MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Babeta Melčová

Prvorepublikové učebnice analytické geometrie

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph. D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika a deskriptivní geometrie se zaměřením na vzdělávání

Praha 2017

Děkuji paní doktorce Hromadové za trpělivost, podnětné konzultace a skvělou spolupráci. Dále bych chtěla poděkovat paní doktorce Šarounové za zapůjčení některých knih, paní doktorce Moravcové za doporučenou literaturu a knihovny a všem, kteří mě podporovali.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V …............... dne..................... podpis

Název práce: Prvorepublikové učebnice analytické geometrie

Autor: Babeta Melčová

Katedra / Ústav: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová Ph. D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt:Tato práce je určena nejen pro učitele a studenty středních škol, ale také pro veřejnost jako rozšíření znalostí analytické geometrie a porovnání vědomostí dnešních studentů s vědomostmi studentů z 20. a 30. let 20. století. Práce obsahuje rozbor učebnic analytické geometrie z První republiky a jejich porovnání z hlediska obsahového, jazykového i z hlediska jejich zpracování. Dále zahrnuje vybrané ukázky příkladů řešené historickými i současnými metodami, které jsou doplněny obrázky vytvořenými v programu Geogebra. V práci je obsaženo i testování současných studentů při řešení historických úloh.

Klíčová slova: analytická geometrie, střední škola, historické učebnice

Title: Analytic geometry textbooks used in The first Czechoslovak Republic

Author: Babeta Melčová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jana Hromadová Ph. D, Department of Mathematics Education

Abstract: My thesis is intended not only for high school teachers and students, but also for the public to deepen their understanding of analytical geometry and to compare the knowledge of today's students with the knowledge of students from the 1920s and 1930s. The thesis includes analysis of textbooks of analytical geometry originated in the era of the First Republic and their further comparison in terms of content, used language and whole elaboration. Furthermore, it includes selected examples of calculations using both historical and contemporary methods, accompanied by pictures from Geogebra programme. The thesis contains testing of current students when solving historical excercises .

Keywords: analytic geometry

OBSAH

ÚVOD

Když jsem si vybírala téma bakalářské práce, chtěla jsem se zabývat analytickou geometrií. V dnešní době velmi neoblíbeným, někdy i nenáviděným učivem u studentů středních škol. Zajímalo mě, zda ta nenávist neplyne z nepochopení učiva a nepropojení s reálnou představou. Proto jsem se rozhodla ohlédnout se do minulosti.

V této práci bych chtěla provést rozbor středoškolských učebnic z dob První republiky. Zjistit, zda je můžeme využít v učitelství nebo je dokonce mohou využít studenti doma při samostudiu. Porovnat obtížnost příkladů pomocí testování současných studentů. V neposlední řadě bych ráda porovnala historické a současné postupy při řešení příkladů. Očekávám, že se touto prací naučím pohlížet na analytickou geometrii z jiného směru.

TEORETICKÁ ČÁST

ŠKOLSTVÍ PRVNÍ REPUBLIKY

Nejprve bych Vás chtěla uvést do doby první republiky. České země se vymanily z nadvlády Rakouska-Uherska, vzniklo Československo a lidé byli lačni po změnách a nových reformách. Samozřejmě se jednalo i o změně školství. Probíhaly různé ankety a podávaly se návrhy, jaké změny by měly být uskutečněny. Návrhy se velmi lišily, ale nakonec ministerstvo školství schválilo tyto požadavky: mělo být věnováno více času mateřskému jazyku, poskytnutí možnosti studování jiných jazyků, zvýšení přírodovědeckého vzdělání gymnazistů a také filosofického vzdělání realistů a přiblížení vzdělání duchu doby. U matematiky se toho moc nezměnilo. Poslední velkou změnou bylo zavedení tzv. Meranského programu v roce 1905, který matematice připisoval klíčové postavení ve vzdělání studentů. Její hlavní úlohou bylo rozvíjení prostorové představivosti, logického a funkčního myšlení. Program také zaváděl těžší učivo na střední školy např. integrální a diferenciální počet. Nově byla analytická geometrie zpracována pomocí diferenciálního počtu. Poté se jen upravovaly hodinové dotace a přístup k učivu.

Během první republiky existovalo několik typů středních škol. Prvním typem byla gymnázia, která připravovala studenty pro studium na univerzitách. Tyto školy byly na osm let, zaměřeny především filosofickým a humanitním směrem. Dle počtu hodin jednotlivých předmětů za týden po dobu celého osmiletého studia (viz Obrázek 1), se zde hodně učila latina (45 hodin), vyučovací jazyk (29 hodin), řecký jazyk (28 hodin) a matematika byla na stejné úrovni jako další cizí jazyk v počtu 24 hodin. Vyučovacím jazykem byla čeština, výjimečně němčina na německých gymnáziích. Z obrázku lze také vyčíst, že týdenní výuka v prvním a druhém ročníku sestávala z třiceti hodin, ve třetím, čtvrtém, sedmém a osmém ročníku ze třiceti dvou hodin a ve zbylých dvou ročnících ze třiceti jedna hodin.

Třída	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Celkem
náboženství	2	2	2	1	1	—	—	—	8
jazyk vyučov.	5	4	3	3	3	4	3	4	29
„ latin.	6	6	6	6	5	6	5	5	45
„ řecký	—	—	5	4	5	5	4	5	28
dějepis	—	2	2	2	4	3	3	4	20
zeměpis	2	2	2	2	1	1	1	4	11[357]
matematika	4	3	3	3	3	3	3	2	24
přírodopis	2	2	—	} 2	2	2	—	—	6
chemie	—	—	—		2	2	2	2	12
fysika	—	—	2	2	—	—	4	4	12
filosof. proped.	—	—	—	—	—	—	2	2	4
kreslení	3	3	2	2	—	—	—	—	10
psaní	1	—	—	—	—	—	—	—	1
tělocvik	2	2	2	2	2	2	2	2	16
jaz. živý (cizí)	3	4	3	3	3	3	3	2	24
Celkem	30	30	32	32	31	31	32	32	250

OBRÁZEK 1: HODINOVÁ DOTACE - GYMNÁZIA

Druhým typem střední školy byla reálka. Tato škola byla na sedm let, zaměřena spíše přírodovědeckým směrem a připravovala studenty pro studium na technice. Můžeme vidět hodinové dotace jednotlivých předmětů po celou dobu studia (viz Obrázek 2). Největší dotaci měl vyučovací jazyk, což byla čeština, (28 hodin). Hned na druhém místě byla matematika s hodinovou dotací dvaceti sedmi hodin! Neméně významné bylo i kreslení (23 hodin) Až poté byl druhý jazyk (22 hodin). Vyučovala se buď němčina nebo angličtina.

Třída	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	Celkem
náboženství	2	2	2	1	1	—	—	8
jazyk vyučov.	6	4	4	3	4	3	4	28
franština	—	4	4	4	4	3	3	22
dějepis	2	2	2	3	3	2	3	17
zeměpis	2	2	2	2	1	1	—	10[361]
fysika	—	—	3	2	—	4	4	13
matematika	4	3	3	4	4	4	5	27
přírodopis	2	2	—	} 3	3	3	—	9
chemie	—	—	-		2	3	3	12
deskr. geom.	—	2	2	3	3	3	3 (2)	16(15)
propedeutika	—	—	—	—	—	—	2	2
kreslení	4	4	4	3	3	2	3	23
psaní	1	—	—	—	—	—	—	1
tělocvik	2	2	2	2	2	2	2	14
2. jaz. živý	4	4	3	3	3	3	2(3)	22(23)
Celkem	29	31	31	33	33	33	34	224

OBRÁZEK 2: HODINOVÁ DOTACE - REÁLKY

Třetím typem škol byla reálná gymnázia, která vznikla proto, aby spojila výuku gymnázií a reálek a tím tak odsunula rozhodování studentů, kterým směrem se zaměří, o pár let. Ovšem během let se zjistilo, že není v silách učitelů naučit studenty z obou zaměření stejný obsah učiva jako na gymnáziích respektive na reálkách. Proto vznikla reálná gymnázia typu A a typu B, která se studovala osm let, stejně jako gymnázia. První čtyři roky obou typů byly totožné, lišily se až druhé čtyři roky. Typ A byl zaměřen spíše humanitním a typ B technickým směrem. Hodinové dotace typu A (viz Obrázek 3) a typu B (viz Obrázek 4) se liší pouze v posledních čtyřech letech studia. Na obou typech převažovala výuka latiny (45/66 hodin) a cizích jazyků (47/22 hodin). Dále vyučovací jazyk (29/28 hodin). Matematika byla na obou typech vyučována stejně a to v rozsahu 24 hodin.

Třída	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Celkem
náboženství	2	2	2	1	1	—	—	—	8
jazyk vyučov.	5	4	3	3	3	4	3	4	29
„ latin.	6	6	6	6	5	6	4	6	45
„ franc. (angl.)	—	—	4	4	5	4	3	3	23
zeměpis	2	2	2	2	1	1	1	4	20
dějepis	—	2	2	2	4	3	3		11[363]
matematika	4	3	3	3	3	3	3	2	24
deskrip. geom.	—	—	—	—	—	2	2	1	5
přírodopis	2	2	—	2	2	2	2	2	12
chemie	—	—	—		2	2	—	—	6
fysika	—	—	2	2	—	—	4	4	12
filosof. proped.	—	—	—	—	—	—	2	2	4
kreslení	3	3	2	2	—	—	—	—	10
psaní	1	—	—	—	—	—	—	—	1
tělocvik	2	2	2	2	2	2	2	2	16
druhý jaz. živý	3	4	3	3	3	3	3	2	24
Celkem	30	30	31	32	31	32	32	32	250

OBRÁZEK 3: HODINOVÉ DOTACE - REFORMNÍ REÁLNÁ GYMNÁZIA TYP A

Osnova reformního gymnasia (typ B) upravena ve vyšších třídách zatímně takto:

	Tř. V.	VI.	VII.	VIII.	Celkem
náboženství	1	—	—	—	1
jazyk vyučovací	3	3	4	3	13
„ latinský	7	8	8	7	30
„ francouzský	3	3	3	3	12
dějepis	2	3	3	3	3 364
zeměpis	1	1	1		11
matematika	3	3	3	2	11
přírodopis	2	2	2	2	8
chemie	2	2	—	—	4
fysika	—	—	3	4	7
filosofická propedeutika	—	—	—	3	3
deskriptiva	—	—	2	2	4
kreslení	2	2	—	—	4
tělocvik	2	2	2	2	8
druhý živý jazyk	3	3	2	2	10
Celkem	31	32	33	33	129

OBRÁZEK 4: HODINOVÁ DOTACE - REFORMNÍ REÁLNÁ GYMNÁZIA TYP B

Mimo těchto škol existovaly ještě další typy jako například školy obchodní, hospodářské, průmyslové, ovšem na těchto školách se matematika nevyučovala v takovém rozsahu, aby se do obsahu učiva zařadila analytická geometrie. Všechny tyto školy byly pouze pro chlapce, pro dívky existovaly dívčí školy, ale zde se matematika vyučovala v minimálním rozsahu. Výjimkou byla dívčí gymnázia a lycea, kde byly osnovy shodné s osnovami chlapeckých gymnázií. Po reformě v roce 1919 bylo dívkám umožněno studovat na chlapeckých školách, pokud byly dívčí školy v okolí obsazeny a reforma v roce 1921 již umožňovala studium bez omezení.

Tato část byla vypracována na základě informací uvedených v knihách [1], [2], [4], [5], [8] a [9].

HISTORIE ANALYTICKÉ GEOMETRIE

Užívání souřadnic pro vyjádření bodů se datuje již do 2.-3. století př. n. l. do dob Apollonia z Pergy. Ovšem vznik analytické geometrie jako takové se datuje do 17. století a jako zakladatelé se považují francouzští matematici René Descartes a Pierre de Fermat.

První českou středoškolskou učebnicí, kde byla zařazena analytická geometrie byla učebnice Josefa Sedláčka: *Základy měřičství* ... z roku 1822. V této knize nebyl uveden podrobný výklad souřadnic ani zde nebyla analytická geometrie nijak ucelená. Autor pouze zavedl souřadnice v pravoúhlé soustavě a pomocí nich odvodil rovnice kuželoseček. První ucelenou učebnicí byla kniha Václava Jandečky: *Geometria pro vyšší gymnázia, díl 4.,* 1867. V této učebnici byl výklad pouze obecný, nikde nebyla zadána konkrétní čísla, dokonce ani v příkladech na procvičení. Kniha vycházela z německé učebnice Franja Močníka, ale Jandečkovi připisujeme velkou zásluhu za zavedení správné české terminologie. Další podobnou učebnicí byla učebnice Františka Šandy: Měřičství *pro vyšší třídy středních škol a k vlastnímu studiu,* 1870. Tato učebnice zaváděla analytickou geometrii také zcela obecně, ovšem příklady na závěr již byly konkrétní. Poté již následovaly učebnice používané v První Republice. První z nich, která byla hodně podobná předešlým učebnicím, jen byla více konkrétní, byla kniha Aloise Strnada, která byla vydána ve dvou mutacích: *Geometrie pro vyšší gymnasia,* 1893 a *Geometrie pro vyšší školy reálné,* 1893. U této učebnice se poprvé setkáváme s tím, že je jedna učebnice vydána ve dvou podobách, v jedné pro gymnázia a ve druhé pro reálky. Dvě mutace jedné učebnice vydal také Jan Vojtěch: *Geometrie pro VII. třídu gymnasií,* 1912 a *Geometrie pro VII. třídu reálek,* 1912. Později tyto knihy vychází pod stejným názvem *Geometrie pro VII. třídu středních škol*. Paralelně s těmito učebnicemi vychází také kniha Josefa Vinše: *Geometrie pro sedmou třídu středních škol, Analytická geometrie v rovině,* 1915 vydání pro gymnázia a 1916 vydání pro reálky. Poslední učebnicí vydanou před první světovou válkou byla učebnice autorů Hynka Sechovského a Karla Šilháčka: *Geometrie pro sedmou a osmou třídu gymnasií,* 1936. Další knihy byly vydávány až po válce.

První použití vektorů se datuje až roku 1965 v knize Emila Kraemera a kol.: *Matematika pro III. ročník SVVŠ*. Všechna analytická geometrie se zatím odehrává v rovině, první rozšíření do prostoru uvedli až roku 1986 Václav Medek a Alice

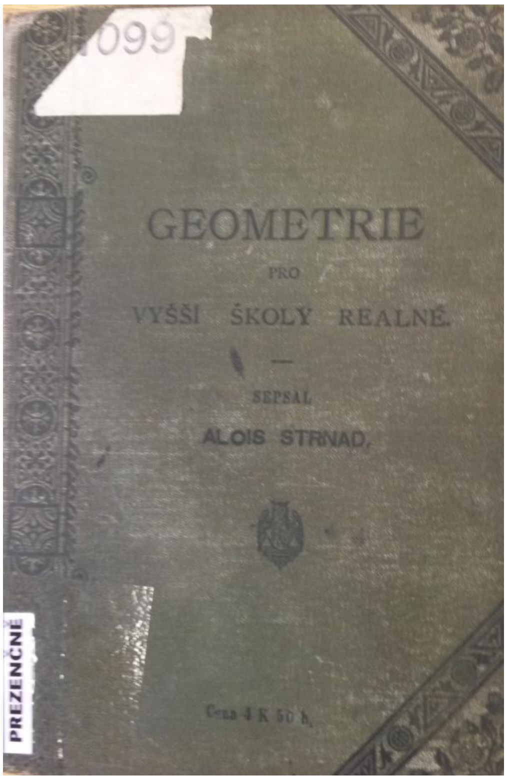
Sivošová v učebnici: *Matematika pro gymnázia - Sešit 5*. Od té doby se ve středoškolských učebnicích uvádí analytická geometrie jak rovinná, tak prostorová.

Tato kapitola byla vypracována na základě informací v knize [3].

ROZBOR JEDNOTLIVÝCH UČEBNIC

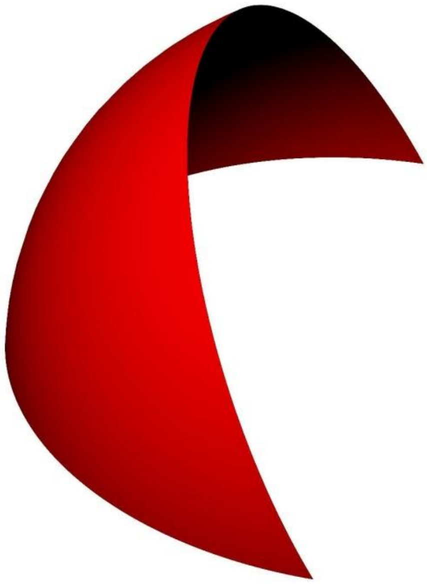
GEOMETRIE PRO VYŠŠÍ ŠKOLY REÁLNÉ

Autorem knihy je Alois Strnad, ředitel C. K. reálky v Kutné hoře. První vydání vyšlo roku 1893. Rozebíraná kniha je druhé vydání z roku 1898. Roku 1903 vyšlo ještě třetí vydání, které bylo obohaceno o příklady a roku 1918 vyšlo čtvrté vydání, které upravil Karel Rašín. Toto poslední vydání není bohužel dostupné, proto rozebírám druhé vydání této knihy. Kniha je určena pro vyšší školy reálné, což znamená pro jejich pátou až sedmou třídu.

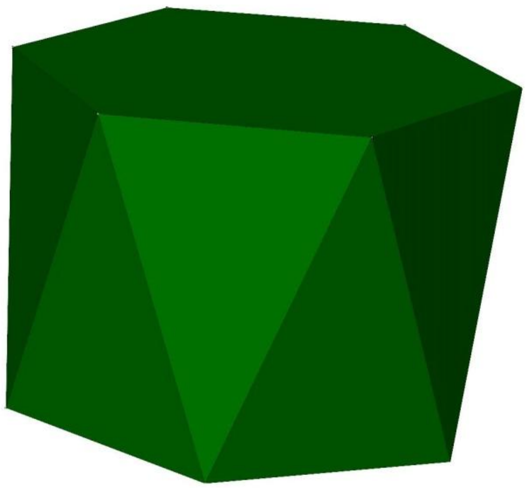


OBRÁZEK 5: OBÁLKA UČEBNICE

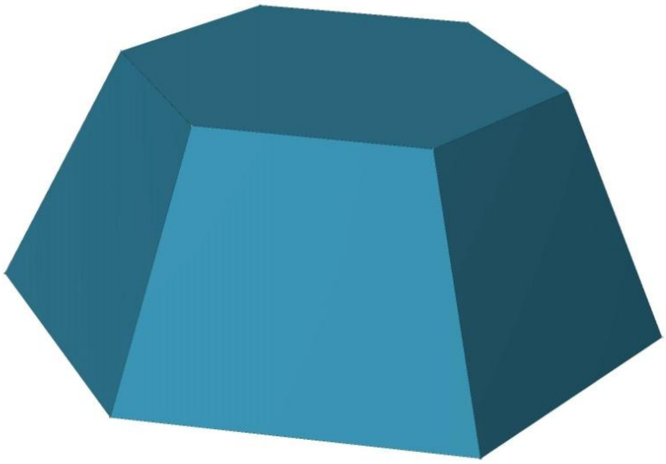
Kniha začíná ukazatelem názvů. U každého názvu je vždy v závorce uvedena strana, na které je pojem vysvětlen. Uvedu zde několik neobvyklých názvů a v závorce vždy vysvětlení z odkazované strany: dvojúhelník sferický ("Část plochy kulové omezená dvěma hlavními polokružnicemi slove sferický dvojúhelník", [6, str. 209](viz Obrázek 6), hranolec ("Hranolec jest mnohostěn, omezený dvěma úhelníky v rovinách rovnoběžných a trojúhelníky, z nichž každý má s jedním z těchto úhelníků společnou stranu a s druhým společný vrchol.", [6, str. 194]) (Obrázek 7), jehlanec ("Zvláštní druhy hranolce jsou: a) Jehlanec, jehož základny jsou dva úhelníky o stejném počtu stran střídavě rovnoběžných. Stěny pobočné jsou obecně lichoběžníky.",[6, str. 195])(vizObrázek 8).



OBRÁZEK 6: SFERICKÝ DVOJÚHELNÍK



OBRÁZEK 7: HRANOLEC

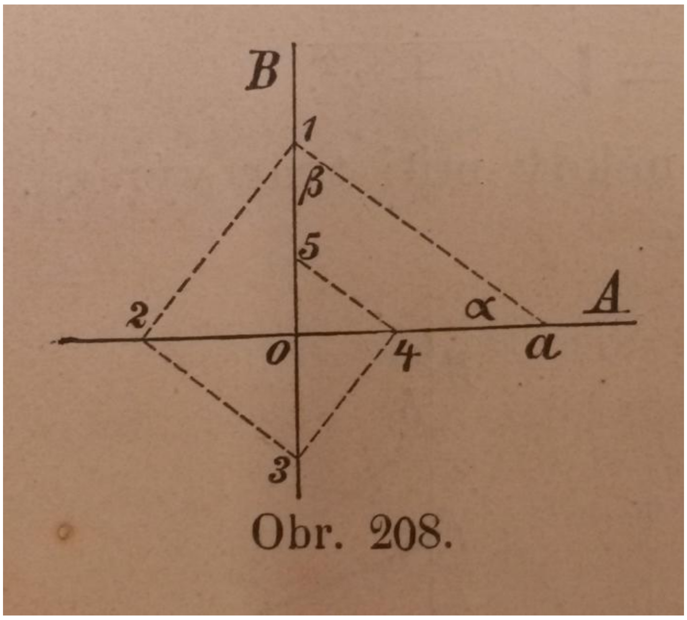


OBRÁZEK 8: JEHLANEC

Jak již název napovídá, kniha je převážně o obecné geometrii. Součástí této knihy je planimetrie, rovinná trigonometrie, stereometrie, sférická trigonometrie a poslední sekcí je *Geometrie analytická.* Vzhledem k tématu mé práce se budu zabývat pouze poslední sekcí.

První kapitolou této sekce je kapitola *XXXI. Proprava k analytické geometrii*, která má tři podkapitoly. V první s názvem *131. Geometrický význam výrazů algebraických* autor vysvětluje nejprve stupně výrazů. Lineární popisuje jako výraz, který značí délku linie, kvadratický, jako výraz, který značí obsah plochy a kubický, jako výraz, který značí obsah nějakého tělesa. Zdůrazňuji, že píše opravdu obsah, což v dnešní době by nebylo správné a museli bychom použít slovo objem. Další částí této podkapitoly je *Sestrojení výrazů lineárních.* Zde autor popisuje, jak geometricky vyřešit kořeny rovnic prvního, druhého a některé případy čtvrtého stupně.

Druhá podkapitola *132. Grafické počítání* je velmi zajímavá. Můžeme se zde naučit graficky násobit, mocnit, odmocňovat i řešit rovnice druhého stupně. Pro příklad uvedu vysvětlení grafického mocnění (viz Obrázek 9). Chceme sestrojit číselnou hodnotu $x = a^n$, kde $n \in Z$. Nechť máme kartézský souřadný systém. Od počátku naneseme na osu y v kladném směru hodnotu a, koncový bod označíme číslem 1. Na osu x naneseme od počátku O v kladném směru hodnotu 1 a koncový bod označíme A. Sestrojíme kolmici procházející bodem 1 na úsečku $A1$, kde tato kolmice protne osu x, tento bod označíme 2. Opět sestrojíme kolmici, tentokrát procházející bodem 2 a kolmou na úsečku 12. Kde tato kolmice protne osu y, tam je bod 3. Vzdálenost $O1$ je číslo a. Vzdálenost $O2$je číslo a^2, takto bychom mohli pokračovat pořád dále. K tomuto mocnění je v knize i důkaz.



OBRÁZEK 9: GRAFICKÉ MOCNĚNÍ

Poté následuje podkapitola *133. Řešení úloh geometrických užitím algebry.* Zde je uvedeno několik geometrických příkladů, např. "Zkomoliti kužel daný tak, aby plášť zkomoleného kužele rovnal se součtu obou základen" [6, str. 250], následuje řešení i s obrázkem, vždy pouze ke konkrétnímu příkladu.

Po tomto úvodu se již můžeme plně zabývat analytickou geometrií v kapitole *XXXII. Analytická geometrie bodu,* která vysvětluje souřadnicový systém. Neuvádí pouze pravoúhlý systém, ale uvádí osy X, Y, které se protínají v počátku a svírají úhel ω, který nemusí být pravý. X-ovou souřadnici bodu nazývá úsečka bodu a y-ovou souřadnici nazývá pořadnice bodu. Další uvedené souřadnice jsou polární a také jsou zde vysvětleny převody mezi těmito typy souřadnic. Moc se mi líbí, že autor hned využívá tyto znalosti a zadává v další podkapitole příklady, aniž by zavedl dalších spoustu pojmů. Příklady jsou typu: vzdálenost dvou bodů, těžiště trojúhelníka nebo odchylka průvodičů. Po těchto příkladech navazuje další teorií v podobě transformace souřadnic a vynášení bodů do grafu, které pak spojíme linií. Teprve po této teorii navazuje podkapitola o přímce.

V podkapitole se můžeme dočíst o obyčejné rovnici přímky, což je zde rovnice ve tvaru $x = a$, poté o směrnicové rovnici, úsekové rovnici a normálné rovnici přímky. Zmínila bych se zde pouze o poslední, která dnes není moc známá. Při popisu této rovnice vychází autor z úsekové rovnice $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Vedeme-li počátkem kolmici na přímku, protne ji v bodě P se souřadnicemi $[p, \beta]$. Dosazením $a = \frac{p}{cos\beta}, b = \frac{p}{sin\beta}$ do úsekové rovnice, kde p je délka průvodiče bodu P a β je odchylka průvodiče bodu P od kladné poloosy x, nám vyjde normálná rovnice přímky: $x\, cos\beta + y\, sin\beta - p = 0$.

V samostatné podkapitole je uvedena obecná rovnice přímky ve tvaru $Mx + Ny + L = 0$ i s převodem na úsekovou, směrnicovou i normálnou rovnici. Navazují podkapitoly *143. Vzdálenost bodu od přímky*, *144. Průsečík a úhel dvou přímek*, *145. Tři přímky jdoucí jedním bodem* a *146. Přímka jakožto geom. místo*. V každé této podkapitole autor obecně vysvětluje, jak vyřešit danou úlohu a uvádí několik konkrétních případů.

Nyní se můžeme přesunout ke kapitole *XXXIV. Analytická geometrie kružnice*. Zde jsou uvedeny tyto typy rovnic kružnice: normálná ve tvaru $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (střed má souřadnice $[a, b]$), speciální případy normálné: středová $x^2 + y^2 = r^2$ (střed je v počátku) a vrcholová $y^2 = 2rx - x^2$ (střed leží na ose x a počátek náleží kružnici). Další jsou obecná: $x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0$ a polární ve tvaru: $\rho^2 + \rho(M\, cos\varphi + N\, sin\varphi) + L = 0$.

Následuje podkapitola *148. Přímka a kružnice*, kde se dozvíme, kolik mohou mít společných průsečíků, co z toho plyne pro tu přímku, jestli je tečnou, sečnou, normálou nebo vnější přímkou. A navazuje podkapitola o pólu a poláře, která není nijak rozsáhlá, jen vysvětluje tyto pojmy a obecný význam. Poslední, čím se autor v kapitole o kružnici zabývá je vzájemná poloha dvou kružnic, vypočítání průsečíků a sestavení rovnice chordály.

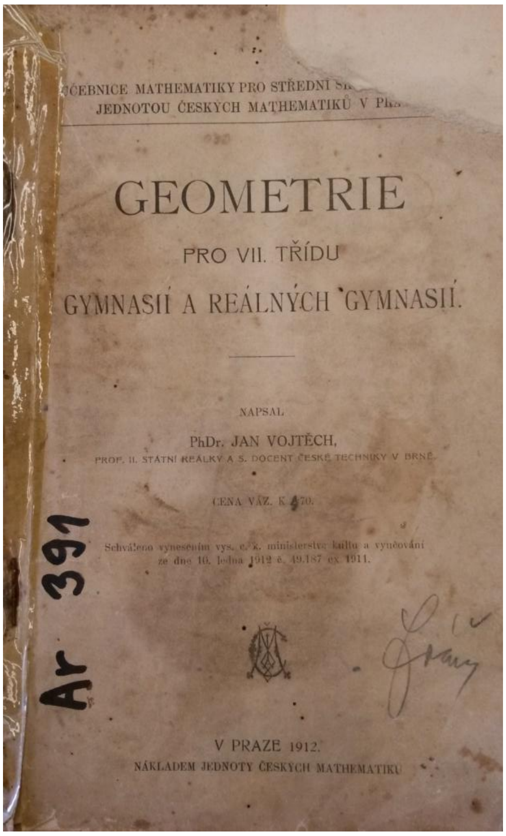
V kapitole XXXV. s názvem *Ellipsa* můžeme vidět definici elipsy: "Ellipsa jest geometrické místo bodů, jichž vzdálenosti ode dvou daných bodů mají stálý součet," [6, str. 294]. Tato definice předpokládá, že jsme v rovině, protože jinak by definovala elipsoid. Vzhledem k tomu, že celá knížka se pohybuje v rovině, úplně nás to nezarazí. Z definice je podrobně odvozena osová rovnice elipsy: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, bohužel je zde vytištěna chyba a osová rovnice je zde popsána takto: $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$, ale v další části kapitoly autor pracuje se správnou rovnicí. V celé kapitole se můžeme dočíst, jak vypočítat průsečíky přímky s elipsou, tečny k elipse nebo její průměr, ale pouze u elips, které mají střed v počátku. Posunutí středu se nepředpokládá, nejspíš vzhledem k tomu, že se žáci již naučili transformovat souřadnice a mohou si elipsu převést do nové soustavy tak, aby měli střed v počátku.

V Kapitole XXXVI. *Hyperbola* je opět definice hyperboly a poté je z ní odvozena rovnice hyperboly ve tvaru: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Stejně jako u elipsy musí mít hyperbola střed v počátku a k takovým hyperbolám se studenti naučí vypočítat tečny a asymptoty. Dozvědí se, jak vypočítat průsečík hyperboly s přímkou a co je to průměr hyperboly, průměrová rovnice a asymptotická rovnice.

V předposlední kapitole s názvem Parabola se dozvíme to samé jako u předchozích kuželoseček. Navíc se dozvíme, jak vypočítat obsah parabolické úseče. Poslední kapitola Závěrek upozorňuje čtenáře na fakt, že předchozí křivky jsou křivkami druhého stupně a nazýváme je kuželosečky.

GEOMETRIE PRO VII. TŘÍDU GYMNÁSIÍ A REÁLNÝCH GYMNÁSIÍ

Tuto knihu napsal PhDr. Jan Vojtěch, profesor II. státní reálky a docent České techniky v Brně. Vydána byla roku 1912 Jednotou českých matematiků v Praze. Jak již název napovídá, byla určena pro sedmou třídu gymnázií a reálných gymnázií.



OBRÁZEK 10: OBÁLKA UČEBNICE

V úvodu autor popisuje, co jsou empirické čáry, čímž myslí znázornění změny hodnoty fyzikální veličiny v závislosti na čase. Poté navazuje grafickým znázorněním funkcí a uvádí příklady: nepřímá úměra, kvadratická funkce, logaritmická funkce a i některé příklady funkcí goniometrických. Toto je znázornění grafické a podrobné vyšetření aritmetické nazývá analytickou geometrií. Přesněji definuje analytickou geometrii takto: "Analytická geometrie vyjadřuje geometrické útvary rovnicemi ve zvolené soustavě souřadnic a na základě těchto rovnic je vyšetřuje," [11, str. 2].

Dále se kniha skládá ze dvou částí, první částí je *Bod a přímka* a druhou *Kuželosečky.* První část začíná kapitolou *Bod,* která se zabývá zavedením souřadnic bodu na přímce a v rovině. Na přímce je zavádí jako orientovanou vzdálenost od zvoleného počátku. Zajímavé je, že vzdálenost neuvádí v centimetrech, ale v libovolných jednotkách. Dalším způsobem zavedení je přes dělicí poměr, s čímž se při zavádění analytické geometrie dnes nesetkáváme. Označuje ho $\lambda = \frac{AC}{BC}$ a vyjadřuje polohu bodu C vzhledem k bodům A a B. V rovině zavádí souřadnice pouze v pravoúhlém souřadném systému. X-ová souřadnice se nazývá úsečka a y-ová pořadnice. Jako poznámku pod čarou uvádí, že osy by nemusely svírat pravý úhel. V této kapitole se také dozvíme vzorec pro vzdálenost dvou bodů a vzorec pro vypočítání odchylky spojnice dvou bodů a osy x. Posledním poznatkem této kapitoly je odvození vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka z předchozího vzorce pro odchylky. Výsledný vzorec je uveden takto: $P = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + +x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$, kde body $A[x_1, y_1]$, $B[x_2, y_2], C[x_3, y_3]$ jsou vrcholy trojúhelníka. Na závěr kapitoly je uvedeno osmnáct příkladů na procvičení.

Další kapitola s názvem *Přímka* uvádí různé rovnice přímky, jejich odvození a převody. Najdeme zde tvar rovnice, která prochází dvěma danými body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, dále tvar rovnice, pokud přímka prochází daným bodem $[x_1, y_1]$ a má danou směrnici k: $y - y_1 = k(x - x_1)$. Směrnicový tvar: $y = kx + q$, úsekový tvar: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, normální tvar $x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0$, jestliže kolmice z počátku souřadnic na přímku spuštěná má délku d a svírá s kladnou poloosou x úhel α. Posledním tvarem je obecná rovnice přímky $Ax + By + C = 0$. Tato kapitola také obsahuje vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky a opět okolo dvaceti příkladů na procvičení.

Kniha pokračuje kapitolou *Více přímek*, která se zabývá průsečíkem dvou i tří přímek, jejich odchylkou. Zajímavý je vzorec, který autor uvádí pro výpočet odchylky dvou přímek: $tg\ \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$, kde k_1, k_2 jsou směrnice daných přímek. Pokud je jmenovatel nulový, přímky jsou k sobě kolmé, pokud $k_1 = k_2$, pak jsou přímky buď shodné nebo rovnoběžné. Na závěr této kapitoly a celé první části se ještě dozvíme rovnice os úhlů v trojúhelníku a můžeme si opět celý obsah kapitoly procvičit na příkladech.

Druhou a opravdu velmi obsáhlou částí této knihy jsou *Kuželosečky*. Tato část začíná kapitolou *Kružnice*, kde autor uvádí rovnici kružnice ve dvou tvarech, kterou nazývá rovnicí kruhu. Opět si můžeme všimnout záměny pojmu kruh a kružnice. Prvním tvarem je tvar středový: $x^2 + y^2 = r^2$, kde střed kružnice leží v počátku a druhý tvar, který autor nazývá normální: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, kde střed kružnice je $S[m, n]$. Další uvedenou rovnicí je rovnice obecná ve tvaru: $x^2 + y^2 + +Mx + Ny + L = 0$. Velmi se mi líbí popis autora, jak poznáme, že kvadratická rovnice je rovnicí kruhu: "Rovnice 2. stupně o dvou proměnných jest rovnicí kruhu, jestliže v ní člen obsahující xy schází a členy kvadratické mají stejné koeficienty," [11, str. 37]. Tato poučka propojuje poznatky z aritmetiky a grafického znázornění. Navazuje několik řešených úloh a opět soubor příkladů na procvičení.

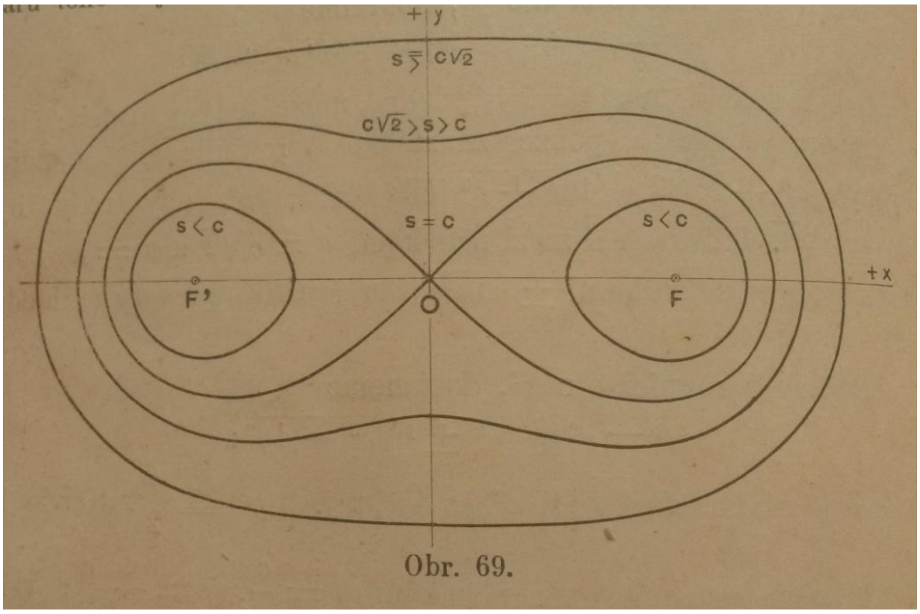
V další kapitole nazvané *Tečna kružnice, dvě kružnice* se autor zabývá hlavně vlastnostmi kružnice. Vypočítáním tečen k jedné kružnici, procházejících daným bodem kružnice nebo daným vnějším bodem, společné tečny dvou kružnic, rovnice poláry kružnice, mocnosti bodu ke kružnici nebo rovnice chordály.

O parabole si můžeme přečíst v kapitole se stejným názvem. Dozvíme se názvosloví spojené s parabolou (ohnisko, vrchol, parametr, atd.), vrcholovou rovnici $y^2 = 2px$ a dále rovnice, u kterých autor neuvádí speciální název, jen souřadnice ohniska a se kterou souřadnicovou osou je rovnoběžná osa paraboly. Zajímavou poučkou je poučka ohledně průměru paraboly, která uvádí: "Průměr paraboly jest rovnoběžný s osou paraboly a má rovnici $y = \frac{p}{k}$, je-li sdružen s tětivami o směrnici k," [11, str. 58]. Průměr paraboly se ve většině učebnic neuvádí. Dále je zde napsáno, jak vypočítat rovnici tečny a také vlastnosti tečny. Tyto vlastnosti bych zařadila spíše do planimetrie než do analytické geometrie. Jedná se o ohniskové vlastnosti jako například: tečna půlí vnější úhel průvodičů, subtangenta paraboly je půlena vrcholem a subnormála má délku rovnou parametru. Posledním poznatkem této kapitoly je sestavení rovnice poláry paraboly a navazují příklady na procvičení.

Společnou kapitolu mají elipsa a hyperbola, která nejprve uvádí definice a rovnice těchto křivek, z nichž odvozuje některé vlastnosti jako například osovou souměrnost nebo konstrukci. Také vyšetřuje vzájemnou polohu přímky a dané kuželosečky. Neobvyklé je zařazení obsahu elipsy, který je odvozen z metody vepisování obdélníků do proužků elipsy. Kapitola nezapomíná ani na rovnice tečen, normál, poláry a asymptot hyperboly. I u těchto kuželoseček autor uvádí rovnice průměru a vysvětluje, co jsou sdružené průměry.

Poslední kapitola s názvem *Kuželosečky* se snaží více propojit parabolu, elipsu a hyperbolu. Proto uvádí jednotnou definici: "Geometrickým místem bodů, jež mají od pevného bodu (ohniska) a od pevné přímky (řídicí) stálý poměr vzdáleností ε, jest elipsa nebo parabola nebo hyperbola podle toho, jestliže ε (číselná výstřednost křivky je $<, >$ nebo $= 1,$" [11, str. 100]. Pomoct s propojením nám má také fakt, že všechny tyto křivky vzniknou při řezech kužele rovinou. Kniha uvádí, jaké vlastnosti musí mít rovina řezu, aby vznikla konkrétní kuželosečka a také je zde uvedena Quetelet-Dandelinova věta, ovšem bez pojmenování. Poslední podkapitola se zabývá vyšetřením, zda všechny rovnice druhého stupně značí kuželosečku. Autor tuto kapitolu uzavírá slovy, že rovnice druhého stupně vždy značí kuželosečku, jen může být zvrhlá (dnešním názvoslovím singulární) nebo vlastní a oba tyto příklady mohou být imaginární. Další propojení s projektivní geometrií je poznámka nakonec, že hyperbola a elipsa jsou určeny čtyřmi podmínkami a parabola třemi podmínkami.

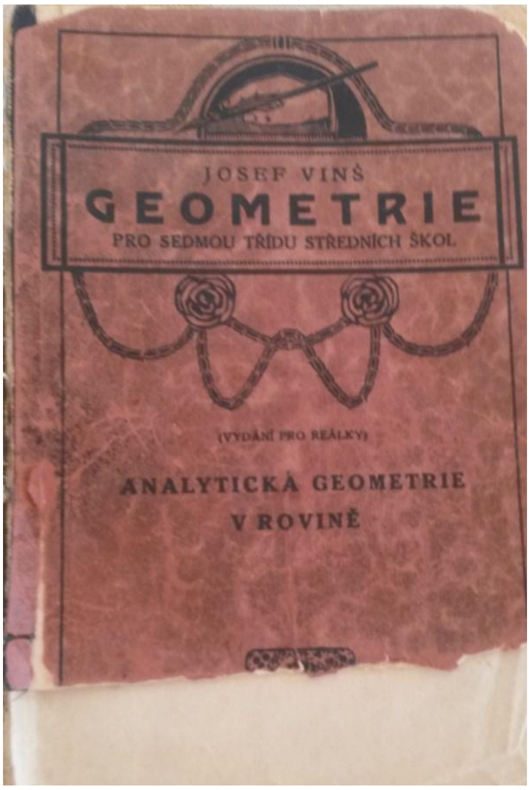
Kniha končí třemi dodatky. První z nich obsahuje další zajímavé křivky s jejich rovnicemi i obrázky (kissoidu, lemniskatu, Cassiniho křivky a cykloidu (viz Obrázek 11). Druhý dodatek *Začátky počtu diferenciálního* vysvětluje derivace a pak ukazuje vyšetření průběhu funkce pomocí derivací. Posledním dodatkem je *Grafické řešení rovnic numerických* a zabývá se řešením soustavy rovnic o dvou neznámých nebo rovnic třetího a čtvrtého stupně pomocí rýsovacích potřeb. Autor ukončuje knihu příklady k opakování, které shrnují učivo celé učebnice.



OBRÁZEK 11: CASSINIHO KŘIVKY

GEOMETRIE PRO SEDMOU TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

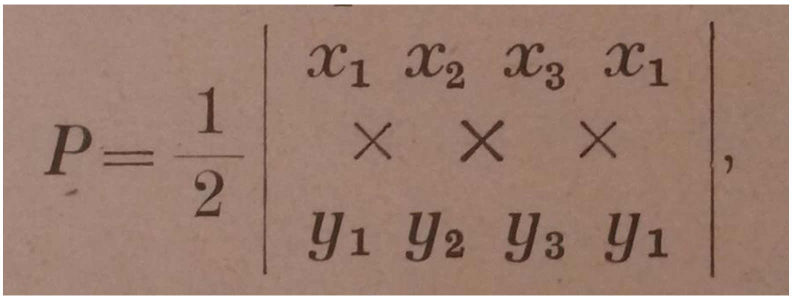
Tuto učebnici napsal roku 1916 Josef Vinš a vydala ji Československá grafická unie. Roku 1928 bylo uvedeno druhé vydání. Učebnice se zabývá analytickou geometrií, pouze poslední kapitola je zaměřena na diferenciální a integrální počet, proto byla určena pro poslední třídu reálek.



OBRÁZEK 12: OBÁLKA UČEBNICE

V úvodu autor vysvětluje, čím se zabývá analytická geometrie na příkladech, které již studenti dobře znají (přímá úměra, kvadratická funkce, nepřímá úměra). Dělí ji zde na rovinnou a prostorovou. Úvod obsahuje i historickou poznámku, která upozorňuje na vyjádření geometrických vztahů počtářsky už u Apollonia z Pergy a zakladatele analytické geometrie jako takové René Descarta. Na konci úvodu je ještě uvedeno několik matematiků, kteří analytickou geometrii rozvíjeli.

V první kapitole nazvané *Bod* autor zavádí souřadnice na jedné ose a později pravoúhlý souřadný systém. Při zavedení souřadnic na jedné ose, tyto souřadnice nazývá úsečkami. "Ke každému bodu na ose X přísluší určitá úsečka, a naopak každé úsečce odpovídá jediný bod na ose," [10, str. 5]. Uvádí zde i vzdálenost dvou bodů na ose jako algebraický rozdíl jejich úseček, dělicí poměr a harmonickou čtveřici. Při přidání druhé osy nazývá y-ové souřadnice pořadnicemi. Po zavedení soustavy souřadnic hned definuje vzdálenost dvou bodů, odchylku přímky dané dvěma body od kladného směru osy x, čtvrtý harmonický bod, těžiště trojúhelníku a jeho obsah. Ten popisuje nejprve pomocí schématu (viz Obrázek 13), později využije determinant, nazve ho determinantem a popíše Saarusovo pravidlo. V determinantu využívá homogenních souřadnic, ovšem nikde je nezavádí. Poslední úlohou této kapitoly je řešený příklad, u kterého se má určit třetí vrchol rovnoramenného trojúhelníku, pokud známe obsah. Kapitola končí sérií příkladů na procvičení.



OBRÁZEK 13: SCHÉMA

Navazující kapitola se zabývá přímkou a jejími vyjádřeními. Najdeme zde popis směrnicového tvaru, úsekové rovnice, obecné rovnice a tzv. normální rovnice přímky. Normální rovnice přímky má tvar: $xcos\beta + ysin\beta - n = 0$, kde β je rovna velikosti úhlu, který svírá kolmice na danou přímku z počátku a kladný směr osy x. Následují příklady, ve kterých si může student procvičit převody různých tvarů rovnice přímky na jiné.

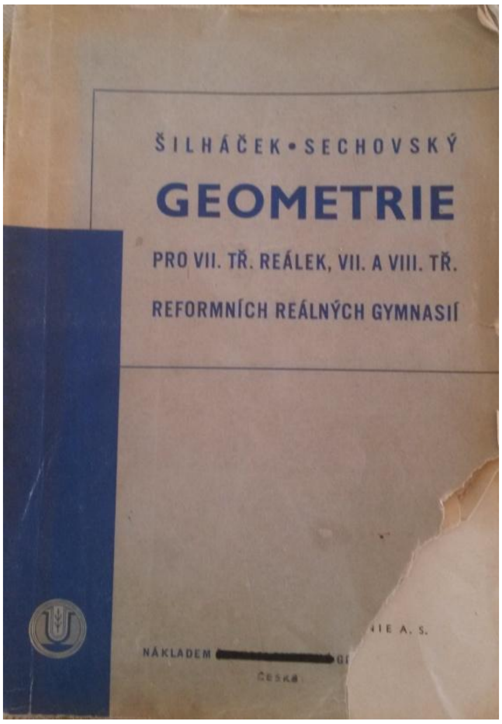
Další úlohy popisované v této knize jsou poloha bodu vůči přímce, vzdálenost bodu od přímky, průsečík a odchylka dvou různoběžek, nalezení přímky kolmé a přímky rovnoběžné k dané přímce, osa úsečky a osa úhlu a v neposlední řadě nalezení třetí přímky, která má s dvěma dalšími stejný průsečík. Za každou podkapitolou následují příklady na procvičení.

Autor pokračuje kapitolou *Derivace*, ve které zavádí limity a pomocí nich zavádí derivace. Všechna pravidla jsou popsána slovně, nikoli vzorci, dokonce jsou součástí této kapitoly i parciální derivace. Následují příklady na průběh funkce, jenž ale není nikde vysvětlen. Předpokládá se, že student sám odvodí postup pro výpočet průběhu funkce.

Rovnou pak navazuje kapitola *IV. Kruh*, která začíná popisem rovnic kružnice. První uvedenou rovnicí je středová rovnice kruhu. Takto autor nazývá rovnici $x^2 + y^2 = r^2$. Což znamená, že má kružnice střed v počátku a poloměr r. Pokud se střed posune do jiného bodu se souřadnicemi $[m, n]$, už se nejedná o středovou rovnici kruhu, ale o normální rovnici kruhu ve tvaru: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$. Jako poslední je uvedena obecná rovnice kruhu, ve tvaru: $x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0$, kde $m = -\frac{M}{2}, n = -\frac{N}{2}$. Jsou zde popsány i převody mezi těmito tvary. Dále navazují úlohy o kružnici např. průsečík přímky s kružnicí, tečna a normála kružnice, vzájemná poloha dvou kružnic, tečny vedené z bodu ke kružnici a mocnost bodu ke kružnici i rovnice chordály. Za každou podkapitolou následuje velký výčet příkladů na procvičení, které neobsahují jen typické příklady popsané v učebnici, ale i netypické příklady i důkazy (viz Ukázky příkladů).

GEOMETRIE PRO VII. TŘÍDU REÁLEK JAKOŽ I VII. A VIII. TŘÍDU REFORMNÍCH REÁLNÝCH GYMNASIÍ

Tato učebnice byla napsána Dr. Karlem Šilháčkem za přispění Dr. Hynka Sechovského a vydána roku 1936. Jak již zmiňuje název, byla určena pro poslední rok škol reálných nebo poslední dva roky reformních reálných gymnázií.



OBRÁZEK 14: OBÁLKA UČEBNICE

V úvodu autor popisuje princip analytické geometrie. Vysvětluje zde, že můžeme využít grafické znázorňování aritmetických příkladů pro jejich zjednodušení. Grafické znázornění lze poté analyticky popsat pomocí souřadnic. Ovšem v analytické geometrii využíváme obráceného postupu. Z daného analytického popisu můžeme vymodelovat grafické znázornění spolu s řešením daného problému. Pro srozumitelnost výkladu přidává autor i příklad řešený pomocí syntetické geometrie a čtyřmi způsoby z analytické geometrie.

Po úvodu navazuje výkladem křivky (čáry), kterou popisuje jako geometrické místo bodů, jejichž souřadnice vyhovují rovnici. Hned uvádí několik příkladů křivek. Příklady mi přijdou dost obsáhlé a nevhodně zvolené vzhledem k tomu, že student nebyl seznámen ani se souřadným systémem ani s typy křivek. Teprve v další kapitole popisuje rovnici křivky prvního stupně: $Mx + Ny + L = 0$. Jsou zde také uvedeny vlastnosti křivek dle jejich rovnic.

Velmi zajímavou kapitolou je kapitola o nalezení průsečíků dvou křivek. Jsou zde vysvětleny tři postupy. Prvním je klasický způsob sestavit z rovnic křivek soustavu a vyřešit ji s proměnnými x, y. Druhý způsob spočívá v tom, že anulujeme zadané rovnice a jejich levé strany označíme k, k'. Zjistíme hodnotu součinu kk' a pokusíme se jej rozložit na racionální činitele. Kolik nalezneme racionálních činitelů, na tolik větví se křivka rozděluje. Poté se pokusíme nalézt průsečíky těchto větví. Třetí způsob popisován jako princip Laméův je o dost zajímavější a je možno s ním vyřešit i daleko složitější příklady (viz Obrázek 15). Opět si levé části anulovaných rovnic označíme jako k, k'. Poté provedeme součet $\mu k + \lambda k' = 0$, kde λ a μ jsou libovolné konstanty. Každá křivka takto vytvořená obsahuje všechny průsečíky původně zadaných křivek. Proto zvolíme několik kombinací těchto konstant a snažíme se nalézt společný bod výsledných křivek. Tento blok je zakončen sérií příkladů k procvičení probírané látky.

znamenati novou čáru; tato bude obsahovati všechny body čáry k, neboť jejich souřadnice splňují $k = 0$ a tudíž i $kk' = 0$; z téhož důvodu obsahuje nová čára i všechny body čáry k'; a neobsahuje konečně žádných dalších bodů, neboť součin kk' rovná se nule, jen když některý činitel rovná se nule. Nová čára sestává pouze z obou čar původních. Naopak zjistíme-li, že **levá strana anulované rovnice dá se rozložiti v (racionální) činitele,** smíme tvrditi, že příslušná čára **rozpadá se** v tolik čar nižšího stupně, kolik racionálních činitelů bylo zjištěno. Čára taková se liší ovšem od ostatních čar svého typu (stupně), pročež pravíme, že jest **zvrhlá (degenerovaná).**

Příklad: Čára

$$x^2 - y^2 = 0$$

není vlastní křivkou 2. stupně (s vlastnostmi, které později poznáme), nýbrž jest zvrhlá, rozpadá se na čáry

$$k \equiv x - y = 0, \qquad k' \equiv x + y = 0,$$

tedy osu lichých a osu sudých kvadrantů.

c) Souřadnice průsečíků dvou čar k, k' splňují obě rovnice

$$k = 0, \qquad k' = 0,$$

budou tedy splňovati i rovnici

$$k + k' = 0, \text{ nebo i } \qquad \lambda k + \mu k' = 0,$$

kdež λ, μ znamenají libovolná konstantní čísla. Tato rovnice představuje tedy novou čáru, která však prochází všemi průsečíky původních čar.

Sečteme-li rovnice dvou čar, rozšířivše je napřed libovolnými konstantními činiteli, dostaneme rovnici nové čáry, která prochází všemi průsečíky čar původních.

Tato věta uvádí se obyčejně pod názvem **„princip Laméův"** (franc. inženýr a matematik Lamé † 1870), ačkolik v podstatě jest staršího původu.

Příklad: $\quad k \equiv x - y = 0, \quad k' \equiv x + y = 0$

(osy kvadrantů, průsečík počátek);

$$\lambda = 1, \quad \mu = 1, \quad \lambda k + \mu k' \equiv 2x = 0$$

(osa y, prochází též počátkem);

$$\lambda = 1, \quad \mu = -1, \quad \lambda k + \mu k' \equiv -2y = 0$$

(osa x, prochází též počátkem);

$\lambda = 1$, μ libovolné, $\lambda k + \mu k' \equiv (1 + \mu)\, x - (1 - \mu)\, y = 0$ jest přímka procházející počátkem.

5. Příklady ke cvičení.

1. K bodům M určete (analyticky i syntheticky) souměrné podle os souřadných, podle os kvadrantů a podle počátku! M_1 (2, —3), M_2 (—3, —3), M_3 (2, 0), M_4 (0, —4), M_5 (0, 0).

OBRÁZEK 15: VÝPOČET PRŮSEČÍKU KŘIVEK

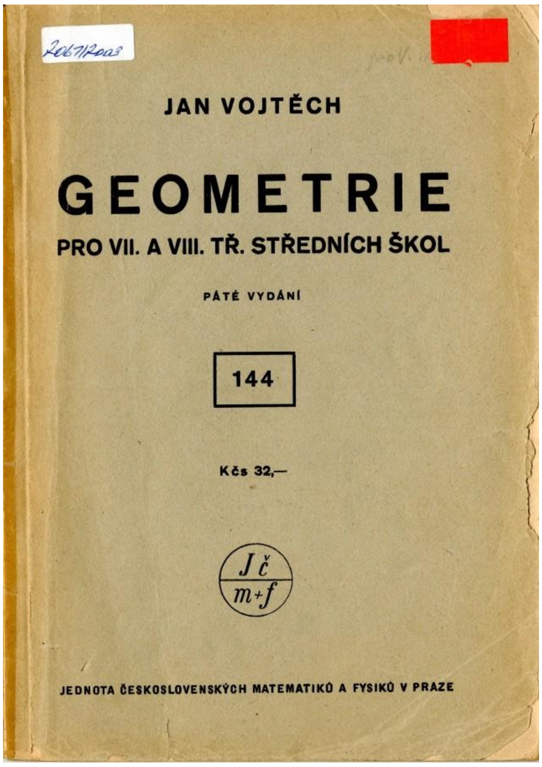
Další kapitola se zabývá souřadnicemi bodů v různých soustavách a jejich převody. Autor zde používá zcela obecnou soustavu, Descartesovu soustavu a polární soustavu souřadnic. Popisuje zde jak transformace mezi posledními dvěma zmíněnými, ale i v Descartesově soustavě s posunutým počátkem nebo otočením kolem počátku. Hned na tuto kapitolu navazuje velký blok zabývající se projektivní geometrií. Je zde popsán dělicí poměr, dvojpoměr, sestrojení harmonické čtveřice bodů i přímek ve svazku. Dělicím poměrem se zabývá i v kapitole nazvané *Trojúhelník*, kde hledá jeho těžiště. Zde poprvé použije determinant, který ovšem není zadefinován pomocí permutací, ale je zde pouze popsán postup jeho výpočtu pro čtvercovou matici řádu dvě a tři. Všimněme si, že do této doby nebyla matice nikde zmíněna a rovnou počítáme její determinant. Pro determinant řádu tři používá Saarusovo pravidlo (samozřejmě ho tak nenazývá), pro vypočítání determinantů vyšších řádů je zde popsán rozvoj podle sloupce i podle řádku. Tento blok zakončuje popisem řešení soustavy rovnic pomocí determinantů.

V další části knihy teprve začíná analytická geometrie, jak ji známe ze současnosti. Autor zde popisuje vyjádření přímky: parametrické vyjádření, směrnicový a úsekový tvar, obecnou rovnici přímky a ještě speciální tvar, který nazývá jako normální tvar rovnice přímky. Tento tvar má rovnici: $xcos(\alpha) + ysin(\alpha) - d = 0$, kde d je vzdálenost přímky od počátku a úhel α je úhel, jež svírá kolmice spuštěná z počátku na přímku s osou x. Dále zde řeší průsečíky dvou přímek, kde se objevuje limita (opět bez jakékoli definice), a odchylky přímek. Poté přechází na vyjádření kuželoseček, které začínají kružnicí. Zde je uveden středový tvar i obecná rovnice, hledají se průsečíky i rovnice tečen ke kružnici. A opět tu autor zabíhá do projektivní geometrie a popisuje pól a poláru. Vše doplňuje příklady na procvičení. Další kuželosečkou je parabola, zde je také uvedena rovnice, pól, polára, tečna i normála. Navíc se u paraboly zabývá autor její křivostí (spojitost s diferenciální geometrií) a obsahem úseče paraboly. Plynule navazuje kapitola o elipse společně s hyperbolou, která se hodně opírá o znalosti těchto objektů z deskriptivní geometrie a opět uvádí jejich rovnice, tečny i normály. Musím upozornit, že v těchto kapitolách autor neuvádí, že se jedná o kuželosečky, toto označení se objevuje až v následující kapitole, která se zabývá průnikem kuželové plochy s rovinou. Pojem kuželosečka se tedy používá pouze jako označení řezu kuželové plochy, který může mít tvar například elipsy. Nejedná se o nadřazený pojem pro kružnici, elipsu, hyperbolu a parabolu.

Poslední část analytické geometrie, kterou se tato kniha zabývá, jsou křivky vyšších stupňů a soustavy rovnic druhého řádu. Zmiňuje se o Descartesově listu, lemniskátě nebo křivkách rovnic $x^n = 0$, kde n je přirozené číslo. Konec knihy už se zabývá diferenciálním a integrálním počtem.

GEOMETRIE PRO VII. A VIII. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

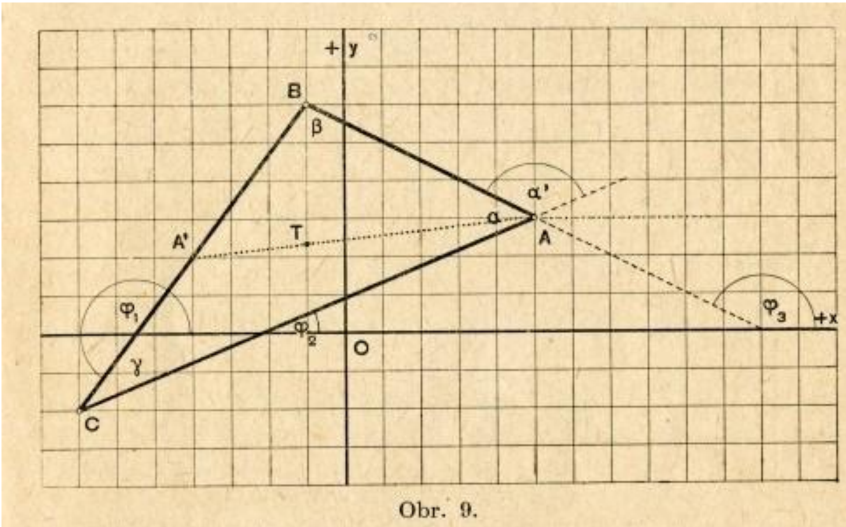
Kniha byla napsána Janem Vojtěchem roku 1912, provádím rozbor pátého vydání, které vyšlo roku 1946. První vydání této knihy je také zařazeno do rozboru.



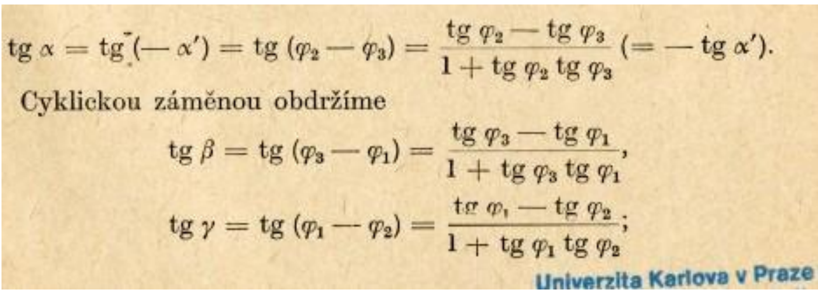
OBRÁZEK 16: OBÁLKA UČEBNICE

Hned v úvodu autor popisuje význam analytické geometrie takto: "Analytická geometrie vyjadřuje geometrické útvary rovnicemi ve zvolené soustavě souřadnic a na základě těchto rovnic je vyšetřuje," [12,str.4]. Poté také uvádí hned několik příkladů rovnic, např. přímou úměrnost, nepřímou úměrnost, rovnice přímky, paraboly, exponenciály atd. Nezapomněl se zmínit i o historii analytické geometrie.

Učebnice je rozdělena do dvou oddílů a dvou dodatků. První oddíl *A. Bod a přímka* je rozdělen na tři kapitoly. První kapitola *I. Bod* zavádí souřadnice bodu na přímce se zvoleným počátkem pomocí vzdáleností, pak také pomocí dělicího poměru. Při zavádění bodu v rovině uvažuje autor pouze navzájem kolmé osy. Oproti ostatním učebnicím nenazývá x-ovou souřadnici pouze úsečkou, ale také abscisou, souřadnicí x nebo první souřadnicí. Také y-ová souřadnice má více názvů: pořadnice, ordináta, souřadnice y nebo druhá souřadnice. V této kapitole jsou uvedeny vzorce i s odvozením pro výpočet vzdálenosti dvou bodů a odchylky spojnice bodů od kladného směru osy x. Tohoto vzorce využívá ve výpočtu vnitřních úhlů trojúhelníku ABC (viz Obrázek 17, Obrázek 18): $\tan\alpha = \frac{\tan\varphi_2 - \tan\varphi_3}{1+\tan\varphi_2 \cdot \tan\varphi_3}$, kde $\tan\varphi_1 = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$, kde $B = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2], A = [x_3, y_3]$. Úhly φ_1, φ_2, φ_3 rozumíme odchylky stran trojúhelníku od kladného směru osy x. Cyklickou záměnou dostaneme vzorce pro všechny vnitřní úhly trojúhelníka. Posledním poznatkem této kapitoly je vzorec pro obsah trojúhelníku, který je odvozen, avšak je podán v podobě vzorce, autor se nijak nesnaží zavádět determinant jako v předešlých učebnicích.



OBRÁZEK 17: TROJÚHELNÍK



$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha') = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_3) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_3}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3} \; (= -\operatorname{tg}\alpha').$$

Cyklickou záměnou obdržíme

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_1},$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2};$$

OBRÁZEK 18: VZORCE PRO VNITŘNÍ ÚHLY

Další kapitola *II.Přímka* uvádí šest tvarů rovnice přímky: rovnici přímky danou dvěma body $\left((y-y_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\right)$, rovnici přímky danou bodem a směrnicí $\big((y-y_1)=k(x-x_1)\big)$, směrnicovou rovnici přímky $(y=kx+q)$, úsekovou rovnici přímky $\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1\right)$, normálový tvar ($x\cos\alpha+y\sin\alpha-d=0$, kde d je délka kolmice spuštěná z počátku na přímku a α je úhel, který tato kolmice svírá s kladnou částí osy x) a obecnou rovnici přímky ($Ax+By+C=0$). Poslední vzoreček této kapitoly je pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky.

V kapitole *III. Dvě a více přímek* se naučíme vypočítat průsečík dvou přímek, dále úhel, který svírají, pomocí dnes neobvyklého vzorce: $\tan\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$, kde k_1, k_2 jsou směrnice daných přímek. Nakonec se dozvíme, co je svazek přímek a jak využít přímku jako geometrické místo bodů.

Oddíl *B. Kuželosečky* začíná bez jakéhokoli úvodu hned kapitolou *IV. Kružnice*. Z toho usuzuji, že studenti již znali pojem kuželosečky z předešlých let, nyní je jen zaváděli pomocí rovnic. Tato kapitola je shodná s kapitolami z jiných učebnic. Autor uvádí středový tvar rovnice kružnice, kdy střed je v počátku, tvar normální, kdy střed je libovolný a normální rovnici kružnice. Nakonec uvádí výpočet průsečíků přímky s kružnicí a vyvození závěru, zda je přímka sečnou, tečnou nebo leží mimo kružnici.

Tečna kružnice je uvedena až v další kapitole pomocí rovnice: $(x_1-m)\cdot(x-m)+(y_1-n)(y-n)-r^2=0$, kde bod se souřadnicemi $[x_1, y_1]$ je tečný bod. Dále se dozvíme, co je to polára: "Polára bodu vzhledem ke kružnici jest geometrické místo bodů harmonicky sdružených s tímto bodem vzhledem k průsečíkům všech přímek bodem tím vedených s kružnicí," [12, str. 50]. A také její rovnici: $(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)-r^2=0$, kde pól $P_0=[x_0, y_0]$. Není zde uvedeno, že tečna je speciální případ poláry, předpokládá se, že to student odvodí sám. Dále zde autor uvádí mocnost bodu ke kružnici, výpočet polohy dvou kružnic a chordály.

V kapitole *VI. Parabola* je uvedena vrcholová rovnice paraboly s osou rovnoběžnou s osou x nebo s osou y. Poté obecná rovnice paraboly, průsečík paraboly s přímkou a určení, zda je přímka sečnou, tečnou nebo leží mimo parabolu.

Zajímavou částí je poučka o průměru paraboly: "Průměr paraboly $y^2 = 2px$ jest rovnoběžný k ose paraboly a má rovnici $y = \frac{p}{k}$, je-li sdružen s tětivami a směrnicí k," [12, str.65]. Průměr paraboly není uveden ve všech učebnicích, proto ho zde uvádím. Navazující částí je podkapitola o úseči paraboly a vypočítání jejího obsahu pomocí vzorce: $U = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}$, kde krajní body tětivy jsou $P_1 = [x_1, y_1], P_2 = [x_2, y_2]$ a p je parametr paraboly (odvození v Ukázky příkladů 7c).

Tečna paraboly je opět uvedena až v další kapitole spolu s polárou a ohniskovými vlastnostmi paraboly, které by měly být uvedené spíše v planimetrii než analytické geometrii.

Elipsa a hyperbola mají společnou osmou kapitolu, kde autor nejprve uvádí osovou rovnici elipsy ve tvaru: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, společně s návodem, jak sestrojit elipsu pomocí bodové konstrukce. Hned vzápětí uvádí bodovou konstrukci hyperboly a také její osovou rovnici: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tato rovnice vyjadřuje všechny hyperboly, které mají hlavní osu rovnoběžnou s osou x. Rovnici pro hyperboly s hlavní osou rovnoběžnou s osou y autor neuvádí. Na konci kapitoly se naučíme vyšetřit průsečíky přímky a elipsy nebo hyperboly.

Jak je již autorovým zvykem, tečny jsou uvedeny v další kapitole společně s tečnami, asymptotami hyperboly a polárou. Ovšem, co je nové oproti jiným učebnicím jsou průměry elipsy a hyperboly, sdružené průměry a poučka: "Hyperbola a její asymptoty omezují na přímce úseky sobě rovné," [12, str. 97]. Pod poučkou je poznámka, že nám poučka slouží při konstrukci bodů hyperboly a součin těchto úseků je roven čtverci výstřednosti.

Poslední kapitola *X. Kuželosečky* se snaží propojit kuželosečky jako celek, uvádí společnou definici, odvození vzniku kuželoseček při řezech kuželovou plochou. Vyslovuje domněnku, že pokud každá kuželosečka měla rovnici druhého stupně, mohla by každá rovnice druhého stupně být kuželosečkou. Tuto domněnku dokazuje a prohlašuje ji za poučku: "Každá rovnice druhého stupně o dvou proměnných vyjadřuje kuželosečku (pravou nebo zvrhlou, reálnou nebo imaginární)," [12, str.112].

V dodatku autor uvádí jiné křivky, což jsou křivky Cassiniovy a cykloidy. Ovšem z Cassiniových křivek je zde pouze rovnice a obrázek lemniskáty, u které je v poznámce uvedeno, že je to Cassiniova křivka. Cykloida je zde uvedena pouze prostá a rovnice jen parametrická.

Učebnice končí *Začátky počtu infinitesimálního*, ale tato část není předmětem této práce, protože v učebnici není nijak využita v analytické geometrii.

Porovnání učebnic

Vzhledem k velké podobnosti názvů učebnic budu v porovnání využívat pro lepší přehlednost označení, která jsou uvedena v legendě (viz Obrázek 19**Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.**).

Název učebnice	**Autor**	**Rok vydání**	**Označení**
Geometrie pro vyšší školy reálné	Alois Strnad	1898	Učebnice A
Geometrie pro VII. třídu gymnásií a reálných gymnásií	J. Vojtěch	1912	Učebnice B
Geometrie pro sedmou třídu středních škol	J. Vinš	1928	Učebnice C
Geometrie pro VII. tř. reálek a VII. A VIII. tř. reformních reálných gymnásií	K. Šilháček, H. Sechovský	1935	Učebnice D
Geometrie pro VII. a VIII. třídu středních škol	J. Vojtěch	1946	Učebnice E

Obrázek 19: Legenda

OBSAHOVÁ STRÁNKA

Označení knihy	Obsah				
	Kosá soustava souřadnic	Využití souřadnic bodů	Derivace / využití v a.g.	Zavedení determinantu	Křivky vyššího stupně
Učebnice A	ano	ano	ne / ne	ano	ne
Učebnice B	v poznámce	ano	ano / ano	ne	ano
Učebnice C	ne	ano	ano / ano	ano	ne
Učebnice D	ano	ne	ano / ne	ano	ano
Učebnice E	ne	ano	ano / ne	ne	ano

TABULKA 1: POROVNÁNÍ OBSAHU

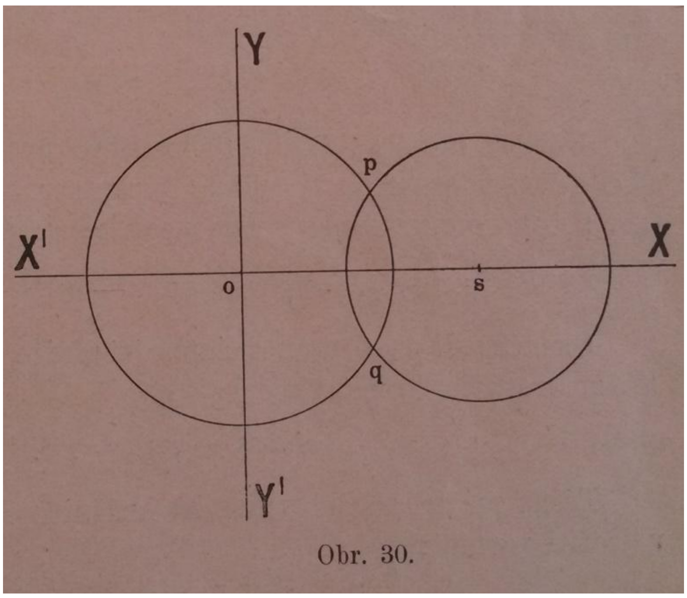
Všechny rozebírané učebnice začínají úvodem do analytické geometrie. Kromě učebnice D, která zavádí nejprve rovnici přímky a pak souřadnice bodu, zavádějí všichni autoři nejprve bod a bez zavedení přímky využívají souřadnice na příkladech. S tím souvisí i zavedení determinantu, který je zaveden ve všech učebnicích kromě učebnic B a E, které napsal jeden autor. Kosou soustavu souřadnic uvádí pouze učebnice D a A (viz Tabulka 1). Učebnice B v poznámce uvádí, že soustava nemusí být nutně pravoúhlá. Část obsahu, která se zabývá přímkou, se neodlišuje v žádné učebnici. Narozdíl od toho část o derivacích se liší hodně. Pouze v učebnici C jsou derivace zařazeny před kuželosečky a jsou později využity při tečnách kuželoseček. V učebnici B jsou derivace zavedeny až po kuželosečkách, ovšem autor nezapomněl upozornit i na způsob výpočtu tečny pomocí derivace a vysvětluje výpočet průběhu funkce. V ostatních učebnicích nejsou derivace nijak využity v analytické geometrii a dokonce v učebnici A nejsou vůbec uvedeny.

ČLENITOST UČEBNIC

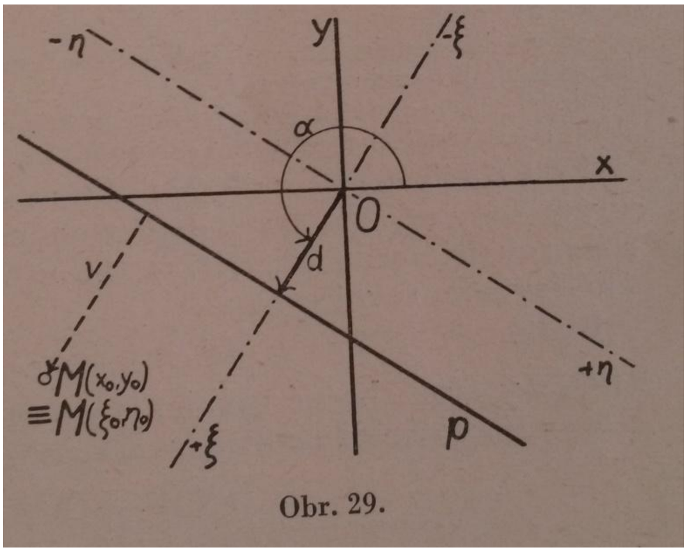
Učebnice jsou řazeny přehledně do kapitol, které jsou očíslované. Učebnice A má definice i věty označeny tučným písmem. Důkazy jsou zde označeny slovíčkem důkaz a většinou ho doprovází obrázek. Učebnice B a E se ve značení neliší, věty i definice jsou označeny jako poučka a vytištěny tučně. Za každou větou je přidán důkaz, ovšem bez označení. V učebnici C nejsou rozlišeny definice a věty a všechny jsou napsány větším písmem. Vzhledem k tomu, že písmo není tučné ani jiného fontu, nejsou na první pohled dobře znatelné. Důkazy zde nejsou u všech vět, avšak občas je autor uvádí. Nikoli za větou, jak jsme zvyklí, ale jako odvození, ze kterého plyne daná věta. Učebnice D označuje věty jako pravidla, definice a důležité pojmy má vyznačeny tučně. Autor uvádí důkazy bezprostředně za větou bez jakéhoko-li označení jako důkaz, spíše tím zdůvodňuje danou větu.

OBRÁZKY

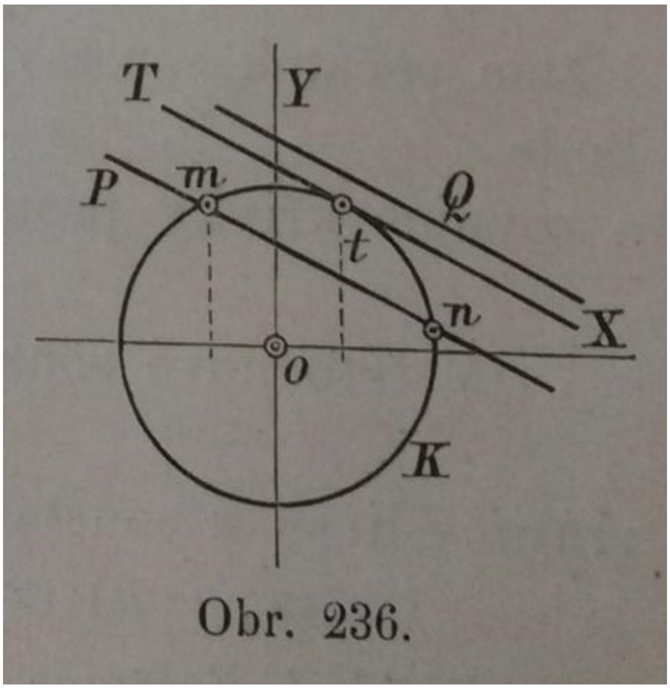
Nejméně obrázků je v učebnici A, většinou pouze doprovázejí důkaz. Jsou velmi přehledné (viz Obrázek 21), odlišují typy čar, ale jsou velmi malinkaté (viz Obrázek 25). Učebnice E a B mají stejné obrázky. Jsou přehledné, rozlišují typy čar a vychází zhruba jeden na tři stránky. Jsou očíslované a autor se na ně odkazuje v textu. U některých pouček odkaz na obrázek chybí. V učebnici C jsou obrázky velmi jednoduché (viz Obrázek 20). Je na nich vyobrazeno jen málo informací, ale jsou přehledné a také očíslované. Autor na ně odkazuje v textu. Není jich v učebnici mnoho. Nejvíce obrázků je v učebnici D, jsou přehledné, pomocí textu se na ně autoři odkazují v textu. Rozlišují typy čar i jejich tloušťku.



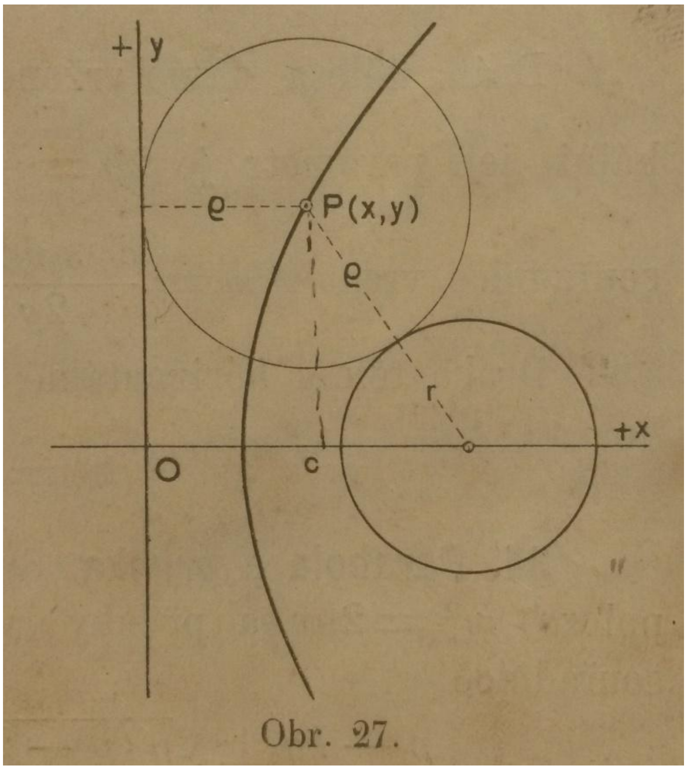
OBRÁZEK 20: UČEBNICE C - JEDNODUCHOST



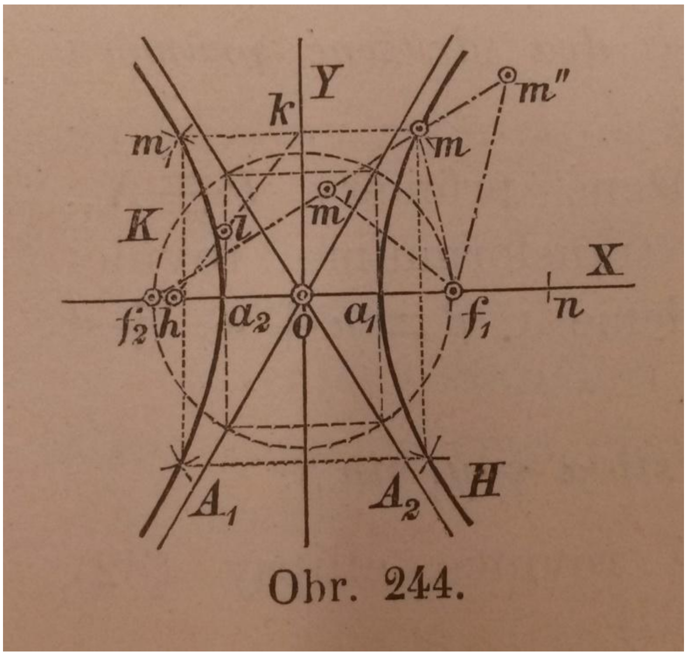
OBRÁZEK 21: UČEBNICE D



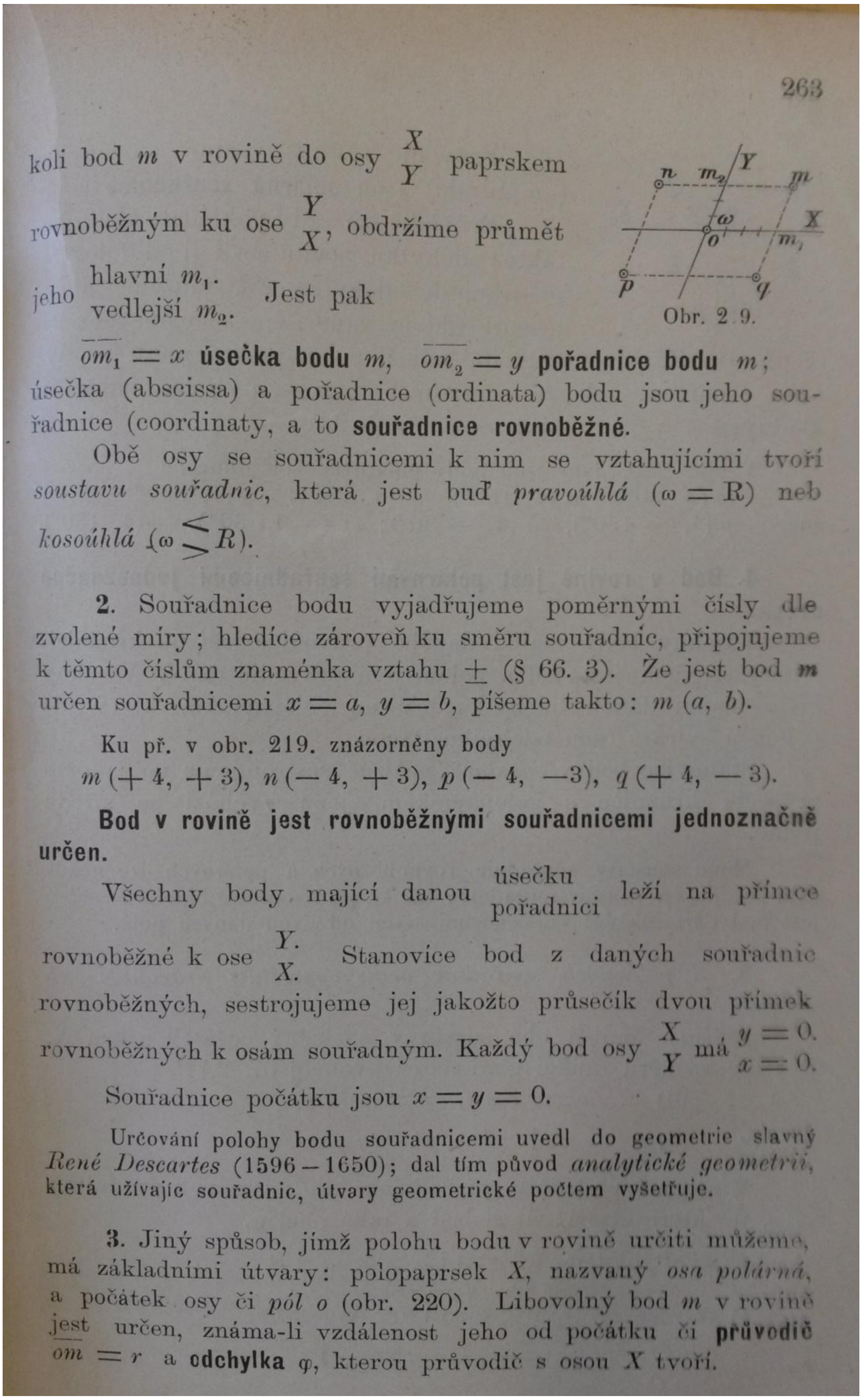
OBRÁZEK 22: UČEBNICE E



OBRÁZEK 23: UČEBNICE A



OBRÁZEK 24: UČEBNICE B



263

koli bod m v rovině do osy $\genfrac{}{}{0pt}{}{X}{Y}$ paprskem rovnoběžným ku ose $\genfrac{}{}{0pt}{}{Y}{X}$, obdržíme průmět jeho $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{hlavní } m_1.}{\text{vedlejší } m_2.}$ Jest pak

Obr. 219.

$\overline{om_1} = x$ **úsečka bodu** m, $\overline{om_2} = y$ **pořadnice bodu** m; úsečka (abscissa) a pořadnice (ordinata) bodu jsou jeho souřadnice (coordinaty, a to **souřadnice rovnoběžné**.

Obě osy se souřadnicemi k nim se vztahujícími tvoří *soustavu souřadnic*, která jest buď *pravoúhlá* ($\omega = R$) neb *kosoúhlá* ($\omega \lessgtr R$).

2. Souřadnice bodu vyjadřujeme poměrnými čísly dle zvolené míry; hledíce zároveň ku směru souřadnic, připojujeme k těmto číslům znaménka vztahu $\pm$ (§ 66. 3). Že jest bod m určen souřadnicemi $x = a$, $y = b$, píšeme takto: $m\,(a,\ b)$.

Ku př. v obr. 219. znázorněny body
$m\,(+4,\ +3)$, $n\,(-4,\ +3)$, $p\,(-4,\ -3)$, $q\,(+4,\ -3)$.

Bod v rovině jest rovnoběžnými souřadnicemi jednoznačně určen.

Všechny body mající danou $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{úsečku}}{\text{pořadnici}}$ leží na přímce rovnoběžné k ose $\genfrac{}{}{0pt}{}{Y.}{X.}$ Stanovíce bod z daných souřadnic rovnoběžných, sestrojujeme jej jakožto průsečík dvou přímek rovnoběžných k osám souřadným. Každý bod osy $\genfrac{}{}{0pt}{}{X}{Y}$ má $\genfrac{}{}{0pt}{}{y = 0.}{x = 0.}$

Souřadnice počátku jsou $x = y = 0$.

Určování polohy bodu souřadnicemi uvedl do geometrie slavný *René Descartes* (1596 – 1650); dal tím původ *analytické geometrii*, která užívajíc souřadnic, útvary geometrické počtem vyšetřuje.

3. Jiný způsob, jímž polohu bodu v rovině určiti můžeme, má základními útvary: polopaprsek X, nazvaný *osa polární*, a počátek osy či *pól* o (obr. 220). Libovolný bod m v rovině jest určen, známa-li vzdálenost jeho od počátku či **průvodič** $\overline{om} = r$ a **odchylka** φ, kterou průvodič s osou X tvoří.

OBRÁZEK 25: UČEBNICE A - VELIKOST OBRÁZKU

ZNAČENÍ

Pouze v učebnicích C a E jsou body značeny malými písmeny a přímky velkými písmeny. V ostatních učebnicích je to uvedeno obráceně. Shodné značení mají všechny učebnice pro souřadnice bodu. Jsou uvedeny v kulaté závorce, odděleny čárkou. Např.: $A = (3,5)$. Pouze v učebnici E jsou vždy uvedena znaménka, aby nedošlo k omylu, např: $A = (+3, +5)$. Řecká písmena jsou používána v učebnicích běžně nejen pro úhly, ale i pro označení konstant. V učebnici C jest uvedeno jiné označení pro úhly: $\widehat{XP}$, což znamená odchylka přímky P a X.

PŘÍKLADY A JEJICH OBTÍŽNOST

Jediná učebnice, ve které nejsou příklady je učebnice E. Nenajdeme zde ani jeden příklad na procvičení, je zde pouze pár řešených příkladů, na kterých je vysvětlena daná látka. Autor ani neodkazuje na jinou sbírku. Ve všech ostatních učebnicích je za každou kapitolou zásoba příkladů na procvičení. Ovšem ani v jedné nejsou k daným příkladům výsledky, což je velká škoda. Příklady jsou vždy od nejlehčího po nejtěžší. Nejlehčí procvičují probranou látku, další skupinou jsou příklady, které nutí studenty se zamyslet a vytvořit si vlastní postup pro výpočet. V těch nejtěžších mají studenti dokázat nějaké tvrzení nebo obecně odvodit nějaký vztah. Učebnice E dokonce obsahuje příklady na procvičení celé učebnice, které jsou uvedeny na posledních dvou stranách.

JAZYKOVÉ PROSTŘEDKY

Velmi mě překvapilo, že učebnice jsou i z pohledu dnešního čtenáře velmi srozumitelné. Je zde použito pouze několik zastaralých výrazů, které se opakují ve všech učebnicích, proto je nyní vypíšu i s jejich vysvětlením.

- ellipsa - nyní se zde píše jen jedno l
- závěrek - menší závěr
- zkomoliti kužel - seříznout kužel do komolého kužele
- úsečka bodu - x-ová souřadnice bodu
- pořadnice bodu - y-ová souřadnice bodu
- čtvrť - kvadrant

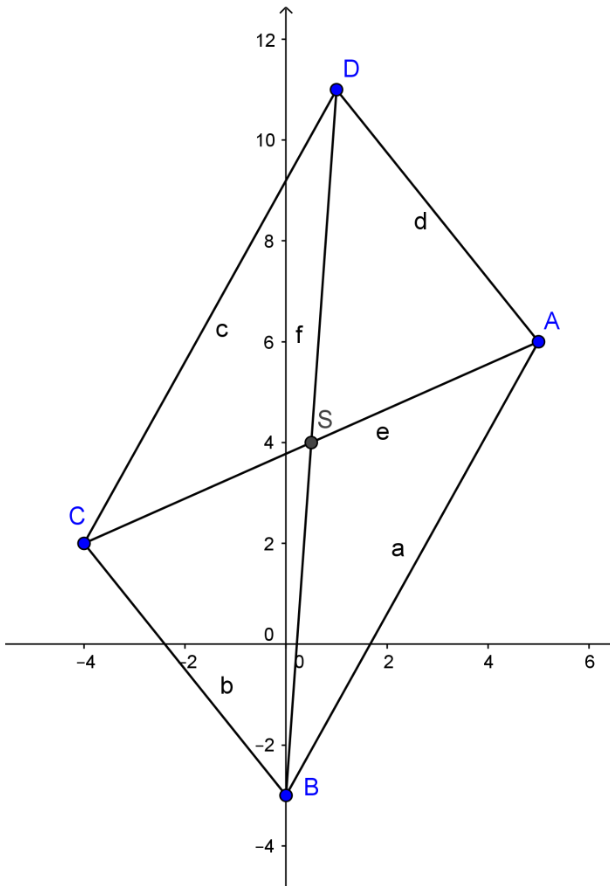
- sluje – nazývá se
- doplnění na úplnou dvojmoc – doplnění na čtverec
- bod dotyčný – tečný bod
- dvojmoc - druhá mocnina

PRAKTICKÁ ČÁST

UKÁZKY PŘÍKLADŮ

Ze studovaných učebnic jsem vybrala osm zajímavých příkladů. Některé jsou řešeny více způsoby, podle současných i historických postupů. Příklady jsou řazeny dle obtížnosti a ke každému je přiložen obrázek, který napomáhá představě o řešení daného příkladu. Všechny obrázky jsou vytvořeny v programu Geogebra. Zadání příkladů není plně citováno, ale je mírně pozměněno kvůli srozumitelnosti. Za každým příkladem je uveden název učebnice, ze které je příklad převzat a stránka, na které příklad v učebnici najdeme.

1) Vrcholy rovnoběžníka jsou $A[5,6], B[0,-3], C[-4,2]$; vypočtěte souřadnice čtvrtého vrcholu! (10, str. 12)



OBRÁZEK 26: PŘÍKLAD 1

a) Určíme, že čtvrtý vrchol má souřadnice $D[d_{1,} d_2]$, úhlopříčky rovnoběžníka se půlí, tudíž vypočítáme souřadnice středu $S[s_1, s_2]$.

$$S = \frac{A + C}{2} = \frac{[5,6] + [-4,2]}{2} = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$$

Střed S musí půlit i druhou úhlopříčku, tudíž:

$$S = \frac{B + D}{2} = \frac{[0,-3] + [d_1, d_2]}{2} = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$$

$$d_1 = 1$$

$$-3 + d_2 = 8 \rightarrow d_2 = 11$$

Čtvrtý vrchol je $D[1, 11]$.

b) Určíme, že čtvrtý vrchol má souřadnice $D[d_{1,} d_2]$, dále platí: $AB \parallel CD; BC \parallel AD$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (-5, -9)$$

$$CD: X = C + t\vec{u}$$
$$x = -4 - 5t \quad t \in R$$
$$y = 2 - 9t$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{v} = (-4,5)$$

$$AD: X = A + s\vec{v}$$
$$x = 5 - 4s \quad s \in R$$
$$y = 6 + 5s$$

Průsečík těchto přímek je vrchol D:

$$-4 - 5t = 5 - 4s \; /* 5$$
$$2 - 9t = 6 + 5s \; /* 4$$
$$-12 - 61t = 49$$
$$t = -1$$

Dosadíme parametr t do rovnice přímky:

$$CD: \begin{matrix} x = -4 - 5t \\ y = 2 - 9t \end{matrix} \; t \in R$$

$$D = [1,11]$$

c) Dalším způsobem je současné řešení pomocí sčítání bodů a vektorů. Bod D vypočítáme tak, že přičteme vektor $(C - B)$ k bodu A:

$$D = A + (C - B)$$

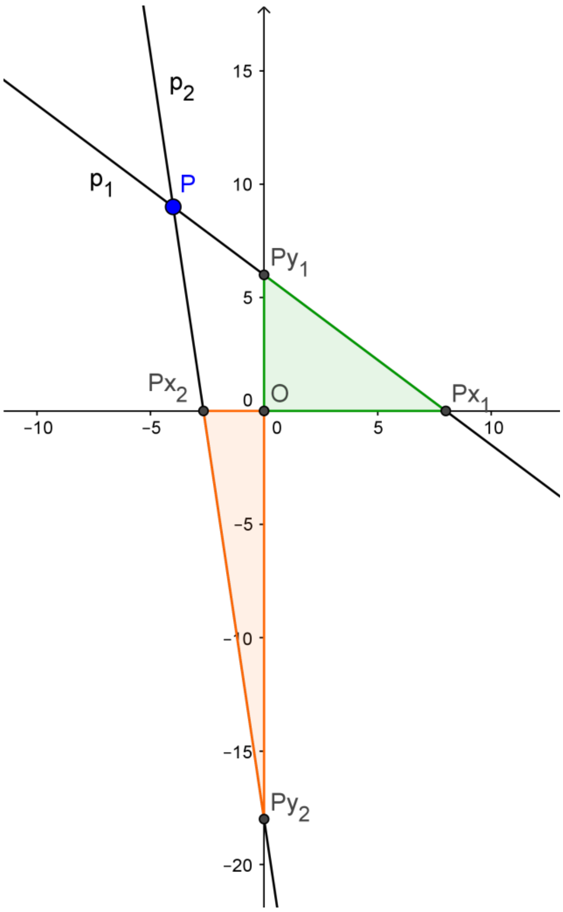
$$d_1 = 5 - 4 = 1$$

$$d_2 = 6 + 5 = 11$$

$$D = [1,11]$$

V tomto příkladě je názorně vidět, jak operace s vektory studentům velmi ulehčí řešení. Pokud si uvědomí, že mohou přičítat vektor k bodu, zjednoduší si řešení na čtyři řádky.

2) Stanovte rovnici přímky, která prochází bodem $P[-4{,}9]$ a svírá s osami trojúhelník o obsahu $p = 24$. (10, str.24)



OBRÁZEK 27: PŘÍKLAD 2

a) Průsečík s osou x nazveme $P_x[x_1, 0]$, průsečík s osou y nazveme $P_y[0, y_2]$. Hledaná přímka p prochází body P a P_x, musí mít tedy následující rovnici:

$$p: x = -4 + t(x_1 + 4)$$
$$y = 9 - 9t \qquad t \in R$$

Této rovnici musí vyhovovat i bod $P_y[0, y_2]$, proto dosadíme:

$$p: 0 = -4 + t(x_1 + 4)$$

$$y_2 = 9 - 9t \qquad t \in R$$

$$t = \frac{4}{x_1 + 4}$$

$$P_y \left[0; 9 - \frac{4}{x_1 + 4} \cdot 9\right]$$

Obsah trojúhelníka vypočítáme takto [7, str.11]:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} P_x \\ P_y \\ O \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 - \frac{4}{x_1+4} \cdot 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24$$

$$\frac{1}{2}\left(x_1 \cdot \left(9 - \frac{4}{x_1 + 4} \cdot 9\right)\right) = 24$$

$$3{x_1}^2 - 16x_1 - 64 = 0$$

$$x_{1_1} = 8$$

$$x_{1_2} = -\frac{8}{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_1\colon x &= -4 + 12t \\ y &= 9 - 9t \qquad t \in R \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_2\colon x &= -4 + \frac{4}{3}t \\ y &= 9 - 9t \qquad t \in R \end{aligned}}$$

Využili jsme historické řešení pomocí vzorce obsahující determinant pro výpočet obsahu trojúhelníku.

b) Přímka musí procházet bodem P, odvodíme tedy její rovnici:

$$p: y = kx + q$$
$$9 = -4k + q \rightarrow q = 9 + 4k$$
$$y = kx + 9 + 4k$$

Tato rovnice nezahrnuje jednu přímku procházející bodem P, která má rovnici: $x = -4$. Ovšem tato přímka neprotíná osu y, proto to na řešení nic nezmění. Můžeme tedy vypočítat průsečíky přímky p se souřadnicovými osami:

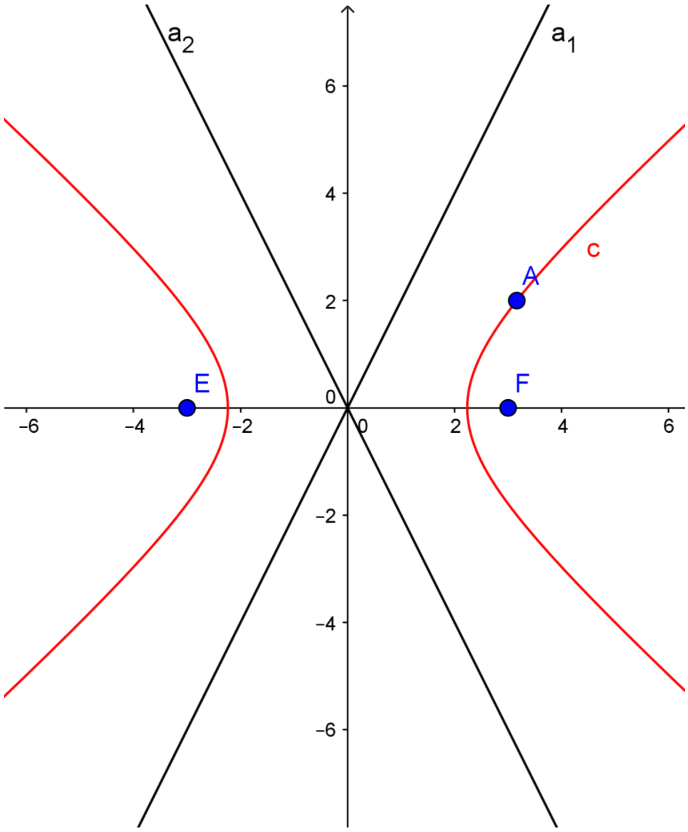
$$P_x = \left[\frac{-9 - 4k}{k}; 0\right]$$
$$P_y = [0; 9 + 4k]$$

Obsah trojúhelníku vypočítáme jako polovinu součinu x-ové souřadnice bodu P_x a y-ové souřadnice bodu P_y.

$$\frac{-9 - 4k}{k} \cdot (9 + 4k) = 2S = 48$$
$$(9 + 4k)^2 = -48k$$
$$81 + 120k + 16k^2 = 0$$

$$k_1 = -\frac{3}{4}$$
$$k_2 = -\frac{27}{4}$$
$$\boxed{p_1: y = -\frac{3}{4}x + 6}$$
$$\boxed{p_2: y = -\frac{27}{4}x - 18}$$

3) Jak velké poloosy má hyperbola jdoucí bodem $A = \left[\sqrt{10}, 2\right]$ mající asymptoty $y = \pm\, 2x$? (



OBRÁZEK 28: PŘÍKLAD 3

Nejprve vypočítáme střed S hyperboly, který je průsečíkem asymptot.

$$2x = -2x$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$S = [0,0]$$

Dosadíme do obecné rovnice asymptoty:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \rightarrow b = 2a$$

Nyní napíšeme obecnou rovnici hyperboly a dosadíme do ní souřadnice bodu A a vztah pro poloosy hyperboly.

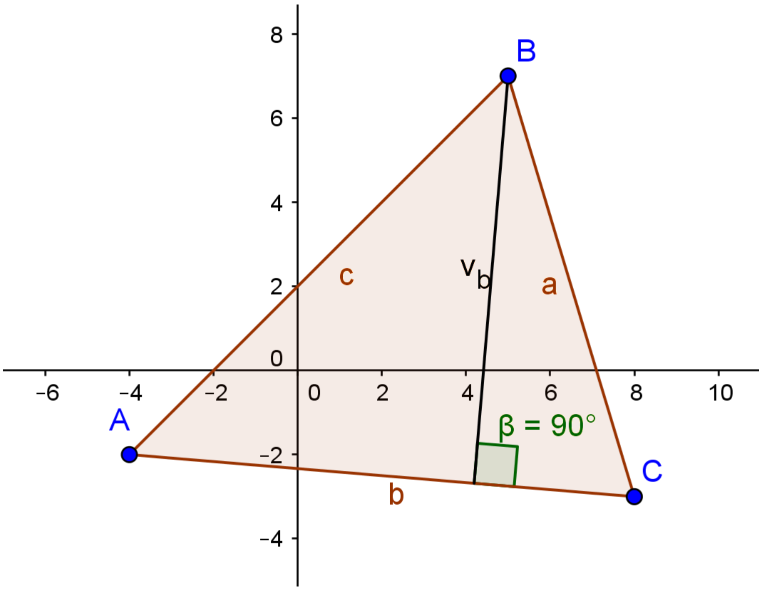
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{10}{a^2} - \frac{4}{4a^2} = 1$$

$$9 = a^2$$

$$\boxed{a = 3 \rightarrow b = 6}$$

4) Vypočtěte obsahy trojúhelníku ABC, $A[-4,-2], B[5,7], C[8,-3]$. (7, str. 12)



OBRÁZEK 29: PŘÍKLAD 4

a) Nejprve použijeme historický způsob výpočtu pomocí vzorce uvedeného ve všech učebnicích.

$$S = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix}\right|$$

$$S = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$$\boxed{S = \frac{117}{2}\, j^2}$$

b) V současné době se tento vzorec neuvádí, proto musíme vypočítat délku jedné strany a její výšky a dosadit do vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku.

$$|b| = |AC| = \sqrt{(8+4)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{145}$$

$$\overrightarrow{u_b} = (12, -1) \rightarrow \overrightarrow{n_b} = (1, 12)$$

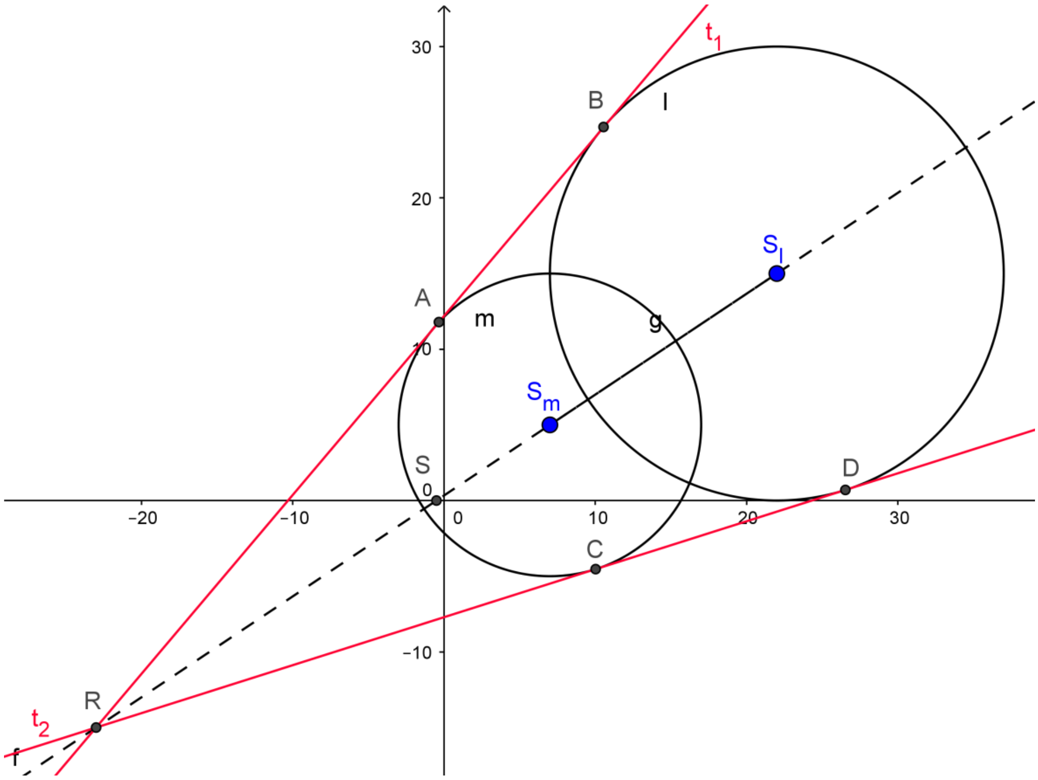
$$\begin{aligned} b\colon ax + by + c &= 0 \\ -4 - 24 + c &= 0 \\ c &= 28 \\ x + 12y + 20 &= 0 \end{aligned}$$

$$|v_b| = d(B, b) = \frac{5 \cdot 1 + 7 \cdot 12 + 28}{\sqrt{145}} = \frac{117}{\sqrt{145}}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |b| \cdot |v_b|$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{145} \cdot \frac{117}{\sqrt{145}} = \boxed{\frac{117}{2}\ j^2}$$

5) Určete společné tečny kružnic $l: x^2 + y^2 - 44x - 30y + 484 = 0$, $m: x^2 + y^2 - 14x - 10y - 26 = 0$. (6, str. 145)



OBRÁZEK 30: PŘÍKLAD 5

Nejprve upravíme obecné rovnice kružnic na středové tvary:

$$l: (x-22)^2 + (y-15)^2 = 225 \to S_l = [m_1, n_1] = [22{,}15]$$

$$m: (x-7)^2 + (y-5)^2 = 100 \to S_m = [m_2, n_2] = [7{,}5]$$

Nyní vypočítáme střed homotetie $S_h[x, y]$ na spojnici $S_l S_m$ podle vzorce [7, str. 61].

$$x = \left[m_1 - \frac{r_1}{r_2} m_2\right] : \left[1 - \frac{r_1}{r_2}\right]$$

$$y = \left[n_1 - \frac{r_1}{r_2} n_2\right] : \left[1 - \frac{r_1}{r_2}\right]$$

$$S_h[-23, -15]$$

Ze středu homotetie vedeme tečny ke kružnici l, což jsou společné tečny dvou zadaných kružnic.

$$t_l: (x-22)(x_0-22)+(y-15)(y_0-15)=225$$

$$-3x_0-2y_0+81=0 \rightarrow y_0=\frac{81-3x_0}{2}$$

Body x_0, y_0 leží na kružnici l, tudíž splňují její rovnici.

$$l: x^2+y^2-44x-30y+484=0$$

$${x_0}^2+\left(\frac{81-3x_0}{2}\right)^2-44x_0-30\cdot\frac{81-3x_0}{2}+484=0$$

$$4{x_0}^2+6561-486x_0+9{x_0}^2-176x_0-4860+180x_0+1936=0$$

$$13{x_0}^2-482x_0+3645=0$$

$$\frac{482\pm\sqrt{232324-4\cdot 13\cdot 3637}}{26}=x_{0_{1,2}}$$

$$26{,}5 \doteq x_{0_1} \rightarrow y_{0_1} \doteq 0{,}75$$

$$10{,}5 \doteq x_{0_2} \rightarrow y_{0_2} \doteq 24{,}75$$

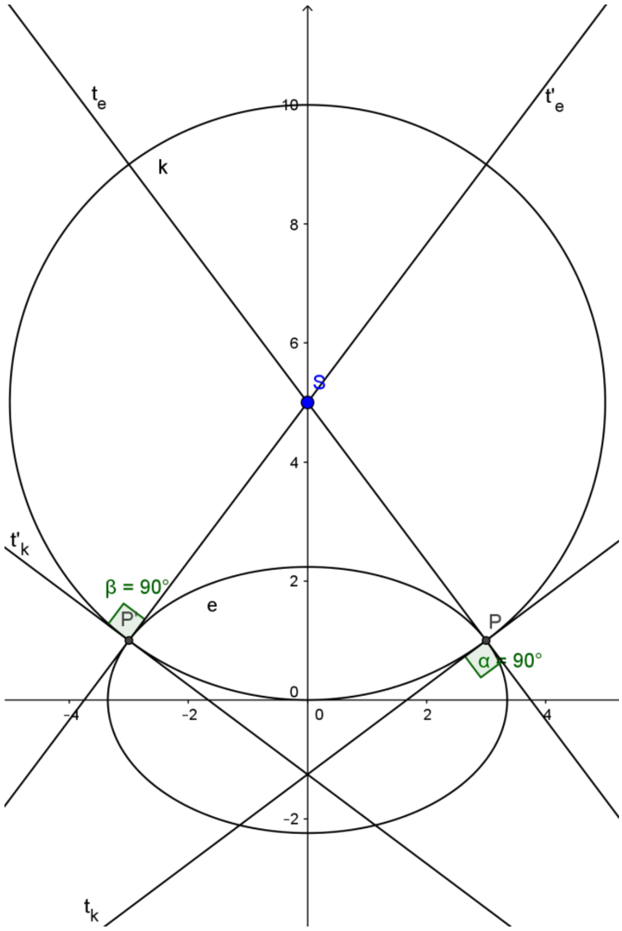
$$t_1: (x-22)4{,}5+(y-15)(-14{,}25)=225$$

$$\boxed{4{,}5x-14{,}25y-110{,}25=0}$$

$$t_2: (x-22)(-11{,}5)+(y-15)(9{,}75)=225$$

$$\boxed{-11{,}5x+9{,}75y-118{,}25=0}$$

6) V jakém úhlu protíná elipsa e: $4x^2 + 9y^2 = 45$ kružnici k opsanou kolem středu $S[0,5]$ a poloměrem 5 cm? (7, str. 115)



OBRÁZEK 31: PŘÍKLAD 6

Nejprve sestavíme rovnici kružnice k: $x^2 + (y-5)^2 = 25$

Vypočítáme průsečík P kružnice k s elipsou e.

$$4x^2 + 9y^2 = 45$$
$$x^2 + (y-5)^2 = 25$$
$$9y^2 - 4(y^2 - 10y + 25) = -55$$
$$y^2 + 8y - 9 = 0$$

$y_1 = 1 \rightarrow x_{1_1} = 3, x_{1_2} = -3$

$y_2 = -9 \rightarrow x_2 = N\check{R}$

$P_1 = [3,1], P_2 = [-3,1]$

Vzhledem k tomu, že situace je souměrná podle osy y na obou stranách, stačí vypočítat odchylku pouze v bodě $P_1 = [3,1]$. V tomto bodě vypočítáme ke křivkám tečny a zjistíme jejich odchylku.

a)

$$t_e: 4x \cdot x_0 + 9y \cdot y_0 = 45$$

$$4x + 3y = 15 \rightarrow \vec{u} = (4,3)$$

$$t_k: x \cdot x_0 + (y-5)(y_0 - 5) = 25$$

$$3x - 4y = 5 \rightarrow \vec{v} = (3,-4)$$

$$cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{0}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}}$$

$$\boxed{\alpha = 90°}$$

b) Jiným způsobem je, že vypočítáme derivace křivek a tím směrnici tečny v daném bodě.

$$k_e = \left(\sqrt{\frac{-4x^2+45}{9}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{-4x^2+45}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{9}(-8x) = -\frac{4}{3}$$

$$\tan\varphi_1 = -\frac{4}{3}$$

$$\varphi_1 = -53{,}1\ °$$

$$k_k = \left(\sqrt{25 - x^2} + 5\right)' = \frac{1}{2} \cdot (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{3}{4}$$

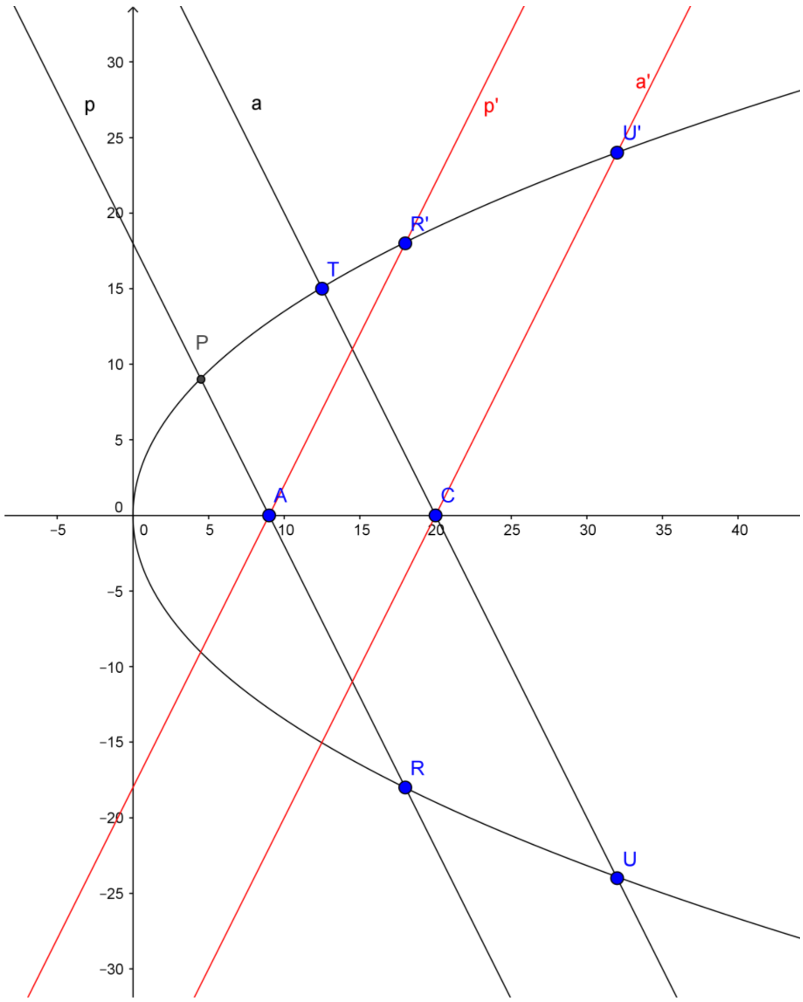
$$\tan\varphi_2 = \frac{3}{4}$$

$$\varphi_2 = 36{,}9\ °$$

$$\varphi = 36{,}9 - (-53{,}1) = \boxed{90\ °}$$

7) Jak velká jest plocha omezená parabolou $y^2 = 18x$ a přímkami $p: 2x + y = 18, a: 2x + y = 40$ (7, str.96)

Nejprve si nakreslíme obrázek.



OBRÁZEK 32: PŘÍKLAD 7

Poté vypočítáme průsečíky přímek s parabolou.

$$y^2 = 18x$$
$$2x + y = 18 \rightarrow y = 18 - 2x$$
$$324 - 72x + 4x^2 = 18x$$
$$4x^2 - 90x + 324 = 0$$
$$x_1 = \frac{9}{2} \rightarrow y_1 = 9$$
$$x_2 = 18 \rightarrow y_2 = -18$$

Průsečíky přímky p s parabolou mají souřadnice: $P\left[\frac{9}{2}, 9\right], R[18, -18]$.

$$y^2 = 18x$$

$$2x + y = 40 \rightarrow y = 40 - 2x$$

$$1600 - 160x + 4x^2 = 18x$$

$$4x^2 - 178x + 1600 = 0$$

$$x_1 = 32 \rightarrow y_1 = -24$$

$$x_2 = \frac{25}{2} \rightarrow y_2 = 15$$

Průsečíky přímky a s parabolou mají souřadnice: $U[32, -24], T\left[\frac{25}{2}, 15\right]$.

a) Využijeme integrální počet.

$$S_1 = \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{25}{2}} \sqrt{18x}\, dx + \int_{\frac{25}{2}}^{20} (-2x + 40)dx - \int_{\frac{9}{2}}^{9} (-2x + 18)dx$$

$$S_1 = \left[2\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{9}{2}}^{\frac{25}{2}} + \left[-\frac{2x^2}{2} + 40x\right]_{\frac{25}{2}}^{20} - \left[-\frac{2x^2}{2} + 18x\right]_{\frac{9}{2}}^{9}$$

$$S_1 = \left(2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \left(-\frac{2 \cdot (20)^2}{2} + 40 \cdot 20\right) -$$

$$-\left(-\frac{2 \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2}{2} + 40 \cdot \frac{25}{2}\right) - \left(-\frac{2 \cdot 9^2}{2} + 18 \cdot 9\right) + \left(-\frac{2 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2}{2} + 18 \cdot \frac{9}{2}\right) =$$

$$= 98 + 56{,}25 - 20{,}25 = 134$$

$$S_2 = \int_{18}^{32} \sqrt{18x}\, dx - \int_{20}^{32} (+2x - 40)dx + \int_{9}^{18} (+2x - 18)dx$$

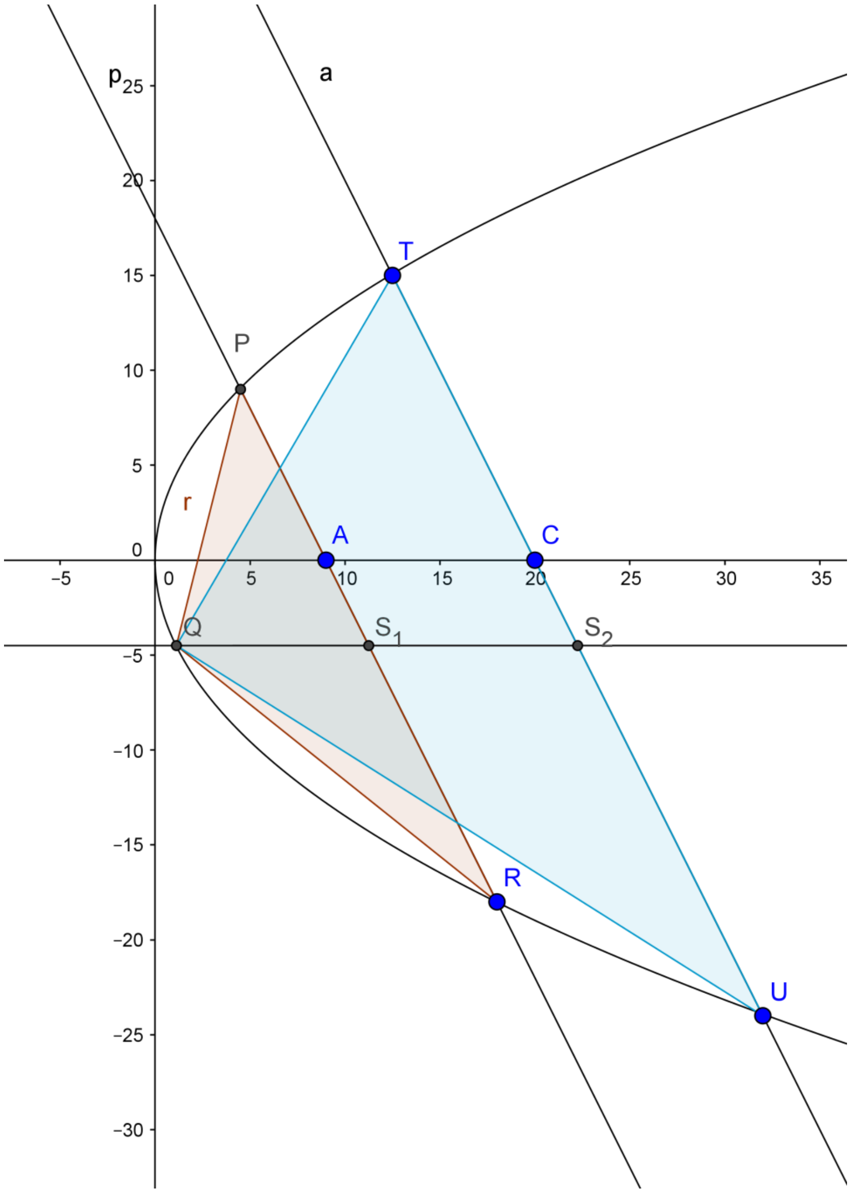
$$S_2 = \left[2\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_{18}^{32} - \left[\frac{2x^2}{2} - 40x\right]_{20}^{32} + \left[\frac{2x^2}{2} - 18x\right]_{9}^{18}$$

$$S_2 = \left(2\sqrt{2} \cdot 32^{\frac{3}{2}}\right) - \left(2\sqrt{2} \cdot 18^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2 \cdot 32^2}{2} - 40 \cdot 32\right) + \left(\frac{2 \cdot 20^2}{2} - 40 \cdot 20\right) +$$

$$+\left(\frac{2 \cdot 18^2}{2} - 18 \cdot 18\right) - \left(\frac{2 \cdot 9^2}{2} - 18 \cdot 9\right) = 296 - 144 + 81 = 233$$

$$S = S_1 + S_2 = 134 + 233 = \boxed{367\, j^2}$$

b) Dle Archimédovy metody vyčerpání.



OBRÁZEK 33: PŘÍKLAD 7B

Nechť máme parabolu p a její tětivu PR. Označíme střed tětivy PR jako S_1. Tímto bodem vedeme rovnoběžku s osou paraboly. Průsečík rovnoběžky s parabolou označíme Q. Poté platí, že obsah parabolické úseče ohraničené tětivou PR je roven čtyřem třetinám obsahu trojúhelníku PQR.

Z této poučky odvodíme vzorec pro výpočet obsahu dané plochy:

$$S_{PTUR} = \frac{4}{3} S_{TQU} - \frac{4}{3} S_{PQR}$$

$$S_1 = S_{PR} = \left[\frac{45}{4}, -\frac{9}{2}\right]$$

Přímka q procházející body $S_{1,}$ S_2 má rovnici:

$$y = -\frac{9}{2}$$

Vypočítáme její průsečík Q s parabolou p.

$$\frac{81}{4} = 18x \to x = \frac{9}{8}$$

$$Q = \left[\frac{9}{8}, -\frac{9}{2}\right]$$

Dopočítáme potřebné vzdálenosti a dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu:

$$|UT| = \sqrt{\left(32 - \frac{25}{2}\right)^2 + (-24 - 15)^2} = \frac{39}{2} \cdot \sqrt{5}$$

$$|PR| = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 18\right)^2 + (9 + 18)^2} = \frac{27}{2} \cdot \sqrt{5}$$

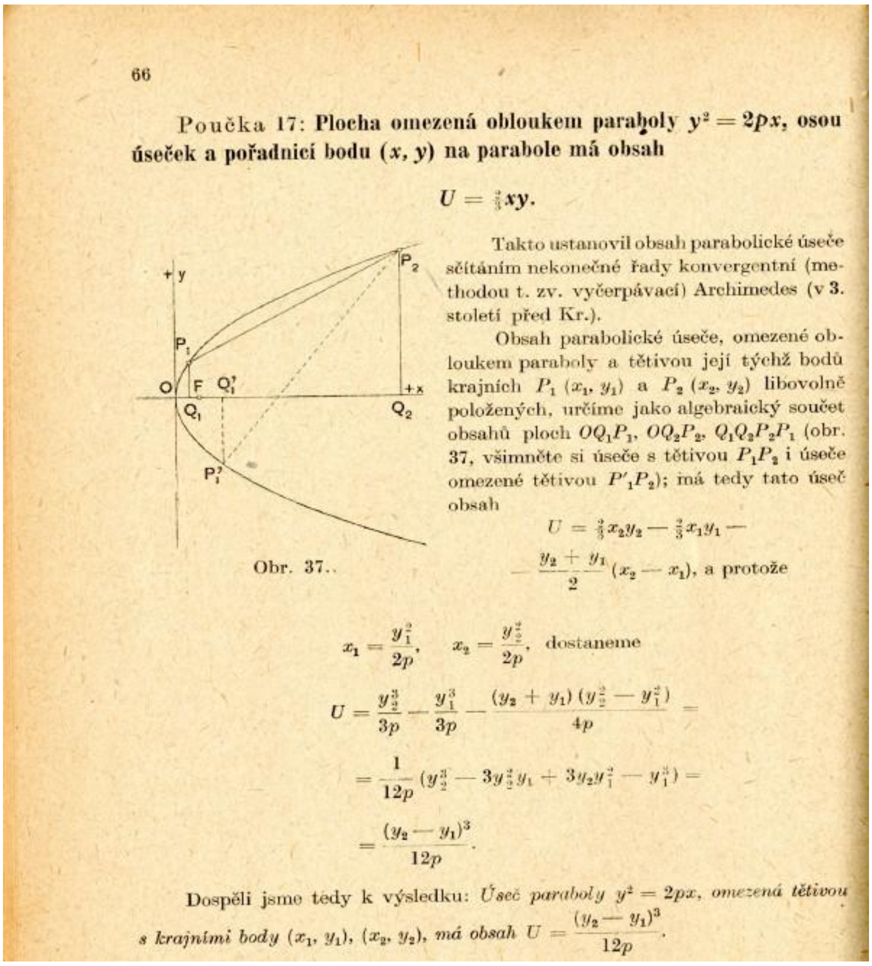
$$d(Q, \leftrightarrow UT) = \frac{\left|2 \cdot \frac{9}{8} - \frac{9}{2} - 40\right|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{169\sqrt{5}}{20}$$

$$d(Q, \leftrightarrow PR) = \frac{\left|2 \cdot \frac{9}{8} - \frac{9}{2} - 18\right|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{81\sqrt{5}}{20}$$

$$S_{PTUR} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{39}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{169\sqrt{5}}{20}}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{27}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{81\sqrt{5}}{20}}{2} = \boxed{367\ j^2}$$

c) Další metodou je využití vzorce pro výpočet obsahu S parabolické úseče (viz Obrázek 34).

$$S = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}$$



66

Poučka 17: **Plocha omezená obloukem paraboly $y^2 = 2px$, osou úseček a pořadnicí bodu (x, y) na parabole má obsah**

$$U = \tfrac{2}{3}xy.$$

Takto ustanovil obsah parabolické úseče sčítáním nekonečné řady konvergentní (methodou t. zv. vyčerpávací) Archimedes (v 3. století před Kr.).

Obsah parabolické úseče, omezené obloukem paraboly a tětivou její týchž bodů krajních $P_1\ (x_1, y_1)$ a $P_2\ (x_2, y_2)$ libovolně položených, určíme jako algebraický součet obsahů ploch OQ_1P_1, OQ_2P_2, $Q_1Q_2P_2P_1$ (obr. 37, všimněte si úseče s tětivou P_1P_2 i úseče omezené tětivou P'_1P_2); má tedy tato úseč obsah

$$U = \tfrac{2}{3}x_2y_2 - \tfrac{2}{3}x_1y_1 - \frac{y_2 + y_1}{2}(x_2 - x_1),$$ a protože

Obr. 37.

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}, \quad x_2 = \frac{y_2^2}{2p},$$ dostaneme

$$U = \frac{y_2^3}{3p} - \frac{y_1^3}{3p} - \frac{(y_2 + y_1)(y_2^2 - y_1^2)}{4p} =$$

$$= \frac{1}{12p}(y_2^3 - 3y_2^2y_1 + 3y_2y_1^2 - y_1^3) =$$

$$= \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}.$$

Dospěli jsme tedy k výsledku: *Úseč paraboly $y^2 = 2px$, omezená tětivou s krajními body (x_1, y_1), (x_2, y_2), má obsah* $U = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}$.

OBRÁZEK 34: UČEBNICE C - PARABOLICKÁ ÚSEČ

Tento vzorec je uveden ve všech studovaných učebnicích. Na obrázku můžeme vidět úryvek o parabolické úseči z učebnice C. Autor vzorec odvozuje z Archimédovy metody vyčerpání. Ovšem vysvětlení je velmi stručné a myslím, že pro studenty střední školy naprosto nepochopitelné. Narozdíl od toho v učebnici A autor vzorec odvozuje velmi podrobně a přehledně na dvou stránkách. Nezapomene přidat poznámku, že tento vzorec platí pro všechny paraboly otevřené doprava, pokud jsou otevřené doleva, musíme otočit znaménko a pokud je otevřená nahoru nebo dolů, musíme odvodit jiný vzorec, což nechává již na studentech. Vzorec je velmi užitečný, použijeme ho na příkladu.

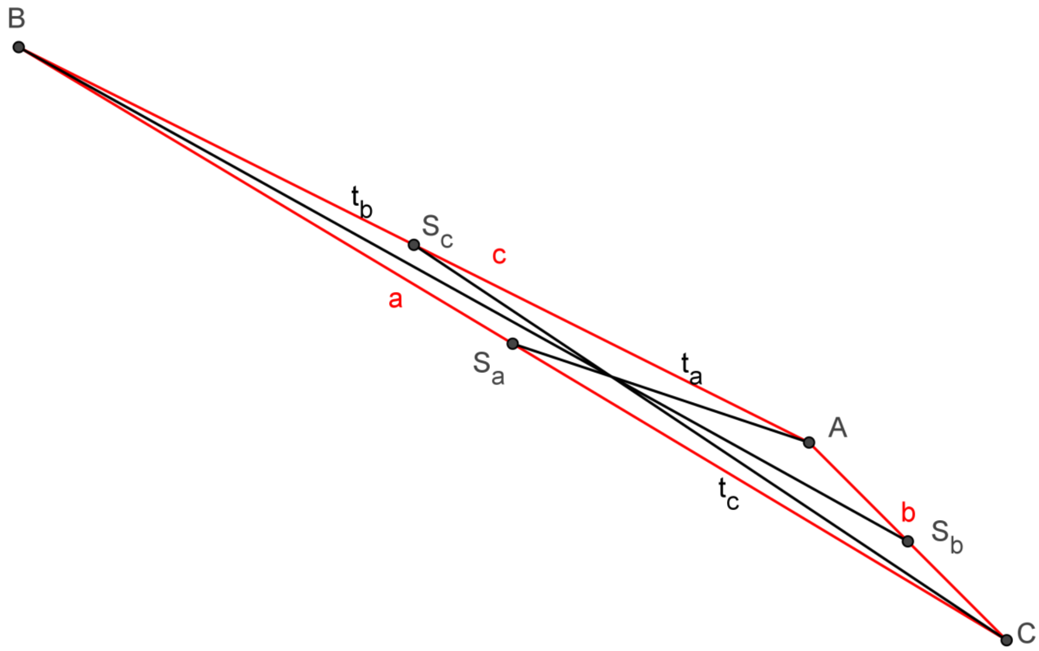
Budeme tedy počítat dvě úseče, které od sebe odečteme.

$$S = \frac{(15+24)^3}{108} - \frac{(9+18)^3}{108} = \boxed{367\ j^2}$$

Tento příklad lze tedy vyřešit třemi metodami. Poslední metoda je nejjednodušší, ale závisí na znalosti přesného vzorce a v První Republice by studenti příklad řešili takto. Druhá metoda je trošku složitější na počítání a musíme znát vzorec pro výpočet parabolické úseče dle Archiméda. První metoda pomocí integrálů je nejvíce univerzální ovšem nejnáročnější na přesnost výpočtů.

8) Strany trojúhelníku jsou $b: x + y + 1 = 0$, $a: 3x + 5y + 11 = 0$, $c: x + 2y + 4 = 0$; jest určiti rovnice a) jeho těžnic, b) výšek, c) vepsaného a d) opsaného kruhu. (12, str. 145)

a) Těžnice je spojnice středu strany a protilehlého vrcholu. Nejprve vypočítáme vrcholy trojúhelníku:



OBRÁZEK 35: PŘÍKLAD 8A

Bod C je průsečíkem přímek b a a.

$$x + y + 1 = 0 / \cdot (-3)$$
$$3x + 5y + 11 = 0$$
$$2y + 8 = 0$$
$$y = -4 \rightarrow x = 3$$
$$C = [3, -4]$$

Bod A je průsečíkem přímek b a c.

$$x + y + 1 = 0$$

$$x + 2y + 4 = 0$$

$$y = -3 \rightarrow x = 2$$

$$A = [2, -3]$$

Bod B je průsečíkem přímek a a c.

$$3x + 5y + 11 = 0$$

$$x + 2y + 4 = 0$$

$$-y - 1 = 0$$

$$y = -1 \rightarrow x = -2$$

$$B = [-2, -1]$$

Nyní vypočítáme středy stran:

$$S_c = \frac{A + B}{2} = [0, -2]$$

$$S_b = \frac{A + C}{2} = \left[\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right]$$

$$S_a = \frac{C + B}{2} = \left[\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right]$$

Sestavíme rovnice těžnic:

$t_c: y = kx + q$

$$-2 = q$$

$$-4 = 3k + q$$

$$-\frac{2}{3} = k$$

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}x - 2}$$

$t_a: y = kx + q$

$$-\frac{5}{2} = \frac{1}{2}k + q$$

$$-3 = 2k + q$$

$$-\frac{1}{3} = k$$

$$-3 = -\frac{2}{3} + q$$

$$-\frac{7}{3} = q$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}}$$

$t_b: y = kx + q$

$$-\frac{7}{2} = \frac{5}{2}k + q$$

$$-1 = -2k + q$$

$$-\frac{5}{9} = k$$

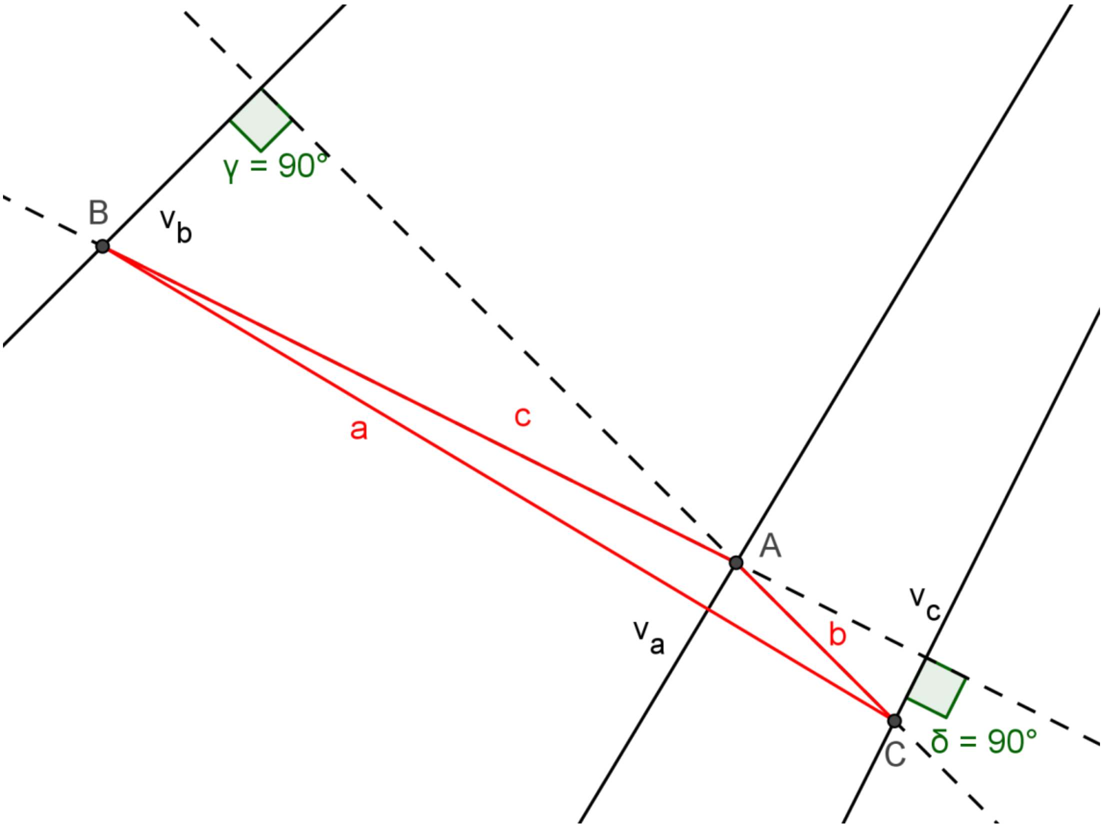
$$y = -\frac{5}{9}x + q$$

$$-\frac{7}{2} = -\frac{25}{18} + q$$

$$\frac{-19}{9} = q$$

$$\boxed{y = -\frac{5}{9}x - \frac{19}{9}}$$

b) Výška v_a je kolmá na stranu a a prochází vrcholem A. Využijeme souřadnice vrcholů z bodu a).



OBRÁZEK 36: PŘÍKLAD 8B

$$a: 3x + 5y + 11 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_a} = (3,5) \rightarrow \overrightarrow{u_a} = (-5,3) = \overrightarrow{n_{v_a}}$$

$$v_a: -5x + 3y + c = 0$$

$$-10 - 9 + c = 0$$

$$c = 19$$

$$\boxed{-5x + 3y + 19 = 0}$$

$$b: x + y + 1 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_b} = (1,1) \rightarrow \overrightarrow{u_b} = (-1,1) = \overrightarrow{n_{v_b}}$$

$$v_b: -x + y + c = 0$$

$$2 - 1 + c = 0$$

$$c = -1$$

$$\boxed{-x + y - 1 = 0}$$

$$c: x + 2y + 4 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_c} = (1,2) \rightarrow \overrightarrow{u_c} = (-2,1) = \overrightarrow{n_{v_c}}$$

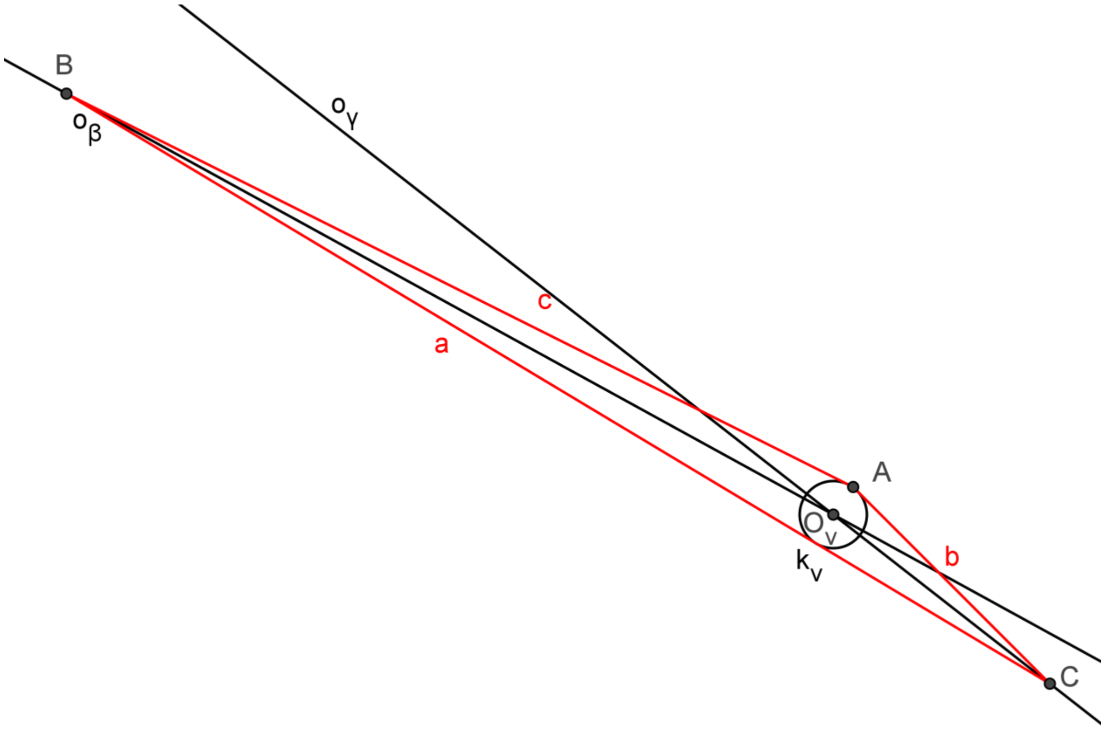
$$v_c: -2x + y + c = 0$$

$$-6 - 4 + c = 0$$

$$c = 10$$

$$\boxed{-2x + y + 10 = 0}$$

c) Kruhem vepsaným autor nazývá kružnici vepsanou. Kružnice vepsaná má střed v průsečíku os úhlů. Proto nejprve vypočítáme osu úhlu γ.



OBRÁZEK 37: PŘÍKLAD 8C

Normálový vektor osy úhlu γ označíme $\overrightarrow{n_1}$. Tento vektor vypočítáme jako součet znormovaných normálových vektorů stran a a b.

$$\overrightarrow{n_1} = \frac{\overrightarrow{n_a}}{|\overrightarrow{n_a}|} + \frac{\overrightarrow{n_b}}{|n_b|} = \left(\frac{3}{\sqrt{34}} + \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (1{,}22; 1{,}56)$$

$$o_\gamma: 1{,}22x + 1{,}56y + c = 0$$

$$c = 2{,}58$$

$$1{,}22x + 1{,}56y + 2{,}58 = 0$$

Zopakujeme stejný postup pro osu úhlu β:

$$\overrightarrow{n_2} = \frac{\overrightarrow{n_a}}{|\overrightarrow{n_a}|} + \frac{\overrightarrow{n_c}}{|n_c|} = \left(\frac{3}{\sqrt{34}} + \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = (0{,}96; 1{,}75)$$

$$o_\beta: 0{,}96x + 1{,}75y + c = 0$$

$$c = 3{,}67$$

$$o_\beta: 0{,}96x + 1{,}75y + 3{,}67 = 0$$

Nyní vypočítáme průsečík těchto os, což je střed kružnice vepsané.

$$0{,}96x + 1{,}75y + 3{,}67 = 0$$
$$1{,}22x + 1{,}56y + 2{,}58 = 0$$
$$0{,}637y + 2 = 0$$
$$y = -3{,}140 \rightarrow x = 1{,}901$$

$$O_v = [1{,}901; -3{,}140]$$

Vypočítáme poloměr kružnice vepsané jako vzdálenost bodu O_v a strany b.

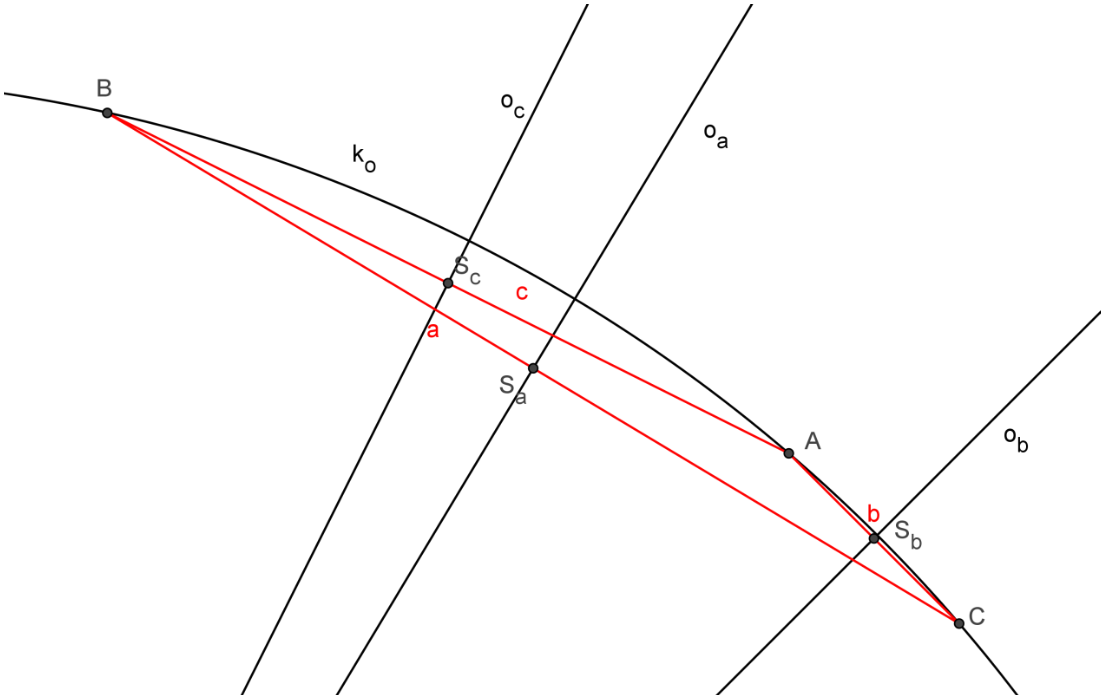
$$b: x + y + 1 = 0$$

$$d(O_v, b) = \frac{|1{,}901 - 3{,}140 + 1|}{\sqrt{2}} = 0{,}17$$

Sestavíme rovnici kružnice vepsané:

$$\boxed{k_v: (x - 1{,}901)^2 + (y + 3{,}140)^2 = 0{,}029}$$

d) Kruhem opsaným autor nazývá kružnici opsanou. Kružnice opsaná má střed v průsečíku O os stran a poloměr $|OA|$.



OBRÁZEK 38: PŘÍKLAD 8D

Nejprve sestavíme rovnici osy o_a strany a. Tato osa prochází bodem S_a a je kolmá ke straně a.

$$a: 3x + 5y + 11 = 0 \rightarrow \vec{n} = (3,5) \rightarrow \vec{u} = (-5,3) = \overrightarrow{n_{o_a}}$$

$$o_a: -5x + 3y + c = 0$$
$$-\frac{5}{2} - \frac{15}{2} + c = 0$$
$$c = 10$$
$$-5x + 3y + 10 = 0$$

Nyní sestavíme rovnici osy o_b strany b. Tato osa prochází bodem S_b a je kolmá ke straně b.

$$b: x + y + 1 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1,1) \rightarrow \vec{u} = (-1,1) = \overrightarrow{n_{o_b}}$$

$$o_b: -x + y + c = 0$$

$$-\frac{5}{2} - \frac{7}{2} + c = 0$$

$$c = 6$$

$$-x + y + 6 = 0$$

Vypočítáme průsečík těchto os.

$$-x + y + 6 = 0$$

$$-5x + 3y + 10 = 0$$

$$-2y - 20 = 0$$

$$y = -10 \rightarrow x = -4$$

$$O = [-4, -10]$$

Musíme ještě vypočítat poloměr kružnice opsané.

$$|OA| = \sqrt{(-2+4)^2 + (-1+10)^2} = \sqrt{85}$$

Rovnice kružnice opsané:

$$\boxed{k_o: (x+4)^2 + (y+10)^2 = 85}$$

TESTOVÁNÍ

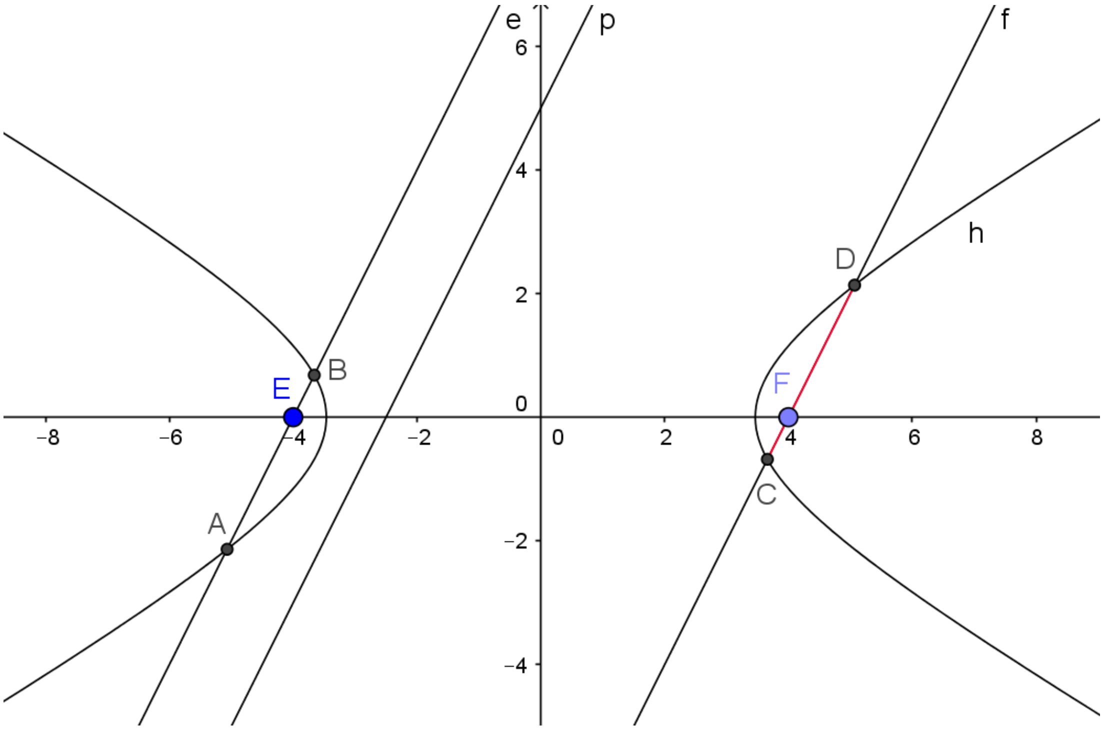
Ze zmiňovaných učebnic jsem vybrala čtyři středně těžké příklady a zadala je ve čtyřech třídách současným studentům. Studenti nemohli používat kalkulačku ani tabulky, na vypracování testu měli 45 minut.

ZADÁNÍ TESTU

1. Vypočtěte délku tětivy vedené ohniskem v hyperbole $x^2 - 3y^2 = 12$, rovnoběžné s přímkou $2x - y + 5 = 0$.
2. Který bod má od bodů $A[0,8], B[2,0]$ vzdálenost $\sqrt{85}$?
3. Vypočtěte úhly trojúhelníku ABC daného stranami $5x - 2y + 15 = 0$, $4x + y - 1 = 0$, $x - 3y - 36 = 0$
4. Dva sousední vrcholy čtverce jsou $A[3,2], B[1,5]$. Určete ostatní vrcholy.

ŘEŠENÍ TESTU

1) Vypočtěte délku tětivy vedené ohniskem v hyperbole $x^2 - 3y^2 = 12$, rovnoběžné s přímkou $2x - y + 5 = 0$.



OBRÁZEK 39: PŘÍKLAD 1

Z obrázku vidíme, že obě tětivy procházející ohnisky jsou shodné, proto vypočítáme jen délku jedné. Sestavíme její rovnici:

$$F = [4,0]$$

$$f: \vec{n} = (2, -1)$$
$$2x - y + c = 0$$
$$c = -8$$
$$f: 2x - y - 8 = 0$$

Nalezneme průsečíky s hyperbolou:

$$x^2 - 3y^2 = 12$$
$$2x - y - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{y+8}{2}$$
$$\left(\frac{y+8}{2}\right)^2 - 3y^2 = 12$$
$$-11y^2 + 16y + 16 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{15}}{-11}$$

$$C = \left[\frac{48 - 2\sqrt{15}}{11}; \frac{8 - 4\sqrt{15}}{11}\right]$$

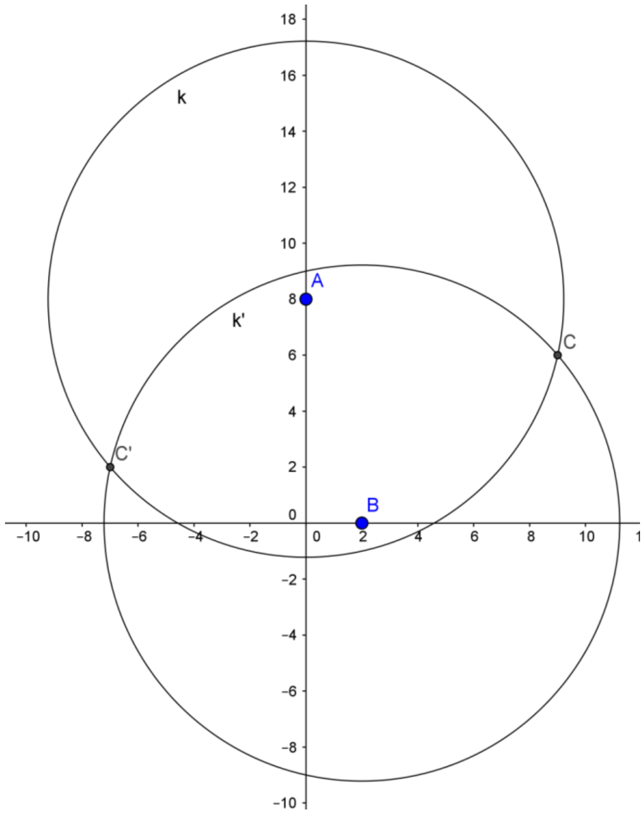
$$D = \left[\frac{48 + 2\sqrt{15}}{11}; \frac{8 + 4\sqrt{15}}{11}\right]$$

Spočítáme vzdálenost bodů C a D:

$$|CD| = \sqrt{\left(\frac{48 - 2\sqrt{15}}{11} - \frac{48 + 2\sqrt{15}}{11}\right)^2 + \left(\frac{8 - 4\sqrt{15}}{11} - \frac{8 + 4\sqrt{15}}{11}\right)^2} = \boxed{\frac{20\sqrt{3}}{11}}$$

2) Který bod má od bodů $A[0,8], B[2,0]$ vzdálenost $\sqrt{85}$?

a) Budeme hledat bod C jako průsečík kružnic se středy v bodech A, B o poloměru $\sqrt{85}$.



OBRÁZEK 40: PŘÍKLAD 2A

$$x^2 + (y-8)^2 = 85$$
$$(x-2)^2 + y^2 = 85$$

$$x^2 + y^2 - 16y + 64 = 85$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 85$$

$$-16y + 4x + 60 = 0 \rightarrow x = 4y - 15$$

$$(4y-15)^2 + y^2 - 16y + 64 = 85$$

$$16y^2 - 120y + 225 + y^2 - 16y + 64 = 85$$

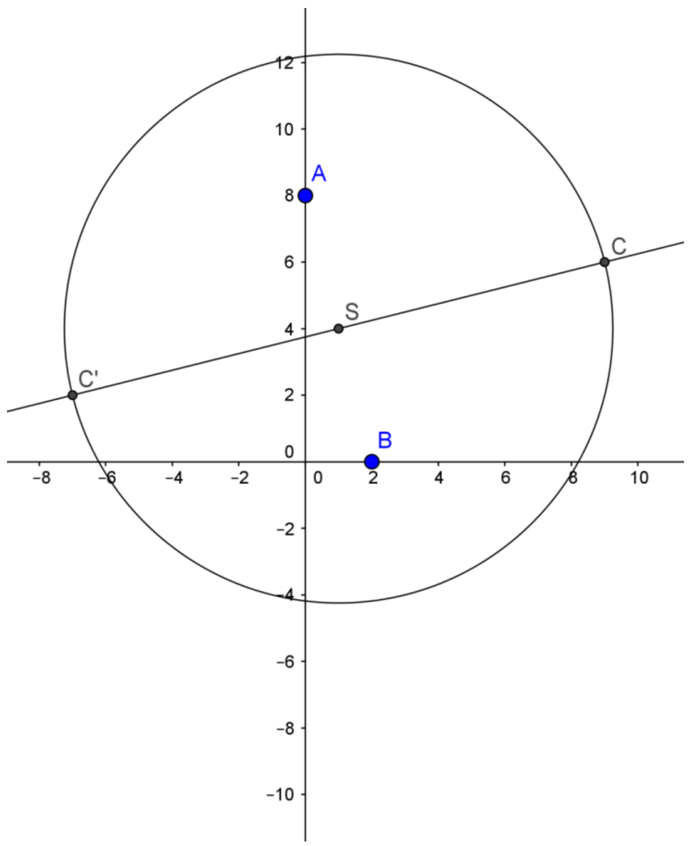
$$y^2 - 8y + 12 = 0$$

$$y_1 = 6 \rightarrow x_1 = 9$$

$$y_2 = 2 \rightarrow x_2 = -7$$

$$\boxed{C = [9,6], C' = [-7,2]}$$

b)



OBRÁZEK 41: PŘÍKLAD 2B

Bod C musí ležet na kolmici k přímce AB procházející středem S úsečky AB.

$$S = S_{AB} = \left[\frac{2+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right] = [1,4]$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (1, -4)$$

$$ax + by + c = 0$$

$$1 - 16 + c = 0 \rightarrow c = 15$$

$$p: x - 4y + 15 = 0$$

Trojúhelník ASC je pravoúhlý s přeponou o délce $\sqrt{85}$. Vypočítáme $|SC|$:

$$|SC| = \sqrt{|AC| - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{85 - \left(\frac{\sqrt{4+64}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{272}{4}}$$

$$= 2\sqrt{17}$$

$$|SC| = \sqrt{(c_1 - 1)^2 + (c_2 - 4)^2}$$

$$2\sqrt{17} = \sqrt{(c_1 - 1)^2 + (c_2 - 4)^2}$$

Bod C současně leží na přímce p:

$$0 = c_1 - 4c_2 + 15$$

$$68 = {c_1}^2 - 2c_1 + 1 + {c_2}^2 - 8c_2 + 16$$

$$c_1 = 4c_2 - 15$$

$$51 = (4c_2 - 15)^2 - 2(4c_2 - 15) + {c_2}^2 - 8c_2$$

$$51 = 16{c_2}^2 - 120c_2 + 225 - 8c_2 + 30 + {c_2}^2 - 8c_2$$

$$0 = {c_2}^2 - 8c_2 + 12$$

$$c_{2_1} = 6 \rightarrow c_{1_1} = 9$$

$$c_{2_2} = 2 \rightarrow c_{1_2} = -7$$

$$\boxed{C = [9,6], C' = [-7,2]}$$

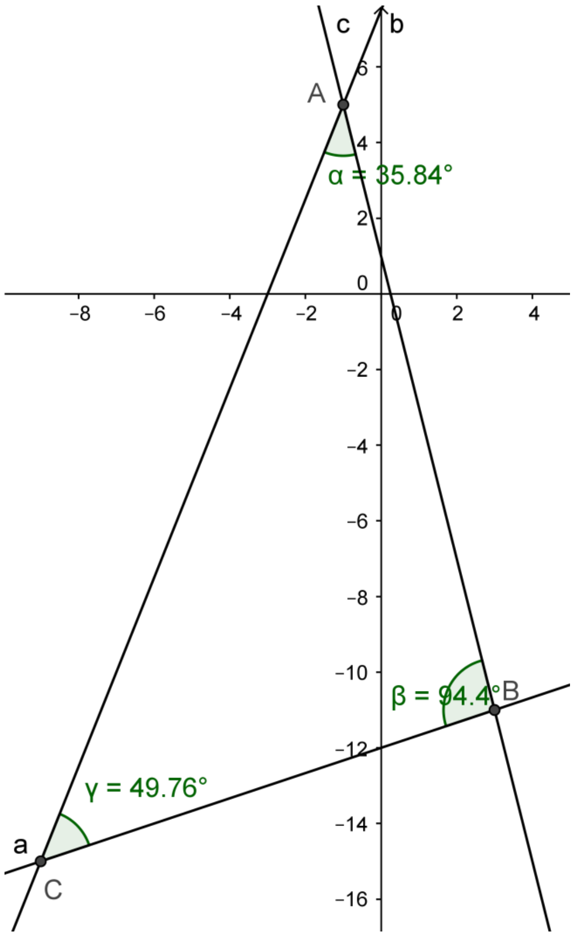
c) Nejjednodušší způsob je při sčítání bodu a vektoru.

Pokud ke středu úsečky AB přičteme/odečteme vektor kolmý k vektoru AB o velikosti $2\sqrt{17}$ (délka úsečky SC z předchozího řešení), získáme hledaný bod C.

$$C = S \pm 2\sqrt{17} \cdot \frac{\overrightarrow{n_{AB}}}{|\overrightarrow{n_{AB}}|} = [1,4] \pm 2\sqrt{17} \cdot \frac{(4,1)}{\sqrt{17}}$$

$$\boxed{C = [9,6], C' = [-7, 2]}$$

1) Vypočtěte úhly trojúhelníku ABC daného stranami $5x - 2y + 15 = 0$, $4x + y - 1 = 0, x - 3y - 36 = 0$



OBRÁZEK 42: PŘÍKLAD 3

a)

$$a: x - 3y - 36 = 0;\ \vec{w} = (1, -3)$$

$$b: 5x - 2y + 15 = 0;\ \vec{u} = (5, -2)$$

$$c: 4x + y - 1 = 0;\ \vec{v} = (4, 1)$$

Spočítáme odchylky přímek na nichž leží strany trojúhelníku pomocí odchylky normálových vektorů přímek. Ale musíme dát pozor na to, že odchylka přímek může být maximálně 90, tudíž v některých případech musíme hledaný úhel dohledat jako doplněk vypočítaného úhlu.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|20-2|}{\sqrt{(25+4)}\cdot\sqrt{(16+1)}} = 0{,}811 \ \rightarrow \boxed{\alpha = 35{,}9°}$$

$$\cos\beta' = \frac{|\vec{w}\cdot\vec{v}|}{|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|4-3|}{\sqrt{(1+9)}\cdot\sqrt{(16+1)}} = 0{,}077 \ \rightarrow \beta' = 85{,}6°$$

$$\beta = 180° - \boxed{\beta' = 94{,}4°}$$

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{w}\cdot\vec{u}|}{|\vec{w}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{|5+6|}{\sqrt{(1+9)}\cdot\sqrt{(25+4)}} = 0{,}646 \ \rightarrow \boxed{\gamma = 49{,}8°}$$

b) viz vzorec [7]

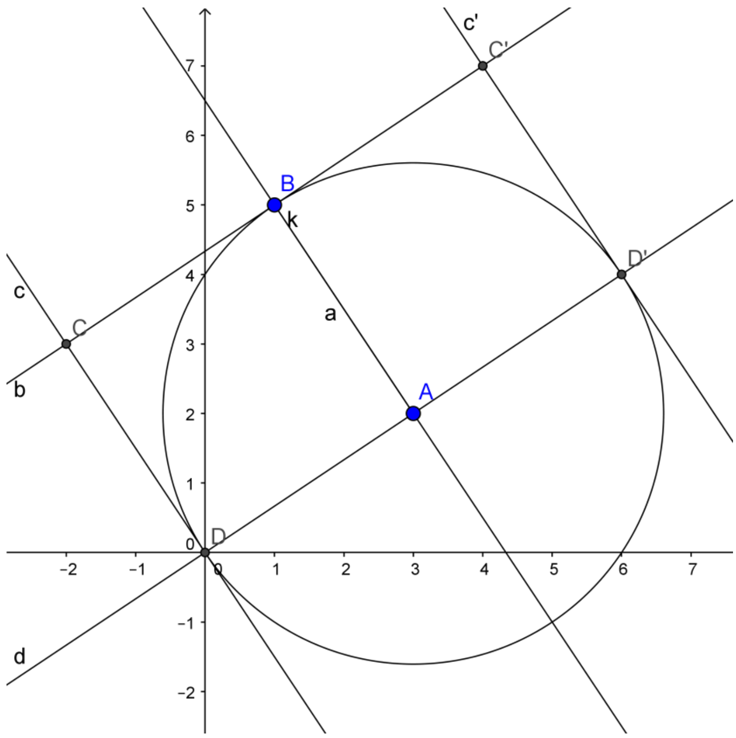
$$\tan\alpha = \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3} = \frac{\frac{5}{2} + 4}{1 - 10} = 0{,}722 \;\rightarrow \boxed{\alpha = 35{,}8°}$$

$$\tan\beta' = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_3 k_1} = \frac{-4 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = 13{,}000 \;\rightarrow \boxed{\beta' = 85{,}6°}$$

$$\beta = 180° - \beta' = 94{,}4°$$

$$\tan\gamma = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{6}} = -1{,}182 \;\rightarrow \boxed{\gamma = 49{,}8°}$$

3) Dva sousední vrcholy čtverce jsou $A[3,2], B[1,5]$. Určete ostatní vrcholy.



OBRÁZEK 43: PŘÍKLAD 4

a) Nejjednodušší řešení je pomocí přičítání vektorů.

Bod D vypočítáme tak, že k bodu A přičteme/odečteme vektor kolmý k vektoru $(B-A)$ stejné velikosti.

$$D = A \pm \overrightarrow{n_{(B-A)}} = [3,2] \pm (3,2)$$

$$\boxed{D = [6,4], D' = [0,0]}$$

Bod C resp.C' vypočítáme jako součet bodu D resp. D' s vektorem $(B-A)$.

$$C = D + (A - B) = [6,4] + (-2,3)$$

$$C' = D' + (B - A) = [0,0] + (-2,3)$$

$$\boxed{C = [4,7], C' = [-2,3]}$$

b) Vzhledem k tomu, že řešení a. nikdo nepoužil, přikládám ještě jiné řešení, které použila většina studentů.

Nejprve hledáme bod $D[d_1, d_2]$ jako průsečík kružnice se středem v bodě A a poloměrem $|AB|$ s kolmicí na přímku AB procházející bodem A.

$$|AB| = (1-3)^2 + (5-2)^2$$
$$(d_1-3)^2 + (d_2-2)^2 = (1-3)^2 + (5-2)^2$$
$$d_1{}^2 - 6d_1 + 9 + d_2{}^2 - 4d_2 + 4 = 13$$
$$d_1{}^2 - 6d_1 + d_2{}^2 - 4d_2 = 0$$

$$d: \vec{n} = |BA| = (2, -3)$$

$$2x - 3y + c = 0$$
$$c = 0$$
$$d_1{}^2 - 6d_1 + d_2{}^2 - 4d_2 = 0$$
$$2d_1 - 3d_2 = 0 \rightarrow d_2 = \frac{2d_1}{3}$$
$$d_1{}^2 - 6d_1 + \left(\frac{2d_1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2d_1}{3} = 0$$
$$9d_1{}^2 - 54d_1 + 4d_1{}^2 - 24d_1 = 0$$
$$13d_1{}^2 - 78d_1 = 0$$
$$d_{1_1} = 0 \rightarrow d_{2_1} = 0$$
$$d_{1_2} = 6 \rightarrow d_{2_2} = 4$$

$$\boxed{D = [0,0], D' = [6,4]}$$

Bod C vypočítáme jako průsečík rovnoběžky c s přímkou a procházející bodem D a rovnoběžkou b s přímkou d procházející bodem B.

$$c: \vec{u} = (2, -3) \rightarrow \vec{n} = (3,2)$$

$$3x + 2y + c = 0$$
$$c = -26$$
$$c: 3x + 2y - 26 = 0$$

$$b\colon \vec{u} = (3,2) \rightarrow \vec{n} = (2,-3)$$

$$2x - 3y + c = 0$$

$$c = 13$$

$$b\colon 2x - 3y + 13 = 0$$

$$3x + 2y - 26 = 0 / \cdot 3$$

$$2x - 3y + 13 = 0 / \cdot 2$$

$$13x - 52 = 0$$

$$x = 4 \rightarrow y = 7$$

$$\boxed{C = [4,7]}$$

Bod C' nalezneme jako průsečík rovnoběžky c' s přímkou a procházející bodem D' a rovnoběžkou b s přímkou d procházející bodem B.

$$c'\colon \vec{u} = (2,-3) \rightarrow \vec{n} = (3,2)$$

$$3x + 2y + c = 0$$

$$c = 0$$

$$c'\colon 3x + 2y = 0$$

$$b\colon 2x - 3y + 13 = 0$$

$$3x + 2y = 0 / \cdot 3$$

$$2x - 3y + 13 = 0 / \cdot 2$$

$$13x + 26 = 0$$

$$x = -2 \rightarrow y = 3$$

$$\boxed{C' = [-2,3]}$$

VYHODNOCENÍ TESTU

	Maximální počet bodů
Příklad 1	8
Příklad 2	5
Příklad 3	5
Příklad 4	8
Celkem	26

OBRÁZEK 44: BODOVÁNÍ TESTU

Za první příklad mohli studenti získat maximálně 8 bodů, stejně jako za příklad číslo 4 (viz Obrázek 44). Za příklad 2 a 3 mohli studenti získat maximálně 5 bodů. Celkový počet bodů byl tedy 26.

Test byl zadán celkově ve čtyřech třídách. První třída byla třída EP3 SPŠ a VOŠ J. Palacha Kladno (viz Tabulka 2). Jedná se o šestnáct studentů třetího ročníku výběrové třídy střední strojní průmyslové školy obor Elektronické počítačové systémy. V této třídě byl pouze jeden student s nulovým počtem bodů, ovšem i tento student se pokusil řešit tři příklady. Nejlepší student získal devět bodů ze dvaceti šesti. Průměrně student získal 4,6 bodu. Nejvíce bodů studenti získali na příkladu číslo čtyři, který všichni řešili graficky. Tento příklad řešili všichni kromě jednoho studenta, jeden ho vyřešil bezchybně a devět jich zapomněla na druhé řešení. Nejméně bodů získali studenti za příklad číslo dva, který řešilo pouze devět studentů, avšak ani jeden ho nedořešil.

Střední průmyslová škola Kladno - EP3													
Pořadové	Úloha 1		Úloha 2			Úloha 3			Úloha 4			
číslo	představa	počet bodů	představa	řešení	počet bodů	představa	řešení	počet bodů	představa	řešení	počet bodů	Celkem
1	-	-	ano	b	2	ano	a	1	ano	graficky	4	7
2	-	-	ano	b	1	-	-	-	ano	graficky	8	9
3	poloviční	2	ano	b	1	-	-	-	ano	graficky	0	3
4	ano	-	špatná	b	-	-	-	-	poloviční	graficky	4	4
5	špatná	0	špatná	-	0	špatná	jiné	0	poloviční	graficky	4	4
6	-	-	ano	b	1	ano	a	2	poloviční	graficky	4	7
7	-	-	ano	b	-	ano	a	2	poloviční	graficky	4	6
8	špatná	0	ano	-	-	neúplná	-	0	poloviční	graficky	4	4
9	špatná	0	-	-	-	ano	-	-	poloviční	graficky	4	4
10	špatná	0	špatná	-	-	-	-	-	poloviční	graficky	4	4
11	-	-	-	-	-	ano	a	5	-	-	-	5
12	ano	1	ano	b	1	ano	a	5	špatná	graficky	0	7
13	ano	-	špatná	b	-	-	-	-	špatná	graficky	0	0
14	-	-	špatná	jiné	0	-	-	-	špatná	graficky	4	4
15	špatná	0	ano	a	3	-	-	-	špatná	graficky	0	3
16	-	-	poloviční	graficky	2,5	-	-	-	špatná	graficky	0	2,5
Celkem		3			11,5			15			44	73,5

TABULKA 2: VÝSLEDKOVÁ TABULKA EP3

Druhou třídou bylo dvacet studentů Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy studující předmět Matematický proseminář (viz Tabulka 3). Většinou tento předmět studují studenti prvního ročníku bakalářského studia. Největšího počtu bodů dosáhl student se dvaceti body, který řešil všechny příklady a ztratil pouze šest bodů. Nejhorší student řešil tři příklady, ovšem získal pouze jeden bod. Průměrně vychází devět bodů na studenta. Nejvíce bodů studenti získali za příklad číslo čtyři. Tento příklad řešil pouze jeden student graficky, deset si nakreslilo obrázek a vyřešilo pomocí přičítání vektorů a devět studentů řešilo pomocí rovnic přímek. První příklad začalo řešit osm studentů, ale nedořešil ho ani jeden.

Matematický proseminář												
Pořadové	**Úloha 1**		**Úloha 2**			**Úloha 3**			**Úloha 4**			**Celkem**
číslo	**představa**	**počet bodů**	**představa**	**řešení**	**počet bodů**	**představa**	**řešení**	**počet bodů**	**představa**	**řešení**	**počet bodů**	
17	ano	2	špatná	c	2	ano	a	4	poloviční	početně	1	9
18	ano	4	ano	b	2	ano	a	1	poloviční	početně	0	7
19	ano	2	ano	a	2	ano	a	3	ano	graficky	4	11
20	-	-	neúplná	b	1	ano	a	3	špatná	početně	0	4
21	špatná	0	ano	c	5	ano	a	2	poloviční	početně	4	11
22	-	-	-	-	-	špatná	špatné	0	poloviční	početně	3	3
23	ano	-	ano	obrázkem	1	špatná	obrázkem	0	poloviční	zpaměti	4	5
24	ne	-	neúplná	obrázkem	1	-	-	-	poloviční	obrázkem	4	5
25	-	-	ano	a	3	špatná	špatné	0	poloviční	obrázkem	4	7
26	ano	2	ano	obrázkem	5	ano	a	5	poloviční	početně	0	12
27	ne	-	ano	a	0	ano	a	1	poloviční	početně	1	2
28	špatná	-	ano	b	2	ano	a	2	ano	obrázkem	8	12
29	-	-	ano	a	5	-	-	-	ano	obrázkem	8	13
30	-	-	ano	špatné	0	ano	a	1	ano	početně	0	1
31	ano	0	ano	b	5	ano	a	5	poloviční	početně	2	12
32	-	-	ano	b	5	ano	špatné	1	poloviční	obrázkem	4	10
33	ano	4	ano	a	3	ano	a	5	ano	obrázkem	8	20
34	ano	2	ano	b	1	ano	a	5	poloviční	obrázkem	4	12
35	-	-	ano	a	4	-	-	-	poloviční	obrázkem	4	8
36	-	-	ano	a	2	špatná	špatné	0	poloviční	obrázkem	4	6
37	-	-	neúplná	a	2	ano	a	5	poloviční	obrázkem	4	11
Celkem		16			51			43			71	181

TABULKA 3: VÝSLEDKOVÁ TABULKA MATEMATICKÉHO PROSEMINÁŘE

Třetí třídou byli dvacet jedna studentů 3.C Gymnázia Kladno. Velmi mě překvapilo, že v této třídě byli čtyři studenti, kteří mi do testu napsali pouze omluvu, že vůbec nic z toho neumí. Další tři test řešit začali, ovšem nezískali ani jeden bod. Nejlepším studentem byl ten, který získal pouze osm bodů za jediný příklad, který řešil. Průměrně získal student této třídy dva a půl bodu. Příklad číslo čtyři řešilo sedm studentů početně a pouze čtyři graficky. Nejvíce bodů získali studenti za třetí příklad, který ovšem nevyřešil nikdo zcela správně. Celkový součet bodů všech studentů za první příklad jsou pouze tři stejně jako u druhého příkladu.

Gymnázium Kladno - 3.C												
Pořadové	Úloha 1		Úloha 2			Úloha 3			Úloha 4			
číslo	představa	počet bodů	představa	řešení	počet bodů	představa	řešení	počet bodů	představa	řešení	počet bodů	Celkem
38	špatná	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
39	-	-	-	-	-	ano	b	2	ano	početně	0	2
40	-	-	ano	b	2	-	-	-	ano	graficky	0	2
41	špatná	0	-	-	-	-	-	-	špatná	početně	0	0
42	špatná	0	-	-	-	ano	b	3	-	-	-	3
43	ano	0	-	-	-	ano	b	3	poloviční	graficky	0	3
44	ano	3	ano	b	1	ano	-	-	poloviční	početně	0	4
45	špatná	0	-	-	-	špatná	početně	0	-	-	-	0
46	špatná	0	-	-	-	ano	b	4	-	-	-	4
47	špatná	0	špatná	-	0	ano	b	4	-	-	-	4
48	-	-	-	-	-	-	-	-	ano	graficky	8	8
49	-	-	-	-	-	-	-	-	poloviční	graficky	4	4
50	špatná	0	-	-	-	ano	b	4	-	-	-	4
51	špatná	0	špatná	-	0	ano	b	4	-	-	-	4
52	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
53	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
54	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
55	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
56	-	-	-	-	-	-	-	-	ano	početně	1	1
57	-	-	-	-	-	nejasné	odhad	0	ano	početně	1	1
58	špatná	0	-	-	-	ano	odhad	0	poloviční	početně	4	4
59	-	-	-	-	-	-	-	-	poloviční	početně	4	4
Celkem		3			3			24			22	52

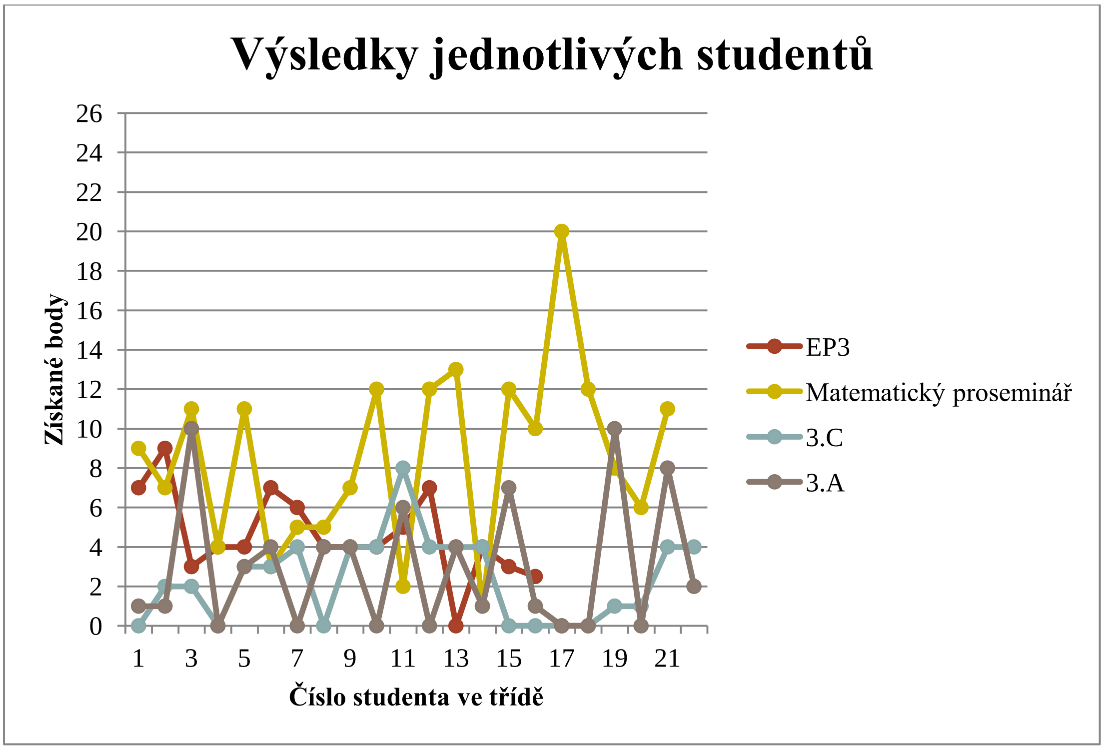
TABULKA 4: VÝSLEDKOVÁ TABULKA 3.C

Poslední testovanou třídou byla 3.A Gymnázia Kladno (viz Tabulka 5). V této třídě byl pouze jeden student, který odevzdal úplně prázdný test. Dalších šest studentů začalo řešit alespoň jeden příklad, ale nezískali ani jeden bod. Nejlepší studenti byli dva, oba získali deset bodů. Průměrně student získal tři body. Nejvíce bodů studenti získali za příklad číslo tři, který ale ani jeden nevyřešil celý správně. Za příklad číslo jedna nikdo nezískal ani jeden bod, začalo ho řešit pouze pět studentů. Příklad číslo čtyři řešili dva studenti graficky, sedm jich řešilo početně a čtyři si nakreslili obrázek, z něj odvodili jednu souřadnici a snažili se dopočítat zbývající.

Gymnázium Kladno - 3.A												
Pořadové	Úloha 1		Úloha 2			Úloha 3			Úloha 4			Celkem
číslo	představa	počet bodů	představa	řešení	počet bodů	představa	řešení	počet bodů	představa	řešení	počet bodů	
60	-	-	-	-	-	neúplná	-	1	-	-	-	1
61	-	-	-	-	-	neúplná	-	1	špatná	početně	0	1
62	-	-	ano	b	2	-	-	-	ano	graficky	8	10
63	špatná	0	ne	-	0	špatná	špatné	0	-	-	-	0
64	-	-	ano	c	1	ano	b	2	špatná	početně	0	3
65	-	-	ano	a	2	neúplná	-	1	ano	početně	1	4
66	-	-	-	-	-	-	-	-	špatná	početně	0	0
67	-	-	ano	a	2	ano	b	2	špatná	kombinace	0	4
68	-	-	ano	a	2	ano	b	2	-	-	-	4
69	-	-	-	-	-	-	-	-	ne	početně	0	0
70	-	-	ano	a	2	ano	b	4	-	-	-	6
71	špatná	0	špatná	-	-	-	-	-	-	-	-	0
72	-	-	-	-	-	ano	b	4	-	-	-	4
73	špatná	0	ano	b	1	špatná	-	0	ano	graficky	0	1
74	-	-	ano	a	3	ano	b	3	poloviční	kombinace	1	7
75	špatná	0	-	-	-	ano	b	1	-	-	-	1
76	špatná	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
77	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
78	-	-	ano	a	5	ano	b	4	poloviční	početně	1	10
79	-	-	špatná	c	0	-	-	-	špatná	kombinace	0	0
80	-	-	ano	a	2	ano	b	4	poloviční	kombinace	2	8
81	-	-	ano	a	2	-	-	-	špatná	početně	0	2
Celkem		0			24			29			13	66

TABULKA 5: VÝSLEDKOVÁ TABULKA 3.A

Nejlépe dopadli studenti matematického proseminář (viz Graf 1: Výsledky jednotlivých studentů), což se dalo očekávat. Ovšem pokud přihlédneme k tomu, že tito studenti jsou nadaní na matematiku, průměrný výsledek 9 bodů na studenta z celkového počtu 26 bodů mi přijde nedostačující. Na druhém místě se umístili studenti EP3, jejichž výsledky byly průměrné, žádný student příliš nevynikal ani nebylo moc studentů, kteří by nedosáhli žádného bodu. Mnoho studentů této třídy řešili příklady graficky, což dokazuje propojenost analytické geometrie s představou v kartézském souřadném systému. Na třetím místě se umístila třída 3.A, kde byly výkony studentů poměrně nevyrovnané. Vzhledem k tomu, že je toto gymnázium obecné, je možné, že horší studenti byli zaměřeni spíše humanitně a lepší přírodovědným směrem. Nejhůře dopadla třída 3.C s průměrným výsledkem 2,5 bodu na studenta. Vzhledem k tomu, že čtyři studenti vůbec test neřešili, není to tak hrozný výsledek.



GRAF 1: VÝSLEDKY JEDNOTLIVÝCH STUDENTŮ

Pokud můžeme soudit z tohoto testování, příklady byly pro studenty moc těžké. Už jen představa, co mají řešit byla složitá, natož samotné řešení. Spousta studentů skončila jen přečtením příkladu a neporozuměním textu. Pokud se někteří dopracovali k mezivýsledku, který nebyl v rámci celých, maximálně desetinných čísel, nepokračovali dál. V dnešní době jsou totiž zvyklí na "hezké" výsledky a to mají kalkulačky! Objevili se i studenti, kteří neznají ani základní vzorce, ač danou látku probírali tento rok a tabulky nemají povoleny ani na jedné škole.

ZÁVĚR

V této práci jsem porovnala historické učebnice mezi sebou, z čehož jsem usoudila, že každý autor využívá odlišné způsoby zavedení pojmů, řazení učiva a také každý dává jiný důraz na obrázky, ale obsah učiva je ve všech učebnicích velmi podobný. Naučila jsem se nové metody výpočtů příkladů, mnohdy mnohem snadnější, a dozvěděla se, že studenti nemusejí počítat jen s "hezkými" čísly. Při testování studentů jsem byla nemile překvapena, že dnešním studentům chybí propojení analytické geometrie s geometrickou představou, které bylo vidět pouze u studentů průmyslové školy. Tudíž nám vyvstává otázka, neměli bychom to my učitelé změnit?

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

1. Kádner Otakar: Vývoj a dnešní soustava školství, 1. díl, Sfinx Bohumin Janda v Praze, Praha, 1929
2. Kádner Otakar: Vývoj a dnešní soustava školství, 2. díl, Sfinx Bohumin Janda v Praze, Praha, 1931
3. Polák Josef: Didaktika matematiky, Fraus Plzeň, Plzeň, 2014
4. Potůček Jan: Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900 - 1945, 1. díl, Pedagogické centrum Plzeň, Plzeň, 1999
5. Potůček Jan: Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900 - 1945, 2. díl, Pedagogické centrum Plzeň, Plzeň, 1999
6. Strnad Alois: Geometrie pro vyšší školy reálné, Kytka, Praha, 1898
7. Šilháček Karel, Sechovský Hynek: Geometrie pro VIII. třídu reálek jakož i VII. a VIII. třídu reformních reálných gymnázií, Česká grafická UNIE a. s., Praha, 1936
8. Veselá Zdenka: Dokumenty z vývoje české střední školy 1849 - 1939, SPN, Praha, 1973
9. Veselá Zdenka: Vývoj české školy a učitelského vzdělání, Brno: Masarykova univerzita, Brno, 1992
10. Vinš Josef: Geometrie pro sedmou třídu středních škol (vydání pro reálky), Analytická geometrie v rovině, Česká grafická UNIE a.s., Praha, 1928
11. Vojtěch Jan: Geometrie pro 7. třídu gymnasií a reálných gymnasií, Jednota českých matematiků, Praha, 1912
12. Vojtěch Jan: Geometrie pro 7. a 8. třídu středních škol, Jednota českých matematiků a fysiků, Praha, 1946

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK A GRAFŮ