevném bodě, nazveme *kuželovou plochou.* Pevný bod nazveme *vrcholem* této kuželové plochy. Přímku vedenou vrcholem a středem kružnice nazveme *osou.*

Definice 2. *Kuželem* nazveme útvar sevřený kruhem a kuželovou plochou ležící mezi vrcholem a kružnicí. *Základnou* nazýváme onen kruh, *vrcholem* vrchol kuželové plochy a *osou* úsečku spojující vrchol se středem kruhu.

Definice 3. Kužel nazveme *kolmý,* je-li jeho osa kolmá k základně. V opačném případě je kužel *kosý.*

Definice 4. Průměr libovolné křivky je taková úsečka, či polopřímka vedená od bodu dané křivky, že půlí všechny úsečky, které spojují body křivky a jsou si navzájem rovnoběžné. Říkáme, že tyto úsečky jsou *vedeny řádně. Vrcholem* křivky nazveme konec průměru, který na ní leží.[15]

Definice 5. *Příčným průměrem* dvojice křivek ležících v jedné rovině nazveme přímku, která tyto křivky protíná a půlí všechny navzájem rovnoběžné úsečky uvnitř každé z křivek. *Vrcholy* nazveme body křivek, které leží na této přímce. *Přímým průměrem* nazveme přímku, která neprotíná dané křivky a půlí všechny navzájem rovnoběžné úsečky ohraničené oběma křivkami. Každá z uvedených rovnoběžek je vedena řádně.

Definice 6. *Sdruženými průměry* nazýváme takovou dvojici průměrů, pro které platí, že jeden průměr půlí průměry rovnoběžné s druhým.

Definice 7. *Osou křivky* nazveme průměr, který protíná rovnoběžky vedené řádně k tomuto průměru pod pravým úhlem.

[15] Z této definice vyplývá, že všechny průměry prochází středem – pro elipsu a hyperbolu, nebo jsou navzájem rovnoběžné – pro parabolu.

Definice 8. *Sdruženými osami* křivky nazýváme sdružené průměry, které jsou na sebe kolmé.

Některé z těchto definic užíváme dodnes. V současnosti definujeme kuželovou plochu jako množinu přímek, které prochází bodem – vrcholem a protínají řídicí kružnici, která náleží rovině neobsahující vrchol. Tato současná definice je téměř totožná s Apollóniovou definicí.

Drobnou odchylku můžeme nalézt v pojmenování typů kuželů. Apollóniův kolmý kužel bychom dnes nazvali spíše kuželem rotačním a kužel kosý kuželem nerotačním.

Pojem průměr dnes v matematice používáme výhradně pro kružnici. V deskriptivní a projektivní geometrii se s tímto pojmem setkáváme častěji. Zajímavé na definici 4 je skutečnost, že Apollónios se snaží tyto pojmy zavést obecně pro křivky, ačkoliv jsou platné pouze pro kuželosečky. Můžeme si všimnout, že tyto pojmy by bylo možné zavést snáze, kdybychom měli definovaný střed, či osu kuželosečky. Apollónios se však těmto pojmům vyhýbá z důvodu obecnosti. Za zmínku dále stojí, že dnes již neužíváme pojem „úsečka vedená řádně“, tento termín opět slouží k vyjádření daných úseček pro obecné křivky.

Pátá definice je zajímavá z pohledu projektivní geometrie. Zatímco v matematice, či deskriptivní geometrii používáme především termíny hlavní a vedlejší vrcholy kuželoseček, projektivní geometrie často nazývá libovolný bod kuželosečky vrcholem, ovšem záleží na tom, k jakému účelu daný bod používáme.

Pojem sdružené průměry užíváme nejčastěji v deskriptivní geometrii. Mohou nám pomoci ke konstrukci tečen v krajních bodech jednoho průměru, neboť tyto tečny jsou rovnoběžné s jeho sdruženým průměrem. Máme-li zadány omezené sdružené průměry, umíme kuželosečku sestrojit.

Zajímavé je, jak Apollónios definuje osy kuželoseček. Užívá k tomu dříve definovaných pojmů, které dnes již nepoužíváme. V dnešní době definujeme osy jako osy souměrnosti dané kuželosečky. Z Apollóniovy i ze současné definice plyne, že kružnice má os nekonečně mnoho, elipsa a hyperbola právě dvě a parabola jednu.

K našim účelům je třeba dodefinovat další termíny, které budeme užívat v následující části.

Definice 9. Osová rovina je rovina, které náleží osa kužele, či kuželové plochy. [16]

Definice 10. Abscisa je úsečka mezi vrcholem kuželosečky a bodem na její ose.

Definice 11. Ordináta je úsečka vedená řádně z bodu na křivce k průměru.

3.5 Kuželosečky jako řezy kuželové plochy

V následující kapitole se zaměříme na jednotlivé věty, které nám poskytují stereometrický pohled na kuželosečky. Tento přístup ke kuželosečkám bývá na středních školách často zcela

[16] Ve větě I,3 pak Apollónios dokazuje, že osovým řezem kužele je trojúhelník. Uvažujeme-li kuželovou plochu pak jsou řezem dvě různoběžky. Jedná se o jedinou zmínku singulární kuželosečky v celém díle.

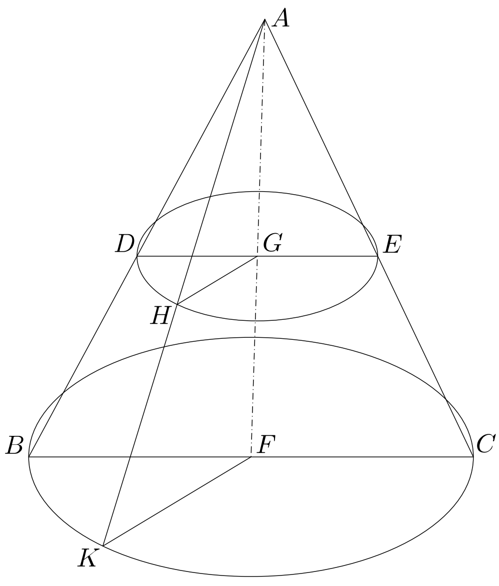
opomenut a nahrazen pouze čistě planimetrickými definicemi, což může vést k otázce, kam se ztratil onen kužel z názvu těchto křivek.

Dokážeme, že kuželosečky jsou závislé na nějakém parametru, nad jehož odvozením provedeme diskusi. Ukážeme si také, že názvy křivek nejsou nahodilé, právě naopak, Apollónios jednotlivé kuželosečky pojmenoval velmi logicky. Důkazy jsou přímočaré, využívají standardní středoškolské matematiky a vět dříve dokázaných. Budeme využívat Heathovy knihy [6] s přihlédnutím k překladu v *Řeckých matematických textech* [2] a Taliaferrově překladu v publikaci [5]. Číslování vět zachováme dle původního Apollóniova textu.

3.5.1 Kružnice

Nejprve se podíváme na věty, které mluví o kružnicových řezech kužele. Může být překvapivé, že uvádíme dvě věty. Ukážeme si totiž, že existují celkem dva řezy kužele, které jsou kružnicemi.

Věta I,4. Je-li kuželová plocha protnuta libovolnou rovinou rovnoběžnou s řídicí kružnicí,[17] pak je tímto řezem kružnice se středem na ose kuželové plochy. Plochu ohraničenou takto vzniklou kružnicí a vrcholem kuželové plochy nazýváme kužel.[18]



Důkaz. Vrchol kuželové plochy označíme A a body na průměru řídicí kružnice B a C. Střed řídicí kružnice označíme F a vedeme přímku AF. Z definice 1 plyne, že tato přímka je osou kuželové plochy. Vedeme řez rovnoběžný s rovinou řídicí kružnice. Průsečík roviny řezu s osou kuželové plochy označíme G. Body A, B, C tvoří vrcholy osového trojúhelníku a přímky AB a AC protínají rovinu řezu v bodech D, E. Trojúhelníky ABC a ADE jsou podobné. Na průniku

[17] Řídicí kružnicí myslíme kružnici z definice 1.

[18] Tento dovětek je zopakováním definice 2, kterou jsme uvedli v předchozí kapitole.

kuželové plochy a roviny řezu zvolíme libovolný bod H. Vedeme přímku AH a její průsečík s řídicí kružnicí označíme K. Nyní spojíme body G, H a F, K. Jelikož je úsečka DE rovnoběžná s průměrem BC a body G, H, F a K náleží jedné rovině, úsečky GH a FK jsou rovnoběžné. Proto platí, že

$$\frac{AG}{AF} = \frac{GD}{FB} = \frac{GE}{FC} = \frac{GH}{FK}\,.$$

Jelikož body B, C, F a K náleží řídicí kružnici, platí, že

$$FB = FC = FK\,.$$

Rovnají-li se jmenovatelé, pak čitatelé si musí být navzájem také rovni:

$$GD = GE = GH\,.$$

Vzdálenost libovolně zvoleného bodu H od středu úsečky DE je shodná se vzdálenostmi tohoto středu od krajních bodů, a proto řez rovnoběžný s řídicí kružnicí je opět kružnice. □

Nyní uvedeme onen překvapivý řez kuželové plochy, který je také kružnicí. Ze znění věty je zřejmé, že tento řez má význam pouze pro nerotační kuželovou plochu.

Věta I,5. Kuželovou plochou vedeme osový řez ABC tak, aby byl kolmý k řídicí kružnici s průměrem BC, a další řez, který je kolmý k rovině osového trojúhelníku a zároveň jeho průsečnice s osovým trojúhelníkem je základnou trojúhelníku AGK, který je nepřímo podobný trojúhelníku ABC. Tento řez je pak kružnicí a nazýváme jej antiparalelní.[19]

Důkaz. Na křivce řezu zvolíme bod H a na řídicí kružnici bod L. Těmito body vedeme kolmice k osové rovině a průsečíky označíme po řadě F a M. Úsečky HF a LM jsou rovnoběžné. Vedeme průměr DE bodem F rovnoběžný s průměrem BC. Získáme tak kružnicový řez z věty I,4 s průměrem DE. Z Eukleidovy věty o výšce vyplývá, že

$$HF^2 = DF \cdot EF\,. \tag{3.1}$$

Jelikož je trojúhelník ADE podobný trojúhelníku ABC, úhel ADE je shodný s úhlem ABC a úhel AKG je dle předpokladu s nimi také shodný. Uvažujeme trojúhelníky DFG a KFE. Mají shodné úhly při vrcholech D a K a úhly při vrcholu F jsou vrcholové, tedy shodné. Trojúhelníky DFG a KFE jsou proto podobné. Platí:

$$\frac{EF}{FK} = \frac{GF}{DF}\,,$$

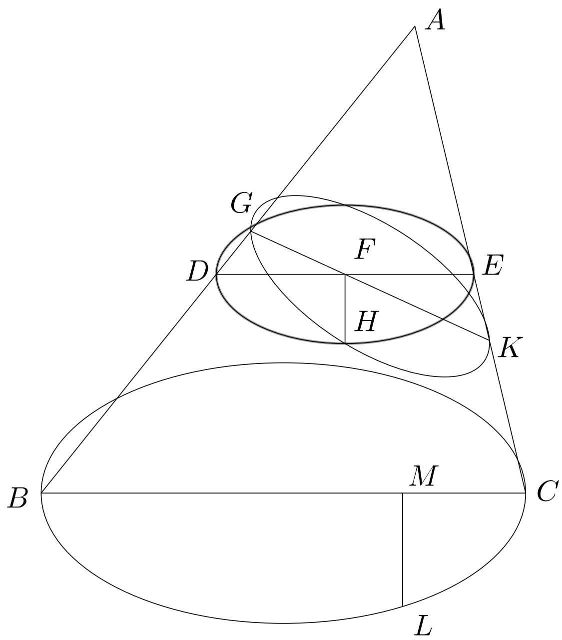
$$EF \cdot DF = GF \cdot FK$$

a s využitím vztahu (3.1) dostaneme

$$HF^2 = GF \cdot FK\,.$$

[19] Tento termín je užit v *Řeckých matematických textech* [2], str. 406–407. Anglické překlady se shodují na užití pojmu *subcontrary section* a Taliaferrův překlad [5] uvádí u této věty také řecký termín – ὑπεναντία.

Tento vztah platí pouze pro pravoúhlé trojúhelníky, pro které platí Thalétova věta. Jelikož jsme bod H volili libovolně na křivce řezu, je tento řez kružnicí. □



Poznámka. Tímto jsme vyčerpali všechny možnosti, jak získat kružnicové řezy, což Apollónios dokazuje ve větě I,9, kterou zde pro úspornost vynecháme.

3.5.2 Parabola

Věta I,11. Je dána kuželová plocha s vrcholem A a osová rovina ABC, kde úsečka BC je průměrem řídicí kružnice, a další rovinou, která je rovnoběžná se stranou AC osového trojúhelníku a její průsečnice s řídicí kružnicí je kolmá na průměr BC. Průměr řezu ležící v osové rovině označíme PM. Bod F leží na tomto průměru a vedeme jím úsečku HF kolmo k průměru PM.[20] Úsečka PL leží v rovině řezu a je kolmá na průměr PM.[21] Je-li délka PL definována vztahem

$$\frac{PL}{PA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}, \tag{3.2}$$

pak platí, že

$$HF^2 = PL \cdot PF .$$

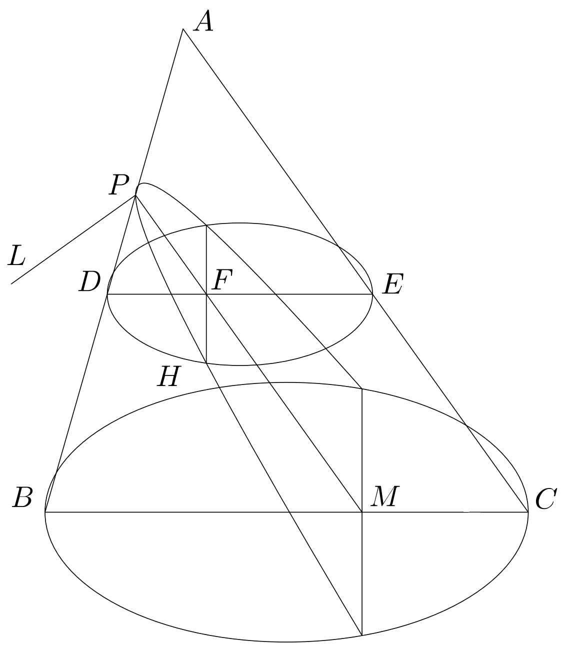
Tento řez nazýváme parabola.

[20] Úsečka HF je ordináta a tudíž je vedena řádně.

[21] Z původního textu není zřejmé, v rovině jakého řezu úsečka PL leží. V tomto textu budeme uvažovat, že leží v rovině osového trojúhelníku, a tudíž je kolmá k rovině řezu.

Důkaz. Úsečku DE vedeme tak, aby obsahovala bod F a byla rovnoběžná s průměrem BC. Jelikož je ordináta HF rovnoběžná s ordinátou vedenou bodem M, platí, že rovina určená body D, E, H je rovnoběžná se základnou kužele, a proto je tímto řezem kružnice s průměrem DE. Ordináta HF je kolmá na tento průměr. Z Eukleidovy věty o výšce vyplývá, že

$$DF \cdot FE = HF^2 \,. \tag{3.3}$$



Z podobnosti trojúhelníků PDF a ABC víme, že

$$\frac{DF}{PF} = \frac{BC}{AC} \,,$$

a z rovnoběžnosti průměru PM se stranou osového trojúhelníku zjistíme, že

$$\frac{FE}{PA} = \frac{BC}{BA} \,.$$

Platí tedy, že

$$\frac{DF \cdot FE}{PF \cdot PA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC} \,.$$

Nyní použijeme vztahy (3.2) a (3.3):

$$\frac{HF^2}{PF \cdot PA} = \frac{PL}{PA}$$

a pravou stranu rozšíříme

$$\frac{HF^2}{PF \cdot PA} = \frac{PL \cdot PF}{PA \cdot PF} \,.$$

Vidíme, že obě strany jsou nezávislé na bodech D a E a mají tentýž jmenovatel, čili platí, že

$$HF^2 = PF \cdot PV\,. \square$$

Poznámka. Z věty vyplývá, že čtverec sestrojený nad jakoukoli ordinátou na pevně zvoleném průměru PM je roven obdélníku přiloženému k pevné úsečce PL s výškou abscisy PF. Tato úloha se objevuje také v Eukleidových *Základech* [7], ve větě II,14, která zní:

Sestroj čtverec rovný danému útvaru přímkovému.

Tato úloha je jednou z mnoha úloh řecké geometrické algebry, v níž je využíváno *přikládání ploch*, pro které řečtina používá infinitiv παραβάλλειν [paraballein]. Od tohoto slova pak odvozujeme název pro tuto kuželosečku – parabolu.

Poznámka. Úsečku PL nazýváme *parametr* nebo *latus rectum* a značíme ji p. Převedeme-li rovnost

$$HF^2 = PL \cdot PF$$

do současného značení, získáme vztah

$$y^2 = px\,,$$

kde $x = PF$ a $y = HF$. Tento vztah je studentům střední školy znám jako rovnice paraboly, jejíž vrchol leží v počátku soustavy souřadnic a osa paraboly je totožná s osou x.

Poznámka. Otázkou zůstává, kde se vzal vztah pro parametr p. Pro jednoduchost se vrátíme k původní, méně obecné definici paraboly pomocí pravoúhlého kužele.[22] Je dán pravoúhlý kužel s vrcholem A a průměrem základny BC. Bodem D na straně AB osového trojúhelníku vedeme řez kolmo k polomeridiánu. Bodem D dále vedeme řez rovnoběžný se základnou kužele a jeho průsečík se stranou AC označíme E. Průsečík osy paraboly [23] s rovinou základny označíme F. Průsečík osy kužele s osou paraboly nazveme L. Body C a E vedeme rovnoběžky s osou kužele a průsečíky těchto rovnoběžek s osou paraboly označíme po řadě H a G. Jelikož jsou úsečky BC a DE rovnoběžné a $CH = DE$, body B, C, D a H leží na kružnici, a proto pro mocnost bodu F k této kružnici platí vztah

$$BF \cdot CF = DF \cdot FH\,,$$

zároveň platí, že

$$DF = CE = GH\,,$$

neboť $DECF$ a $ECHG$ jsou rovnoběžníky. Dále ze shodnosti trojúhelníků DEG a FCH platí, že

$$FH = DG = 2DL\,.$$

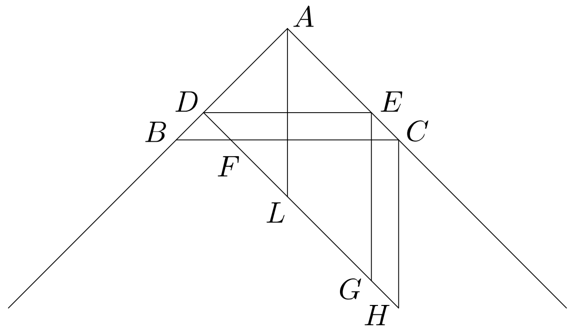
[22] Tento důkaz provádí Heath v knize [6], str. xxiv–xxv. Jedná se o rekonstrukci Menaichmovy konstrukce parametru.

[23] Osou paraboly zde myslíme průsečnici roviny osového trojúhelníku s rovinou řezu.

Pro průsečík P paraboly se základnou platí dle Eukleidovy věty o výšce, že

$$FP^2 = BF \cdot CF = 2DL \cdot DF\,,$$

kde DF je abscisa a $2DL$ je parametr. Ukázali jsme, že parametr má geometrickou interpretaci jako dvojnásobek vzdálenosti vrcholu paraboly od průsečíku osy paraboly s osou kužele.



Analyticky můžeme na tuto interpretaci parametru nahlížet následujícím způsobem. Vrchol A kužele položíme do počátku soustavy souřadnic a strany osového trojúhelníku položíme na přímky $y = x$ a $y = -x$. Bod B má souřadnice $B = [-a, -a]$ a bod $D = [-b, -b]$. Z takto zadané úlohy můžeme dopočítat všechny další body zmíněné v přechozím odstavci.

$$\begin{aligned} C &= [a, -a]\,, & E &= [b, -b]\,, & L &= [0, -2b]\,,\\ H &= [a, -a-2b]\,, & G &= [b, -3b]\,, & F &= [a-2b, -a]\,. \end{aligned}$$

Body B, C, D a H leží na kružnici k se středem $S = [0, -a-b]$ a poloměrem $r = \sqrt{a^2+b^2})$, analytické ověření je snadné, a proto jej ponecháme na čtenáři. Jak bylo řečeno, mocnost bodu F ke kružnici k je konstantní pro všechny tětivy obsahující bod F:

$$|BF| \cdot |FC| = |DF| \cdot |FH| = konst. \tag{3.4}$$

Analyticky snadno ukážeme, že

$$|DF| = |CE| = |GH| = \sqrt{2}(a-b)$$

a díky shodnosti trojúhelníků DEG a FCH platí, že

$$|DG| = |FH| = 2 \cdot |DL|\,. \tag{3.5}$$

Označíme-li písmenem P průsečík paraboly se základnou, získáme ordinátu PF a pro její velikost platí podle Eukleidovy věty o výšce:

$$|PF|^2 = |BF| \cdot |FC|$$

a pro bod F platí také vztahy (3.4) a (3.5), celkem tedy dostáváme:

$$|PF|^2 = |DF| \cdot |FH| = 2 \cdot |DL| \cdot |DF|\,,$$

kde DF je abscisa a tedy $2 \cdot |DL|$ je parametr.

3.5.3 Hyperbola a elipsa

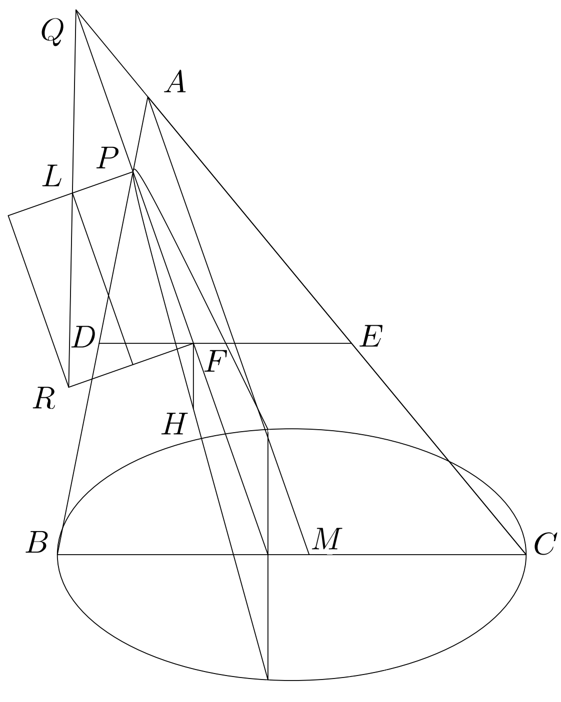
Věta I,12. Je dána kuželová plocha s vrcholem A, který protíná osová rovina ABC, kde úsečka BC je průměr řídicí kružnice, a další rovina, jejíž průsečnice s rovinou řídicí kružnice je kolmá na průměr BC a průsečnice s osovým řezem protíná polopřímku CA za vrcholem A v bodě Q. Průměr řezu ležící v osové rovině nazveme PQ, na tomto průměru zvolíme libovolně bod F, jímž vedeme řádně úsečku HF kolmo na průměr PQ. Úsečku PL sestrojíme v rovině řezu tak, aby byla kolmá na průměr PQ.[24] Její délka je definována vztahem

$$\frac{PL}{PQ} = \frac{BM \cdot MC}{AM^2}\,, \tag{3.6}$$

kde AM je úsečka rovnoběžná s průměrem PQ, jejíž krajní bod M leží na úsečce BC. Je-li úsečka FR vedena rovnoběžně s PL a úsečka QL je prodloužena tak, aby jejím krajním bodem byl bod R úsečky FR, pak platí, že

$$HF^2 = PF \cdot FR\,.$$

Tento řez nazýváme hyperbola.



[24] Viz věta I,11 .

Důkaz. Opět vedeme úsečku DE tak, aby obsahovala bod F a byla rovnoběžná s průměrem BC. Úsečka DE je průměrem kružnice, a proto platí Eukleidova věta o výšce:

$$DF \cdot FE = HF^2 \,. \tag{3.7}$$

Z podobnosti trojúhelníků PDF a ABM, QFE a AMC určíme, že

$$\frac{DF}{PF} = \frac{BM}{AM} \,,$$

$$\frac{FE}{QF} = \frac{MC}{AM} \,,$$

$$\frac{DF \cdot FE}{PF \cdot QF} = \frac{BM \cdot MC}{AM^2} \,.$$

Dále užijeme vztahy (3.6) a (3.7):

$$\frac{HF^2}{PF \cdot QF} = \frac{PL}{PQ} \,,$$

tato rovnost platí také pro trojúhelník QRF podobný s trojúhelníkem QLP:

$$\frac{HF^2}{PF \cdot QF} = \frac{FR}{QF}$$

a pravou stranu rozšíříme:

$$\frac{HF^2}{PF \cdot QF} = \frac{PF \cdot FR}{PF \cdot QF} \,.$$

Obě strany jsou nezávislé na bodech D a E a mají shodné jmenovatele, platí tedy, že

$$HF^2 = PF \cdot FR \,. \square$$

Poznámka. Tato věta praví, že čtverec sestrojený nad jakoukoli ordinátou na pevně zvoleném průměru PQ přesahuje svou velikostí obdélník přiložený k úsečce PL s výškou rovnou abscise PF o délku, kterou určuje rozdíl mezi délkami PL a FR. V Eukleidových *Základech* přeložených F. Servítem [7] se vyskytuje věta VI,29, která zní:

> *Přistav k dané přímce rovnoběžník obrazci danému přímkovému rovný, přesahující o útvar rovnoběžníku danému podobný.*

Pro zmíněný přesah byl v původním řeckém textu užit termín ὑπερβολή [hyperbolé] a od tohoto slova pak odvozujeme název pro vzniklou křivku – hyperbolu.

Poznámka. Ve větě I,14 Apollónios zmiňuje případ, kdy rovina protne uvažovaný dvojkužel v obou poloprostorech, a dokazuje, že tímto řezem je hyperbola se dvěma shodnými větvemi.

Poznámka. Označíme-li velikosti úsečky PL a PQ po řadě p a q a pohyblivé délky úseček PF a HF po řadě x a y, pak můžeme vztah

$$HF^2 = PF \cdot FR$$

zapsat moderním značením, a to následovně:

$$y^2 = px + \frac{p}{q}x^2 \,.$$

Tento vztah je možné odvodit i ze středoškolské rovnice pro hyperbolu. Uvažujeme-li, že hlavní osa je osa x, střed hyperboly má souřadnice $[-a, 0]$, čili hlavní vrchol hyperboly prochází počátkem soustavy souřadnic, délka hlavní poloosy je a a délka vedlejší poloosy je b, pak můžeme hyperbolu vyjádřit následovně:

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \,.$$

Nyní chceme rovnici upravit tak, aby na levé straně bylo y^2:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x+a)^2 - b^2 \,,$$

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \,.$$

Jelikož délka úsečky PQ je vzdálenost hlavních vrcholů hyperboly, platí, že $|PQ| = q = 2a$. Parametr p pak odpovídá $\frac{2b^2}{a}$. Tudíž platí výše zmíněný vztah:

$$y^2 = px + \frac{p}{q}x^2 \,,$$

což jsme ukázali pomocí jak antických, tak současných metod.

Věta I,13. Kužel s vrcholem A protíná osová rovina ABC, kde BC je průměr podstavy kužele, a další rovina, která má se stranami AB a AC osového trojúhelníku společné body P a Q, avšak není rovnoběžná se základnou kužele ani vedena antiparalelně.[25] Průsečnice obou řezů se s rovinou podstavy kužele protínají pod pravým úhlem. Vrcholem kužele vedeme rovnoběžku s průměrem PQ v osové rovině. Její průsečík s rovinou základny kužele označíme M. Úsečku PL sestrojíme v rovině řezu tak, aby byla kolmá na průměr PQ.[26] Její délka je definována vztahem

$$\frac{PL}{PQ} = \frac{BM \cdot CM}{AM^2} \,.$$

[25] Jelikož Apollónios uvažuje kosý kužel, je třeba vynechat i druhý směr řezu, který by nám dal kružnici. Pro tento případ je v *Řeckých matematických textech* [2] užit pojem antiparalelní řez, v Taliaferrově překladu [5] a Heathově díle [6] se setkáváme s anglickým termínem subcontrary section.

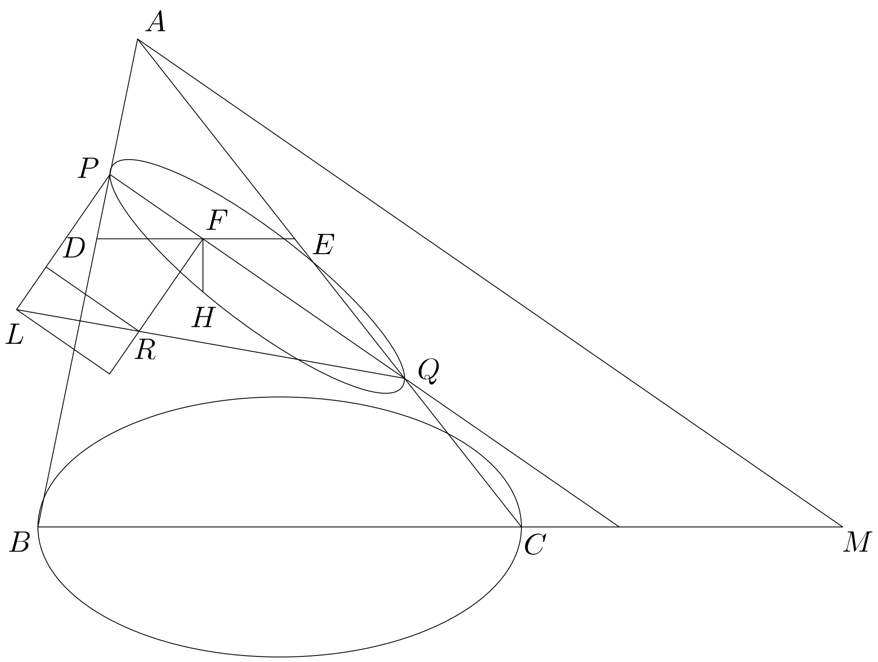
[26] Viz věta I,11 .

Úsečka vedená libovolným bodem F na průměru PQ rovnoběžně s PL je proťata úsečkou QL v bodě R. Pro bod H, který je bodem ordináty HF a náleží křivce řezu, platí, že

$$HF^2 = PF \cdot FR\,.$$

Tento řez nazýváme elipsa.

Důkaz. Viz důkaz věty I,12.



Poznámka. Tato věta praví, že čtverec sestrojený nad jakoukoli ordinátou na pevně zvoleném průměru PQ nedosahuje obdélníku se stranami PL a PF, a to o plochu, určenou abscisou PF a rozdílem mezi délkami PL a FR. Název pro tuto křivku opět nacházíme v Eukleidových *Základech* [7], větě VI,28. Zde uvádíme znění této věty:

> *Přistav k dané přímce rovnoběžník danému útvaru přímkovému rovný, aby mu scházel doplňovací rovnoběžník danému podobný; daný však útvar přímkový nesmí býti větší než útvar (rovnoběžník) sestrojený na polovině, doplňku podobný.*

V původním řeckém textu se pro onu část, která má scházet, užívá termín ἔλλειψις [elleipsis] a od tohoto slova pak odvozujeme název pro tuto kuželosečku – elipsu.

Poznámka. Označíme-li délky úsečky PL a QL po řadě p a q a proměnné délky úseček PF a HF po řadě x a y, pak můžeme vztah

$$HF^2 = PF \cdot FR$$

zapsat pomocí moderního značení, a to takto:

$$y^2 = px - \frac{p}{q}x^2 \,.$$

Tento vztah lze opět odvodit ze středoškolské rovnice pro elipsu, jejíž střed umístíme do bodu $[0, a]$ a hlavní vrchol do počátku soustavy souřadnic. Hlavní osa má délku a a velikost vedlejší osy označíme b. Středový tvar rovnice elipsy pak je:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,.$$

Rovnici opět upravíme tak, aby na jedné straně bylo y^2:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(x-a)^2 \,,$$

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 \,.$$

Délka úsečky PQ opět reprezentuje délku hlavní osy, tedy $|PQ| = q = 2a$. Parametr p odpovídá $\frac{2b^2}{a}$, stejně jako u hyperboly. Užijeme-li těchto rovností, dostaneme vztah:

$$y^2 = px - \frac{p}{q}x^2 \,.$$

Opět nás ke stejné rovnici dovedly jak antické, tak i současné metody.

Poznámka. Zdá se, že elipsa a hyperbola mají mnoho společného. Vztah pro parametr mají totožný, existuje druhý průsečík osy kuželosečky se stranou osového trojúhelníku, ten se však liší svou polohou. Právě tento bod se má spojit s koncovým bodem L parametru PL. Jelikož uvažujeme, že parametr PL leží v rovině osového trojúhelníku, v této rovině vedeme spojnice QL. U hyperboly tato přímka protne úsečku vedenou bodem F rovnoběžně s PL v bodě R a body na této přímce leží v pořadí Q, L, R, proto platí, že $FR > PL$. Takto získáváme onen přesah charakterizující hyperbolu. Naopak u elipsy spojnice QL nejdříve protne rovnoběžku vedenou bodem F, platí tedy, že $FR < PL$ a tím získáváme nedostatek, který je charakteristický pro elipsu.

Výše uvedené věty vyčerpaly všechny možnosti, jak získat řezem kuželové plochy regulární kuželosečky. Nyní se podíváme ještě jednou na to, jak je definován parametr p.
U paraboly jsme jej definovali takto:

$$\frac{p}{PA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}$$

a u elipsy a hyperboly:

$$\frac{p}{PQ} = \frac{BM \cdot CM}{AM^2} \,.$$

U paraboly snadno dokážeme, že

$$p = \frac{BC \cdot MC}{AC},$$

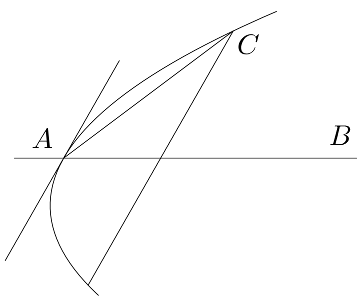
tento vztah je závislý pouze na parametrech kužele a průsečíku M osy paraboly s průměrem BC. Parametr elipsy a hyperboly je také závislý na tomto průsečíku a navíc na vzdálenosti hlavních vrcholů P, Q, což odpovídá naší představě z analytické geometrie, že zatímco parabola má pouze jeden parametr, elipsa a hyperbola mají parametry dva, z nichž je právě jeden určen vzdáleností hlavních vrcholů.

3.6 Tečny kuželoseček

Obraťme se nyní ke studiu Apollóniova pohledu na tečny. Jeho přístup je opět zcela obecný. Vždy dokazuje, že tečna existuje a je v daném bodě jediná, která se kuželosečky dotýká. V celé kapitole budeme užívat termín vrchol tak, jak jej Apollónios definuje v definici 4. Rovněž si můžeme všimnout, že Apollónios přešel od stereometrických vlastností kuželoseček k planimetrickým.

Věta I,17. Je-li přímka vedena vrcholem kuželosečky rovnoběžně s nějakou úsečkou vedenou řádně, pak bude tato přímka ležet vně kuželosečky.

Důkaz. Označíme průměr kuželosečky AB, kde bod A je vrcholem. Předpokládáme, že úsečka AC je vedena řádně a že leží ve vnitřní oblasti kuželosečky.[27] Bod C je libovolný bod kuželosečky a tímto bodem vedeme úsečku řádně, takže průměr AB ji půlí. Což by znamenalo, že AC bude rozpůlena průměrem. To však není možné, protože prodloužení úsečky AC leží ve vnější oblasti kuželosečky. Proto platí, že přímka vedená vrcholem rovnoběžně s úsečkami vedenými řádně leží ve vnější oblasti kuželosečky.



Věta I,32. Je-li přímka vedena vrcholem kuželosečky rovnoběžně s nějakou úsečkou vedenou řádně, pak se dotýká této kuželosečky a žádnou další přímku nelze vést mezi kuželosečkou a touto přímkou.

[27] Klasický příklad důkazu sporem, předpokládáme opak, který přivedeme ke sporu.

Důkaz. Nejprve uvažujme parabolu s průměrem AB, kde bod A je vrcholem, a vedeme přímku AC rovnoběžně s úsečkami vedenými řádně. Dle věty I,17 leží přímka AC vně kuželosečky. Zbývá dokázat, že žádnou další přímku nelze vést mezi přímkou AC a kuželosečkou. Předpokládáme, že přímku AD lze vést mezi přímkou AC a kuželosečkou. Úsečku DE vedeme řádně, bod G je průsečíkem této úsečky s parabolou a je různý od bodu D a úsečka AF je parametrem. Platí, že

$$\frac{DE^2}{EA^2} > \frac{GE^2}{EA^2}$$

a pro bod G paraboly platí charakteristická vlastnost:

$$GE^2 = AF \cdot AE$$ [28]

a dosazením za GE^2 získáme vztah:

$$\frac{DE^2}{EA^2} > \frac{AF \cdot AE}{EA^2} = \frac{AF}{EA}\,.$$

Na průměru AB nalezneme bod H takový, který splňuje vztah

$$\frac{DE^2}{EA^2} = \frac{AF}{HA} \tag{3.8}$$

a bodem H vedeme úsečku KH řádně, kde bod K náleží parabole a platí pro něj charakteristická vlastnost paraboly:

$$KH^2 = AF \cdot HA\,. \tag{3.9}$$

Proto rozšíříme pravou stranu vztahu (3.8):

$$\frac{DE^2}{EA^2} = \frac{AF \cdot HA}{HA^2}$$

a dosadíme (3.9):

$$\frac{DE^2}{EA^2} = \frac{KH^2}{HA^2} \tag{3.10}$$

Pro bod L, průsečík přímky AD s úsečkou KH, plyne z podobnosti trojúhelníků ADE a ALH, že

$$\frac{DE}{EA} = \frac{LH}{HA}\,.$$

Vztah (3.10) můžeme odmocnit a, dosadíme-li za levou stranu, pak dostaneme, že

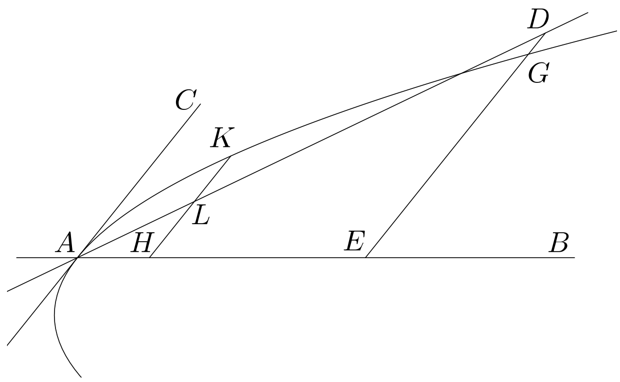
$$\frac{KH}{HA} = \frac{LH}{HA}\,,$$

což znamená, že

$$KH = LH\,.$$

V rozporu s předpokladem přímka AD protíná parabolu v bodě K, a proto mezi přímkou AC a parabolou již žádné další přímky nelze vést. □

[28] Viz věta I,11 .



Nyní větu dokážeme pro kružnici, hyperbolu a elipsu s průměrem AB. Úsečku AF o velikosti parametru vedeme kolmo k průměru a druhý vrchol průměru spojíme s bodem F a v případě potřeby prodloužíme. Přímku AC vedeme rovnoběžně s úsečkami vedenými řádně. Dle věty I,17 leží přímka AC vně kuželosečky. Předpokládáme, že přímka AD je vedena mezi přímkou AC a kuželosečkou a úsečku DE vedeme řádně, kde bod E náleží průměru AB. Úsečka EM je rovnoběžná s úsečkou AF, bod M náleží přímce BF. Platí, že

$$GE^2 = AE \cdot EM \,,$$ [29]

na přímce EM najdeme bod N takový, že platí

$$DE^2 = AE \cdot EN \tag{3.11}$$

a spojíme body A a N a průsečík této přímky s přímkou BF označíme X. Tímto bodem vedeme úsečku HX rovnoběžnou s úsečkou AF a bodem H vedeme úsečku KH řádně, kde bod K náleží přímce AD a KH protíná kuželosečku v bodě L. Úpravou vztahu (3.11) můžeme získat následující dva vztahy:

$$\frac{NE}{ED} = \frac{DE}{EA} \,,$$

$$\frac{NE}{EA} = \frac{DE^2}{EA^2} \,.$$

Z podobnosti trojúhelníků AEN a AHX získáme rovnost:

$$\frac{NE}{EA} = \frac{XH}{HA} \,.$$

Díky této podobnosti můžeme říci, že platí-li vztah (3.11) pro úsečku DE, pak obdobně platí i pro úsečku KH:

$$KH^2 = AH \cdot HX \,.$$

[29] Viz věta I,12 a I,13.

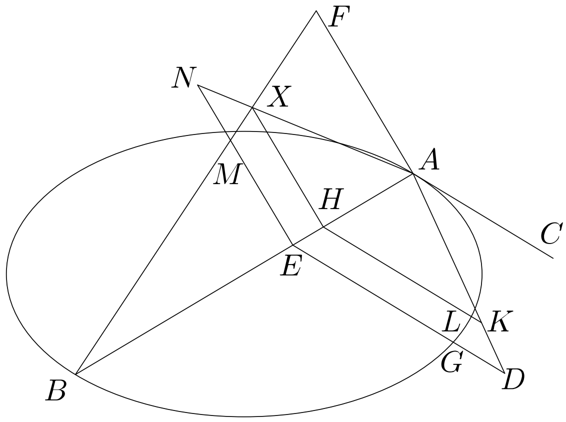
Avšak z polohy bodu X platí dle charakteristické vlastnosti kuželoseček [30] pro bod L kuželosečky následující rovnost:

$$LH^2 = AH \cdot HX\,,$$

což by znamenalo, že

$$KH = LH\,.$$

Dokázali jsme, že přímka AD protíná kuželosečku, a proto nelze mezi tečnou AC a kuželosečkou již žádné další tečny vést. □



Věta I,33. Na parabole je dán libovolný bod a z něj je vedena řádně úsečka k průměru. Vzdálenost, kterou určuje průsečík této úsečky s průměrem a vrchol, je rovna vzdálenosti vrcholu od bodu na průměru, který spolu s daným bodem určuje tečnu v daném bodě.

Důkaz. Průměr paraboly označíme AB, bod na parabole C a úsečku vedenou řádně CD, kde bod D náleží průměru. Vrchol E půlí úsečku AD. Předpokládáme, že bod G náleží tečně AC a leží ve vnitřní oblasti paraboly. Tímto bodem G vedeme úsečku FB řádně k průměru AB, bod F leží na parabole. Tedy předpokládáme, že $FB > GB$. Platí, že

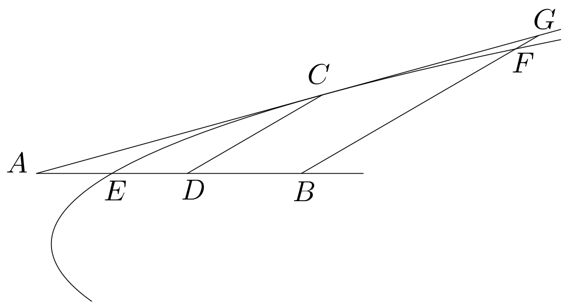
$$\frac{FB^2}{CD^2} > \frac{GB^2}{CD^2}\,.$$

Pro bod F paraboly platí, že

$$\frac{FB^2}{CD^2} = \frac{BE}{DE}\,,$$

protože $FB^2 = p \cdot BE$ a $CD^2 = p \cdot DE$.

[30] Viz věta I,12 a I,13.



Z věty I,20 [31] plyne, že pro bod G ve vnitřní oblasti paraboly platí, že

$$\frac{BG^2}{CD^2} = \frac{BA^2}{AD^2}\,.$$

Dle předpokladu pak tvrdíme, že

$$\frac{BE}{DE} > \frac{BA^2}{AD^2}$$

a rozšířením levé strany získáme

$$\frac{4 \cdot AE \cdot BE}{4 \cdot AE \cdot DE} > \frac{BA^2}{AD^2}\,.$$

Jmenovatelé se rovnají, neboť bod E je středem úsečky AD, proto platí, že

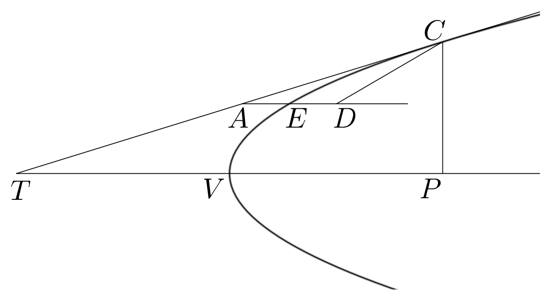
$$4 \cdot AE \cdot BE > AB^2\,.$$

To však není možné, protože by muselo platit, že

$$AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AD + AD^2 < 0\,.$$

Proto žadný bod G neleží ve vnitřní oblasti paraboly, tudíž AC je tečnou paraboly a vrchol E půlí úsečku AD. $\square$

Poznámka. Tato věta je zobecněním věty o subtangentě, neboť kolmice na osu paraboly jsou dle definice vedeny řádně.

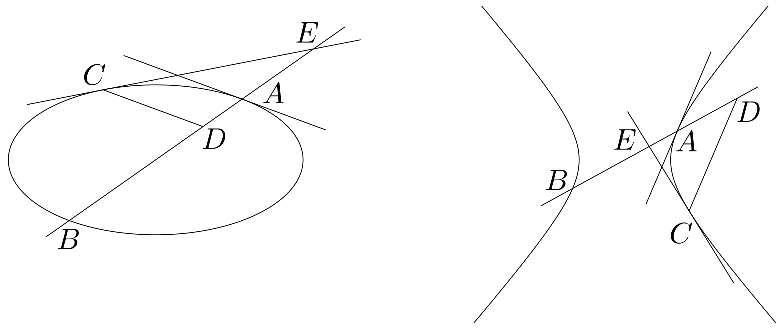


[31] Tato věta platí pro parabolu a praví, že podíl druhých mocnin ordinát je roven podílu abscis jimi vyťatými.

Věta I,34. Na kuželosečce, která není parabola, je uvažován bod C a z něj je vedena úsečka CD řádně k průměru AB. Spojíme-li bod E, pro který platí vztah

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BE}{AE}$$

a který leží na průměru, s bodem C, je přímka EC tečnou.



Poznámka. Konstrukce bodu E je snadná. V případě hyperboly platí, že

$$\frac{BD + AD}{AD} = \frac{AB}{AE}$$

a pro elipsu

$$\frac{BD - AD}{AD} = \frac{AB}{AE}.$$

Poznámka. Věty I,33 a I,34 nám říkají, jak sestrojit tečny ke kuželosečkám. Návody jsou zcela obecné. Jelikož stále nemáme definovaná ohniska, nevyužívají větu, která praví, že tečna půlí úhel průvodičů, ani ohniskové vlastnosti kuželoseček.

3.7 Asymptoty hyperboly

S asymptotami hyperboly se někteří žáci setkávají již na základní škole, kde byly asymptoty ztotožněny se souřadnicovými osami u nepřímé úměrnosti. Každý student střední školy však tento termín jistě slyšel. Středoškolské učebnice se však často definici asymptot vyhýbají nebo je definují empiricky. Jsou-li asymptoty hyperboly na střední škole definovány, pak jako přímky, které prochází středem hyperboly a mají směrnici $|\frac{b}{a}|$ nebo $|\frac{a}{b}|$, kde a je velikost hlavní poloosy a b je velikost vedlejší poloosy. Apollónios pro asymptoty nejprve vyslovil větu o tom, co musí platit, aby byly přímky hyperbole co nejblíže, ale neměly s ní žádný společný bod ,[32] a teprve poté zavedl, že tyto přímky budeme nazývat asymptoty. Tento termín použil

[32] Nevlastní body Apollónios neuvažoval.

jako první, dřívější autoři názvy těchto přímek opisovali jejich specifickými vlastnostmi.

Věta II,1. Je dána hyperbola s parametrem daným úsečkou AF, její průměr AB a střed C. Je vedena tečna ve vrcholu B ohraničená body D a E, $AD = AE$. Platí-li pro tyto body vztah

$$AD^2 = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot AF \,, \tag{3.12}$$

pak přímky CD a CE neprotínají hyperbolu.

Důkaz. Uvažujeme, že přímka CD protne hyperbolu v bodě G a z tohoto bodu vedeme úsečku GH řádně k průměru. Dle věty I,17 je úsečka GH rovnoběžná s tečnou ve vrcholu. Bod C je středem průměru AB, proto platí, že

$$BC^2 = \frac{1}{4} \cdot AB^2 \,.$$

Protože AD je asymptota a bod C je středem průměru, dle vztahu (3.12) platí, že

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AB^2}{AB \cdot AF} = \frac{CA^2}{AD^2} \,.$$

Z podobnosti trojúhelníků pak platí, že

$$\frac{CA^2}{AD^2} = \frac{CH^2}{GH^2}$$

Věta I,21 [33] praví, že

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AH \cdot BH}{GH^2} \,,$$

proto

$$\frac{CH^2}{GH^2} = \frac{AH \cdot BH}{GH^2} \,.$$

Jmenovatelé jsou stejní, proto platí, že

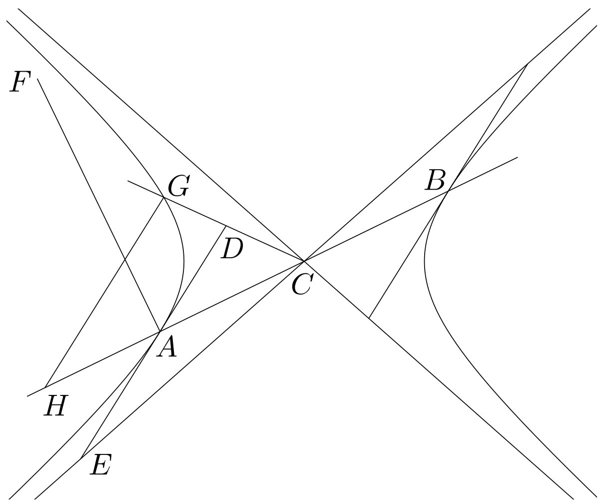
$$AH \cdot BH = CH^2$$

a to nikdy nenastane, neboť

$$AH \cdot BH = (CH - AC) \cdot (CH + AC) = CH^2 - AC^2 \,.$$

Ukázali jsme, že přímka CD hyperbolu neprotíná a totéž platí analogicky pro přímku CE. Tyto přímky nazýváme asymptoty (řecky ἀσύμπτωτος). □

[33] Tato věta platí pro kuželosečky, které nejsou parabolou, a mluví o vztahu dvou ordinát vzhledem k abscisám jimi vyťatými.



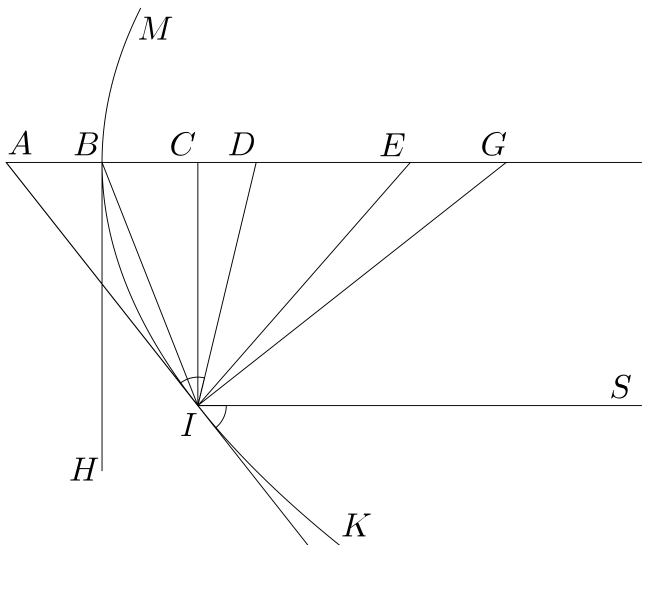
3.8 Některá specifika Apollóniovy teorie

Mohli jsme si všimnout, že Apollónios ve výše uvedených větách nedefinuje ani nevyužívá ohniska kuželoseček. To ale neznamená, že nevěděl, že takové body existují, neboť již Archimédés využíval vlastností ohnisek ve svých vynálezech. Věty III,45--52 Apollóniových *Kónik* ostatně mluví o ohniskových vlastnostech elipsy a hyperboly. Ohniska jsou nazývány „body vzniklé při přikládání", pro které platí, že

$$AO \cdot BO = \frac{1}{4} \cdot p \cdot AB \,,$$

kde A, B jsou hlavní vrcholy, O je ohnisko a p je parametr dané kuželosečky.

Ohnisko paraboly není Apollóniem definováno, ale objevuje se ve spisu *O zápalných zrcadlech* Apollóniova současníka Dioklea. Část shrnutí první věty z tohoto spisu převezmeme z *Řeckých matematických textů* [2], str. 385.



Mějme parabolu KIB s parametrem, který je roven $2BH$. Na ose BG je vymezen bod D, jehož vzdálenost od vrcholu B je $BD = \frac{1}{2}BH$, a další pomocný bod E, jehož vzdálenost od vrcholu je $BE = BH = 2BD$. Cílem je ukázat, že libovolný paprsek rovnoběžný s osou, jako například SI, se odrazí do bodu D.

Bodem D je tedy myšleno ohnisko paraboly. V důkazu Dioklés užívá Apollóniem dokázané věty I,35, V,13 a V,27 o subtangentě, subnormále a jejich součtu.[34]

Důkaz je velice snadný, je třeba dokázat, že paprsek SI se odrazí do ohniska D, neboli, že úhel odrazu je roven úhlu dopadu paprsku. Snadno určíme, že $BD = DE$. Z věty o subtangentě víme, že $AB = BC$ a dále víme, že $BC = EG$, protože bod D je středem úsečky AG, což plyne z věty o součtu subtangenty a subnormály. Jelikož úsečka GI je normálou, úhel GIA je pravý, čili body G, I, A leží podle Thalétovy věty na kružnici se středem D. Úhel mezi tečnou a paprskem SI je proto roven $DIA = DAI$, protože trojúhelník ADI je rovnoramenný. Do bodu D se tedy odráží libovolný paprsek rovnoběžný s osou paraboly, a proto je bod D ohniskem. □

4 Pappos

Posledním autorem, kterého v našem přehledu uvedeme, je Pappos, který žil o několik století později než všichni dosud uvedení autoři, ve 4. století o. l. Pappos byl posledním z význačných antických matematiků a geometrů působících v Alexandrii. Jeho přínos spočívá nejen v jeho komentářích k dřívějším autorům doplněných vlastními poznatky, které byly vydány v díle *Matematická sbírka* (řecky Συναγωγή), ale také v jeho přístupu ke kuželosečkám. Z hlediska projektivní geometrie Pappos vyslovil jednu ze základních vět tohoto oboru, tzv. Pappovu větu.

V antické matematice a geometrii docházelo, stejně jako dnes, k postupnému zobecňování a zjednodušování známých vztahů. Byl to právě Pappos, kdo zastřešil zavádění kuželoseček jednotnou definicí. Publikace o ohnisku [35], řídicí přímce, tzv. direktrix, a numerické excentricitě je jedním z Pappových největších přínosů v teorii kuželoseček.

Uvedenou větu můžeme nalézt v Thomasově publikaci [8], zde uvádíme tu část věty, která je pro nás nejdůležitější:

Nechť je v rovině dána přímka AB a bod Γ. Je vedena úsečka ΔΓ a úsečka ΔE kolmo na AB. [36] *Je-li dán poměr ΔΓ:ΔE, bod Δ leží na kuželosečce.*

Přímka AB je onou zmíněnou řídicí přímkou, neboli direktrix, bod Γ je ohniskem a zadaný poměr je číselnou excentricitou. Nyní tedy můžeme vyslovit společnou definici kuželoseček.

[34] Věta o subtangentě již byla rozebrána v předchozí podkapitole. Věta o subnormále říká, že délka úsečky mezi patou kolmice přímky spuštěné z bodu dotyku na osu a průsečíkem normály tečny s osou je konstantní a rovna polovině parametru. Ohnisko pak půlí úsečku, jejíž krajní body jsou průsečík tečny v daném bodě s osou a průsečík normály s osou.

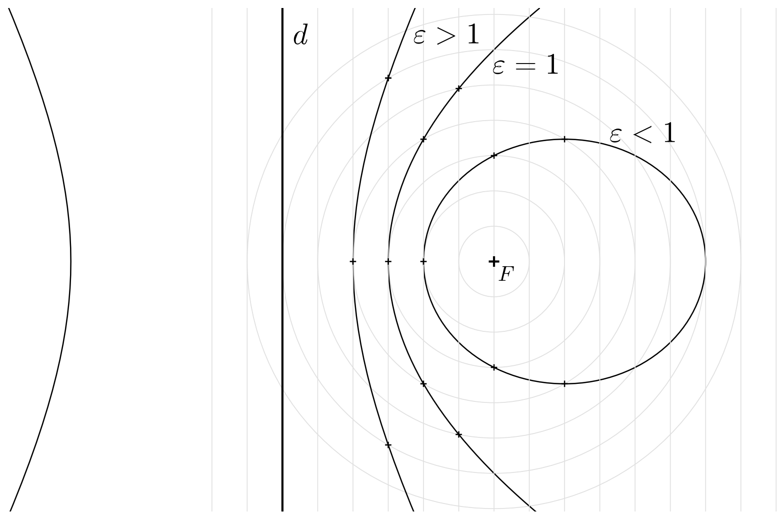
[35] Pappos opět tento bod nenazýval ohniskem, ale bodem vzniklým při přikládání. Pojem ohnisko zavedl až Johannes Kepler (1571–1630).

[36] Bod E je patou kolmice ΔE, leží proto na přímce AB.

Definice. Kuželosečky jsou množiny všech bodů v rovině, které mají od daného bodu F a od pevně zvolené přímky d neprocházející bodem F konstantní poměr vzdáleností rovný kladnému číslu ε. Je-li $\varepsilon < 1$, pak je křivkou elipsa, pro $\varepsilon = 1$ dostáváme parabolu a pro $\varepsilon > 1$ získáme hyperbolu.

Přímkou d myslíme řídicí přímku, bodem F ohnisko a ε je numerická excentricita. Tato definice je tedy založena na uvedené Pappově větě. Můžeme si všimnout také souvislosti s názvy kuželoseček, u paraboly nic nepřebývá, ani nechybí, stejně jako u její rovnice s parametrem. Abychom získali elipsu, poměr musí být menší než jedna, tedy nám chybí ona výpustka charakterizující tuto kuželosečku. Pro hyperbolu číselná excentricita přesahuje jedničku, můžeme tak pozorovat přesah, který určuje název této křivky.

Na obrázku níže vidíme, že volbou vhodné sítě kružnic a přímek můžeme demonstrovat tuto společnou definici kuželoseček. Je třeba ztotožnit střed soustředných kružnic s bodem F a síť přímek má být generována řídicí přímkou d. Různými volbami kladného ε můžeme s pomocí této sítě získat regulární kuželosečky. Například, zvolíme-li $\varepsilon = \frac{1}{2}$, hledáme body, které jsou na k-té kružnici od středu F a na $2k$-té přímce od řídicí přímky d, dle definice dostaneme elipsu, viz obrázek níže. Tato pomůcka může být zajímavou motivací ke studiu kuželoseček pro studenty středních škol, neboť názorně ukazuje, že tyto křivky mají mnoho společného.



K Pappově společné definici kuželoseček uvádí Coolidge ve své publikaci [1] tuto zobecňující rovnici:

$$x^2 = r^2[y^2 + (a - x)^2]\,,$$

kterou upravíme substitucí $r^2 = \frac{1}{b^2}$ na tvar:

$$b^2x^2 = y^2 + (a - x)^2\,,$$

abychom pro získali obdobné hodnoty parametru b^2 jako jsme měli v definici. Nejprve uvažujme, že parametr a je různý od nuly a ukážeme si, jaké křivky dostaneme pro různé hodnoty parametru b. Je-li $\mid b \mid= 1$, rovnice bude mít tvar:

$$y^2 = -2a(x - \frac{a}{2})\,,$$

což je vrcholový tvar rovnice paraboly. Pro hodnoty parametru $\mid b \mid< 1, b \neq 0$, dostaneme úpravou rovnici:

$$(1-b^2)(x - \frac{a}{1-b^2})^2 + y^2 = \frac{b^2(2a^2-b^2)}{(1-b^2)^2}\,,$$

kde $1-b^2$ je kladný koeficient. Je-li i výraz na pravé straně rovnice kladný, získáme elipsu. Pro $\mid b \mid> 1$:

$$(1-b^2)(x - \frac{a}{1-b^2})^2 + y^2 = \frac{b^2(2a^2-b^2)}{(1-b^2)^2}\,,$$

kde koeficient u x^2 je záporný. Je-li $2a^2 \neq b^2$, jedná se o rovnici hyperboly. Pro nenulové hodnoty parametru a jsme tedy získali regulární kuželosečky.

Je-li parametr a nulový, pak dostaneme singulární kuželosečky. Hodnoty parametru b opět rozdělíme na tři případy. Je-li $\mid b \mid= 1$, pak

$$y^2 = 0\,,$$

a to je rovnice přímky. Pro $\mid b \mid< 1, b \neq 0$ dostaneme:

$$y^2 = (b^2-1)x^2\,,$$

což je rovnice bodu se souřadnicemi $[0,0]$. Pro hodnoty $\mid b \mid> 1$ získáme tutéž rovnici, ale koeficient u x^2 je kladný, a proto se jedná o rovnici dvou různoběžných přímek.

Předvedli jsme, že Pappova společná definice kuželoseček je nejen žádoucím zobecněním teorie kuželoseček, ale také motivační pomůckou. Zároveň jsme pomocí rovnic ukázali, že tuto definici lze ještě více zobecnit tak, abychom získali i singulární kuželosečky.

5 Závěr

V této práci jsme názorně představili přístupy antických matematiků ke kuželosečkám. V ukázce ze zlomku Menaichmova díla jsme našli užitečný pohled na hyperbolu a její asymptoty. Ukázali jsme, že Menaichmova definice je ekvivalentní s definicí současnou.

Dále jsme se zaměřili především na Apollóniovy *Kóniky*, z nichž jsme nejprve uvedli definice, jejichž užitečnost pro dnešní dobu jsme podrobili zkoumání. Poté jsme se zaměřili na různé řezy kuželové plochy, jejich závislost na parametru, jehož geometrický význam jsme prodiskutovali. Zdůvodnili jsme také užívanou terminologii, a to jak pomocí stereometrického náhledu na kuželosečky, tak i odkazy na dřívější autory a řecké pojmy. Následovaly tečny a asymptoty hyperboly. Jako poslední jsme se u Apollónia zmínili o jeho náhledu na ohniska a uvedli jsme Diokleův způsob nalezení ohniska paraboly.

Zkoumání antických definic kuželoseček jsme uzavřeli Pappem a jeho přínosným sjednocením definic regulárních i singulárních kuželoseček.

V průběhu celé práce jsme nezapomněli vyzdvihnout didaktický přínos různých antických náhledů na kuželosečky a připravili jsme vhodný soubor vět o kuželosečkách s jejich důkazy, které zvládne student střední školy.

Reference

[1] Coolidge J. L. *A History of The Conic Sections and Quadric Surfaces.* Dover publications, 1968.

[2] Šír Z. *Řecké matematické texty.* OIKOYMENH, Praha, 2011.

[3] Halas Z. Historie a argumentace ve školské matematice: Menaichmos -- Hyperbola a nepřímá úměrnost. In *Cesty k matematice II. Sborník konference. Praha, 22. a 23. září 2016.* Matfyzpress, Praha, 2016, s. 17--18.

[4] Heath T. L. *The Works of Archimedes.* Dover publications, Mineola, New York, 2002.

[5] Apollonius of Perga, translated by R. Catesby Taliaferro *Conics, Books I--III.* New Revised Edition, Green Lion Press, Santa Fe, New Mexico, 2000.

[6] Heath T. L. *Treatise On Conic Sections.* University Press, Cambridge, 1896.

[7] Servít F. *Eukleidovy Základy (Elementa).* JČM, Praha, Královské Vinohrady, 1907.

[8] Thomas I. *Greek mathematics I. From Thales to Euclid.* Harvard University Press, Cambridge, London, 2006.