



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Iva Kreslová

Cavalieriho princip

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Halas Zdeněk, DiS., Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání –
Informatika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Cavalieriho princip

Autor: Iva Kreslová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Halas Zdeněk, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Bakalářská práce se zabývá vývojem klíčových myšlenek důležitých pro zformulování Cavalieriho principu, dokázáním jeho obecného znění a využitím Cavalieriho principu při určování obsahů rovinných útvarů a objemů těles. Určování obsahů a objemů pomocí Cavalieriho principu je spojeno s odvozováním známých vzorců pro výpočet obsahů, objemů a dalších rozšiřujících příkladů.

Klíčová slova: obsah, objem, řez geometrickým útvarem, poměr, rovnoběžnost, přímka, rovina, výška, infinitezimální počet, Cavalieriho princip, Riemannův integrál

Title: Cavalieri's principle

Author: Iva Kreslová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Halas Zdeněk, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The Bachelor thesis deals with the development of key ideas important for formal formulating of Cavalieri's principle, its proof in general form and using Cavalieri's principle in determining the area of plane figures and volumes of solids. Determining of area and volumes using Cavalieri's principle is associated with the derivation of the well-known formulae for calculating area and volume.

Keywords: area, volume, cut of a geometrical figure, ratio, parallelism, line, plane, height, calculus, Cavalieri's principle, Riemann's integral

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu práce panu Mgr. Zdeňku Halasovi za rady při vypracovávání bakalářské práce a za vedení bakalářské práce.

Také bych ráda poděkovala paní Mgr. Jaroslavě Raganové za zapůjčení literatury, podporu při vypracovávání bakalářské práce a za konzultaci vedenou ohledně využitelnosti Cavalieriho principu a mnou sepsaných příkladů na střední škole. V neposlední řadě bych ráda poděkovala svojí rodině a přátelům za duševní podporu.

Obsah

Úvod	2
1 Vývoj napříč stoletími	3
Rotační paraboloid	4
Bonaventura Francesco Cavalieri	6
Výpočet obsahu kruhu – Torricelli	7
Riemannův určitý integrál	8
2 Cavalieriho pojetí	10
2.1 Zavedení pojmů	10
2.1.1 Tečna	10
2.1.2 „Všechny řezy“	11
2.2 Vztahy mezi řezy	12
2.2.1 Úvodní Cavalieriho definice	12
2.2.2 Základy Cavalieriho metody „nedělitelných“	12
3 Důkaz Cavalieriho principu	14
3.1 Rovinné útvary	14
3.2 Tělesa	17
4 Využití na střední škole	20
Cavalieriho princip pro rovinné útvary:	20
Cavalieriho princip pro tělesa:	21
4.1 Aplikace Cavalieriho principu na výpočet obsahu rovinných útvarů	22
4.1.1 Trojúhelník	22
4.1.2 Rovnoběžník	23
4.1.3 Houba	24
4.1.4 Elipsa	27
4.1.5 Cykloida	28
4.2 Aplikace Cavalieriho principu pro výpočet objemů těles	31
4.2.1 Kužel	31
4.2.2 Kosý kužel	32
4.2.3 Koule	33
Objem koule dle Archiméda	34
4.2.4 Kulová úseč	36
4.2.5 Kulový prstenec	37
4.2.6 Anuloid	38
Závěr	40
Seznam použité literatury	41

Úvod

Tématem mé bakalářské práce je Cavalieriho princip, který bývá ve středoškolském učivu řazen do výkladu obsahů a objemů. Na většině středních školách v České republice však dochází jen k jeho letnému zmínění, protože prostor věnovaný této látce ve středoškolských učebnicích není velký. Na některých středních školách se Cavalieriho princip vykládá jen jako rozšíření látky o objemech těles, ale lze nalézt střední školy, kde výklad Cavalieriho principu není vůbec zahrnut do osnov učiva. Žáci se tedy během svého studia o Cavalieriho principu nedozví.

Cílem této práce je tedy ukázat krásu Cavalieriho principu, ať po stránce historické, nebo jeho rozmanitým využitím v příkladech. Tyto příklady by měly být dobrou inspirací pro učitele, jak svým studentům vysvětlit původ mnoha vzorců používaných pro výpočet obsahů rovinných útvarů a objemů těles. Příklady by také mohly sloužit k rozvinutí důkazových technik studentů, pokud by jim byly předloženy geometrické útvary a oni by určovali, zda mají stejný obsah nebo objem. Jednalo by se o analogický postup, který v práci používám. Kromě počítání obsahů a objemů by Cavalieriho princip mohl být využit buď k názornému vysvětlení Riemannova integrálu, nebo k ukázce aplikace Riemannova integrálu jako prostředku využívaného v důkazech. Riemannův integrál bývá na některých školách vyučován v rámci matematického semináře v posledním ročníku střední školy.

Práci jsem rozdělila do čtyř kapitol. První kapitola je souhrnem klíčových přístupů v určování obsahů rovinných útvarů a objemů těles. V tomto stručném vývoji je možné spatřit různé pohledy na obsah a objem. Buď byl obsah, resp. objem počítán pomocí „vyčerpávání“ jiným geometrickým útvarem, nebo porovnáváním a rozdělením na konečně mnoho malých částí. Dnes objemy těles chápeme jako taková kladná nezáporná čísla přiřazená tělesům, že shodná tělesa mají stejný objem a objem libovolného tělesa složeného z vícero nepřekrývajících se těles se rovná součtu jejich objemů, kde základním tělesem je krychle o hraně jedna. Tato krychle se nazývá jednotková. Obsah je chápán analogicky.

Druhou kapitolu bakalářské práce jsem věnovala rozboru myšlenek samotného Cavalieriho. Popisuji zde teorii směřující k zformulování Cavalieriho principu a jednotlivé myšlenkové pochody, které Cavalieriho dovedly k zformulování principu. V předposlední kapitole předkládám jednoduchý důkaz Cavalieriho principu, v němž využívám základních vlastností Riemannova integrálu se záměrem možného využití na střední škole.

V poslední kapitole své bakalářské práce se zaměřuji na příklady, v nichž je použit Cavalieriho princip. Jedná se o nejrozsáhlejší kapitolu této práce. Kapitola je tedy stěžejním bodem práce a jejím cílem je připomenout využitelnost Cavalieriho principu v matematice a ukázat názorné příklady pro jeho využití a možnou cestu obohacení výkladu obsahů a objemů na střední škole, aby si studenti byli vědomi původu vzorců nebo jejich elegantního alternativního odvození.

1. Vývoj napříč stoletími

Ve vývoji přístupu k obsahům a objemům lze nalézt dvě ideje, které byly používány matematiky při odvozování obsahů, resp. objemů. První idea připomíná exhaustivní metodu a riemannovské součty. Obsah, resp. objem se na jejím základě určuje rozložením útvaru na jiné útvary téže dimenze, jejichž obsah, resp. objem umíme určit. Na základě druhé ideje přistupujeme k určování obsahu, resp. objemu útvaru porovnáváním délek úseček, resp. ploch, které vzniknou rozkladem útvaru na útvary nižší dimenze, což se podobá myšlence Cavalieriho principu. Nyní uvedeme některé významné přístupy k výpočtu obsahů a objemů, ve kterých lze tyto dvě ideje spatřit.

V Egyptě ve 3. tisíciletí před naším letopočtem bylo určování obsahu využíváno v zemědělství ke stanovení množství obilí potřebného na osetí pole o určité rozloze. K odhadu množství zasévaného obilí se využívala tzv. pruhová míra (polní loket), pro kterou byl základním prvkem pruh zorané půdy [7]. Pole bylo rozděleno na zorané pruhy, jejichž délka se násobila počtem pruhů, což stanovovalo množství potřebného obilí. Docházelo tedy k rozdělení útvaru na pruhy k určení obsahu.

Atomista Démokritos z Abdéry (asi 460 – 370 před n. l.) ve starověkém Řecku přišel s myšlenkou, že úsečka je tvořena konečným počtem bodů, které jsou představovány atomy (smysly nepoznatelnými) o konečném objemu [11]. Tento postup aplikoval i na určování objemů a obsahů, kde si představoval, že těleso je složeno z rovnoběžných destiček o šířce jeden atom [11]. Usuzoval tedy, že jsou-li tělesa složena ze stejných destiček ve shodných výškách od základny, pak jsou si objemy těles rovny [11]. V Démokritově postupu lze vidět předobraz Cavalieriho principu.

Démokritův současník Hippokratés (asi 470 – 410 před n. l.) počítal obsah, resp. objem pomocí vyčerpávání útvaru jinými útvary [11]. Tuto metodu také použil Eudoxos z Knidu (asi 408 – 355 před n. l.) ve své exhaustivní metodě (metodě vyčerpávání), který následně zformuloval teorii proporcí. Nyní si nastíníme myšlenku Eudoxovy metody.

Eudoxova exhaustivní metoda

Eudoxova exhaustivní metoda byla prvotně určena pro výpočet obsahu oblých útvarů, do nichž se vepisovaly jednotlivé n -úhelníky, kde n nabývalo postupně vzrůstajících celočíselných hodnot a obsahy těchto n -úhelníků byly známy. S vzrůstajícím počtem vrcholů n -úhelníků se obsah blížil obsahu daného útvaru. Uvedme nyní první větu z X. knihy Eukleidových *Základů*, která je základem exhaustivní metody:

Tvrzení 1. [12] *Jsou-li dány dvě nestejně veličiny a od větší odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit stále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než libovolná kladná veličina.*

Aplikaci tohoto tvrzení si ukážeme na konkrétním příkladu. Chceme vypočítat obsah S_A útvaru A pomocí vepisování (vyčerpávání) mnohoúhelníků P_1, P_2, \dots, P_n do útvaru A , kde mnohoúhelník P_{n-1} je obsažen v mnohoúhelníku P_n a všechny vrcholy P_{n-1} splývají s některými vrcholy P_n . Obsahy těchto mnohoúhelníků

známe. Tyto obsahy tvoří monotonní posloupnost $S_{P_1} < S_{P_2} < \dots < S_{P_n}$, pro kterou platí:

$$S_A - S_{P_1} < \frac{S_A}{2}; \quad S_A - S_{P_2} < \frac{S_A - S_{P_1}}{2} < \frac{S_A}{4}; \dots; \quad S_A - S_{P_n} < \frac{S_A}{2^n}.$$

Pro dostatečně velké n dle tvrzení 1 platí $S_A - S_{P_n} < \varepsilon$ pro libovolně malé kladné ε , což lze dnes napsat jako $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0$ platí: $|S_A - S_{P_n}| < \varepsilon$, stručně tedy můžeme psát:

$$S_A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{P_n}.$$

Jak teorie proporcí, tak exhaustivní metoda byly podrobněji rozpracovány v Eukleidových *Základech*, které byly sepsány okolo roku 300 před n. l. [7]. *Základy* se staly nejvýznamnějším dílem řecké matematiky, ze kterých čerpal nejen Cavalieri při svém budování teorie poměrů objemů těles a obsahů rovinných útvarů.

Exhaustivní metodu [7] také používal Archimédés (asi 287 – 212 před n. l.). Archimédés ve svých knihách: *Měření kruhu*, *Kvadratura paraboly*, *O kouli a válci*, *O spirálách*, *O kónoidech a sféroidech* používal exhaustivní metodu. V díle *O kónoidech a sféroidech* využívá pro důkaz vztahů pro objemy kónoidů a sféroidů rozřezání tělesa na tenké plátky [7]. Tuto techniku později používá i Kepler a Cavalieri. Při objevování nových poznatků Archimédés využíval tzv. metodu páky, jejíž princip spočíval v zachování rovnováhy na páce. Připomeňme nyní znění zákona rovnováhy na páce:

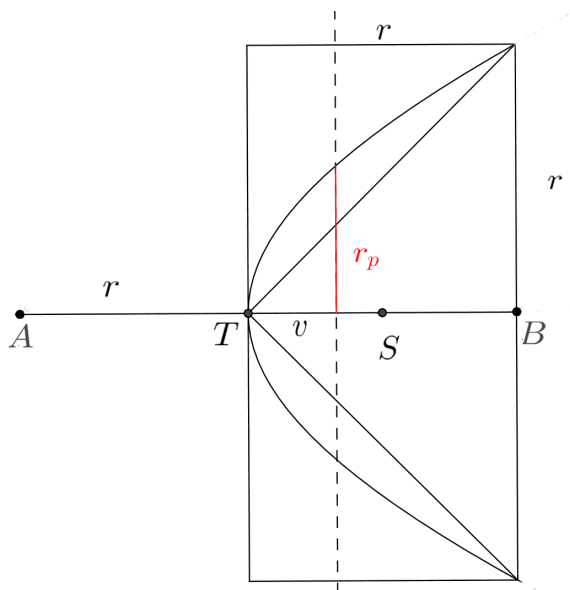
Je dána páka podepřená v bodě T . Na jedné straně páky od bodu T je umístěn objekt o hmotnosti m_1 , který je ve vzdálenosti r_1 od bodu T . Dále je dán jiný objekt o hmotnosti m_2 , který je umístěn na opačné straně páky ve vzdálenosti r_2 od T . Pak platí: $m_1 r_1 = m_2 r_2$.

Pro lepší názornost si uvedeme odvození objemu úseče rotačního paraboloidu z Archimédova spisu *Metoda* [8], které je založeno na zákonu rovnováhy na páce.

Rotační paraboloid

Věta 2. *Libovolná úseč rotačního paraboloidu, která je z tohoto paraboloidu oddělena rovinou kolmou na osu paraboloidu, má objem, který je $\frac{3}{2}$ objemu kužele vepsaného do úseče paraboloidu, která má shodnou podstavu s paraboloidem. Paraboloid a kužel mají společný vrchol.*

Je dána páka AB se středem v bodě T . Na páku umístíme válec, rotační paraboloid a kužel tak, aby osou těchto těles bylo rameno páky TB a vrchol rotačního paraboloidu, resp. kužele náležel bodu T (viz obrázek 1.1). Jelikož jsou všechna tato tělesa rotační, leží těžiště každého z nich na jejich společné ose TB .



Obrázek 1.1: Rotační paraboloid

Veďme rovinu ρ obsahující páku a protínající všechna tři tělesa. Pak řezem válce rovinou ρ je obdélník o stranách r a $2r$. Řezem rotačního paraboloidu rovinou ρ je parabola s vrcholem v bodě T a řezem kuželu rovinou ρ je trojúhelník o základně $2r$ (viz obrázek 1.1).

Dále proložme tělesa rovinou σ protínající páku (vlastně úsečku TB) ve vzdálenosti $v \in \langle 0, r \rangle$ od bodu T , která je kolmá na páku, pak rovina σ protne rotační paraboloid v kruhu o poloměru r_p (viz obrázek 1.1).

Z rovnice paraboly $y = ax^2$ vyplývá:

$$v = ar_p^2 \quad \text{a} \quad r = ar^2, \quad \text{kde} \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

Poměr těchto rovností je:

$$\frac{v}{r} = \frac{ar_p^2}{ar^2} = \frac{ar_p^2\pi}{ar^2\pi} = \frac{r_p^2\pi}{r^2\pi}.$$

Z toho vyplývá:

$$v \cdot \pi r^2 = r \cdot \pi r_p^2,$$

což můžeme interpretovat:

$$v \cdot S_{\text{podstava válce}} = r \cdot S_{\text{kruhový řez paraboloidu}}.$$

Řez rovinou σ byl veden v libovolné vzdálenosti $v \in \langle 0, r \rangle$ od bodu T . Každý z kruhových řezů ve válci je umístěn svým středem na rameni TB ve vzdálenosti v od bodu T . Všechny tyto kruhy vytvoří válec zůstávající na místě. Můžeme jej tedy považovat za umístěný na páce v jeho těžišti, tj. ve středu jeho osy, kterou je úsečka TB . Každý kruhový řez úseče paraboloidu je umístěn ve vzdálenosti r od vrcholu T . Všechny tyto kruhy vytvoří celou úseč, která je umístěna na druhé straně páky ve vzdálenosti r od bodu T (tj. v bodě A). Podle zákona rovnováhy na páce tedy platí:

$$\frac{1}{2}r \cdot V_{\text{válce}} = r \cdot V_{\text{paraboloid}},$$

$$\frac{1}{2}V_{\text{válce}} = V_{\text{paraboloid}}.$$

Pro objem paraboloidu tedy platí:

$$V_{\text{paraboloid}} = \frac{1}{2}V_{\text{válec}}.$$

Od 2. století před n. l. následovalo několik století, kdy docházelo k postupnému útlumu vývoje matematiky. Až v 16. století dochází k výraznému rozvoji v oblasti určování obsahů a objemů.

Johannes Kepler (1571 – 1630), který se zabýval určováním obsahů, resp. objemů, při svých výpočtech používal metodu rozdělování rovinného útvaru, resp. tělesa na nekonečně mnoho malých částí, jejichž obsah, resp. objem uměl vypočítat [13]. Těmto úvahám se říká infinitezimální a byly v té době využívány při zjišťování objemů a obsahů. Tyto myšlenky použil i Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) při formulaci svého tzv. Cavalieriho principu. Cavalieri ve srovnání s Keplerm rozkládal rovinné útvary, resp. tělesa určité dimenze na vrstvy dimenze o jedna nižší a k výpočtu obsahu, resp. objemu užíval porovnávání [11].

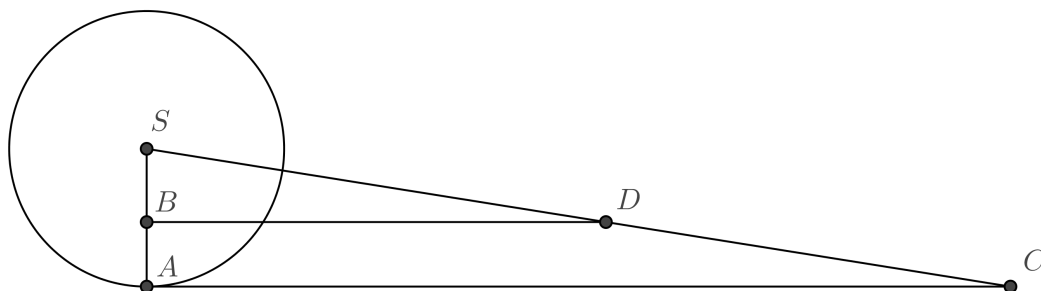
Bonaventura Francesco Cavalieri

Francesco Cavalieri se narodil roku 1598 v Miláně a jako malý chlapec přišel do kontaktu s řádem Jezuitů, do kterého vstoupil roku 1615 a přijal jméno Bonaventura. V letech 1616 až 1620 pobýval v Pise a stal se žákem B. Castellioho, který ho následně doporučil G. Galileovi. V roce 1629 byl jmenován profesorem na univerzitě v Bologni. V této funkci setrval až do své smrti [5].

V 17. století Evangelista Torricelli (1608 – 1648) rozkládal útvary na „nedělitelné“ křivky a úsečky. Jeho metodu¹ si ukážeme na výpočtu obsahu kruhu o poloměru r a středu S (viz obrázek 1.2).

¹Jedná se o velmi pěkný postup využitelný na základní a střední škole.

Výpočet obsahu kruhu – Torricelli



Obrázek 1.2: Výpočet obsahu kruhu pomocí „nedělitelných“ křivek

Podobně jako Kepler, který uvažoval úsečku AC , jejíž délka je rovna obvodu kruhu a je kolmá na jeho poloměr, si Torricelli vzal libovolný bod B na poloměru SA , kde bod A leží na obvodu daného kruhu. Bodem B vedl přímkou rovnoběžnou s AC a kolmou na SA . Poté využil podobnost $\triangle SAC$ a $\triangle SBD$, ze které usoudil, že $|BD| = 2\pi|SB|$. Z toho vyplývá, že systém „nedělitelných“ kružnic v kruhu odpovídá systému „nedělitelných“ úseček v $\triangle SAC$.

Obsah kruhu lze tedy dle Torricelliho vypočítat jako obsah trojúhelníku, kde délka základny je rovna obvodu kruhu a výška je rovna poloměru daného kruhu. Tedy $S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2} \text{základna} \cdot \text{výška} = S_{kruh}$. Z toho vyplývá, že $S_{kruh} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$.

Infinitezimální počet se v nadcházejících stoletích stal hlavním tématem na poli matematiky. Došlo k rozdělení infinitezimálního počtu podle úhlu pohledu na algebraický² a geometrický³. Mezi zastánce geometrického pohledu patří již zmíněný Cavalieri, Torricelli a Newton. Na druhou stranu Fermat, Descartes a Wallis jsou řazeni mezi zastánce algebraického pohledu [11].

V 17. a 18. století vzniká analytická geometrie (R. Descartes), zavádí se pravoúhlý systém os (Fermat) a rozvíjí se pohledy na infinitezimální počet [11]. Až příchodem G. W. Leibnitze a I. Newtona dochází ke vzniku diferenciálního a integrálního počtu a ke stanovení obecných postupů výpočtu derivací a primitivních funkcí. Následně v 19. století A. G. Cauchy zavádí aproximaci pomocí horních a dolních integrálních součtů. Tuto myšlenku následně zobecňuje B. Riemann a definuje tzv. Riemannův integrál [11]. Pro naše potřeby shrneme definici Riemannova určitého integrálu spojitě funkce omezené na uzavřeném intervalu.

²Algebraický přístup k infinitezimálnímu počtu je charakteristický užíváním algebraických výrazů, tedy matematickými zápisy tvořenými konstantami a proměnnými, mezi nimiž jsou pomocí algebraických operací a závorek vytvářeny platné vztahy. Význam těchto výrazů si lze představit pomocí jejich geometrické reprezentace.

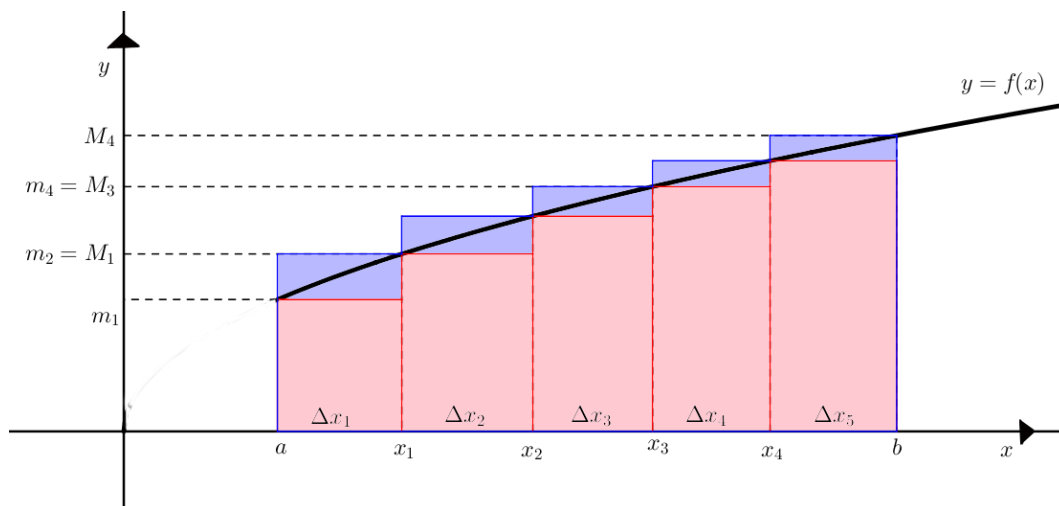
³Geometrický přístup k infinitezimálnímu počtu spočívá v geometrickém znázornění algebraického infinitezimálního počtu. Jedná se tedy o grafy daných algebraických výrazů (přesněji funkcí), které jsou umístěny do pravoúhlého kartézského systému.

Riemannův určitý integrál

Mějme funkci $y = f(x)$ spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$ a zaveďme následující pojmy důležité pro definici. Budeme vycházet ze studijního materiálu Vysokého učení technického v Brně [1]:

1. Dělení d intervalu $\langle a, b \rangle$:

Rozdělme interval $\langle a, b \rangle$ body $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ na n podintervalů (nemusí mít stejnou délku). Pak toto dělení označme d a délky intervalů označme $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$.



Obrázek 1.3: Dělení intervalu a integrální součet

2. Maximum a minimum funkce $y = f(x)$:

Funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Z toho vyplývá, že v něm nabývá maximální (označme ji M) a minimální hodnoty (označme ji m). Avšak funkce $f(x)$ je spojitá i na každém uzavřeném podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, tedy $f(x)$ nabývá na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$ maximální hodnoty M_i a minimální hodnoty m_i pro $i = 1, 2, \dots, n$.

3. Horní integrální součet $S(f, d)$ k dělení d :

$$S(f, d) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

4. Dolní integrální součet $s(f, d)$ k dělení d :

$$s(f, d) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

5. Horní integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$:

Horní integrál funkce $f(x)$ je definován jako infimum množiny všech horních součtů při všech možných dělení d , tedy

$$\inf_d S(f, d) = \int_a^b f(x) dx.$$

6. Dolní integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b \rangle$:

Dolní integrál funkce $f(x)$ je definován jako supremum množiny všech dolních součtů při všech možných děleních d , tedy

$$\sup_d s(f,d) = \int_a^b f(x)dx.$$

Definice 1. [1, def. 19.2, str. 2] *Je-li*

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx},$$

pak společnou hodnotu těchto integrálů nazýváme integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b \rangle$ a funkci $f(x)$ nazýváme riemannovsky integrovatelnou na $\langle a,b \rangle$.

2. Cavalieriho pojetí

B. F. Cavalieri se proslavil zejména spisem *Geometrie*, který vyšel v roce 1635. Skládal se ze sedmi kapitol a je důležitým přínosem v matematice, neboť zde popsal své pojetí Cavalieriho principu. Využíval přitom poznatky Eudoxovy teorie proporcí nebo Eukleidových poměrů.

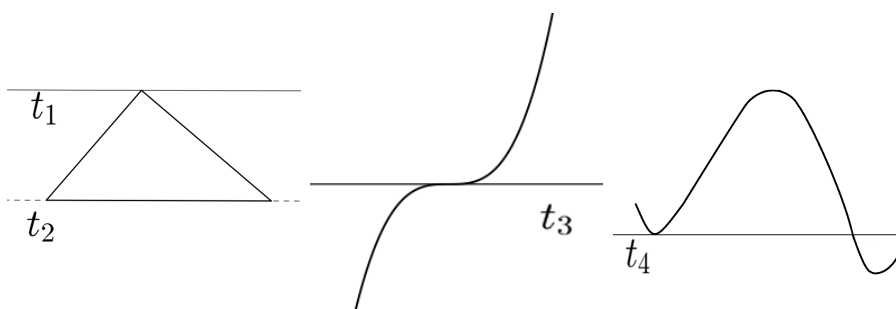
V této kapitole si shrneme klíčové Cavalieriho myšlenky vedoucí k dnešní formulaci Cavalieriho principu, kde závěrečnou myšlenkou bude věta připomínající dnešní důsledek Cavalieriho principu (viz kapitola 6). Ke správnému pochopení jeho myšlenek si nejdříve zavedeme pojmy např.: tečny, „všechny úsečky“, „všechny roviny“, pomocí nich formuloval své myšlenky.

2.1 Zavedení pojmů

2.1.1 Tečna

Tečnou Cavalieri nazýval přímkou dotýkající se křivky a náležící stejné rovině jako daná křivka. „Dotykem“ přímky a křivky rozuměl, narozdíl od dnešního pojetí, následující čtyři situace [5]:

- „Dotykem“ přímky a křivky je bod (např. tečna t_1 na obrázku 2.1).
- „Dotykem“ přímky a křivky je úsečka (viz tečna t_2 na obrázku 2.1).
- Křivka leží na jedné straně přímky. „Dotykem“ je bod (viz tečna t_4 na obrázku 2.3).
- Křivka leží na obou stranách přímky. „Dotýkají se“ v bodě nebo v úsečce (viz tečna t_3 na obrázku 2.2).

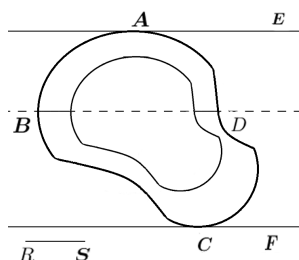


Obrázek 2.1: Tečny t_1, t_2 ke křivce Obrázek 2.2: Tečna t_3 ke křivce Obrázek 2.3: Tečna t_4 ke křivce

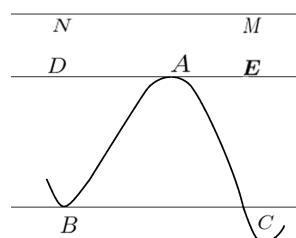
Cavalieri zahrnul tyto případy do pojetí tečny, aby jeho myšlenky byly platné např. pro trojúhelníky a aby pomocí pojmu tečna mohl popsat následující geometrickou situaci:

Je dán rovinný útvar $ABCD$ a směr RS , pak rovinný útvar $ABCD$ má dvě tečny AE a CF rovnoběžné se směrem RS . Tyto tečny Cavalieri nazval protilehlé tečny [5]. Nicméně všechny přímky rovnoběžné

se směrem RS a procházející rovinným útvarem $ABCD$ mezi tečnami AE a CF (např.: BD) protnou rovinný útvar v úsečkách (viz obrázek 2.4).



Obrázek 2.4:
Protilehlé tečny



Obrázek 2.5: Podoba věty o střední hodnotě.

Cavalieri chtěl zajistit existenci protilehlých tečen k danému útvaru a směru, a tak zformuloval větu připomínající dnešní Lagrangeovu větu o střední hodnotě¹:

Je dána křivka BAC a přímka BC , která tuto křivku protíná (viz obrázek 2.5). Dále je dána přímka NM rovnoběžná s BC , která se pohybuje buď od přímky BC , nebo naopak k ní. Pak přímka NM se v určité pozici stane tečnou křivky BAC [5].

2.1.2 „Všechny řezy“

Název této podkapitoly je obecným označením pojmů, s nimiž se nyní seznámíme. Cavalieri slovo řez nepoužíval. Místo tohoto slova používal označení geometrického útvaru, jehož tvar měl daný řez. K objasnění používal pro nás již známý pojem protilehlé tečny.

Protilehlé tečny využil k objasnění pojmu „všechny úsečky“, kde protilehlými tečnami proložil navzájem rovnoběžné roviny a nechal jednu rovinu, aby se pohybovala k druhé rovině. Po celou dobu pohybu byly roviny rovnoběžné.

Průnikem pohybující se roviny a útvaru získával úsečky. Množinu získaných úseček ležících mezi rovnoběžnými rovinami nazval „všechny přímky“. Nejedná se o počet přímek mezi rovinami, ale o část prostoru vymezenou těmito úsečkami. Analogický postup použil u těles, kde průnikem roviny a tělesa získal opět rovinu (někdy byl rovinou čtverec). Množinu takto získaných rovin pak nazýval „všechny roviny“ (pro krychli: „všechny čtverce“).

Myšlenka prokládat útvary rovinou je základem pro formulaci Cavalieriho principu. Pro získání úplného Cavalieriho principu musíme zavést poměr mezi útvary stejného druhu, který v té době Cavalieri používal. V dnešní době se místo poměru mezi útvary používá poměr délek, obsahů a objemů těchto těles.

¹Nechť funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že platí $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

2.2 Vztahy mezi řezy

K zavedení poměrů Cavalieri využil Eudoxovu teorii proporcí uvedenou v páté knize Eukleidových *Základů* [12]. Lze tedy mezi jejich myšlenkami najít podobnost, zejména úvodní Cavalieriho definice vycházejí z Eudoxovy teorie proporcí.

2.2.1 Úvodní Cavalieriho definice

Jsou dány libovolné veličiny A a B stejného druhu, pak pro A a B platí:

- $A < B$ nebo $A = B$ nebo $A > B$,
- A a B mohou být sečteny (označme $A + B$),
- pokud $A > B$, A může být odečteno od B (označme $A - B$),
- A a B mohou být v poměru (označme $A : B$).

Cavalieri namísto veličin používal útvary, jejichž druh určoval podle příslušnosti k jedné ze tří kategorií: jednorozměrné, dvourozměrné a třírozměrné geometrické útvary. Celou teorii, která je základem dnešního Cavalieriho principu, následně sepsal ve své knize *Geometrie*.

2.2.2 Základy Cavalieriho metody „nedělitelných“

První základní věta stanovuje vztah mezi obsahem geometrického útvaru a „všemi úsečkami“, podobně také mezi objemem geometrického útvaru a „všemi rovinami“:

$$F_1 : F_2 = \theta_{F_1}(l) : \theta_{F_2}(l) \quad V.1$$

(F_i označuje obsah i -tého geometrického útvaru)

($\theta_{F_i}(l)$ označuje libovolnou úsečku ze „všech úseček“ útvaru F_i),

kde poměr délek² $\theta_{F_1}(l) : \theta_{F_2}(l)$ je stejný pro všechny úsečky l náležící útvaru F_i a úsečky jsou v obou útvarech vedeny ve stejné výšce.

$$S_1 : S_2 = \theta_{S_1}(p) : \theta_{S_2}(p) \quad V.2$$

(S_i označuje objem i -tého geometrického útvaru)

($\theta_{S_i}(p)$ označuje libovolnou rovinu ze „všech rovin“ útvaru F_i),

kde poměr ploch $\theta_{S_1}(p) : \theta_{S_2}(p)$ je stejný pro všechny roviny p náležící útvaru S_i a roviny obou útvarů jsou vedeny ve stejné výšce.

Druhá základní věta připomíná důsledek dnešního Cavalieriho principu (viz 6). Uveďme její znění jak pro rovinné geometrické útvary, tak i pro geometrické útvary v prostoru:

Cavalieriho princip pro útvary v rovině. *Pokud dva rovinné útvary mají stejnou výšku a pokud řezy vzniklé průnikem přímky rovnoběžné se základnou a rovinného útvaru vedené ve stejné vzdálenosti od základny mají daný konstantní poměr, pak rovinné útvary jsou ve stejném poměru jako řezy.*

²Délka úsečky a samotná úsečka se v té době nerozlišovaly, proto budeme v této části práce oba pojmy volně zaměňovat.

Cavalieriho princip pro útvary v prostoru. *Pokud dvě tělesa mají stejnou výšku a pokud řezy vzniklé průnikem roviny rovnoběžné se základnou a tělesa vedené ve stejné vzdálenosti od základny mají daný konstantní poměr, pak tělesa jsou ve stejném poměru jako řezy.*

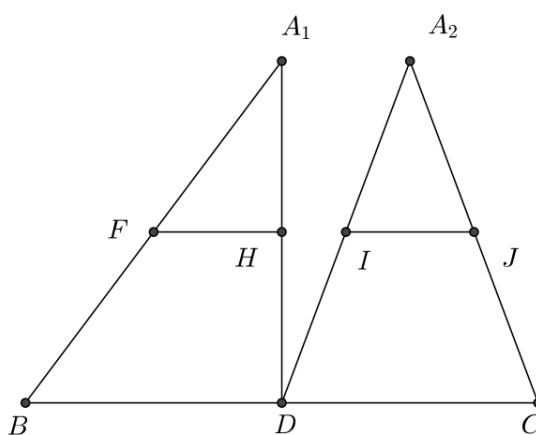
Ukažme si význam věty pro rovinné útvary na příkladu (viz obrázek 2.6):

$$FH : IJ = BD : DC \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle BDA_1} : S_{\triangle DCA_2} = BD : DC, \quad V.3, V.4$$

kde FH , resp. IJ je libovolná úsečka ze „všech úseček“, nebo-li řez vedený v libovolné výšce $\triangle DCA_1$, resp. $\triangle DCA_2$.

Z toho vyplývá (F_1 označuje $\triangle BDA_1$, F_2 označuje $\triangle DCA_1$):

$$F_1 \cong F_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_{F_1}(l) \cong \theta_{F_2}(l). \quad V.5$$



Obrázek 2.6: Ukázka věty 2.2.2

Vztah V.5 popisující shodnost řezů vyplývající ze shodnosti útvarů nehrál v Cavalieriho teorii velkou roli. Cavalieri používal jen následující implikaci [5]:

$$F_1 \cong F_2 \Rightarrow \theta_{F_1}(l) = \theta_{F_2}(l). \quad V.6$$

Jsou-li útvary F_1 a F_2 shodné, pak libovolné dvě úsečky vedené v dané výšce l mají stejnou délku.

Cavalieri dále předpokládal vlastnost sčítání útvarů, čímž myslel sjednocení útvarů, a porovnávání útvarů, čímž navazoval na Eudoxovu teorii proporcí [5]:

$$F \cong F_1 + F_2 \Rightarrow \theta_F(l) = \theta_{F_1}(l) + \theta_{F_2}(l). \quad V.7$$

Na závěr Cavalieri uvedl větu popisující vztah mezi základnami a „všemi úsečkami“:

Pokud dva útvary F_1 a F_2 mají základnu na stejné přímce, mají stejnou výšku a základny l_1 a l_2 jsou v daném poměru, pak $\theta_{F_1}(l)$ a $\theta_{F_2}(l)$ jsou též poměru:

$$l_1 : l_2 = \theta_{F_1}(l) : \theta_{F_2}(l). \quad V.8$$

Význam výše uvedených vět V.1 až V.4 jsou základem pro dnešní Cavalieriův princip. Ostatní věty sloužily k dokázání prvních čtyř vět, kde všechny věty byly dokazovány za pomoci obrázku a předpokládala se čtenářova znalost problému.

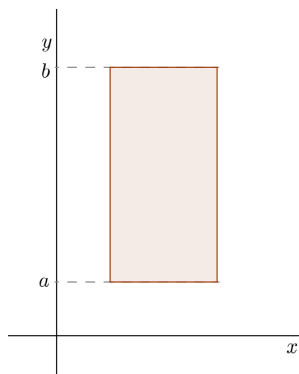
3. Důkaz Cavalieriho principu

Nyní dokážeme Cavalieriho princip. Při důkazu se budeme soustředit především na Cavalieriho princip pro rovinné útvary, aby byl důkaz proveditelný na některých středních školách, protože hlavním nástrojem používaným při důkazu bude Riemannův integrál funkce jedné proměnné, který se často vyučuje pouze ve volitelných matematických seminářích v posledních ročnících středních škol. Kdybychom chtěli dokázat Cavalieriho princip pro tělesa, tak bychom museli použít dvojný Riemannův integrál, což je nad rámec středoškolské výuky. Proto si důkaz Cavalieriho principu pro tělesa v závěru této kapitoly jen nastíníme.

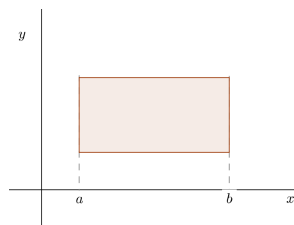
3.1 Rovinné útvary

Pro názornost důkazu umístíme útvary do souřadnicového systému, ve kterém zaměníme osu x s osou y :

Je dán libovolný rovinný útvar (viz obrázek 3.1) umístěný do souřadnicového systému a ohraničený rovnoběžnými přímkami $y = a$ a $y = b$, tj. o výšce $b - a$. Záměnou os souřadnic zobrazíme útvar v osově souměrnosti, kde osou souměrnosti je osa prvního a třetího kvadrantu (viz obrázek 3.2). Tedy místo výšky $b - a$ budeme uvažovat šířku rovinného útvaru $b - a$.



Obrázek 3.1: Rovinný útvar před záměnou os souřadnic.



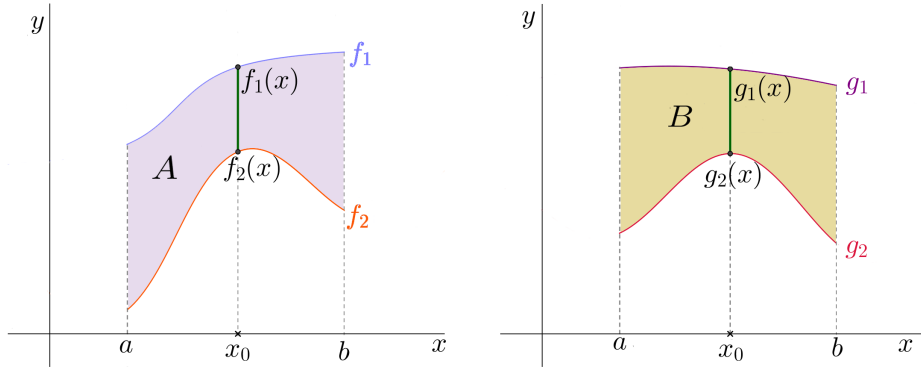
Obrázek 3.2: Rovinný útvar po záměně os souřadnic.

Nyní uvedeme geometrickou představu obecného znění Cavalieriho principu:

Jsou dány rovinné útvary A a B takové, že (viz obrázek 3.3):

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_2(x) \leq y \leq f_1(x)\},$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}.$$



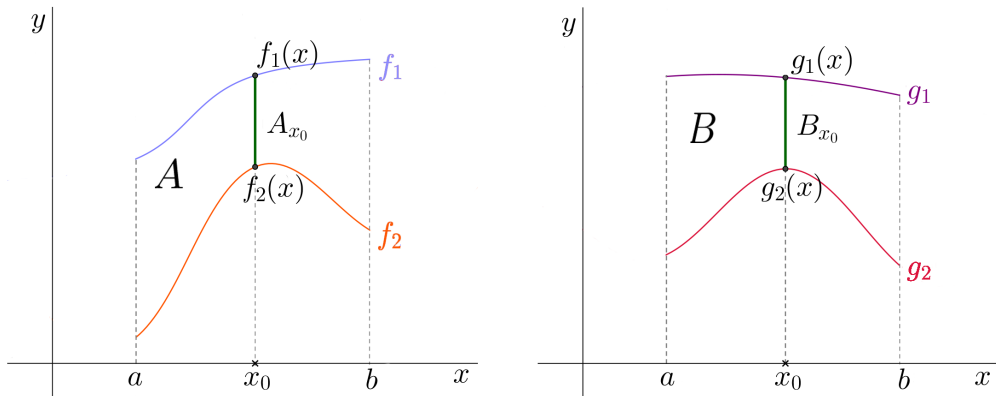
Obrázek 3.3: Útvary A a B ohraničené funkcemi jedné proměnné

Útvary A a B mají stejnou šířku $b - a$ a útvar A , resp. B je tvořen spojitými funkcemi $f_1(x), f_2(x)$, resp. $g_1(x), g_2(x)$, pro které platí $f_1(x) > f_2(x)$, resp. $g_1(x) > g_2(x)$ (viz obrázek 3.3). Proložme útvarem A , resp. B libovolnou přímkou p kolmou na osu x procházející bodem $x_0 \in \langle a, b \rangle$ tak, že A_{x_0} , resp. B_{x_0} je řezem útvaru A , resp. B přímkou p . Tedy (viz obrázek 3.4):

$$A_{x_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = x_0, f_2(x) \leq y \leq f_1(x)\}$$

a

$$B_{x_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = x_0, g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}.$$



Obrázek 3.4: Řezy rovinných útvarů A, B přímkou $x = x_0$

Předpokládejme, že pro řezy A_{x_0}, B_{x_0} platí: $|A_{x_0}| = |B_{x_0}|$. Z definice útvarů A a B plyne, že délky řezů A_{x_0}, B_{x_0} lze vyjádřit:

$$|A_{x_0}| = f_1(x) - f_2(x)$$

a

$$|B_{x_0}| = g_1(x) - g_2(x),$$

(3.1)

pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$.

Obecné znění Cavalieriho principu pro rovinné útvary. *Nechť $a < b$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_2(x) \leq y \leq f_1(x)\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}$ jsou geometrické útvary v rovině ohraničené spojitými funkcemi $f_1, f_2 : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{R}$ a $f_1(x) > f_2(x)$ na $\langle a, b \rangle$, resp. $g_1, g_2 : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{R}$ a $g_1(x) > g_2(x)$ na $\langle a, b \rangle$. Tyto funkce leží mezi rovnoběžnými přímkami $x = a$ a $x = b$, útvary mají tedy stejnou šířku¹. Označme A_{x_0} , resp. B_{x_0} řez rovinného útvaru A , resp. B libovolnou přímkou $x = x_0$, kde $x_0 \in \langle a, b \rangle$, tj. $A_{x_0} \subset A$, resp. $B_{x_0} \subset B$. Pokud $|A_{x_0}| = |B_{x_0}|$ pro $\forall x_0 \in \langle a, b \rangle$, pak $S_A = S_B$.*

Chceme dokázat, že pokud $|A_{x_0}| = |B_{x_0}|$, pak $S_A = S_B$:

Důkaz.

Proložíme-li oběma útvary libovolnou přímkou $x_0 \in \langle a, b \rangle$, pak na základě předpokladu $|A_{x_0}| = |B_{x_0}|$ a (3.1) platí

$$f_1(x) - f_2(x) = g_1(x) - g_2(x).$$

Nyní musíme dokázat, že obsahy obou útvarů jsou shodné. K důkazu využijeme geometrický význam Riemannova integrálu (viz kapitola 1), který nám, zjednodušeně řečeno, udává obsah plochy pod grafem spojitě nezáporné funkce. Odtud víme, že obsah plochy rovinného útvaru A , resp. B vymezeného spojitými funkcemi $f_1(x)$ a $f_2(x)$, resp. $g_1(x)$ a $g_2(x)$ je roven obsahu plochy pod grafem funkce $f_1(x)$, resp. $g_1(x)$ mínus obsah plochy pod grafem funkce $f_2(x)$, resp. $g_2(x)$. Tyto obsahy lze zapsat následovně:

$$S_A = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx \quad \text{a} \quad S_B = \int_a^b g_1(x) dx - \int_a^b g_2(x) dx.$$

Linearita Riemannova integrálu [2]: Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Z linearitě Riemannova integrálu vyplývá:

$$S_A = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \quad \text{a} \quad S_B = \int_a^b (g_1(x) - g_2(x)) dx.$$

Protože $f_1(x) - f_2(x) = g_1(x) - g_2(x)$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$, jsou si integrandy obou integrálů sobě rovny, proto jsou si rovny i jejich integrály:

$$S_A = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int_a^b (g_1(x) - g_2(x)) dx = S_B.$$

Obsahy obou útvarů jsou si tedy rovny, dostáváme tak platnost tvrzení $S_A = S_B$, jež jsme měli dokázat. □

¹Protože jsme zaměnili osy souřadnicového systému, tak oba útvary musí mít stejnou šířku. Kdybychom jej nezaměnili, jednalo by se o shodnou výšku útvarů.

3.2 Tělesa

Důkaz pro tělesa bude probíhat podobně jako pro rovinné útvary, tedy opět zaměníme osy souřadnic. V tomto případě zaměníme osy x , z , a tím místo výšky těles budeme uvažovat jejich šířku. Mějme tedy tělesa A a B o stejné šířce $b - a$. Tělesa veďme řezy rovinami kolnými na rovinu podstavy. Jednotlivými řezy tělesa budou rovinné útvary A_{x_0} a B_{x_0} , kde $S_{A_{x_0}} = S_{B_{x_0}}$ pro $x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Jsou dána tělesa A a B taková, že:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_1(x), 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

a

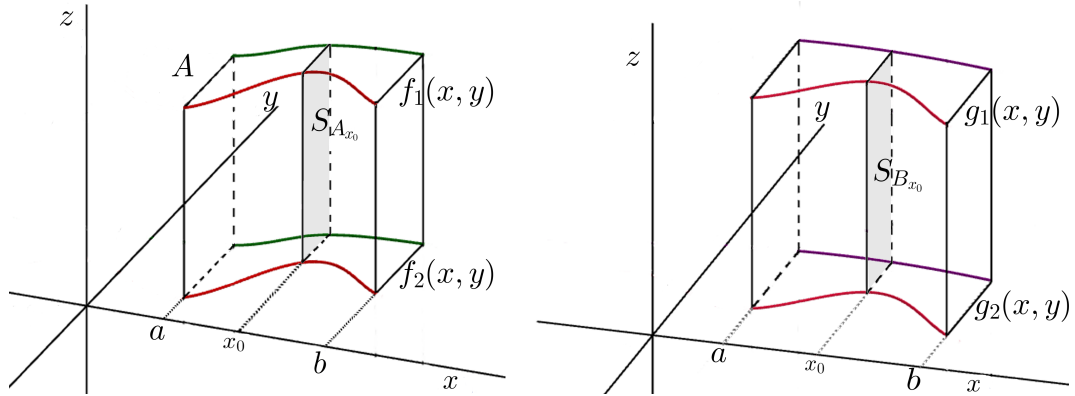
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \psi_2(x) \leq y \leq \psi_1(x), 0 \leq z \leq g(x, y)\},$$

kde $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ jsou spojitě funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí: $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$, $\psi_1(x) > \psi_2(x)$. Dále předpokládáme, že $\max f(x, y) = \max g(x, y)$, kde $a < x < b$ a $\varphi_2(x) < y < \varphi_1(x)$ pro $f(x, y)$, resp. $\psi_2(x) < y < \psi_1(x)$ pro $g(x, y)$ (viz obrázek 3.5). Veďme útvary A a B libovolnou rovinou $\rho : x = x_0$ kolmou na rovinu podstavy tak, že

$$A_{x_0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_0, \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_1(x), 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

$$B_{x_0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_0, \psi_2(x) \leq y \leq \psi_1(x), 0 \leq z \leq g(x, y)\}$$

jsou po řadě řezy útvarů A , B rovinou $\rho : x = x_0$. A_{x_0} , B_{x_0} jsou tedy řezy vedené ve stejné vzdálenosti $x_0 - a$ od bodu a a předpokládáme, že $S_{A_{x_0}} = S_{B_{x_0}}$.



Obrázek 3.5: Funkce dvou proměnných ohraničující tělesa A , B

Obecné znění Cavalieriho principu pro tělesa. *Nechť $a < b$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_1(x), 0 \leq z \leq f(x, y)\}$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \psi_2(x) \leq y \leq \psi_1(x), 0 \leq z \leq g(x, y)\}$ jsou tělesa ohraničená částmi rovin $f : M \mapsto \mathbb{R}$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_1(x)\}$, resp. $g : N \mapsto \mathbb{R}$, kde $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \psi_2(x) \leq y \leq \psi_1(x)\}$ a $\max_M f(x, y) = \max_N g(x, y)$. Označme A_{x_0} , resp. B_{x_0} řez rovinného útvaru A , resp. B rovinou $\rho : x = x_0$ ve vzdálenosti $x_0 - a$ od bodu a , kde $x_0 \in \langle a, b \rangle$, a $A_{x_0} \subset A$, resp. $B_{x_0} \subset B$. Pokud $S_{A_{x_0}} = S_{B_{x_0}}$ pro $\forall x_0 \in \langle a, b \rangle$, pak $V_A = V_B$.*

Chceme dokázat, že pokud $S_{A_{x_0}} = S_{B_{x_0}} \quad \forall x_0 \in \langle a, b \rangle$, pak $V_A = V_B$.

Důkaz.

Objem těles V_A a V_B lze vyjádřit pomocí dvojného integrálu:

$$V_A = \iint_M f(x,y) dx dy \quad \text{a} \quad V_B = \iint_N g(x,y) dx dy, \quad (3.2)$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_1(x)\}$, $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \psi_2(x) \leq y \leq \psi_1(x)\}$. Tento určitý integrál vypočítáme pomocí Fubiniovy věty.

Věta 3 (Fubiniova věta). [9] *Nechť funkce f je spojitá v uzavřené oblasti $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \varphi_2(x) < y < \varphi_1(x), \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}(a,b)\}$. Potom*

$$\iint_M f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

Z výše uvedené Fubiniovy věty je vidět, že výpočet dvojného integrálu je možno nahradit postupným výpočtem dvou jednorozměrných integrálů. Tedy výše uvedenou funkci $f(x,y)$ nejdříve integrujeme podle proměnné y (x považujeme za konstantu), čímž získáme obsah řezu $f(x,y)$. Následně funkci integrujeme podle proměnné x . Tím dostaneme objem části prostoru pod plochou $f(x,y)$.

Z toho vyplývá, že objem tělesa A , resp. B vymezeného plochami $f(x,y)$ a rovinou xy , resp. $g(x,y)$ a rovinou xy vypočítáme jako objem části prostoru pod plochou $f(x,y)$, resp. $g(x,y)$. Tedy objemy V_A a V_B jsou rovny:

$$V_A = \int_a^b \left(\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

a

$$V_B = \int_a^b \left(\int_{\psi_2(x)}^{\psi_1(x)} g(x,y) dy \right) dx.$$

Z (3.2), Fubiniovy věty plyne, že:

$$V_A = \int_a^b \left(\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

a

$$V_B = \int_a^b \left(\int_{\psi_2(x)}^{\psi_1(x)} g(x,y) dy \right) dx,$$

kde $\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y) dx = S_{A_{x_0}}$ a $\int_{\psi_2(x)}^{\psi_1(x)} g(x,y) dx = S_{B_{x_0}}$.

Protože předpokládáme, že $S_{A_{x_0}} = S_{B_{x_0}}$, tak:

$$\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y) dy = \int_{\psi_2(x)}^{\psi_1(x)} g(x,y) dy,$$

integrandy obou integrálů jsou si tedy rovny. Odtud plyne:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\psi_2(x)}^{\psi_1(x)} g(x,y) dy \right) dx.$$

Nyní aplikací Fubiniovy věty dostáváme, že:

$$\iint_N f(x,y) dy dx = \iint_M g(x,y) dy dx.$$

Objemy těles A a B jsou si tedy rovny:

$$V_A = V_B.$$

□

4. Využití na střední škole

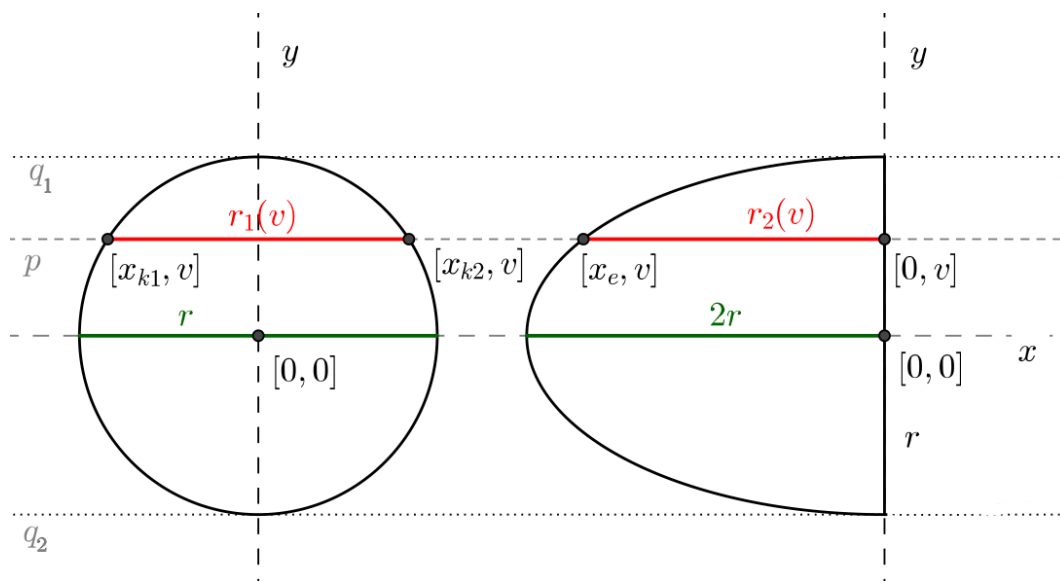
V této kapitole si uvedeme několik příkladů výpočtů obsahů, resp. objemů, v nichž je využit Cavalieriho princip. Náměty některých příkladů, např.: houba, cykloida, kulový prstenec, anuloid jsou převzaty z práce Branimira Dakiće [6].

Nyní uvedeme jednotlivá znění Cavalieriho principu, tedy jeho znění pro rovinné útvary a pro tělesa. Obě znění jsou následně znázorněna na příkladech. Součástí příkladu pro znázornění Cavalieriho principu pro rovinné útvary je důkaz, že pokud jsou si rovny délky řezů jednotlivých útvarů vedených v libovolné výšce, pak jsou si rovny obsahy těchto útvarů.

Cavalieriho princip pro rovinné útvary:

Věta 4. *Rovinné útvary ležící v jedné rovině mezi dvěma rovnoběžnými přímkami mají stejný obsah, pokud úsečky, které jsou průnikem rovinných útvarů a přímkou rovnoběžné s přímkami vymezujícími rovinné útvary mají stejnou délku.*

Mějme tedy dva rovinné útvary, například kruh o poloměru r a polovina elipsy s hlavní poloosou $2r$ a s vedlejší poloosou r (viz obrázek 4.1). Oba útvary mají tedy stejnou výšku $2r$.



Obrázek 4.1: Základní ilustrace pro využití Cavalieriho principu v rovině

Oba tyto útvary leží mezi přímkami q_1, q_2 (viz obrázek 4.1), které jsou rovnoběžné s hlavní poloosou poloviny elipsy. Pro polovinu elipsy platí, že povedeme-li přímkou p rovnoběžnou s přímkami q_1 a q_2 (tedy i s osou x) v libovolné vzdálenosti $v \in \langle 0, r \rangle$ od osy x , pak průnik přímkou p a kružnice (označme jej $r_1(v)$) má stejnou délku jako úsečka, která je průnikem téže přímkou a poloviny elipsy (označme ji $r_2(v)$).

Chceme dokázat, že $|r_1(v)| = |r_2(v)|$. Odtud z Cavalieriho principu plyne $S_{\text{kruh}} = \frac{1}{2}S_{\text{polovina elipsy}}$:

- Víme:

Je dána polovina elipsy e se středovou rovnicí $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, kde $a = 2r$, $b = r$, a kružnice k se středovou rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$. Řez $r_1(v)$ má krajní body $[x_{k1}, y_k]$, $[x_{k2}, y_k]$ náležející kružnici k a řez $r_2(v)$ má krajní body $[x_{e1}, y_e]$, $[0, y_e]$ náležející polovině elipsy. Tedy y -ová souřadnice krajních bodů řezů je rovna výšce v , v níž jsou řezy vedeny (viz obrázek 4.1), a x -ové souřadnice lze vyjádřit ze středových rovnic útvarů:

$$k : x_{ki}^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad |x_{ki}| = \sqrt{r^2 - v^2},$$

$$e : r^2x_e^2 + (2r)^2v^2 = r^2(2r)^2 \quad \Rightarrow \quad |x_e| = 2\sqrt{r^2 - v^2}.$$

Tedy:

$$k : x_{k1} = -\sqrt{r^2 - v^2} \quad \text{a} \quad x_{k2} = \sqrt{r^2 - v^2},$$

$$e : x_{e1} = -2\sqrt{r^2 - v^2}.$$

- Dokažme, že délky řezů jsou si rovny:

$$k : |r_1(h)| = |x_{2k} - x_{1k}| = 2\sqrt{r^2 - v^2},$$

$$e : |r_2(h)| = |x_{1e}| = 2\sqrt{r^2 - v^2}.$$

Délky řezů $r_1(x)$ a $r_2(x)$ jsou si tedy rovny.

- Použijeme Cavalieriho princip:

Z rovnosti řezů $r_1(x)$, $r_2(x)$ vyplývá:

$$S_{\text{kruh}} = S_{\text{polovina elipsy}},$$

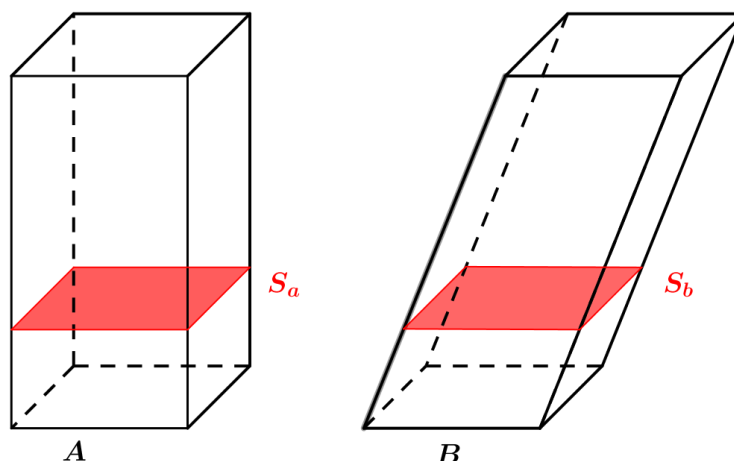
$$\text{kde } S_{\text{kruh}} = \pi r^2 \text{ a } S_{\text{polovina elipsy}} = \frac{1}{2}\pi ab = \frac{1}{2}\pi 2r^2 = \pi r^2.$$

Poznámka. Mírně odlišné odvození vzorce pro obsah elipsy je uvedeno v podkapitole 4.1.4.

Cavalieriho princip pro tělesa:

Věta 5. [10] *Tělesa ležící mezi dvěma rovnoběžnými rovinami mají stejný objem, pokud části rovin, které jsou průnikem těles a roviny rovnoběžné s rovinami vymezujícími tělesa mají stejný obsah.*

Z právě uvedené formulace Cavalieriho principu pro výpočet objemů těles vyplývá, že jsou dána dvě tělesa se shodnou výškou v ležící mezi dvěma rovnoběžnými rovinami. Podstavy těles tedy leží v jedné rovině (označme ji ρ). Proložíme-li tělesa rovinu α v libovolné výšce $h \in \langle 0, v \rangle$, která je rovnoběžná s rovinou ρ , a průnik roviny α s tělesy označme $S_a(h)$, $S_b(h)$, pak $S_a(h) = S_b(h)$ pro $h \in \langle 0, v \rangle$. Tedy objemy obou těles jsou si rovny (viz obrázek 4.2).



Obrázek 4.2: Úvodní obrázek pro využití Cavalieriho principu pro určování objemů těles

Nyní uvažujme taková tělesa, pro něž platí $S_a = kS_b$, kde $k \in \mathbb{R}^+$, potom $k = \frac{S_a}{S_b}$, kde k je poměr obsahů řezů obou těles. Potom $k = \frac{V_A}{V_B}$ tedy $V_A = kV_B$, kde $k \in \mathbb{R}^+$. Tato myšlenka vyplývá z Cavalieriho principu pro tělesa a lze ji zformulovat do následující věty.

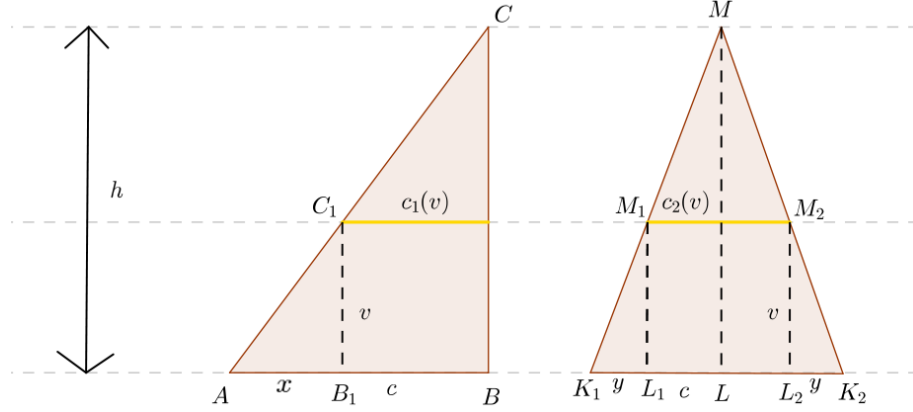
Věta 6. *Nechť jsou dána dvě tělesa se stejnou výškou a řezy těles rovnoběžné s jejich podstavami jsou ve stejné vzdálenosti od podstavy. Jestliže obsahy řezů těles mají vždy stejný poměr, potom objemy těles jsou v témže poměru.*

Poznámka. Analogické znění platí pro geometrické útvary v rovině.

4.1 Aplikace Cavalieriho principu na výpočet obsahu rovinných útvarů

4.1.1 Trojúhelník

Je dán pravoúhlý $\triangle ABC$ s pravým úhlem při vrcholu B a základnou AB , kterou označíme c . Dále je dán obecný $\triangle K_1K_2M$ se základnou K_1K_2 , pro kterou platí $|K_1K_2| = |AB|$. Oba trojúhelníky mají stejnou výšku h a jejich základny leží na jedné přímce (viz obrázek 4.3).



Obrázek 4.3: Cavalieriho princip pro výpočet obsahu trojúhelníku

Chceme odvodit vzorec pro výpočet obsahu obecného trojúhelníku, jestliže víme, že obsah pravoúhlého trojúhelníku je roven polovině obsahu obdélníku o stranách a , b ($S = ab$). V tomto případě $a = c$ a $b = h$. Z toho vyplývá, že obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC je $\frac{1}{2}ch$ ($S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ch$).

Veďme přímku p v libovolné vzdálenosti v ($v \in \langle 0, h \rangle$) od přímky procházející základnami rovinných útvarů, která je s ní rovnoběžná. Pak průnikem přímky p a $\triangle ABC$, resp. $\triangle K_1K_2M$ je úsečka $c_1(v)$, resp. $c_2(v)$, která je ve vzdálenosti v od c .

Víme, že pro trojúhelníky ABC a K_1K_2M platí $|AB| = |K_1K_2|$. Využitím Cavalieriho principu dostaneme: $S_{ABC} = S_{K_1K_2M}$, pokud pro úsečky $c_1(v)$ a $c_2(v)$ bude platit, že $|c_1(v)| = |c_2(v)|$. Nyní dokážeme, že skutečně $|c_1(v)| = |c_2(v)|$.

Z podobnosti $\triangle K_1LM$ a $\triangle K_1L_1M_1$ plyne:

$$\frac{h}{\frac{c}{2}} = \frac{v}{y} \Rightarrow y = \frac{vc}{2h},$$

$$c_2(v) = c - 2y = c - 2 \frac{vc}{2h} = c - \frac{vc}{h}.$$

Z podobnosti $\triangle ABC$ a $\triangle AB_1C_1$ plyne:

$$\frac{h}{c} = \frac{v}{x} \Rightarrow x = \frac{vc}{h},$$

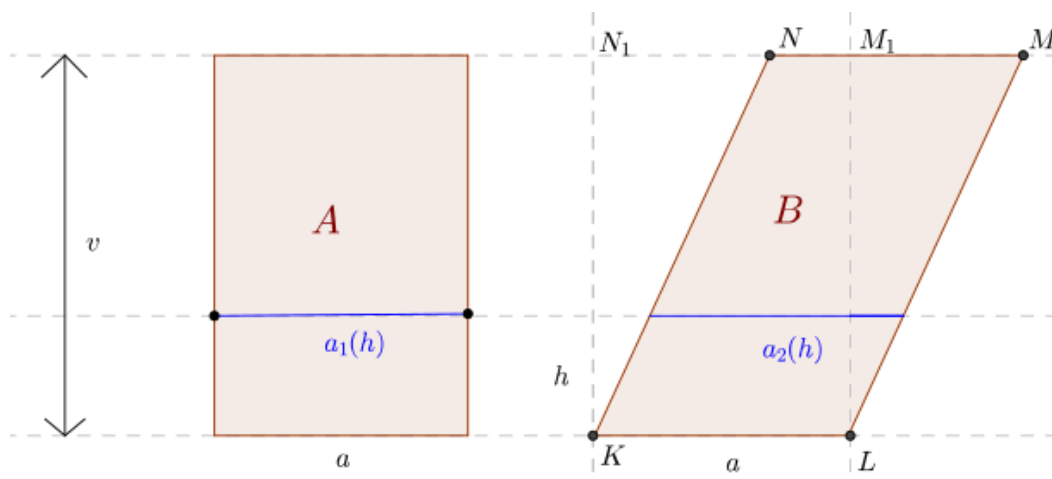
$$c_1(v) = c - x = c - \frac{vc}{h}.$$

Tedy $|c_1(v)| = |c_2(v)|$, z čehož vyplývá, že $S_{ABC} = S_{K_1K_2M}$. Pro obecné trojúhelníky platí, že jejich obsah můžeme vypočítat jako polovina součinu základny a výšky daného trojúhelníku.

4.1.2 Rovnoběžník

Mějme obdélník A a rovnoběžník B , které mají výšku v a základnu a . Základny obou těchto útvarů leží na téže přímce q . Rovinný útvar A je obdélník s obsahem $S_A = av$, kde $b = v$, a útvar B je rovnoběžník, jehož obsah chceme

zjistit. Vedme přímku p rovnoběžnou s q v libovolné vzdálenosti $h \in \langle 0, v \rangle$ od q tak, aby byl průnik přímky a útvaru neprázdný. Průnik přímky p a obdélníku A , resp. rovnoběžníku b označme $a_1(h)$, resp. $a_2(h)$, kde $h \in \langle 0, v \rangle$. Ze znění Cavalieriho principu víme, že $S_A = S_B$, pokud pro $\forall a_1(h), a_2(h)$, kde $h \in \langle 0, v \rangle$: $|a_1(h)| = |a_2(h)|$ (viz obrázek 4.4). Zbývá nám tedy ověřit, že $|a_1(h)| = |a_2(h)|$ pro $\forall h \in \langle 0, v \rangle$.

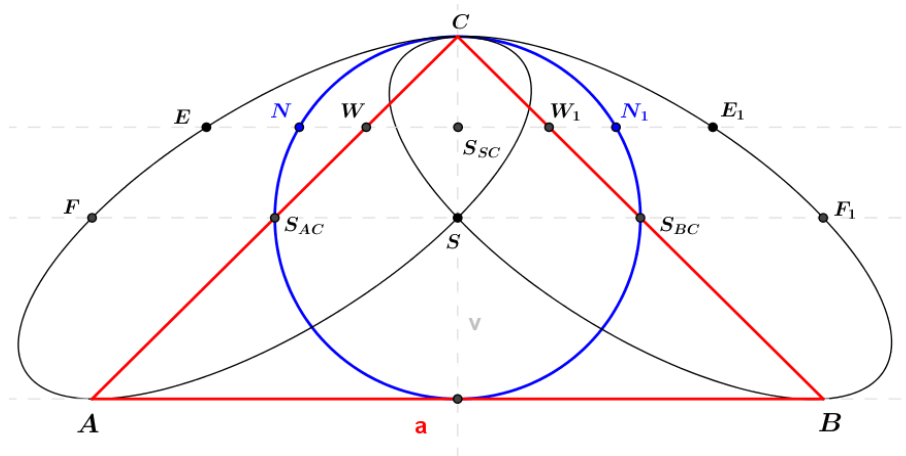


Obrázek 4.4: Obsah rovnoběžníku

Víme, že A je obdélník, takže $\forall h \in \langle 0, v \rangle : |a_1(h)| = |a|$. Nyní ukážeme, že totéž platí pro rovnoběžník B . Z rovnoběžnosti bočních stran KN a LM vyplývá, že $|a_2(h)| = |a| \forall h \in \langle 0, v \rangle$. Tedy $\forall h \in \langle 0, v \rangle : |a_1(h)| = |a_2(h)|$. Z Cavalieriho principu plyne, že $S_A = S_B$ ¹ a obsah rovnoběžníku je tedy $S_B = a \cdot v$.

4.1.3 Houba

V této podkapitole si uvedeme nástin odvození vzorce pro obsah útvaru, který budeme nazývat houba. K nástinu použijeme funkce programu Geogebra. Nyní si uvedeme konstrukci útvaru houba:



Obrázek 4.5: Houba

¹Tuto rovnost je možné dokázat bez užití Cavalieriho principu, a to přesunutím $\triangle LMM_1$ místo $\triangle KNN_1$. Teto postup se běžně používá na základní škole.

Nechť je dáno:

- rovnoramenný trojúhelník ABC o základně a a výšce v , kde $v = \frac{1}{2}a$,
- kružnice k se středem v bodě S a poloměrem $\frac{1}{2}v$, kde S je střed výšky v rovnoramenného trojúhelníku,
- elipsy nad rameny rovnoramenného trojúhelníku procházející vrcholy ramen, středem S a pomocnými body, označme je např. E, F, E_1, F_1 , pro které platí, že $FS_{AC} \parallel AB$ a $|FS_{AC}| = |S_{AC}S| = |SC|$, resp. $F_1S_{BC} \parallel AB$ a $|F_1S_{BC}| = |S_{BC}S| = |SC|$, kde S_{AC}, S_{BC} jsou průsečíky kružnice se stranou AC , resp. BC . Dále požadujeme, aby platilo, že vedeme-li jednu konkrétní přímku p rovnoběžnou se základnou a v libovolné výšce ($h \in \langle 0, v \rangle$), pak
 - bod E , resp. E_1 vznikne jako průsečík přímky p s elipsou,
 - bod N , resp. N_1 vznikne jako průsečík přímky p s kružnicí,
 - bod W , resp. W_1 vznikne jako průsečík přímky p s hranicí trojúhelníku,

kde $|EN| = |WS_{SC}| = |S_{SC}C|$, resp. $|E_1N_1| = |W_1S_{SC}| = |S_{SC}C|$.

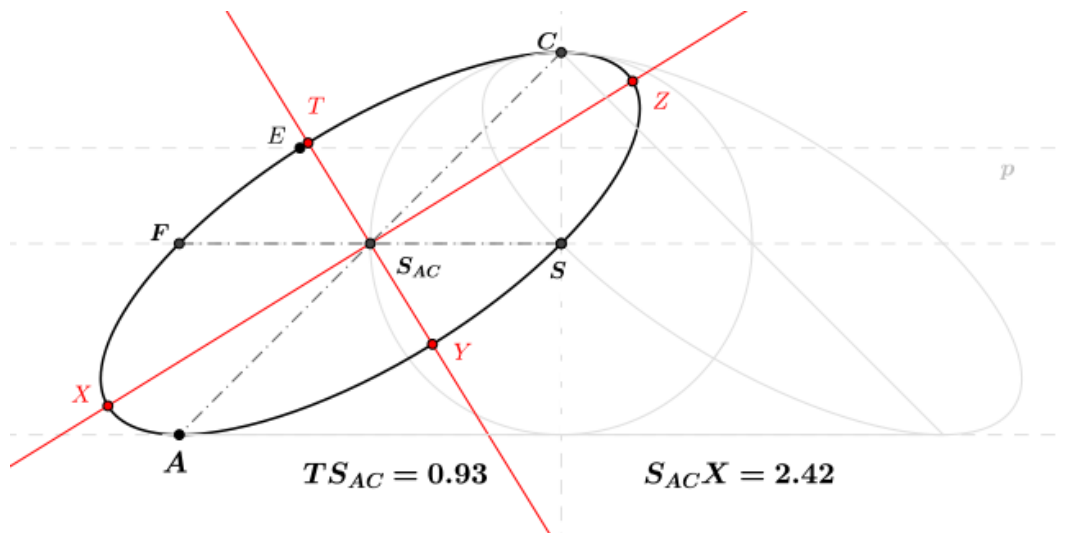
Pak rovinný útvar vzniklý sjednocením elips a rovnoramenného trojúhelníku budeme značit H a nazývat houba (viz obrázek 4.5).

Poznámka. Elipsu danou body A, S, C, E, F budeme značit e_{ASC} a elipsu danou body B, S, C, E_1, F_1 budeme značit e_{BSC} .

Z výše uvedené charakteristiky rovinného útvaru H vyplývá, že proložíme-li houbou přímku rovnoběžnou se základnou rovnoramenného trojúhelníku, pak přímka protne jednotlivé části útvaru H v sedmi významných bodech $E, N, W, S_{SC}, W_1, N_1, E_1$. Tyto body tvoří úsečky, přičemž některé z nich jsou si rovny. Užitím této rovnosti a Cavalieriho principu lze odvodit vzorec pro výpočet obsahu houby.

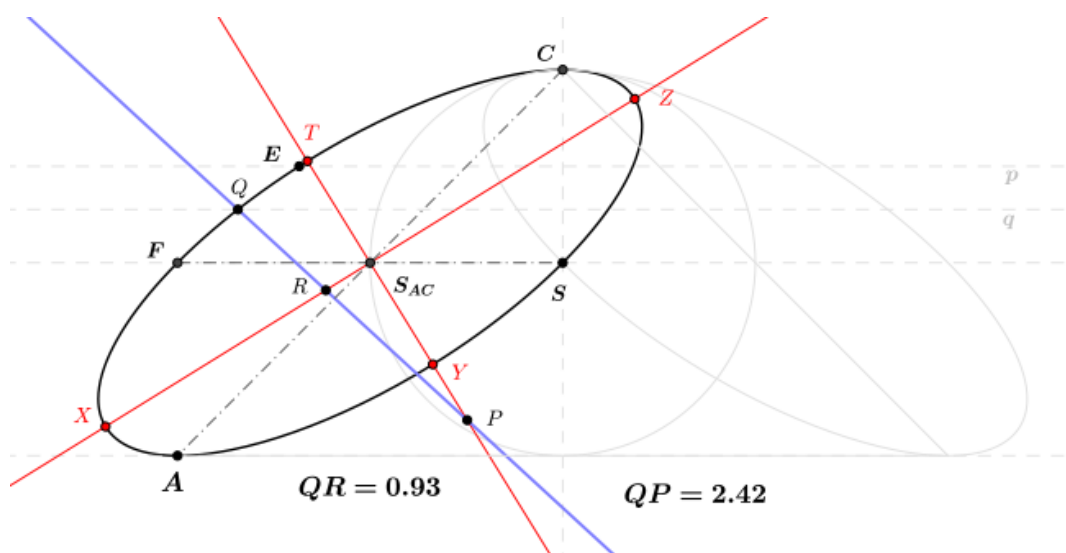
Nejprve však musíme ukázat, že výše uvedené vlastnosti platí pro všechny body, které jsou průnikem libovolné přímky q a útvarů tvořící houbu. Veďme tedy libovolnou přímku q , kde $q \parallel p$ a $q \neq p$, v libovolné výšce $h \in \langle 0, v \rangle$ a sestrojme body O, O_1 jako průsečíky přímky p s kružnicí k a body P, P_1 jako průsečíky s hranicí trojúhelníku ABC . Dále sestrojme body Q, Q_1 , kde $|PS_{SC}| = |QO|$, resp. $|S_{SC}P_1| = |Q_1O_1|$. Nyní chceme ukázat, že pokud $|PS_{SC}| = |QO|$, resp. $|S_{SC}P_1| = |Q_1O_1|$, pak body Q, Q_1 náležejí jedné z výše zmíněných elips. Protože při ověřování této vlastnosti budeme využívat funkce programu Geogebra, nejedná se o důkaz, ale jen o náhled. Platnost tohoto tvrzení si ukážeme pro elipsu e_{ASC} (pro elipsu e_{BSC} je důkaz analogický):

Pomocí Rytzovy konstrukce [4] elipsy sestrojíme hlavní poloosy XZ, YT elipsy e_{ASC} (viz obrázek 4.6) a zjistíme délku jednotlivých poloos.



Obrázek 4.6: Výsledek Rytzovy konstrukce

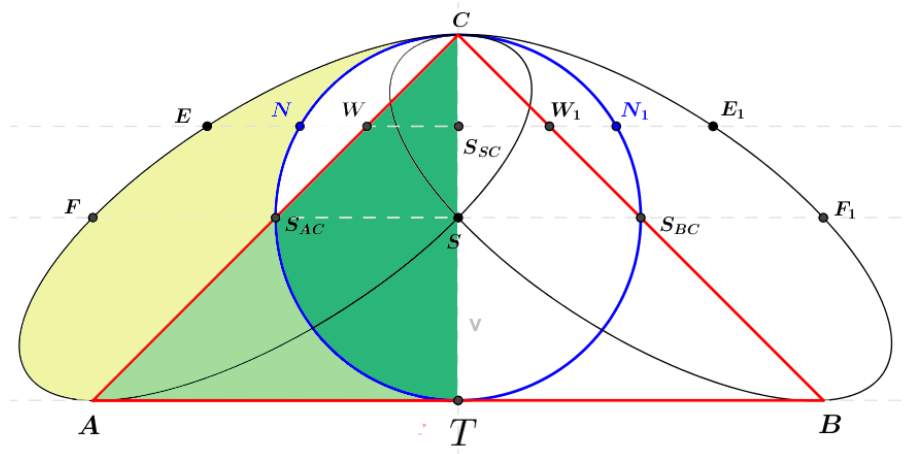
Nyní musíme ukázat, že bod Q náleží elipse e_{ASC} . K tomu využijeme rozdílovou proužkovou konstrukci elipsy [3] (viz obrázek 4.7).



Obrázek 4.7: Rozdílová proužková konstrukce

Z konstrukce vyplývá, že bod Q náleží elipse e_{ASC} . Uvedené vlastnosti bodů z popisu konstrukce houbly platí pro všechny body vzniklé průnikem libovolné přímky a útvarů tvořící houbu.

Víme tedy, že pro všechny řezy platí, že $|EN| = |WS_{SC}|$, resp. $|E_1N_1| = |W_1S_{SC}|$, kde úsečka EN , resp. E_1N_1 je řezem útvaru $ATCF$, resp. $BTCF_1$ se základnou AT , resp. BT a úsečka WS_{SC} , resp. W_1S_{SC} je řezem pravoúhlého $\triangle ATC$, resp. $\triangle BTC$ (viz obrázek 4.8). Oba útvary mají stejnou výšku TC . Z Cavalieriho principu tedy vyplývá, že $S_{ATCF} = S_{ATC}$ (viz obrázek 4.8), resp. $S_{BTCF_1} = S_{BTC}$.



Obrázek 4.8: Shodné útvaru v houbě

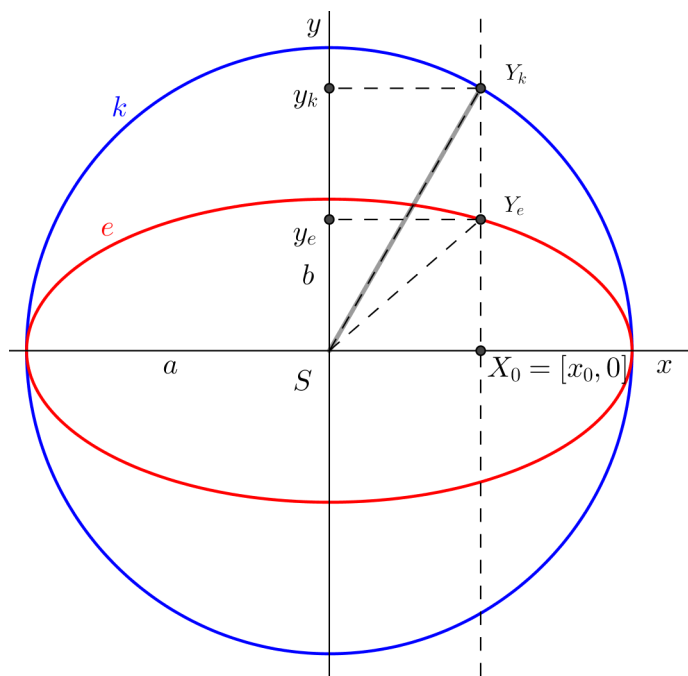
Z toho vyplývá:

$$S_{\text{houba}} = S_{\text{trojuhelník}} + S_{\text{kruh}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Jelikož je $\frac{a}{2} = 2r$, dostáváme:

$$S_{\text{houba}} = \frac{1}{2}(2r)^2 + \pi r^2 = 2r^2 + \pi r^2.$$

4.1.4 Elipsa



Obrázek 4.9: Řez kružnicí a elipsou

Je dána elipsa e se středovou rovnicí $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a kružnice k se středovou rovnicí $x^2 + y^2 = a^2$. Obě kuželosečky mají střed v bodě $S = [0,0]$. Povedeme

přímku p rovnoběžnou s tečnou $x = a$ nebo $x = -a$, které jsou společnými tečnami obou kuželoseček. Přímka p protne obě kuželosečky (viz obrázek 4.9).

Polovina délky průniku přímky a kruhu $\frac{1}{2}|X_0Y_k|$, resp. elipsy $\frac{1}{2}|X_0Y_e|$ je rovna y -ové souřadnici bodu Y_k , resp. Y_e (viz obrázek 4.9). Tyto délky můžeme vyjádřit ze středové rovnice kružnice, resp. elipsy:

$$k : x_0^2 + y_k^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad y_k = \sqrt{a^2 - x_0^2},$$

$$e : b^2x_0^2 + a^2y_e^2 = a^2b^2 \quad \Rightarrow \quad y_e = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}.$$

Tedy délky řezů jsou:

$$k : |X_0Y_k| = 2y_k = 2\sqrt{a^2 - x_0^2},$$

$$e : |X_0Y_e| = 2y_e = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}.$$

Poměr těchto délek je tedy roven:

$$\frac{2y_k}{2y_e} = \frac{2\sqrt{a^2 - x_0^2}}{2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}} = \frac{a}{b}.$$

Z důsledku Cavalieriho principu (viz věta 6) vyplývá, že:

$$\frac{S_{\text{kružnice}}}{S_{\text{elipsa}}} = \frac{a}{b}.$$

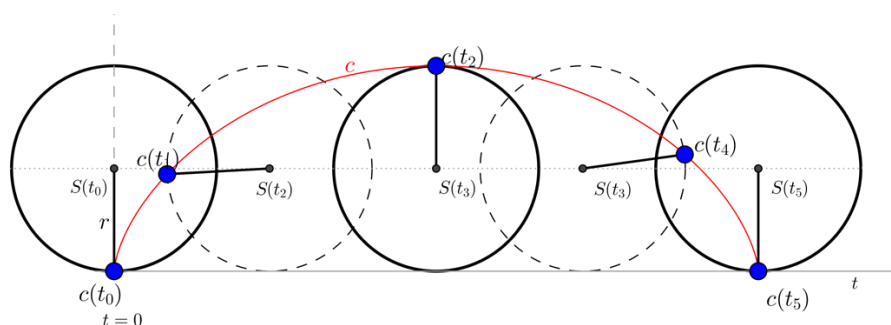
Obsah elipsy je tedy:

$$S_{\text{elipsa}} = \frac{b}{a}S_{\text{kružnice}} = \pi ab.$$

4.1.5 Cykloida

Definice 2. *Cykloida je dráha pevně zvoleného bodu na kružnici o poloměru $r > 0$, která se valí bez tření po přímce (viz obrázek 4.10).*

Označme dráhu na kružnici pevně zvoleného bodu c . Tento bod se tedy pohybuje rovnoměrným periodickým pohybem po dráze c . Jeho polohu v čase $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ budeme značit $c(t)$.



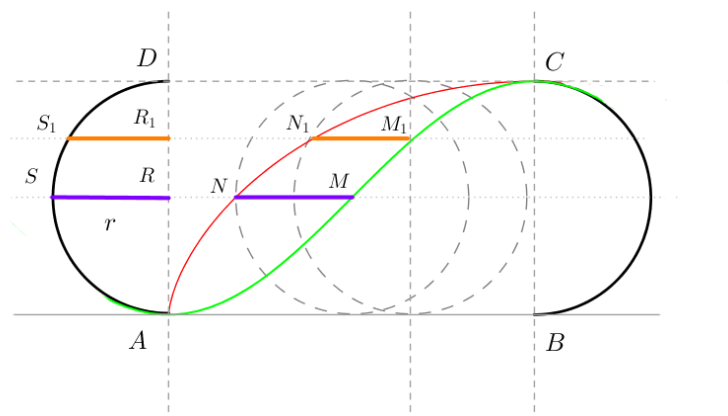
Obrázek 4.10: Vykreslení cykloidy

Naším úkolem bude najít obsah rovinného útvaru ohraničeného cykloidou a přímkou, po které se valí kružnice. Pro zjednodušení nalezneme vztah pro obsah plochy pod polovinou cykloidy (viz obrázek 4.11), tedy:

$$S_{\text{cykloida}} = 2S_{\text{hemiCykloida}}.$$

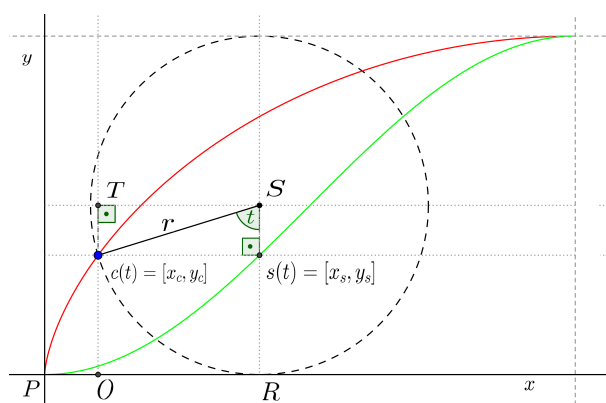
Abychom určili obsah plochy pod polovinou cykloidy, rozložme ji pomocnou křivkou s vedenou z bodu A do bodu C (viz obrázek 4.11), kterou, jak ukážeme, bude sinusoida. Body této křivky s (označme je $s(t)$) vzniknou tak, že cykloidou proložíme libovolnou přímkou p rovnoběžnou s přímkou AB ; tyto body jsou průsečíkem přímky p a svislé osy procházející středem kružnice v čase t .

Budeme chtít dokázat, že úsečky, které jsou částí přímky p , z nichž jedna je vymezená cykloidou a sinusoidou a druhá polovinou kružnice AD a svislou osou AD , jsou si rovny, tj. $|S_1R_1| = |N_1M_1|$, resp. $|SR| = |NM|$ (viz obrázek 4.11). Průsečík přímky p a cykloidy, resp. sinusoidy odpovídá tedy bodu $c(t)$, resp. $s(t)$ v nějakém čase $t \in \langle 0, \pi \rangle$.



Obrázek 4.11: Polovina oblouku cykloidy a sinusoida v čase t

Nyní dokažme, že křivka, jejíž body jsou průnikem svislé osy (procházející středem kružnice) v čase t a přímky p , je sinusoida s .



Obrázek 4.12: Odvození rovnic pro cykloidu a sinusoidu

Rovnice sinusoidy s vyplývají z pravoúhlého trojúhelníku s vrcholy T , $s(t)$, $c(t)$ (viz obrázek 4.12):

$$s: \quad x_s = rt \quad \text{a} \quad y_s = r\left(\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + 1\right) = r(-\cos(t) + 1),$$

kde $y_s = r(\sin(t - \frac{\pi}{2}) + 1)$ vznikne posunutím o plus jedna ve směru osy y a o $-\frac{\pi}{2}$ ve směru osy x sinusoidy $y = r \sin(t)$, $x = rt$.

Odvoďme ještě rovnice cykloidy c : (vzdálenosti bodů O , P , resp. S , $s(t)$ vyplývají z pravoúhlého trojúhelníku tvořeného vrcholy S , $s(t)$, $c(t)$):

$$c: \quad x_c = |PR| - |OR| = rt - r \sin(t),$$

$$y_c = |SR| - |s(t)R| = r - r \cos(t).$$

Pomocí parametrických rovnic křivek můžeme určit vzdálenost bodů $c(t)$, $s(t)$ v čase $t \in \langle 0, \pi \rangle$:

$$|c(t)s(t)| = |(x_s - x_c, y_s - y_c)| = r \sin(t).$$

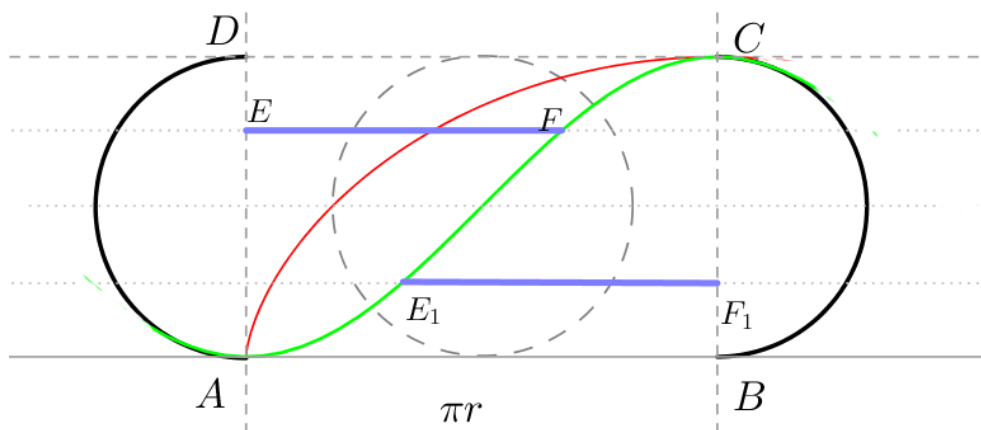
Vzdálenost bodů $s(t)$, $c(t)$ ($s(t) = N_1$, $c(t) = M_1$ viz obrázek 4.11) je tedy rovna vzdálenosti bodů S_1 , R_1 pro každé pevně zvolené $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Z toho vyplývá, že $|S_1R_1| = |N_1M_1| = |c(t)s(t)|$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, pro libovolnou přímku p .

Užitím Cavalieriho principu dostaneme, že

$$S_{AD} = \frac{\pi r^2}{2} = S_{AC},$$

kde AD je útvar ohraničený polovinou kružnice AD a přímkou AD a AC je rovinný útvar vymezený polovinou oblouku cykloidy a sinusoidou. Tuto rovnost můžeme také ověřit pomocí integrálů².

Již tedy známe obsah útvaru AC . K určení obsahu plochy pod cykloidou nám chybí obsah rovinného útvaru ABC (pod sinusoidou, viz obrázek 4.13). Jelikož sinusoida pólí obdélník $ABCD$, neboť je souměrná podle přímky AC ($|EF| = |E_1F_1|$), je $S_{ABC} = \frac{1}{2}2r\pi r = \pi r^2$.



Obrázek 4.13: Shodnost úseček v cykloidě

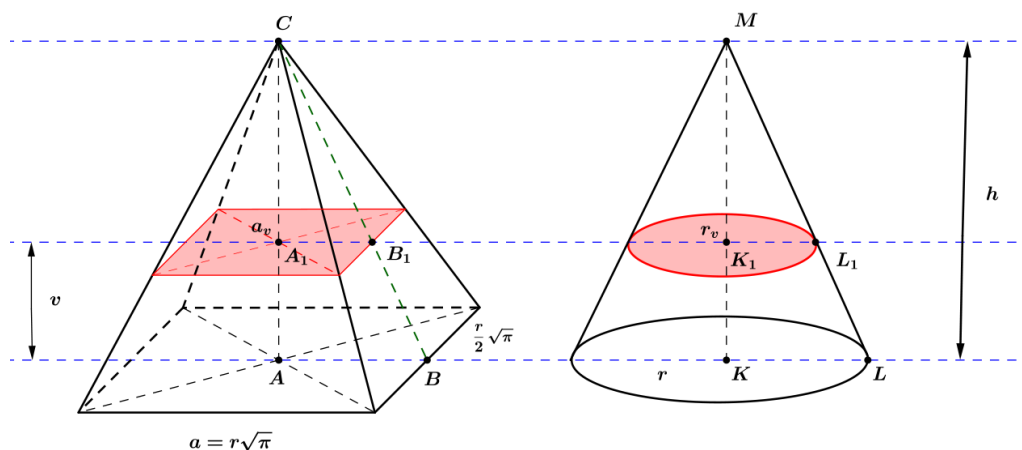
$$\text{Tedy } S_{\text{hemiCykloida}} = S_{AC} + S_{ABC} = \frac{1}{2}\pi r^2 + \pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2.$$

²Na střední škole můžeme tyto vztahy ukázat pomocí animace, kde obrázek 4.11 je jejím nástínem. Důkaz užitím integrálů lze ukázat v posledních ročnících střední školy, kdy jsou integrály již probrány.

4.2 Aplikace Cavalieriho principu pro výpočet objemů těles

4.2.1 Kužel

Pro určení objemu kužele o výšce h a poloměru podstavy r uvažujme jehlan o stejné výšce a čtvercové podstavě o straně a (viz obrázek 4.14). Postavy obou těles náležejí rovině ρ . Proložíme-li tělesa rovinu rovnoběžnou s rovinou ρ ve výšce $v \in \langle 0, h \rangle$, pak průnikem dané rovnoběžné roviny a jehlanu, resp. kužele je čtverec o straně a_v , resp. kruh o poloměru r_v .



Obrázek 4.14: Odvození vzorce pro obsah kužele

Zvolme-li $a = r\sqrt{\pi}$, pak si budou obsahy podstav těchto těles rovný:

$$S_{\text{podstava jehlanu}} = \pi r^2 = S_{\text{podstava kuželu}}.$$

Nyní budeme chtít dokázat, že obsahy řezů těles ve vzdálenosti v od roviny podstav jsou si rovný. Využijeme větu 6, tedy poměr obsahu podstavy jehlanu a obsahu podstavy kužele je stejný jako poměr obsahů obou řezů těles, kde

$$S_{\text{podstava jehlan}} : S_{\text{podstava kužel}} = a : r.$$

Stačí tedy dokázat, že $a : r = a_v : r_v = \sqrt{\pi}$.

Veďme rovinu σ kolmou na rovinu ρ a procházející vrcholy těles a středy protilehlých stran podstavy jehlanu, pak průnikem roviny σ a kužele, resp. jehlanu je rovnoramenný trojúhelník, jehož součástí je pravoúhlý $\triangle KLM$ obsahující $\triangle K_1L_1M$, resp. $\triangle ABC$ obsahující $\triangle A_1B_1C$. Tyto trojúhelníky jsou podobné podle věty *sss*:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C \quad \text{a} \quad \triangle KLM \sim \triangle K_1L_1M.$$

Nyní pomocí podobnosti výše zmíněných trojúhelníků dokážeme, že $a_v : r_v = \sqrt{\pi}$:
Z podobnosti $\triangle ABC$, resp. $\triangle KLM$ a $\triangle A_1B_1C$, resp. $\triangle K_1L_1M$ plyne, že:

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a_v}{2}} = \frac{a}{a_v} = \frac{h}{(h-v)} \quad \text{a} \quad \frac{r}{r_v} = \frac{h}{(h-v)}.$$

Výrazy na pravých stranách rovností jsou zcela stejné, tudíž:

$$\frac{a_r}{a} = \frac{r_v}{r}.$$

Z toho vyplývá, že

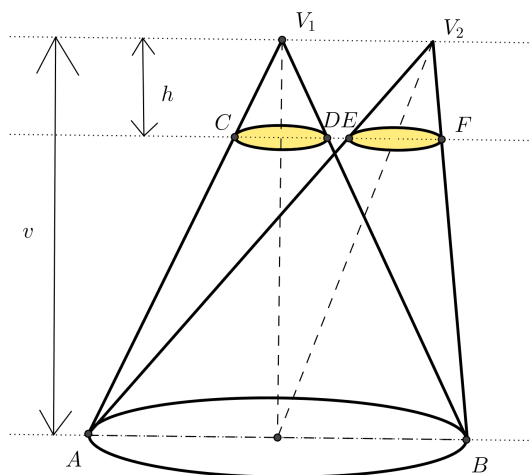
$$\frac{a_v}{r_v} = \frac{a}{r} = \sqrt{\pi}. \quad \Rightarrow \quad a_v : r_v = \sqrt{\pi}.$$

Obsahy řezů jsou si rovny, tedy užitím Cavalieriho principu dostáváme:

$$V_{\text{jehlan}} = V_{\text{kužel}} = \frac{1}{3}hS_p.$$

4.2.2 Kosý kužel

Jsou dány kužely ABV_1 , ABV_2 o výšce v a se společnou podstavou AB , již je kruh o průmětu AB . ABV_1 je kolmý (rotační) kužel a ABV_2 je kosý kužel. Rovinu, ve které leží podstava AB , budeme značit ω . Vedme rovinu ρ rovnoběžnou s rovinou ω , která protne oba kužely ve vzdálenosti $v - h$ od podstavy. Průnikem roviny ρ a kužele ABV_1 je kruh o průměru CD a průnikem roviny ρ a kužele ABV_2 je kruh o průměru EF (viz obrázek 4.15).



Obrázek 4.15: Odvození vzorce pro obsah kosého kužele

Proložíme-li oběma kužely rovinu σ kolmou na rovinu ω a procházející vrcholy V_1 a V_2 , pak průnikem kužele ABV_1 s rovinou σ je $\triangle ABV_1$, v němž je obsažen $\triangle CDV_1$ a průnikem kužele ABV_2 s rovinou σ je $\triangle ABV_2$, v němž je obsažen $\triangle EFV_2$. Trojúhelníky ABV_1 , CDV_1 jsou podobné a trojúhelníky ABV_2 , EFV_2 jsou podobné:

$$\triangle ABV_1 \sim \triangle CDV_1 \quad \text{a} \quad \triangle ABV_2 \sim \triangle EFV_2.$$

Z toho vyplývá, že

$$\frac{CD}{AB} = \frac{h}{v} \quad \text{a} \quad \frac{EF}{AB} = \frac{h}{v}$$

$$CD = AB \cdot \frac{h}{v} \quad \text{a} \quad EF = AB \cdot \frac{h}{v},$$

odtud ihned plyne rovnost

$$CD = EF.$$

Z rovnosti průměrů kruhů vyplývá, že obsah kruhu o průměru CD je roven obsahu kruhu o průměru EF ($S_{\text{kruh o průměru } CD} = S_{\text{kruh o průměru } EF}$). Užitím Cavalieriho principu získáme:

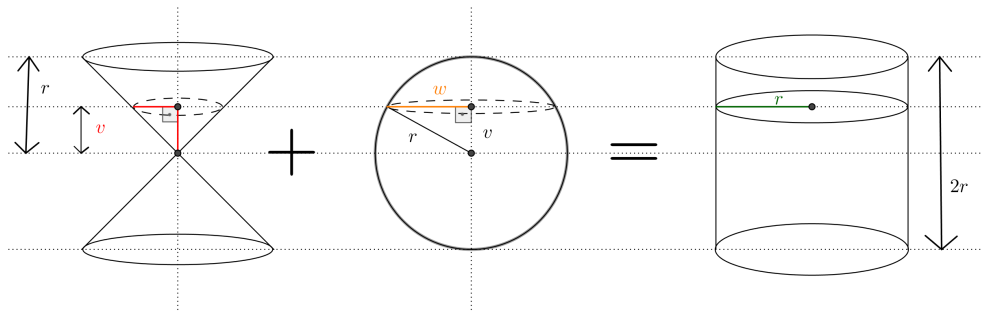
$$V_{ABV_1} = V_{ABV_2} = \frac{1}{3}\pi r^2 v, \quad \text{kde} \quad r = \frac{AB}{2}.$$

Objemy kuželů ABV_1 a ABV_2 jsou si tedy rovny.

4.2.3 Koule

V této kapitole si odvodíme vzorec pro výpočet objemu koule, který lze odvodit pomocí Cavalieriho principu nebo pomocí Archimédovy rovnováhy na páce (viz kapitola 1). V odvození pomocí Archimédovy metody se Cavalieriho princip nepoužívá, ale pro zajímavost jej uvedeme. Nyní se však podíváme na odvození vzorce pomocí Cavalieriho principu.

Je dána rovina ρ , jenž je rovinou podstavy dvojkužele o poloměru podstavy r a válec o poloměru podstavy r . Obě tělesa mají shodnou výšku $2r$. Dále na rovině ρ leží koule o poloměru r . Tělesa jsou tedy umístěna mezi dvěma rovnoběžnými rovinami, kde jedna z nich je rovina ρ , a těžiště těles náleží jedné přímce p .



Obrázek 4.16: Cavalieriho výpočet objemu koule

Veďme rovinu σ rovnoběžnou s rovinou ρ ve vzdálenosti $v \in \langle 0, r \rangle$ od přímky procházející těžišti těles. Průnikem roviny σ a těles jsou řezy, které mají tvar kruhu. Poloměr kruhu vzniklý řezem koule je w , kde z Pythagorovy věty plyne, že $w^2 = r^2 - v^2$ a poloměr kruhu ve válci je r . Kruh vzniklý průnikem dvojkužele a roviny má poloměr v , protože řez rovinou kolmou k rovině ρ procházející vrcholem kužele (těžištěm dvojkužele) je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník o výšce v . Každý rovnoramenný trojúhelník rozdělený výškou se skládá ze dvou rovnoramenných trojúhelníků. Tedy polovina základny rovnoramenného trojúhelníku o výšce v je poloměr řezu kužele.

Pak pro obsahy kruhů platí:

$$\pi v^2 + \pi(r^2 - v^2) = \pi r^2,$$

a odtud dostáváme rovnost:

$$S_{\text{kužel}} + S_{\text{koule}} = S_{\text{válec}}.$$

Součet obsahů řezu kužele a řezu koule je tedy roven obsahu řezu válce v libovolné vzdálenosti $v \in (0, r)$ od přímky p . Můžeme tedy využít Cavalieriho princip, z něhož plyne:

$$V_{\text{dvojkůžel}} + V_{\text{koule}} = V_{\text{válec}}.$$

Vyjádříme objem koule a dostaneme (viz obrázek 4.16):

$$V_{\text{koule}} = V_{\text{válec}} - V_{\text{dvojkůžel}},$$

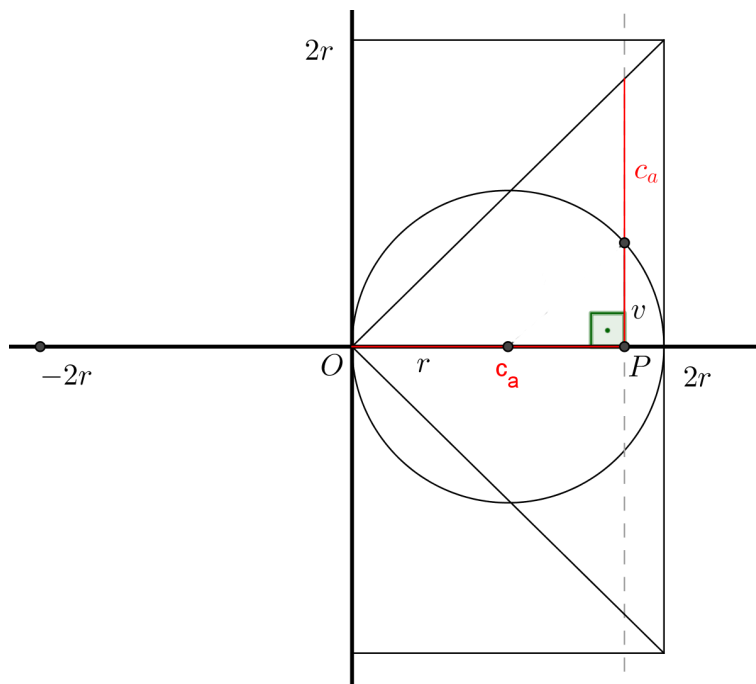
$$V_{\text{koule}} = (2r)\pi r^2 - 2\frac{1}{3}\pi(r^2)r = 2\pi r^3\left(1 - \frac{1}{3}\right),$$

$$V_{\text{koule}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Vztah vyjadřující objem koule znal už sám Archimédés, který pro výpočet obsahů a objemů využíval princip zachování rovnováhy na páce (viz kapitola 1). Archimédův postup pro nalezení objemu koule, v němž Cavalieriho princip není aplikovaný, si nyní ukážeme.

Objem koule dle Archiméda

Na obrázku je zobrazena rovnoramenná páka se středem v bodě O . Na pravém rameni jsou umístěna tělesa³ (koule o poloměru r , kužel o výšce $2r$ a poloměru podstavy $2r$, válec o výšce $2r$ a poloměru podstavy $2r$).



Obrázek 4.17: Archimédův výpočet objemu koule

³Na obrázku jsou zobrazeny jen řezy těles, které jsou průnikem těles a roviny obsahující páku.

Vedme libovolnou rovinu kolmou na páku, protínající tělesa a procházející libovolným bodem P ležícím na páce ve vzdálenosti c_a od středu O . Průnikem roviny a těles jsou kruhové řezy (viz obrázek 4.17). Podle Archiméda pro obsahy řezů jednotlivých těles platí:

$$\exists k \in R : k(S_{\text{koule}} + S_{\text{kužel}}) = c_a S_{\text{válec}}.$$

Tuto rovnost si nyní dokážeme:

$$k(\pi v^2 + \pi c_a^2) = c_a \pi (2r)^2,$$

$$k(\pi(r^2 - (c_a - r)^2) + \pi c_a^2) = c_a \pi (2r)^2,$$

$$\text{kde } v^2 = r^2 - (c_a - r)^2 \quad (\text{Pýthagorova věta}),$$

$$k(\pi(r^2 - (c_a^2 - 2c_a r + r^2)) + \pi c_a^2) = c_a \pi (2r)^2,$$

$$k\pi(2c_a r) = c_a \pi (2r)^2,$$

$$2k\pi r = \pi 4r^2.$$

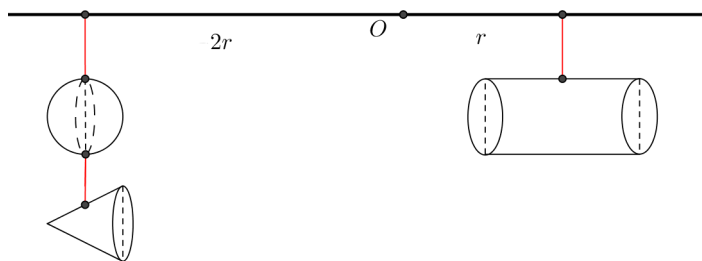
Z rovnice vyjádříme proměnnou k a dosadíme ji do úvodní rovnice:

$$k = 2r,$$

$$2r(S_{\text{koule}} + S_{\text{kužel}}) = c_a S_{\text{válec}}.$$

Tuto rovnost můžeme interpretovat na základě rovnováhy na páce tak, že když kruhový řez koule a kuželu posuneme na levou stranu páky do vzdálenosti $2r$ od středu páky O a na pravé straně ponecháme kruhový řez válce na místě, tj. ve vzdálenosti c_a od středu páky O .

Všechny kruhové řezy koule tvoří kouli a všechny kruhové řezy kužele tvoří kužel. Obě tělesa jsou zavěšena ve vzdálenosti $2r$ od středu O a všechny kruhové řezy válce tvořící válec jsou zavěšena ve vzdálenosti c_a od O . Aby byl splněn zákon zachování rovnováhy na páce, tak válec zavěšený na pravé straně páky přesuneme do vzdálenosti r od středu O (viz obrázek 4.18).



Obrázek 4.18: Archimédova rovnováha na páce

Nyní je páka vyvážená a ze zákona zachování rovnováhy na páce dostaneme:

$$2r(V_{\text{koule}} + V_{\text{kužel}}) = rV_{\text{válec}},$$

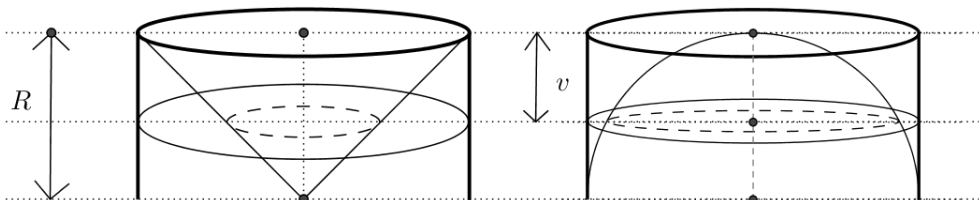
$$V_{\text{koule}} = \frac{1}{2}V_{\text{válec}} - V_{\text{kužel}},$$

$$V_{\text{koule}} = \frac{1}{2}\pi(2r)^2 2r - \frac{1}{3}\pi(2r)^2 2r,$$

$$V_{\text{koule}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

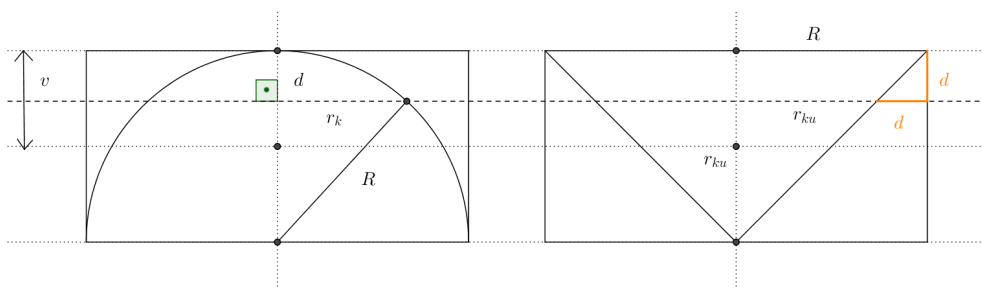
4.2.4 Kulová úseč

Je dána kulová úseč o výšce v , která vznikla řezem koule o poloměru R (pro názornost je koule vepsána do válce o poloměru podstavy R a výšce $2R$). Z podkapitoly 4.2.3 víme, že $V_{\text{válec}} - V_{\text{dvojkůž}} = V_{\text{koule}}$. Mějme tedy jiný válec o poloměru podstavy R a výšce $2R$, do něhož vepíšeme dvojkůž. Oba válce umístíme vedle sebe, tak aby jejich podstavy ležely v jedné rovině. Jelikož se výše uvedená vlastnost zachovává i pro hemisféru, omezíme se na části válců o výšce R (viz obrázek 4.19).



Obrázek 4.19: Válec s kuželem a hemisférou

Pro přehlednost znázorníme osový řez obou těles, viz obrázek 4.20.



Obrázek 4.20: Osový řez válce s kuželem a válce s hemisférou

Ve vzdálenosti $d \in \langle R - v, R \rangle$ od roviny dolních podstav proložme tělesy rovinou rovnoběžnou s rovinou podstav. Pak pro řezy těles, kde řezem jsou kruhy, platí:

$$S_{\text{válec o výšce } v} - S_{\text{komolý kužel}} = S_{\text{úseč}}.$$

Důkaz. Proveden na straně 34 v kapitole 4.2.3 Koule (stačí se omezit na řezy vedené pouze úsečí).

□

Obsah mezikruží vymezeného válcem a kuželem je tedy roven obsahu kruhu v úseči. Nyní můžeme použít Cavalieriho princip, z něhož plyne:

$$V_{\text{úseč}} = V_{\text{válec o výšce } v} - V_{\text{komolý kužel}}.$$

Nejdříve si musíme odvodit vzorec pro objem komolého kužele:

$$V_{\text{komolý kužel}} = \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi(R-v)^3 = \frac{v\pi}{3}(3R^2 - 3Rv + v^2).$$

Nyní dosadíme do rovnice $V_{\text{úseč}} = V_{\text{válec o výšce } v} - V_{\text{komolý kužel}}$ a upravíme:

$$V_{\text{úseč}} = \pi R^2 v - \frac{v\pi}{3}(3R^2 - 3Rv + v^2),$$

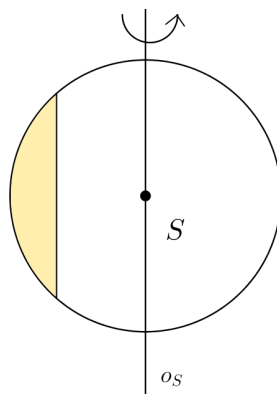
$$V_{\text{úseč}} = \pi R^2 v - \frac{1}{3}3\pi R^2 v + \frac{1}{3}3\pi Rv^2 - \frac{1}{3}\pi v^3,$$

Objem kulové úseče je:

$$V_{\text{úseč}} = \frac{v^2\pi}{3}(3R - v).$$

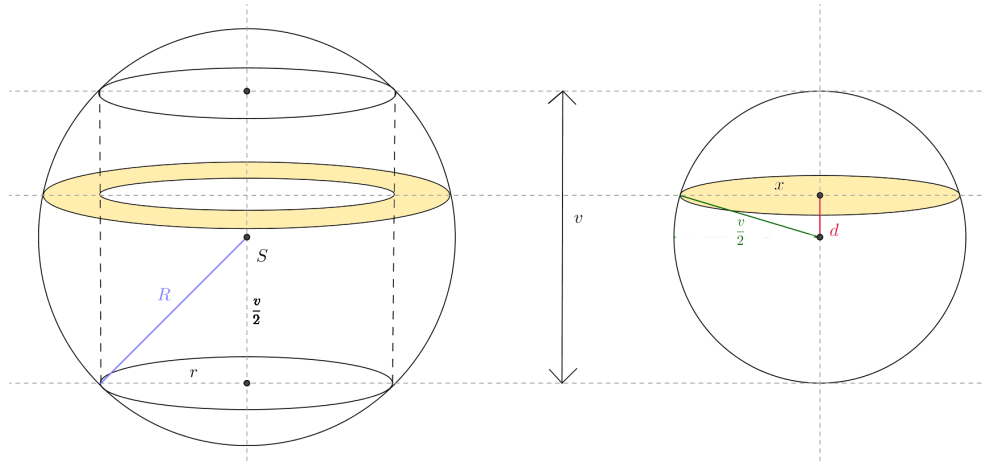
4.2.5 Kulový prstenec

Chceme určit objem kulového prstence, který vznikne rotací kruhové úseče oddělené tětivou délky v kolem svislé osy o_S procházející středem kružnice o poloměru R . Daná tětiva je s osou o_S rovnoběžná (viz obrázek 4.21).



Obrázek 4.21: Vznik kulového prstence.

Rotací vznikne kulový prstenec koule o poloměru R . Tětiva opisuje plášť válce o výšce v a poloměru podstavy r . Pomocí Cavalieriho principu nyní dokážeme, že objem kulového prstence bude shodný s objemem koule o poloměru $\frac{v}{2}$ (viz obrázek 4.22).



Obrázek 4.22: Srovnání objemu kulového prstence s objemem koule

Proložme tělesy libovolnou rovinu kolmou na osu otáčení ve vzdálenosti d ($d \in \langle 0, v \rangle$) od středu S . Průnikem roviny a kulového pásu je mezikruží, kde vnější kružnice má poloměr R a vnitřní kružnice má poloměr r . Dále průnikem koule o poloměru $\frac{v}{2}$ (označme ji k_v) je kruh o poloměru $(\frac{v}{2})^2 - d^2$.

Nyní ověříme, že $S_{\text{mezikruží}} = S_{\text{kruh}}$:

$$S_{\text{mezikruží}} = (R^2 - d^2)\pi - r^2\pi \quad \text{a} \quad S_{\text{kruh}} = \left(\left(\frac{v}{2} \right)^2 - d^2 \right) \pi.$$

Z Pýthagorovy věty plyne, že

$$\left(\frac{v}{2} \right)^2 = R^2 - r^2.$$

Dosazením do vztahu pro S_{kruh} dostaneme:

$$S_{\text{mezikruží}} = (R^2 - d^2 - r^2)\pi \quad \text{a} \quad S_{\text{kruh}} = (R^2 - r^2 - d^2)\pi.$$

Vidíme tedy, že

$$S_{\text{mezikruží}} = S_{\text{kruh}}.$$

Pro libovolnou rovinu kolmou na osu otáčení procházející tělesy. Dle Cavalieriho principu tedy $V_{\text{kulový prstenec}} = V_{k_v}$, odkud již snadno získáme vztah pro objem kulového prstence, který (aspoň zdánlivě na první pohled) nezávisí na poloměru R původní koule:

$$V_{\text{kulový prstenec}} = \frac{4}{3} \left(\frac{v}{2} \right)^3 \pi = \frac{1}{6} v^3 \pi.$$

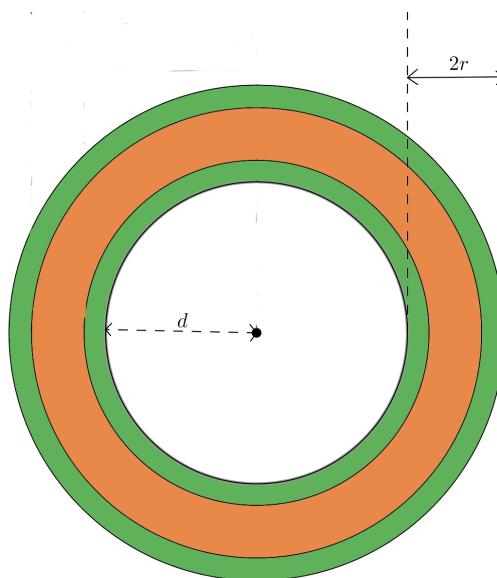
4.2.6 Anuloid

Definice 3. *Anuloid (torus) je těleso vytvořené rotací kruhu kolem přímky, který leží v jeho rovině a nemá s ní žádný společný bod.*

Mějme anuloid vzniklý rotací kruhu o poloměru r , jehož střed má od osy otáčení vzdálenost $R = r + d$. Chceme odvodit vzorec pro výpočet objemu anuloidu.

Veďme libovolnou rovinu ρ řezu kolmou na osu otáčení, která protne anuloid. Řezem anuloidu je mezikruží (viz obrázek 4.23). Vnitřní kružnice je od osy otáčení vzdálená d a vnější kružnice je ve vzdálenosti $d + 2r$. Tedy obsah mezikruží je roven rozdílu obsahu vnějšího kruhu a vnitřního kruhu:

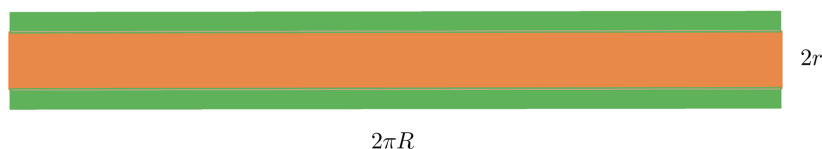
$$S_{\text{mezikruží}} = ((d + 2r)^2 - d^2)\pi = (d^2 + 4dr + 4r^2 - d^2)\pi = 4r(d + r)\pi.$$



Obrázek 4.23: Kolmý řez anuloidu na osu otáčení

Obsah mezikruží lze porovnat s obsahem obdélníku o výšce $2r$ a délce $2\pi R$ (viz obrázek 4.24). Výška obdélníku je šířka mezikruží. Délku lze odvodit z obsahu mezikruží (obsah obdélníku a mezikruží je shodný). Tedy pro libovolnou rovinu řezu kolmou na osu otáčení platí:

$$S_{\text{mezikruží}} = S_{\text{obdélník}} = (2r)(2\pi(d + r)).$$



Obrázek 4.24: Kolmý řez anuloidu na osu otáčení

Z toho vyplývá, že jednotlivé obdélníky, jejichž obsah je stejný jako obsah jednotlivých řezů anuloidu, vytvoří válec o výšce $2\pi R$, jehož podstava o poloměru r je kolmá na rovinu ρ . Z Cavalieriho principu vyplývá:

$$V_{\text{anuloid}} = V_{\text{válec}} = (2\pi R)(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2(d + r).$$

Závěr

Za cíl bakalářské práce jsem si stanovila ukázat krásu Cavalieriho principu, nastínit jeho důkaz a sepsat příklady s jeho využitím tak, aby se práce mohla stát inspirací pro využívání Cavalieriho principu na střední škole.

Nejdříve jsem se snažila ukázat jeho krásu na historickém vývoji, ve kterém jsem nastínila rozmanitost pohledů na určování obsahů, resp. objemů. Pokusila jsem se naznačit, jak byly obsahy a objemy geometrických útvarů hledány před Cavalieriho principem a před zformulováním Riemannova integrálu.

Kromě krásy nalezení klíčových rolí objevů v historii matematiky jsem se zaměřila na samotný vznik myšlenky vystihující Cavalieriho princip. Tímto přístupem jsem se snažila ukázat nesnadnou cestu vedoucí k jeho konečnému zformulování a množství nástrojů, které bylo potřeba v té době odvodit, aby mohla vzniknout jedna věta vystihující Cavalieriův princip v rovině a v prostoru. Tuto větu jsem poté využila jako obecné znění Cavalieriho principu, ze které jsem vycházela při vedení důkazu pomocí Riemannova integrálu. Tento důkaz může být využit buď při výkladu Riemannova integrálu, nebo při ukázkách jeho aplikací.

V poslední kapitole jsem se věnovala té nejdůležitější části, což je sestavení příkladů. Na samotném začátku sestavování příkladů jsem se sešla s paní Mgr. Jaroslavou Raganovou, která vyučuje matematiku na gymnáziu v Žatci. Po krátké diskusi jsme dospěly k názoru, že je potřeba vystihnout jak příklady týkající se jednoduchých geometrických útvarů jako např.: trojúhelník, kosodélník, kužel, tak příklady popisující složitější geometrické útvary, jejichž vzorce na střední škole nejsou příliš používány. Každý příklad obsahuje seznámení čtenáře se zadáním, cíl a postup, ke kterému jsou přiloženy obrázky pro lepší představu. Za účelem přehlednosti jsou všechny příklady strukturovány stejně. Kromě geometrických útvarů, které se využívají při určování obsahů a objemů na střední škole, jsem do kapitoly zahrnula odvození vzorců pro výpočet objemů kulového pásu, vrchlíku a obsahu kruhu, jejichž vzorce jsou uvedeny v matematicko-fyzikálních tabulkách a jejichž odvození se na střední škole mnohdy neprovádí. Toto odvození je pro studenty střední školy vhodné zejména z toho důvodu, že nemají pocit, že by matematika měla spočívat jen v pamatování si vzorců. Odvozování propojuje jednotlivé nástroje matematiky, které student během studia získal, a tím dodává studentovi pocit smysluplnosti matematiky.

Posledním typem příkladů této kapitoly jsou příklady zapojující nové pojmy, které jsou studentům středních škol neznámé. Mohou sloužit pro studenty jako motivace a zároveň jim rozšířit obzory. Příkladem je útvar houby, jejíž obsah je v této kapitole počítán, nebo obsah plochy pod jedním obloukem cykloidou. Oba příklady jsou názorné a pro lepší představivost je přidáno větší množství obrázků. Samotný důkaz je u útvaru houby převážně geometrický.

Jednotlivé kapitoly práce tedy odhalují různá zákoutí Cavalieriho principu, jejichž pochopení dodává samotnému principu krásu a využitelnost při určování obsahů a objemů dalších geometrických útvarů. Zároveň mohou sloužit jako inspirace pro větší zapojení Cavalieriho principu do výuky na středních školách a také se mohou stát jedním z prvků zlepšující přístup studentů k matematice. Své stanovené cíle jsem ze svého pohledu naplnila a různá zákoutí Cavalieriho principu mi odkryla další možnost, jak přistupovat k určování obsahů a objemů.

Seznam použité literatury

- [1] Určitý (riemannův) integrál. [online], Naposledy navštíveno 15. 2. 2017.
- [2] Riemannův integrál. [online], Naposledy navštíveno 3. 5. 2017.
- [3] Proužková konstrukce elipsy. [online], Naposledy navštíveno 6. 5. 2016.
- [4] Rytzova konstrukce elipsy. [online], Naposledy navštíveno 6. 5. 2016.
- [5] K. Andersen. *Cavalieri's method of indivisibles*. University of Aarhus, Dánsko, 1984.
- [6] B. Dakić. Cavalierijeva načela. [online], Naposledy navštíveno 12. 12. 2016.
- [7] E. Fuchs. *Od měření obsahů a objemů k infinitesimálnímu počtu*, pages 108–125. Jednota českých matematiků a fyziků, Brno, 1993.
- [8] T. L. Heath. *The Method of Archimedes*. University of Cambridge, 1912.
- [9] P. Kouřilová. Riemannův (dvojný) integrál. [online], Naposledy navštíveno 12. 1. 2017.
- [10] J. Robová. Základy prostorové geometrie. [online], Naposledy navštíveno 30. 12. 2016.
- [11] Š. Schwabik. *Malý průvodce historii integrálů*. Prometheus, Praha, 1996.
- [12] F. Servít. *Eukleidovy Základy*. Jednota českých matematiků, Praha, 1907.
- [13] P. Šarmanová. Od výpočtu obsahů a objemů k integrálnímu počtu. [online], Naposledy navštíveno 12. 2. 2017.