MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anežka Smutná

Pomůcky pro výuku geometrie

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: MZUDZV

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Pomůcky pro výuku geometrie

Autor: Anežka Smutná

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá pomůckami pro výuku geometrie na základních a středních školách. Jedním z cílů práce je zhotovení několika pomůcek, které nabízejí vizuální odůvodnění tvrzení či konstrukcí. Jedná se konkrétně o model pro zdůvodnění platnosti Pýthagorovy věty, pomůcku pro znázornění vzniku kuželoseček jako řezů rotační kuželové plochy, pomůcku pro vizualizaci definice a tzv. zahradnické konstrukce elipsy a model pro znázorňování a modelování stereometrických vztahů a problémů. Část práce se věnuje učivu geometrie na základních školách a vybraných typech středních škol podle současných kurikulárních dokumentů. Další část práce tvoří výčet a popis používaných pomůcek v klasických školách a v některých typech škol s alternativním přístupem k výuce matematiky (Hejného metoda, waldorfské a Montessori školy). Práci mohou využít učitelé pro inspiraci k výrobě vlastních pomůcek či k orientaci v pomůckách již vyráběných.

Klíčová slova: učební pomůcka, geometrie, didaktika, školství

Title: Aids for Teaching Geometry

Author: Anežka Smutná

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis deals with aids for teaching Geometry at primary and secondary schools. The aim of the thesis is creating several visual aids for substantiation of statements or constructions. Specifically, there is a tool for explaining validity of the Pythagorean theorem, a tool for showing formation of conic sections as sections of circular cone, a tool for demonstrating the definition of an ellipse and its Gardener's construction and a tool for showing and simulating both stereometric relations and problems. A part of the thesis deals with the current curriculum of Geometry on Czech primary schools and selected types of secondary schools. Further, the thesis lists and describes some aids that are used in general public schools and in selected types of schools using alternative methods of teaching Mathematics (The Hejný method, Waldorf and Montessori schools). The thesis is also intended to be used by teachers for inspiration of developing their own tools or to orient themselves in the tools already produced.

Keywords: aid, geometry, didactics, education

Tato práce by nevznikla bez ohromné podpory a trpělivosti vedoucí RNDr. Martiny Štěpánové, Ph.D., jež se všemi prostředky snažila, aby práce byla dotažena do konce smysluplně a včas. Tímto jí patří hluboké díky.
Poděkování též patří učitelkám a učitelům ze základních a středních škol, kteří mi ochotně umožnili přístup k pomůckám umístěným v jejich kabinetech.

Obsah

Úvod **2**

1 Učivo geometrie na ZŠ a SŠ **3**
- 1.1 Geometrie na základní škole . . . 3
  - 1.1.1 První stupeň základní školy . . . 3
  - 1.1.2 Druhý stupeň základní školy . . . 4
- 1.2 Geometrie na střední škole . . . 4
  - 1.2.1 Gymnázium . . . 4
  - 1.2.2 Kombinované lyceum . . . 5
  - 1.2.3 Technické lyceum . . . 7
  - 1.2.4 Střední odborné školy stavební . . . 8
  - 1.2.5 Střední odborné školy strojní . . . 8

2 Dostupné a používané pomůcky pro geometrii **9**
- 2.1 Klasické školství . . . 9
  - 2.1.1 Základní škola . . . 10
  - 2.1.2 Gymnázium . . . 13
- 2.2 Alternativní výuka matematiky . . . 16
  - 2.2.1 Hejného metoda . . . 16
  - 2.2.2 Waldorfské školy . . . 20
  - 2.2.3 Montessori školy . . . 23

3 Návrhy a realizace pomůcek **37**
- 3.1 Pýthagorova věta . . . 37
- 3.2 Kuželosečky . . . 42
  - 3.2.1 Kuželosečky jako řezy rotační kuželové plochy rovinou . . . 42
  - 3.2.2 Definice elipsy . . . 45
- 3.3 Stereometrie . . . 47

Závěr **53**

Seznam použité literatury **54**

Seznam obrázků **56**

Seznam použitých zkratek **58**

Úvod

Jedním z hlavních cílů výuky geometrie ve školách je rozvoj prostorové představivosti pomocí zkoumání geometrických útvarů a jejich vzájemných vztahů. Prostorovou představivost však děti přirozeně rozvíjejí od malička, vždyť umět se orientovat v prostoru potřebuje každý. V době počítačového modelování se dá mnoho geometrických vztahů a vlastností znázornit v grafických softwarech, avšak dle našeho názoru je pro pochopení zákonitostí a ověření, zda fungují, důležité moci si je osahat a pohrát si s nimi[1]. Proto v této práci zkoumáme a navrhujeme „hmatatelné“ pomůcky vhodné pro výuku geometrie.

V první kapitole se seznámíme s učivem geometrie podle platných kurikulárních dokumentů (Rámcových vzdělávacích programů) pro základní vzdělávání, gymnázia a některé další typy středních škol, na nichž se geometrie vyučuje.

Ve druhé kapitole nahlédneme do kabinetů základních a středních škol a podíváme se na pomůcky, jež se zde vyskytují. Zajímat nás budou modely využívané nejen v klasických základních školách či gymnáziích, ale též ve školách používajících některou alternativní metodu výuky matematiky (Hejného metoda, waldorfská a Montessori pedagogika). Stručně se seznámíme s historií a základními principy uvedených alternativních směrů, abychom mohli lépe porozumět způsobům, kterými jsou modely ve výuce využívány. Nahlédneme tedy na didaktické prostředky Hejného metody, blíže pak na vybavení škol Montessori, kde pomůcky tvoří podstatnou část systému výuky, a proto jich je velice mnoho. Zmíníme, jak prostorovou a geometrickou představivost rozvíjí školy waldorfské. Pomůcky popíšeme a shrneme jejich využití.

Další část práce věnujeme samotným návrhům a realizacím několika pomůcek, které by mohly žákům pomoci k pochopení daných geometrických vztahů a vlastností, či dokonce k jejich objevení. Bude se jednat o model pro odvození Pýthagorovy věty, dvě pomůcky pro výuku kuželoseček a pomůcku pro názorné ukázky stereometrických úloh a vlastností. První model je vhodné využít i pro demonstraci vztahu pro druhou mocninu součtu dvou čísel. Jedna z pomůcek týkajících se kuželoseček bude věnována vzniku jednotlivých kuželoseček jako řezů rotační kuželové plochy rovinou, druhá pomůcka bude znázorňovat konstrukci elipsy dle její definice. Model určený pro výuku stereometrie se bude týkat základních vztahů mezi geometrickými útvary v prostoru, jejich vzájemných poloh či průniků.

Práce by měla sloužit především pedagogům na základních a středních školách pro zorientování se v dostupných geometrických pomůckách, případně pro inspiraci k výrobě pomůcek vlastních.

[1] Stavebnice na displeji či monitoru (zejména v určitém věku) nepředčí skutečné Lego či Merkur – ani v atraktivitě, ani v rozvoji kompetencí.

1. Učivo geometrie na ZŠ a SŠ

S geometrií se potkáváme už od dětství. Různé tvary poznáváme a zkoumáme prostřednictvím stavebnic a jiných hraček. Stavíme věže z kostek či kelímků, domečky, paláce, mosty a jiné objekty ze stavebnice Lego — zkrátka si hrajeme a přitom jakoby mimochodem poznáváme, jak svět okolo nás „funguje a drží pohromadě“. V prvních letech života se celkem dobře obejdeme bez přesných geometrických pojmů (s těmi se potkáme později ve škole), ale již se učíme chápat prostorové vztahy mezi předměty a vyjadřovat je pomocí předložek „nad“, „pod“, „před“, „za“, „vedle“ atd.

S využitím výše zmíněných aktivit přirozeně rozvíjíme prostorovou představivost, která je velmi důležitá pro orientaci v našem trojrozměrném světě. Uplatníme ji nejen v běžném životě, ale mimo jiné i později ve škole při řešení geometrických úloh.

V následujících odstavcích ukážeme, které partie geometrie jsou zahrnuty v rámcových vzdělávacích programech (dále RVP) pro jednotlivé stupně vzdělávání.

1.1 Geometrie na základní škole

Dokument, jež udává cíle, formu a povinný obsah základního vzdělání v České republice, se nazývá *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* (dále RVP ZV) [18]. Matematiky se týká jeho kapitola *5.2 Matematika a její aplikace.* Konkrétní učivo geometrie pak stanovuje tematický okruh *Geometrie v rovině a v prostoru*, vývoj prostorové představivosti žáků popisuje tematický okruh *Nestandardní aplikační úlohy a problémy.* První stupeň ZŠ se v RVP ZV dělí na dvě období (první období zahrnuje 1. až 3. ročník, druhé období 4. a 5. ročník). Na druhém stupni k podobnému dělení nedochází.

1.1.1 První stupeň základní školy

V prvním období prvního stupně se žáci v geometrii učí rozpoznávat, pojmenovávat a modelovat jednoduché rovinné útvary a prostorová tělesa. Na konci prvního období umí porovnávat velikosti útvarů, vědí, jak narýsovat přímku a úsečku pomocí pravítka a jak se tyto objekty značí. V očekávaných výstupech RVP ZV též najdeme, že žáci rozeznají a modelují souměrné útvary v rovině, odhadují a měří délky úseček.

Na konci druhého období prvního stupně žáci podle RVP ZV nejen pojmenují, ale též pomocí jednoduchých konstrukcí narýsují kolmice, rovnoběžky a základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník, kružnici). Grafickým sčítáním úseček děti zvládnou spočítat délku lomené čáry či obvod mnohoúhelníku, pomocí čtvercové sítě pak jednak spočítají obsahy některých obrazců a jednak pracují s osovou souměrností. Postupně rozvíjejí prostorovou představivost.

1.1.2 Druhý stupeň základní školy

Na druhém stupni učební látky obecně přibývá, v geometrii tomu není jinak. Po deváté třídě základní školy žáci ovládají polohové a metrické vlastnosti a charakteristiky základních geometrických útvarů v rovině včetně používání matematické symboliky. Umí odhadnout a změřit velikost úhlu, určit obsahy a obvody základních rovinných obrazců (trojúhelníku, čtverce, obdélníku, kruhu, rovnoběžníku, lichoběžníku, pravidelných mnohoúhelníků apod.) a vzdálenost bodu od přímky. Základní geometrické útvary načrtnou i narýsují a zobrazí je v osové či středové souměrnosti. Rovněž sestrojí osu úsečky a úhlu.

Co se týče trojúhelníků, znají věty o jejich shodnosti a podobnosti, trojúhelníkovou nerovnost, Pýthagorovu a Thalétovu větu a další vlastnosti.

Pojem množiny bodů daných vlastností používají jak k charakteristice geometrického útvaru, tak k řešení úloh.

V prostorové geometrii pak děti odhadnou a vypočítají povrch a objem tělesa (krychle, kvádru, válce, kužele, jehlanu, koule, kolmého hranolu apod.). Tělesa též umí načrtnout, charakterizovat a analyzovat jejich vlastnosti, dokáží sestrojit jejich síť.

V konstrukčních úlohách žáci používají technické písmo.

1.2 Geometrie na střední škole

Zatímco pro všechny základní školy je RVP jednotný, u středních škol se liší jejich zaměřením. Střední školy jsou rozděleny na gymnázia a střední odborné školy. Gymnázia se řídí *Rámcovým vzdělávacím programem pro gymnázia* (dále RVP G)[1][13]. Ostatní střední školy mají své RVP podle příslušného oboru studia. Blíže se podíváme na RVP vybraných typů škol, na kterých se geometrie vyučuje. Jsou to gymnázia, technická lycea, kombinovaná lycea a střední odborné školy stavební a strojní.

1.2.1 Gymnázium

Na gymnáziu se část učiva geometrie shoduje s látkou druhého stupně ZŠ, dochází však k jejímu prohlubování. Současně přibývají nová témata, na která se v této části zaměříme. Studenti by měli ovládat terminologii, zdůvodňovat a využívat vlastnosti geometrických útvarů.

V rovinné geometrii (tj. planimetrii) přibudou k již známé osové a středové souměrnosti další dvě shodná zobrazení, a to posunutí a otočení, dále též stejnolehlost. Na Thalétovu větu naváží úhly v kružnici,[2] vědomosti o trojúhelnících prohloubí znalost Eukleidových vět o odvěsně a výšce. Řeší se planimetrické konstrukční úlohy.

V prostorové geometrii (tj. stereometrii) studenti zkoumají polohové a metrické vlastnosti lineárních geometrických útvarů. Nejznámější tělesa umí pojmenovat, vypočítat jejich objem i povrch a umí je načrtnout (u kolmých hranolů

[1] Gymnázia se sportovní přípravou, gymnázia s výukou v angličtině a dvojjazyčná gymnázia mají své vlastní RVP.

[2] V RVP G však není přímo popsáno, že jde o středové a obvodové úhly.

a jehlanů sestrojí jejich obrazy ve volném rovnoběžném promítání), sestrojí rovinné řezy hranolů a jehlanů.

V trigonometrii se studenti zabývají pravoúhlými i obecnými trojúhelníky a naučí se sinovou a kosinovou větu.

Úplně novou oblastí je pro středoškoláky analytická geometrie v rovině. Zde se učí pracovat s vektory, analyticky vyjádřit přímky a kuželosečky. U kuželoseček také zkoumají jejich charakteristiky. Na základě výpočtu dokáží určit nejen vzájemnou polohu přímek, ale i přímky a kuželosečky.

Studenti rovněž umí aplikovat úpravy výrazů, trigonometrii, iracionální čísla a práci s funkcemi a proměnnými na řešení geometrických úloh, tedy provádějí konstrukce na základě výpočtu.

1.2.2 Kombinované lyceum

Kombinované lyceum není příliš rozšířeným typem školy,[3] proto zde nejprve stručně vysvětlíme některé charakteristiky oboru, jelikož se domníváme, že je to pro pochopení jeho RVP podstatné. Vycházíme z dokumentu *Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Kombinované lyceum* (dále RVP KL) [14].

Kombinované lyceum je všeobecně vzdělávací obor, jež je doplněn o obecně odborná zaměření. První ročník se studenti učí společně, ve 2. nebo 3. ročníku si povinně volí jedno z nabízených zaměření. Škola musí nabídnout alespoň dvě ze tří zaměření (humanitní, přírodovědné, technické), která stanovuje RVP KL. Každé zaměření má povinné obsahové okruhy, které škola ve svém Školním vzdělávacím programu (dále ŠVP) musí mít rozpracované, a volitelné moduly, z nichž si škola do svého ŠVP volí. Kvůli volitelnosti modulů ze strany školy a zaměření ze strany studentů je RVP KL poměrně komplikovaný. Podíváme se tedy na geometrii postupně – nejprve ve společném základu, poté v přírodovědném a technickém zaměření (v humanitním zaměření geometrie obsažena není).

Společný základ

Oblast geometrie najdeme v RVP KL pod vzdělávací oblastí *Matematické vzdělávání*.

V planimetrii se studenti učí polohové a metrické vlastnosti a vztahy rovinných útvarů včetně používání správných pojmů. Užívají věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků, aplikují je při řešení početních i konstrukčních úloh. Seznámí se s Eukleidovými větami, množinami bodů dané vlastnosti a znají shodná a podobná zobrazení. Určují obsahy a obvody základních rovinných obrazců.

V prostorové geometrii řeší studenti vzájemné polohy a odchylky dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin a vzdálenost bodu od roviny. S využitím funkčních vztahů a trigonometrie vypočítají povrchy a objemy základních těles.

[3] V současné době (údaj k prosinci 2016) v ČR existuje jen pět středních škol [12], které vyučují podle RVP pro kombinované lyceum. Jedná se o čtyři waldorfské střední školy (Praha, Ostrava, Příbram, Semily) a dále Gymnázium Jevíčko. Zde je od školního roku 2015/2016 otevřen nový obor Kombinované lyceum, který je ovlivněn waldorfskou pedagogikou a používá daltonské bloky, což je výuka, při které dochází k plnění úkolů souvisejících s probíranou látkou. Žák si v tomto vyhrazeném čase volí nejen místo činnosti a své spolupracovníky, ale dokonce si z nabídky vybírá i samotný úkol.

V analytické geometrii se studenti učí operace s vektory (sčítání vektorů, násobení vektoru skalárem, skalární součin vektorů), polohové a metrické vztahy bodů a přímek a také různá analytická vyjádření přímky.

V goniometrii a trigonometrii studenti řeší pravoúhlý i obecný trojúhelník, poznají sinovou a kosinovou větu.

Přírodovědné zaměření

Povinné obsahové okruhy přírodovědného zaměření geometrii přímo neobsahují, ale zajímavá geometrická témata jsou součástí volitelných modulů.[4] Volitelné moduly jsou v rozsahu dvou vyučovacích hodin týdně, avšak volí se ze všech možných přírodovědných modulů, nejen matematických.

Přímo geometrií se zabývá modul nazvaný *Matematika 2: Stereometrie a deskriptivní geometrie I.* V něm se „přírodovědci" učí volnému rovnoběžnému promítání, v němž zobrazují tělesa, konstruují průnik dvou rovin, přímky a roviny či sestrojují řez krychle rovinou. Zobrazují mnohostěny, sestrojují jejich sítě a vytvářejí modely. Učí se konstruovat kuželosečky.

Modul *Matematika 3: Stereometrie a deskriptivní geometrie II* navazuje na předchozí modul. Zde se studenti učí zobrazovat v Mongeově promítání body, přímky a roviny, zobrazují tělesa s podstavami v nárysně či půdorysně. Využívají vztah osové afinity mezi kružnicí a elipsou ke konstrukci elipsy. Sestrojí řez rotačního válce a kužele, síť seříznutého válce a kužele a vyrobí jejich modely.

V modulu *Matematika 4: Úvod do projektivní geometrie* se studenti učí perspektivnímu zobrazování, principu duality a projektivnímu zavedení kuželoseček. Pracují s pojmy nekonečně vzdálený (nevlastní) bod a přímka.

Modul *Matematika 5: Zlatý řez a jeho výskyt v přírodě, architektuře a výtvarném umění* se zabývá definicí zlatého řezu, souvislostí s Fibonacciho posloupností. Studenti se učí konstrukčně rozdělit úsečku ve zlatém řezu, poznávají souvislost s konstrukcí pětiúhelníku a desetiúhelníku. Krásy zlatého řezu nalézají v přírodě, architektuře a umění.

Technické zaměření

Technické zaměření má geometrii spíše v povinných obsahových blocích. Najdeme zde předměty jako *Technické kreslení*, *Deskriptivní geometrie* nebo *Aplikovaná matematika*. V modulech pak jsou nabízena rozšíření v konkrétních technických odvětvích (stavební, elektrotechnické, strojní vzdělávání), programování a CAD systémy.

V obsahovém okruhu *Technické kreslení* se studenti učí výkresovým dokumentacím, zásadám zobrazování a kótování, technické normalizaci. Je zde kladen důraz na rozvíjení a používání prostorové představivosti. Studenti zhotovují modely, projektují skutečné objekty. Učí se „číst" a zakreslovat různé (stavební, strojní, elektrotechnické a zeměměřičské) výkresy a schémata.

Obsahový okruh *Deskriptivní geometrie* se zabývá rovnoběžným promítáním (volným rovnoběžným, kótovaným a Mongeovým promítáním) a kuželosečkami.

[4] Střední škola, na kterou chodila autorka této bakalářské práce, se řídí uvedeným RVP. Z nabízených modulů matematiky při svém studiu stihla probrat téměř vše (snad kromě úvodu do projektivní geometrie), a dokonce značnou část učiva přírodovědného zaměření v hodinách společného základu, kdy je celá třída pohromadě.

Studenti využívají poznatky z planimetrie, stereometrie a trigonometrie k řešení technických problémů. Učí se základní vlastnosti rovnoběžného promítání a zobrazují v něm tělesa. V kótovaném promítání zobrazí bod, přímku a rovinu. V Mongeově promítání sestrojí sdružené průměty bodů, přímek, rovin, zobrazí mnohoúhelníky, mnohostěny, z oblých těles pak kouli, válec a kužel. Také určí skutečný tvar rovinných útvarů. Učí se zobrazit řezy elementárních těles, sestrojit jejich průniky s přímkou a vytvořit jejich sítě. Konstruují kuželosečky, charakterizují je, znají jejich vlastnosti a umí je použít k řešení technických problémů.

1.2.3 Technické lyceum

Technická lycea se řídí *Rámcovým vzdělávacím programem pro obor vzdělání Technické lyceum* (dále RVP TL) [17]. Obsahový okruh *Matematické vzdělávání* se velmi podobá tomu z RVP KL.

Goniometrii a trigonometrii studenti používají k řešení geometrických úloh v rovině i v prostoru, znají sinovou a kosinovou větu, řeší pravoúhlý a obecný trojúhelník.

Studenti ovládají planimetrické pojmy, znají polohové a metrické vztahy mezi nimi. K řešení početních i konstrukčních úloh používají věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků, Eukleidovy věty a množiny bodů dané vlastnosti. Znají shodná a podobná zobrazení. Učí se rozlišovat základní rovinné obrazce a počítat jejich obvody a obsahy.

V rovině i prostoru studenti řeší základní polohové a metrické vlastnosti. Určují vzájemnou polohu dvou přímek, přímky a roviny nebo dvou rovin, stanoví odchylku dvou přímek, přímky a roviny a dvou rovin. Také určí vzdálenost bodu od roviny. Vypočítají povrchy a objemy základních těles s využitím funkčních vztahů a trigonometrie.

Co se analytické geometrie týče, učí se studenti operacím s vektory – sčítat dva vektory, násobit vektor skalárem a skalárně násobit dva vektory. Analyticky určují polohové a metrické vlastnosti bodů a přímek. Znají různá vyjádření přímky. Učí se charakterizovat kuželosečky, sestavit jejich rovnice a určit vzájemnou polohu kuželosečky a přímky.

V obsahovém okruhu *Aplikovaná matematika* využívají matematiku při řešení úloh z ostatních vyučovaných předmětů (fyzika, chemie, stavebnictví, strojírenství, elektrotechnika). Učivo geometrie se zde týká geometrie v prostoru i v rovině, trigonometrie, analytické geometrie a technických křivek (vše je vztaženo k řešení technických problémů). Studenti se rovněž učí zobrazovat základní tělesa, jejich řezy či průniky s přímkou ve volném rovnoběžném promítání. K řešení technických problémů též používají charakteristiky kuželoseček, jejich rovnice, vlastnosti i konstrukce.

V okruhu *Grafická komunikace a průmyslový design* se studenti učí různé zobrazovací metody a jejich využití při řešení prostorových úloh, prohlubují své znalosti stereometrie. Důraz je kladen zejména na Mongeovo promítání a pravoúhlou axonometrii. V nich zobrazují rovinné útvary v obecné poloze, hranatá a rotační tělesa. Sestrojují řezy těles, jejich sítě a vzájemné průniky. Uvědomují si incidenci bodů, přímek a rovin. Ovládají konstrukce kuželoseček a uplatňují je k zobrazování oblých těles a jejich řezů. Sestrojují technické křivky (spirály, evolventy, cykloidy či šroubovice), nalézají příklady jejich využití v praxi. V technickém kreslení se studenti seznamují s normalizací a s pravidly technických výkresů (druhy čar, písmo, kótování apod.). Sestrojují pravoúhlé průměty těles na tři hlavní průmětny a ke dvěma daným doplňují chybějící průmět třetí. Kreslí podle modelů, zobrazují strojní součásti či jejich řezy a průřezy, pracují s CAD systémy.

1.2.4 Střední odborné školy stavební

Střední odborné školy stavební se řídí dokumentem *Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Stavebnictví* (dále RVP STA) [15]. Geometrii najdeme v obsahových okruzích *Matematické vzdělávání* a *Grafická a estetická příprava*.

Okruh *Matematické vzdělávání* obsahuje goniometrii, trigonometrii (pravoúhlý i obecný trojúhelník, sinová a kosinová věta), planimetrii, stereometrii a analytickou geometrii. V planimetrii se studenti zabývají polohovými a metrickými vztahy mezi rovinnými útvary, učí se správným pojmům. Znají věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků, pomocí nichž řeší početní a konstrukční úlohy, dále Eukleidovy věty, pojem množiny bodů dané vlastnosti, shodná a podobná zobrazení. Počítají obsahy a obvody rovinných obrazců.

Ve stereometrii studenti určují vzdálenost bodu od roviny, vzájemné polohy a odchylky dvou přímek, přímky a roviny nebo dvou rovin. Spočítají objemy a povrchy základních těles.

V analytické geometrii pracují s vektory, sčítají je, násobí číslem, skalárně je násobí mezi sebou. Zkoumají polohové a metrické vlastnosti bodů a přímek. Přímku umí zapsat různými vyjádřeními.

Geometrie v tematickém okruhu *Grafická a estetická příprava* navazuje na dřívější poznatky. Je zde kladen důraz na posílení prostorové představivosti. Studenti pilují svoji techniku rýsování, zabývají se zásadami zobrazování v technických výkresech. Konkrétněji se učí zásady pravoúhlého a kosoúhlého promítání a jejich aplikace, zobrazují rovinné obrazce a tělesa. Používají různé způsoby prostorového zobrazování těles a řeší, jak určit a zobrazit jejich průniky. Aplikují kótované promítání při řešení odvodnění střech nebo topografických ploch. Učí se lineární kresbu a perspektivu, seznámí se i s konstruovanou perspektivou (tj. perspektivou určenou pro výtvarníky, která je založena na pravidlech lineární perspektivy). Dokáží tak kreslit podle modelu nebo podle skutečnosti. Poznávají principy technického osvětlení.[5]

1.2.5 Střední odborné školy strojní

Střední odborné školy strojní učí podle dokumentu *Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Strojnictví* (dále RVP STR) [16]. Na středních odborných školách (dále SOŠ) strojních je tematický okruh *Matematické vzdělávání* v podstatě totožný se stavebními SOŠ, proto zde jeho náplň nebudeme opakovat.

Další tematický okruh, který se zabývá geometrií, se nazývá *Projektování a konstruování.* Zde se studenti učí technickým dokumentacím, základům deskriptivní geometrie, technickému zobrazování a kótování.

[5] Ostatní témata v okruhu se sice geometrie také (nepřímo) týkají, avšak jsou už značně odborná, a proto je zde rozebírat nebudeme.

2. Dostupné a používané pomůcky pro geometrii

V této kapitole se zaměříme na geometrické pomůcky, jež se ve školách běžně nacházejí, a popíšeme, jak se v praxi využívají. V průběhu psaní práce autorka navštívila několik škol (klasických i tzv. alternativních) a zajímala se o geometrické pomůcky vyskytující se v jejich kabinetech. Nejednou se však stalo (zejména v klasických školách), že učitele překvapilo, jaké „poklady“ mají k dispozici. U starších pomůcek se někdy poztrácely jejich součásti či se pozapomnělo, na co jsou pomůcky určené.

Uvedeme si zde několik příkladů pěkných pomůcek nalezených v kabinetech klasických škol, konkrétně Gymnázia Nad Štolou v Praze 7 a ZŠ U Roháčových kasáren v Praze 10. Zvláštní pozornost pak věnujeme pomůckám využívaných v alternativní výuce. Konkrétně se podíváme na matematiku a geometrii ve školách využívajících Hejného metodu, ve školách waldorfských a v Montessori školách. S pomůckami Hejného metody jsme se seznámili na Fakultní ZŠ při Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy Barrandov II, Montessori pomůcky nám byly představeny na ZŠ Na Beránku v pražských Modřanech, kde kromě klasické ZŠ je zaveden i devítiletý Montessori program.

Druhá kapitola obsahuje velkou řadu fotografií jednotlivých pomůcek. Není-li výslovně uvedeno jinak, jedná se o snímky pořízené autorkou bakalářské práce. Vznik fotografií byl umožněn díky vstřícnosti několika učitelů, kterým tímto patří veliké díky za pomoc a ochotu.

Je důležité upozornit, že děti obvykle plně věří tomu, co vidí. Proto se v následujících dvou kapitolách nejedná u mnoha pomůcek o důkazy v pravém „matematickém“ slova smyslu, ale spíše o vizualizace daných problémů s předpokladem, že dětem toto vizuální vysvětlení stačí a nenapadají je „dospělácké“ otázky typu: „Opravdu to vychází tak, jak se při pohledu na pomůcku může zdát? Není to jen přibližné, zjednodušené vysvětlení?“ a podobně.

2.1 Klasické školství

V kabinetech základních i středních škol se dají nalézt vskutku krásné a názorné pomůcky. V tradičních školách se mohou vyskytovat pomůcky, které jsou velice staré a kolikrát se již nenachází na současném trhu.

V klasických školách je běžná frontální výuka,[1] proto jsou základními pomůckami rýsovací potřeby na tabuli. Tyto jsou však natolik známé, že je nebudeme dále zmiňovat.

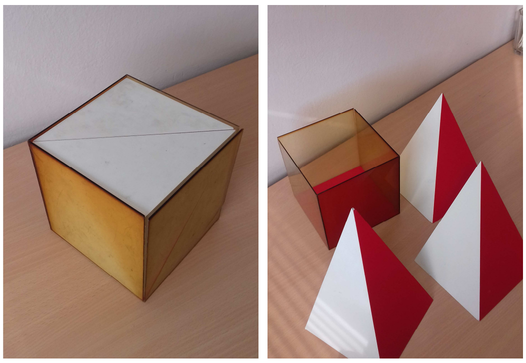
Mnoho níže zmíněných pomůcek však jen leží v kabinetě, jelikož buď upadly v zapomnění, nebo se týkají témat nad rámec RVP a tamního ŠVP.

[1] Při frontálním způsobu výuky učitel pracuje hromadně se všemi žáky ve třídě (obvykle výklad „zepředu“ od tabule, zadání samostatné práce, společná kontrola apod.)

2.1.1 Základní škola

Na základní škole U Roháčových kasáren v pražských Vršovicích lze v kabinetech matematiky nalézt několik velice názorných pomůcek. Bohužel je mnoho z nich poničených či nekompletních. Mnohé se přesto používají, jiné však leží zaprášené ve skříních. Některé pomůcky by sice patřily spíše na střední školu (např. plastový válec se znázorněnými eliptickými řezy, který si uvedeme dále v odstavci o pomůckách na gymnáziu), avšak další mohou být žákům užitečné i na základní škole.

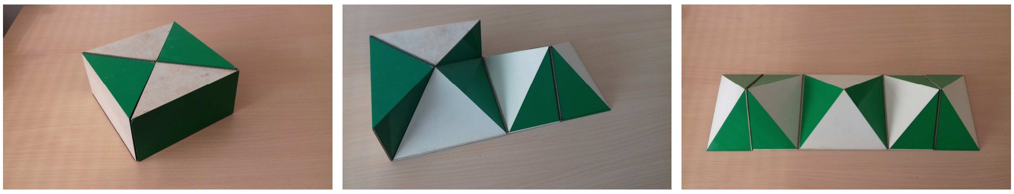
Pomůcka sloužící k pochopení vzorce pro výpočet objemu jehlanu se skládá z duté průhledné krychle (bez jedné stěny), která plní funkci krabice, a tří jehlanů (obr. 2.1). Model ukazuje, že krychli lze rozřezat na tři shodné jehlany. Každý jehlan má čtvercovou podstavu shodnou se stěnou krychle, jejímž jedním vrcholem prochází kolmo k rovině podstavy jedna hrana jehlanu, která je současně hranou krychle. Tím jsou jednoznačně určeny i zbývající hrany jehlanu. Takovéto tři jehlany lze vložit do duté krychle tak, že „vyplní její vnitřní prostor“. Dvě hrany každého jehlanu jsou stěnovými úhlopříčkami krychle a jedna hrana jehlanu je tělesovou úhlopříčkou krychle. Podél této hrany se po složení do krychle dotýkají všechny tři jehlany. Tato pomůcka ukazuje, že jehlan se čtvercovou podstavou a výškou, jejichž délka je rovna délce strany podstavy, má třetinový objem než krychle se stěnami shodnými s podstavou jehlanu.



Obrázek 2.1: Pomůcka na odvození objemu jehlanu.

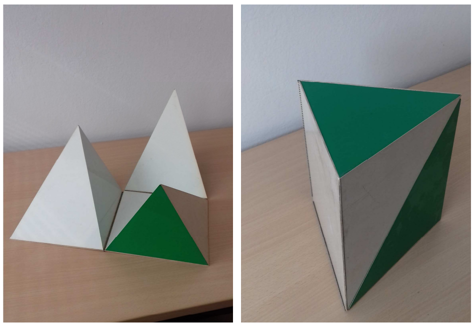
Pro znázornění vzorce pro objem obecnějšího, avšak stále čtyřbokého jehlanu se čtvercovou podstavou, který má výšku jiné délky než strana podstavy, slouží pomůcka, která má ve složené formě tvar kvádru s právě dvěma čtvercovými stěnami (obr. 2.2). Tento kvádr lze rozložit na pět jehlanů, které se dají poskládat do tří shodných jehlanů se čtvercovou podstavu a výškou délky třetího rozměru kvádru. Hrany, které mají držet u sebe, jsou spojeny kovovými kroužky podobnými kroužkové vazbě.

Ještě jedna pomůcka se týká výpočtu objemu jehlanu (obr. 2.3). Jde o trojboký hranol, který lze rozložit na tři jehlany. Tyto jehlany sice nejsou shodné, ale lze ukázat, že mají stejný objem, a tedy že objem jednoho z nich je roven třetině objemu hranolu. Uvážíme-li, že až na konstantu je objem jehlanu závislý jen na jeho výšce a na obsahu podstavy, můžeme říci, že všechny tři jehlany mají stejný objem. Totožné stěny (podstavy) však na všech třech tělesech nenalezneme.



Obrázek 2.2: Pomůcka na odvození objemu jehlanu

Objevíme dva jehlany se shodnou podstavou a výškou, poté musíme u jednoho z nich zvolit jinou stěnu za podstavu a k ní nalézt na třetím jehlanu shodnou podstavu, a to tak, aby byla totožná i výška těchto dvou těles.



Obrázek 2.3: Pomůcka na odvození objemu jehlanu

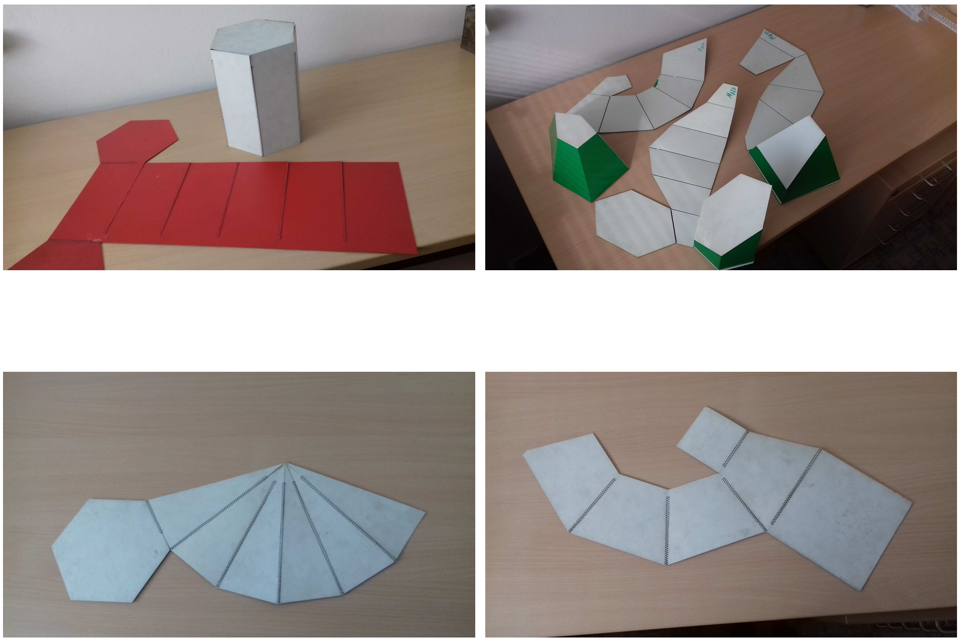
Další pomůckou, kterou je možné nalézt v kabinetech základních škol, je tzv. binomická krychle (obr. 2.4). Ta slouží k vizualizaci dvou případů binomické věty: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ a $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Jedná se o průhlednou krabici tvaru krychle bez víka (o straně $a+b$) a o několik neprůhledných krychlí a kvádrů. Jsou zde krychle odpovídající členům a^3 a b^3 (přesněji řečeno jsou jejich objemy a^3 a b^3), tři kvádry se čtvercovou stěnou o obsahu a^2 a výškou b odpovídající členům a^2b a tři kvádry s jednou stěnou o obsahu b^2 a výškou a odpovídající členům b^2a. Všechny čtvercové stěny mají červenou barvu, všechny obdélníkové stěny mají barvu bílou. Neprůhledná tělesa se dají „beze zbytku“ poskládat do průhledné krychle, čímž je ukázáno, že $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Pokud se na složenou krychli podíváme z libovolného boku, shora či zespodu, uvidíme stěnu rozdělenou na dvě čtvercové oblasti o obsazích a^2, b^2 a dvě obdélníkové oblasti o obsazích ab. Tím je znázorněn vzorec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

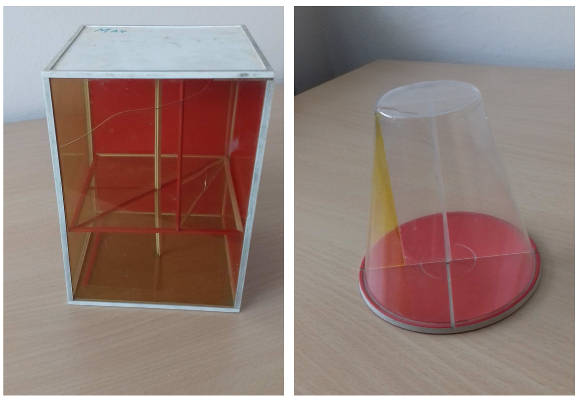
Pro budování geometrické terminologie a rozpoznávání různých tvarů a těles se v kabinetě nachází sbírka plastových těles, ze kterých lze odejmout sítě (obr. 2.5). Jedná se zejména o kvádry, hranoly a jehlany (včetně komolých).

Další pomůckou je plastová sada modelů základních těles, které jsou částečně vyrobeny z průhledných materiálů. Mají uvnitř vyznačené tělesové úhlopříčky, výšky, případně další důležité linie či úhly. Pro ilustraci uvádíme na obr. 2.6 alespoň modely dva.

Obrázek 2.4: Binomická krychle



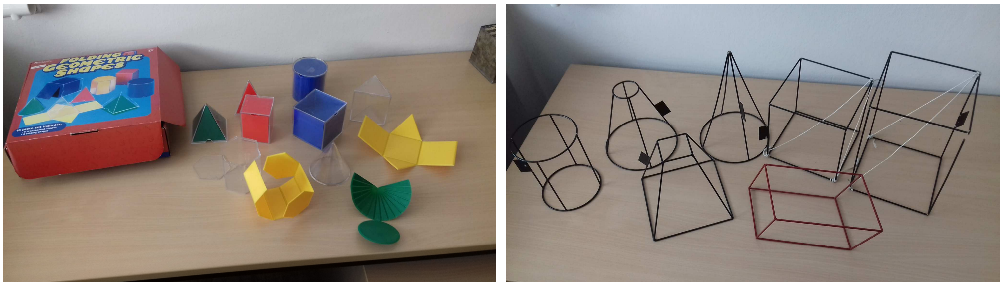
Obrázek 2.5: Tělesa a jejich sítě



Obrázek 2.6: Plastové modely těles s vyznačenými důležitými liniemi či rovinami

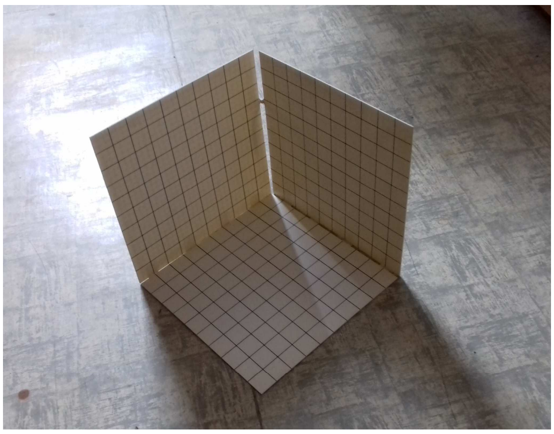
Zřejmě každý z nás se setkal s drátěnými modely těles, na obr. 2.7 vpravo jsou zachyceny nejznámější z nich (krychle, kvádr, kužel, válec, komolý čtyřboký jehlan, komolý kužel a rovnoběžnostěn).

Zajímavou sadou těles je rovněž krabice s průhlednými plastovými tělesy, ke kterým přísluší barevné plastové sítě, jež lze vložit dovnitř modelů těles (obr. 2.7 vlevo). Jelikož jde jednu stěnu tělesa odklopit, dají se modely těles též plnit vodou, a tak si ukazovat vztahy mezi jejich objemy.



Obrázek 2.7: Plastové „plnící“ modely těles s jejich sítěmi (vlevo), drátěné modely těles (vpravo)

Pro znázornění kartézské soustavy souřadnic lze využít tzv. *kout* vytvořený ze tří shodných plastových čtverců s vyznačenými čtvercovými sítěmi (obr. 2.8). Kout se sešněruje tkaničkami, tudíž může samostatně stát. Lze do něj vkládat špejle, obrazce či tělesa, což může žákům usnadnit pochopení pojmu souřadnice (pomocí špejle lze modelovat přímku, jejíž všechny body mají stejnou y-ovou souřadnici apod.).

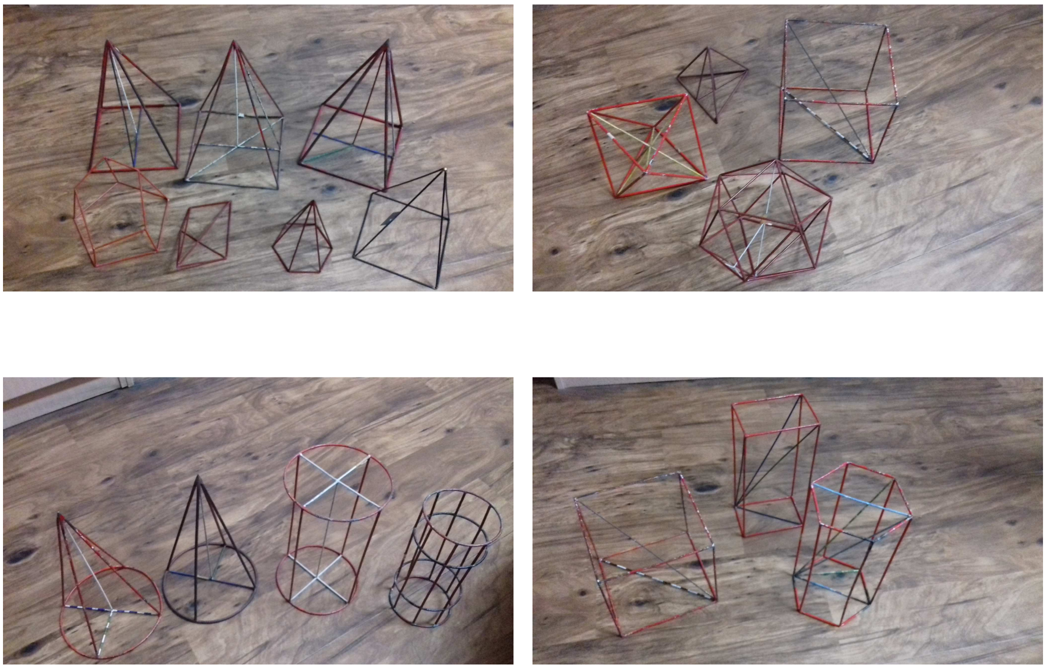


Obrázek 2.8: Kout pro výuku práce s kartézskou soustavou souřadnic

2.1.2 Gymnázium

Několik starých pomůcek autorka práce objevila v Gymnáziu Nad Štolou v Praze 7. Nutno poznamenat, že některé pomůcky byly určeny na znázornění látky, která se dle RVP G nemusí probírat.

V kabinetu matematiky zde nalezneme obsáhlou sbírku modelů těles. Jsou zde např. drátěné modely mnoha těles, od těch základních počínaje (pravidelné i nepravidelné hranoly a jehlany včetně kosých a v případě jehlanů i komolých, rotační kužele a válce) až po pravidelné mnohostěny či některé atypické mnohostěny. Obvykle mají vyznačené nějaké úhlopříčky, výšky apod., které bývají barevně odlišeny od hran tělesa. Na obrázku 2.9 je výběr několika drátěných modelů.



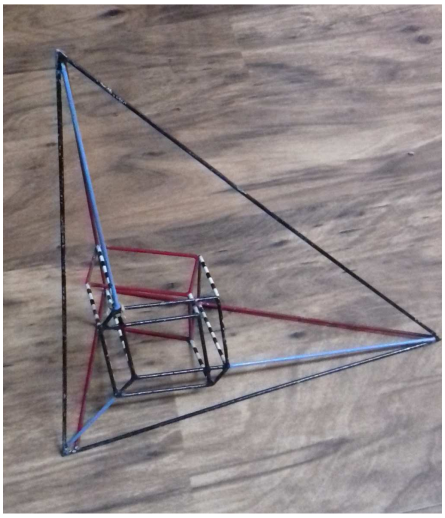
Obrázek 2.9: Drátěné modely těles

Drátěné modely jsou názorně veliké – největší rozměr každého modelu je obvykle mezi 20 a 30 centimetry (ačkoli některé modely mohou být menší).

Jeden drátěný model se v kabinetě vymyká ostatním, jedná se o pomůcku pro výklad pravoúhlé axonometrie (obr. 2.10)[2]. Součástí modelu je část souřadnicového systému a axonometrický trojúhelník. Na pomyslné axonometrické průmětně jsou pomocí drátů znázorněny průměty souřadnicových os a vymodelován je i směr promítání (spojnice počátku souřadnicového systému a jeho průmětu). Vyobrazena je také krychle (na obr. 2.10 červeně) s jedním vrcholem v počátku soustavy souřadnic a třemi svými hranami ležícími na souřadnicových osách a také její axonometrický průmět.

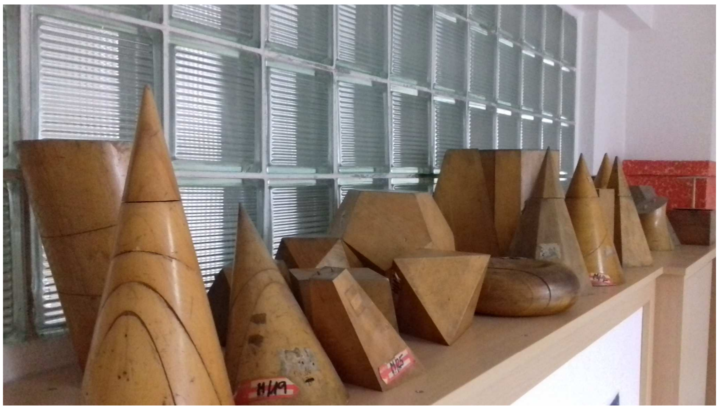
Dále kabinet oplývá dřevěnými modely různých těles (obr. 2.11). Tělesa jsou často vyrobena z více částí tak, že na nich lze ukázat jejich řezy rovinami. Takto jsou znázorněny řezy kosých, kolmých, pravidelných i nepravidelných hranolů

[2]Na gymnáziu se dle jeho ŠVP [19] vyučuje deskriptivní geometrie v rámci volitelných bloků (seminářů) po dobu dvou let.



Obrázek 2.10: Drátěný model pravoúhlé axonometrie

a jehlanů, rovněž řezy kosých a kolmých kuželů a válců (i eliptických), rotačních kvadrik[3] či anuloidu.



Obrázek 2.11: Sbírka dřevěných těles, v popředí model řezů kužele

Za zmínku stojí mimo jiné model řezů kužele, který názorně demonstruje kuželosečky. Je vysoký přibližně 40 cm a lze ho rozložit na jednotlivé díly (v popředí obrázku 2.11). Znázorňuje řezy čtyřmi rovinami – jedna tvoří řez tvaru kruhu, druhá řez eliptický, třetí parabolický a čtvrtá hyperbolický.

Kuželosečky znázorňuje ještě jeden typ pomůcek: jedná se o „kužel“ a „válec“, jejichž pláště jsou částečně tvořené průhlednou folií a části plášťů zcela chybí (obr. 2.12). Uvnitř „nekompletních“ těles jsou umístěné jejich řezy různými rovinami.

[3]Místo o rotačních kvadrikách, což jsou plochy, bychom přesněji měli mluvit o tělesech, jejichž povrchy jsou (plně či částečně) tvořeny rotačními kvadrikami.

Obrázek 2.12: Plastový průhledný model řezů válce a kužele

Jednou z nepříliš používaných pomůcek je model na obr. 2.13, který by měl sloužit k demonstraci a upevnění pojmů týkajících se koule, kulové plochy a jejich částí (kulová výseč, vrchlík, kulová vrstva, ...).

Obrázek 2.13: Kulová plocha, koule a pojmy s nimi související

2.2 Alternativní výuka matematiky

2.2.1 Hejného metoda

Hejného metoda je rychle se rozvíjejícím směrem výuky matematiky. Vznikala v průběhu minulého století nejprve jako experiment Víta Hejného, jež se snažil přijít na to, proč se jeho žáci raději naučí postup řešení, než aby nad problémem přemýšleli. Svým žákům (a synovi Milanovi) zadával nestandardní úlohy, které by tomuto problému měly zamezovat.

Milan Hejný později navázal na práci svého otce:

V roce 1974 se matematik Milan Hejný po rozporu s učitelkou svého syna rozhodl *svého syna ve škole učit sám. Společně s několika spolupracovníky začal v Bratislavě rozpracovávat poznatky svého otce. Uceleně byly nové myšlenky publikovány v roce 1987. Na rozdíl od tradiční výuky matematice zaměřené na nácvik standardních úloh je nová metoda zaměřena na budování sítě mentálních matematických schémat, které si každý žák tvoří řešením vhodných úloh a diskusí o svých řešeních se spolužáky.* [9]

Základní principy Hejného metody

Následující heslovité principy jsou převzaty z webových stránek věnovaných Hejného metodě [10].

- *Budování schémat:* Dítě ví i to, co jsme ho neučili.
- *Práce v prostředích:* Učení se opakovanou návštěvou prostředí.[4]
- *Prolínání témat:* Matematické zákonitosti nejsou izolované.
- *Rozvoj osobnosti:* Podpora samostatného uvažování dětí.
- *Skutečná motivace:* Když dítě „neví“ a „chce vědět“.
- *Reálné zkušenosti:* Stavění na vlastních zážitcích dítěte.
- *Radost z matematiky:* Výrazně pomáhá při další výuce.
- *Vlastní poznatek:* Má větší váhu než ten převzatý.
- *Role učitele:* Průvodce a moderátor diskuzí.
- *Práce s chybou:* Předcházení zbytečnému strachu u dětí.
- *Přiměřené výzvy:* Pro každé dítě zvlášť podle jeho úrovně.
- *Podpora spolupráce:* Poznatky se rodí díky diskuzi.

Milan Hejný ve své metodě značně vychází z historického vývoje matematiky – tak jak v průběhu věků lidstvo přicházelo na problémy, tak i dítěti při učení postupně přibývá znalostí.

Jedná se o *konstruktivistický přístup*, tedy systém, jež umožňuje (a vyžaduje) aktivní zapojení lidí a jejich přemýšlení. Nabyté poznatky jsou nepřenosné, jelikož vznikají jen v mysli žáka. Podrobnější výklad pojmu konstruktivizmus je popsán v knize *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* [3].

V metodě se jde od známého k axiomatickému – postupně se daný jev či vlastnost zkoumá do takové míry, že je pak možné je rozvinout abstraktně a pojem přitom zůstane reálně uchopený. Pro danou systematičnost metody je nutné „poctivě“ pracovat s propracovanými učebnicemi. Zadání jsou formulovaná pomocí otázek, dítě se snaží vytvářet pravidla samo.

[4] Prostředím se zde míní typ úloh.

Geometrické pomůcky v Hejného metodě

Základní pomůckou, která protkává geometrii vyučovanou Hejného metodou, je kromě nepostradatelných učebnic i čtverečkovaný papír. Pomocí něj se děti učí orientovat se v souřadnicovém systému, počítat obsahy obrazců, poznávat shodnosti atd.

Stavby

Jedná se o pomůcku skládající se z velkého množství kostek z pěnového plastického materiálu. Najdeme zde kostky šesti barev (obr. 2.14)[5].

S pomůckou se děti setkávají v průběhu téměř celé ZŠ. Nejprve z kostek staví stavby, poté se je snaží zdokumentovat domluveným zápisem (viz níže) či náčrtkem, učí se na nich určovat objemy těles (pojem *objem* je ale „minoritou“, tzn. že vyplyne sám – důležité je zprvu spíše vnímání prostoru). Stavba má obvykle nějaké pravidlo (je dán celkový počet kostek; počet pater; počet kostek, které mohou stát na zemi apod.). Úlohy mívají více možných řešení, o nichž je následně vedena diskuze. Děti výslednou stavbu rovněž zakreslují. Tento „zápis“ stavby se také vyvíjí. Zpočátku se pracuje s půdorysem, přičemž do čtverců se vkreslují pod sebe barevné puntíky podle toho, kolik pater jde do výšky (jsou-li v půdoryse nakresleny v jednom čtverci tři puntíky nad sebou, znamená to, že je v odpovídajícím místě stavba třípatrová, podle barev puntíků pak poznáme, v jakém pořadí na sobě kostky příslušných barev stojí).

Obrázek 2.14: Stavby z kostek

Parkety

Pomůcka se skládá ze čtverečkované podložky a tzv. parket. Parkety jsou barevné útvary zapadající do čtvercové sítě (obr. 2.15)[6]. Vždy se jedná buď o čtverce, nebo útvary složené ze čtverců:

- *Mono*: 1 jednotkový čtverec,
- *Duo*: 2 čtverce,

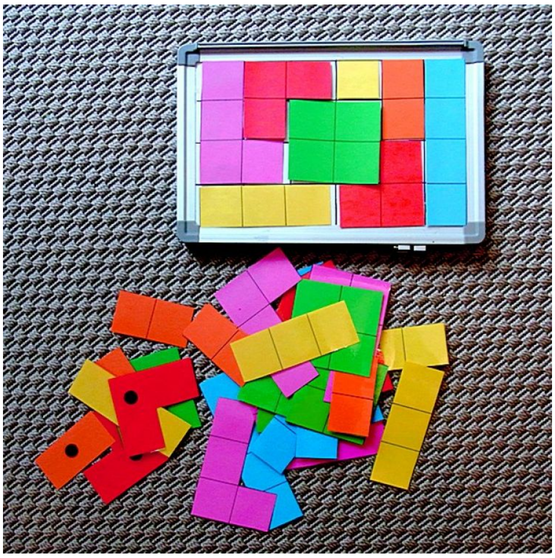
[5]Obrázek je převzat z `http://eshop.zksklep.cz/soubory/ucebnice/fraus1st/frametamatika1plakos.jpg`

[6]Obrázek je dostupný na webové adrese `http://www.hrouzavylohou.cz/thumbs/1000x750r/2015-08/pslu-bi-ky-pom-cky-00001.jpg`

- *Elko*: 1+3 čtverce spojené do tvaru písmene L,
- *Růžek*: 1+2 čtverce spojené do tvaru písmene L,
- *3I*: 3 čtverce za sebou,
- *Čtyřka*: 4 čtverce složené do většího čtverce.

Parkety jsou pomůckou nejen na práci s pojmem plocha, resp. její pokrývání, ale používání parket vede u dětí k brzkému používání substituce („Složím-li tyto dvě parkety k sobě, dostanu takovýto tvar.“). Další schopností, kterou parkety rozvíjí, je řešení diofantických rovnic („Do čtverce 4×4 lze umístit x duí a y rohů.“)

Úlohy mohou znít například následovně: „Pokryj podlahu tvaru … (rozměry pokrývaného čtverce či obdélníku), máš-li k dispozici … (počty a typy parket).“ Další úloha by mohla znít: „Slož z těchto parket … (čtverec či obdélník daných rozměrů).“



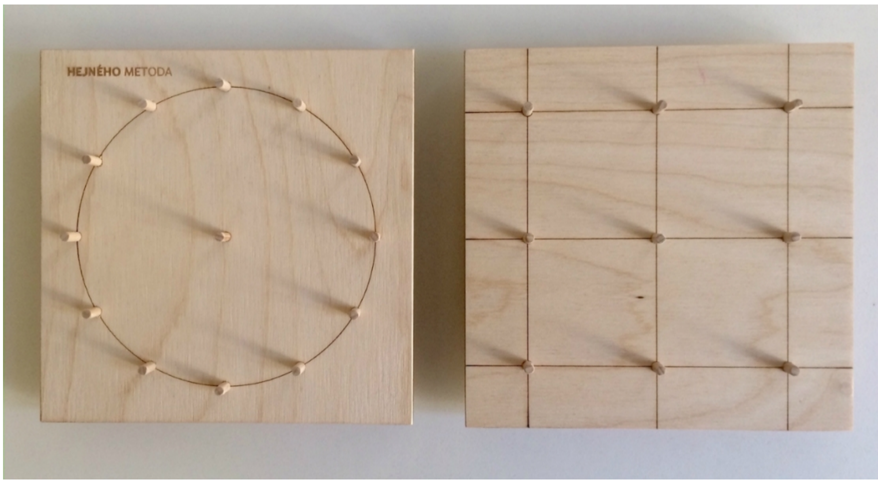
Obrázek 2.15: Parkety

Geoboardy

Jedná se o desky s devíti hroty uspořádanými do pravidelné sítě (obr. 2.16 vpravo)[7]. Na hroty se navlékají gumičky, aby vytvořily různé tvary. Desky se obvykle dají na sebe napojit podél stran, tudíž může vzniknout veliký geoboard, který se neomezuje jen na devět mřížových bodů. Na geoboardu se mohou zkoumat základní vlastnosti trojúhelníků či dalších jednodušších rovinných útvarů. Též navádí na pochopení obsahů a obvodů rovinných obrazců.

Jelikož se geoboardy používají již od první třídy ZŠ, učí se na nich děti orientaci ve čtvercové síti, což jim postupně umožní později přejít na čtverečkovaný papír, který je jednou z nejzákladnějších pomůcek geometrie podle Hejného. Díky tomu,

[7]Zdroj: `http://www.h-ucebnice.cz/files/prod_images/temp_big/geoboard-oboustr.jpg`



Obrázek 2.16: Geoboardy – ciferníkový (vlevo), 3×3 (vpravo)

že děti se čtvercovou sítí pracují od začátku školní docházky, naučí se pracovat se souřadnicemi již ve 4. třídě ZŠ.

Geoboardy existují i kruhové (někdy zvané „ciferníkové“), ty pomáhají dětem pochopit zlomky a operace s nimi (obr. 2.16 vlevo)[8]. Ty jsou vyjádřeny pomocí kruhových výsečí („krájení dortu“).

2.2.2 Waldorfské školy

Waldorfská pedagogika vznikla v Německu na zakázku Emila Molta, majitele tabákového koncernu Waldorf–Astoria. Emil Molt byl posluchačem přednášek filosofa Rudolfa Steinera a sdílel jeho antroposofické přesvědčení a ideály. Chtěl dopřát dětem svých zaměstnanců adekvátní výchovu založenou na těchto ideálech. Oslovil tedy R. Steinera, kterému tak dal možnost vyzkoušet jeho výchovné metody v praxi. První škola vznikla ve Stuttgartu krátce po skončení první světové války. Během několika málo let začaly vznikat waldorfské školy v Evropě i ve Spojených státech amerických.

Poznamenejme, že coby absolventka mateřské, základní i střední waldorfské školy (dále WŠ) si autorka v této podkapitole dovoluje použít některé vlastní znalosti o waldorfských školách s menším přihlédnutím k literatuře.

Některá specifika waldorfského vyučování

Následující specifika jsou víceméně[9] přejata z WŠ v Semilech [20].

- *Slovní hodnocení*: Je vztahováno ke schopnostem dítěte, nikoli jeho spolužáků. Intelektuální, umělecké, řemeslné a sociální dovednosti mají stejnou váhu, což podporuje chuť do učení.

- *Epochové vyučování*: Každý den od rána (obvykle přibližně od 8 do 10 hodin) probíhá po dobu tří až šesti týdnů souvislá výuka jednoho předmětu

[8]Zdroj: `http://www.h-ucebnice.cz/files/prod_images/temp_big/geoboard-oboustr.jpg`

[9]Kromě bodu *Specifické předměty.*

(tzv. *epocha*).[10] To umožňuje intenzivní výuku „v živé paměti“ bez přílišného zdržování opakováním probrané látky a větší prožití daného tématu. Po epoše pokračuje vyučování cvičnými hodinami (zejména češtiny, cizích jazyků a matematiky) či odbornými a uměleckými předměty, které mají „klasický“ týdenní rozvrh.

- *Rytmus*: Školní rok má rytmus ročních svátků, rytmicky se střídají epochy, hodiny mají svůj rytmus. Látka, kterou je potřeba memorovat (násobilka, vyjmenovaná slova apod.), se vyučuje pomocí rytmu a pohybu.

- *Absence učebnic*: Hotové učebnice nevyhovují mezioborovému pojetí výuky, proto si namísto nich žáci vedou tzv. *epochové sešity* – vytváří si svoje učebnice. Ve vyšších ročnících čerpají informace z encyklopedií, atlasů, odborných článků a jiné literatury.

- *Umění a řemesla*: Umění, řemeslům a ručním pracím je věnováno relativně hodně času a těmto činnostem je přikládán důraz srovnatelný s důrazem kladeným na intelektuální předměty. Umění se prolíná s ostatními předměty např. v ilustracích v epochových sešitech.

- *Specifické předměty*:

  - *Eurytmie* je pohybové umění, které je podobné výrazovému tanci, avšak má přesná pravidla. Jde o propojení hudby či slova (básně) s pohybem. Pro každý tón (či interval) a hlásku je přesně dané gesto. V prostoru se eurytmisté pohybují po lemniskátách, hvězdách, pentagramech a tím vytvářejí pohyblivé formy[11]. Díky tomu se eurytmie může řadit mezi předměty rozvíjející geometrické dovednosti.
  - *Kreslení forem* je v prvních ročnících základní školy nástrojem pro nácvik písma a úchopu psacího nástroje. Jde o kreslení obrazců (většinou symetrických) volnou rukou. Se vzrůstající obtížností forem se však rozvíjí mnohem více než jen písmo – dítě rozvíjí smysl pro kompozici a pokládá základy geometrie.

Waldorfská pedagogika se zakládá na celostním pojetí člověka, chce vychovat velice všestranně rozvinuté dítě. Všechny předměty (alespoň na základní škole) mají stejnou důležitost – každý je důležitý pro nějaký rozvoj dítěte, a proto jsou také všechny předměty povinné pro každého žáka. Dívky a chlapci společně tesají ze dřeva, staví dům, pletou, šijí a háčkují.

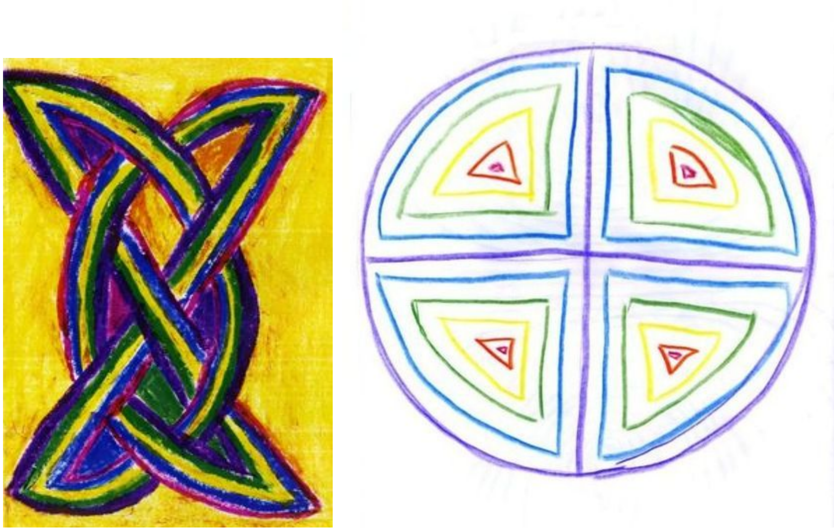
Ve waldorfské škole je kladen velký důraz na představivost (nejen prostorovou), kterou v dětech rozvíjí jednak příběhy, kterými je výuka protkávána, a jednak výtvarné a řemeslné činnosti. Díky tomu, že je představivost silně rozvíjena již u malých dětí, nečiní obvykle v pozdějších letech studentům veliký problém pracovat bez vizuálních pomůcek pro geometrii. Zde si proto uvedeme spíše činnosti rozvíjející geometrické vnímání a dovednosti.

[10] Epocha matematiky má např. 4 týdny a po tuto dobu se každý den ráno po dobu přibližně dvou hodin vyučuje matematika.

[11] Jako jednoduchý případ uveďme cvičení, kdy třída stojí v kroužku a začne se (obvykle na hudbu či na recitovanou báseň) pohybovat dokola, přičemž původní tvar kruhu má být zachován. Složitější pak je pohyb např. po lemniskátě – v uzlovém bodu dochází ke křížení, lidé se musí při průchodu tímto místem pravidelně střídat.

Geometrie na WŠ

Během prvních čtyř ročníků waldorfské ZŠ je geometrie vyučována jakoby „mimochodem“. V rámci předmětu *Kreslení forem* se v prvních ročnících děti seznámí se základními pojmy (názvy základních rovinných obrazců, symetrie, rovnoběžnost atd.), vše se však děje tvůrčím způsobem a kresby vznikají volnou rukou bez použití rýsovacích potřeb. Učitel předkresluje formy dětem na tabuli, ty se je snaží co nejpodobněji nakreslit na papír, malou křídovou tabuli či do sešitu (obr. 2.17 vlevo)[12].



Obrázek 2.17: Kreslení forem neboli geometrie volné ruky ve 4. a 5. třídě waldorfské ZŠ

V páté třídě se geometrie již vyskytuje i v rámci matematiky. Probírají se vlastnosti, obvody a obsahy základních rovinných obrazců, rovněž objemy, povrchy a vlastnosti některých těles. Stále se však nepoužívají rýsovací potřeby a kreslení se provádí volnou rukou (obr. 2.17 vpravo)[13].

Na druhém stupni se formy přetvoří na rýsované obrazce – geometrie stále zůstává založená na estetice, avšak už se utváří pravidla pro rýsování a konstrukce (obr. 2.18 vlevo)[14]. Prostřednictvím obrazců děti objevují geometrické věty a konstrukce. Ve výtvarné výchově se v 7. ročníku dokonce setkají se základy lineární perspektivy (obr. 2.18 vpravo)[15]. V případě trojrozměrného tělesa mívají za úkol věc vyrobit (lepení papírových modelů, vyřezávání ze dřeva, modelování z keramiky). V osmé třídě začínají objevovat krásy stereometrie – zkoumají pravidelné mnohostěny a jejich dualitu, některé polopravidelné mnohostěny, rýsují je ve volném rovnoběžném promítání, vytváří jejich sítě a lepí z nich modely.

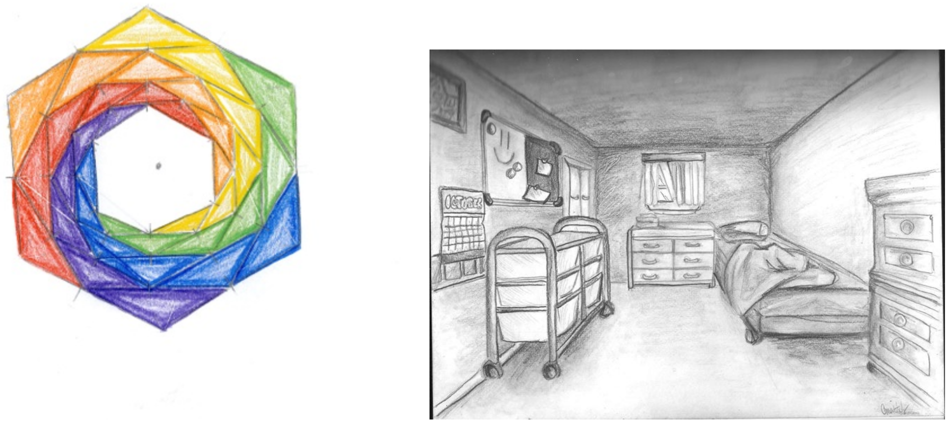
Na střední škole se hmatatelné pomůcky také příliš nevyskytují. Studenti lepí

[12]Obrázek je převzat z adresy: `https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/236x/69/75/ef/6975ef3f3fa68be0f3bb840d5f300559.jpg`

[13]Obrázek je převzat z adresy: `https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/564x/f8/05/89/f80589c4312be7e6e4fb8da9d31e54a7.jpg`

[14]Obrázek je převzat z adresy: `https://alabamawaldorf.files.wordpress.com/2013/09/geo-drawing-6th-gr2.jpg`

[15]Obrázek je převzat z adresy: `https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/736x/22/05/2d/22052d083912397fdd935fcb559f60fd--perspective-images-perspective-drawing.jpg`



Obrázek 2.18: Obrazec sestrojený pomocí rýsovacích potřeb v 6. třídě (vlevo), kreslení dle principů lineární perspektivy v 7. třídě (vpravo)

obtížnější modely těles (např. sjednocení několika pravidelných mnohostěnů), ze dřeva a z kamene tesají koule (obr. 2.19).

Obrázek 2.19: Lepené modely složitějších těles a koule vytesaná z kamene

2.2.3 Montessori školy

Pedagogika Montessori má svůj původ v Itálii a nese název své tvůrkyně. Maria Montessori (1870–1952) byla italská lékařka[16], psycholožka, pedagožka, filosofka a vědkyně (obr. 2.20)[17]. Se svou specializací na dětské nervové nemoci se zaměřila na výchovu mentálně postižených dětí, působila však i jako dětská lékařka a vyučovala antropologii na univerzitě v Římě.

[16] V roce 1896 se stala první promovanou doktorkou medicíny v Itálii.

[17] Zdroj: `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Maria_Montessori_%28portrait%29.jpg`

V lednu 1907 otevřela Maria Montessori dům dětí v chudém předměstí Říma San Lorenzo. Dům byl určen pro děti předškolního věku, kterým Maria chystala materiál pro smyslovou výuku, zaměstnávala je praktickými činnostmi a nacvičovala s nimi prostřednictvím připraveného materiálu čtení, psaní a počítání. Vedla si zápisky svých poznatků o životě a výchově dětí, z nichž pak vznikaly knihy (viz [11]).

Obrázek 2.20: Fotografie M. Montessori

Během svého života cestovala po Evropě i jiných světadílech a šířila svou metodu, na základě čehož začaly po světě vznikat další školy s Montessori programem.

V roce 1934 musela opustit Itálii, od roku 1939 pak se svým synem žila po sedm let v Indii. Její syn, Mario Montesano, byl jejím blízkým spolupracovníkem a vyučoval indické děti ve věku 6–12 let. Společně vyvíjeli a rovnou v praxi ověřovali didaktický materiál a pokládali základ konceptu vzdělávání pro základní školy. Po smrti své matky Mario usilovně rozvíjel a šířil její metodu do světa a až do své smrti v roce 1982 vyvíjel další didaktický materiál.

Základní principy Montessori pedagogiky

- *Připravené prostředí*: Podněcuje k učení, důraz je kladen jednak na materiální vybavení školy a tříd (zejména pak na didaktický materiál – Montessori pomůcky) a jednak na osobnost učitele. Je připraveno pro dané *senzitivní období* dětí[18].

- *Samostatná (svobodná) činnost jednotlivce*: Dítě si samo volí kde, s kým a na čem bude pracovat, je však vedeno k dokončení rozdělané činnosti.

- *Práce s chybou*: Chyba jako ukazatel toho, co ještě vyžaduje procvičování, nikoli jako součást hodnocení. Kontrola výsledků bývá často součástí pomůcky, takže si dítě může okamžitě (a nikým nehodnoceno) ověřit svůj výsledek.

[18]Senzitivní období je důležitý pojem Montessori pedagogiky. Jedná se o čas, kdy má dítě největší potenciál osvojit si danou schopnost či dovednost. Je důležité toto období vhodně podchytit, jelikož se již nemusí opakovat. Senzitivní období dětí přicházejí značně individuálně.

- *Práce s pochvalou*: Učitel používá nehodnotící jazyk a dítě tak není na pochvale závislé, ale je uspokojené svou smysluplnou prací.
- *Celostní učení*: Do výuky je zapojeno co nejvíce smyslů.
- *Individuální přístup*: Učitel pozoruje a reaguje na senzitivní období jednotlivých žáků.
- *Věkově smíšené třídy*: Nejčastěji tzv. *trojročí* (společně se učí 1. až 3. třída, 4. až 6. třída), dále *dvojročí* (7. a 8. třída) a samostatně 9. třída. Děti se mohou učit navzájem, při svobodné volbě činnosti mohou jít ke starším či naopak k mladším spolužákům podle své úrovně v dané dovednosti.

Pomůcky v Montessori škole

Pomůcky jsou v Montessori pedagogice stěžejním prvkem. Marie Montessori věřila, že s pomocí správně zvolených pomůcek dítě zvládne objevovat svět samo bez zásahu dospělých. Učitel má tedy k dispozici obrovské množství pomůcek, které mu umožňují pracovat s dětmi individuálně podle jejich potřeb. To v praxi funguje tak, že učitel představí pomůcku v rámci tzv. *prezentace* a následně vymyslí aktivitu, aby děti mohly pracovat samostatně či v libovolných skupinách[19].

Dítě se s mnoha pomůckami pro geometrii setká již v předškolním věku. V tomto období je třeba, aby dítě poznávalo svět co nejvíce smysly, velmi důležitý je podle Marie Montessori hmat. Pomůcky mají často formu „stavebnic“, které jsou však důmyslně vytvořené tak, aby později pomohly dítěti objevit vlastnosti geometrických objektů, pochopit například mocniny nebo nejjednodušší případy binomické věty. Dítě v průběhu vzdělávání potkává stejnou pomůcku několikrát, během práce s ní se postupně vždy zaměřuje jen na jednu její vlastnost.

V Montessori pedagogice je geometrie zaměřena zejména na zkoumání geometrických útvarů a těles, jejich vlastností, odvozování vzorečků a celkové souvislosti. Není zde kladen velký důraz na rýsování. Neprobíhá klasický výklad, děti si na mnoho věci přichází samy, případně jsou vhodnými otázkami učitele nasměrovány na cestu vedoucí ke kýženému cíli.

V současnosti se na některých Montessori školách používají kromě originálních pomůcek vytvořených Marií Montessori či jejím synem i později vzniklé materiály vytvořené odborníky na Montessori pedagogiku či samotnými učiteli. V České republice však zatím není jednoznačně definováno, co přesně Montessori škola je, tudíž se setkáme s několika proudy (jedni zastávají výuku přesně podle M. Montessori pouze s originálními materiály, další ji inovují po svém).

V následujících odstavcích si ukážeme několik pomůcek a jejich použití v praxi. Obrázky, u kterých není uvedeno jinak, byly pořízeny autorkou práce v Montessori prostorech ZŠ a MŠ Na Beránku v pražských Modřanech. Tamním učitelkám a učitelům tímto autorka práce děkuje za ochotu a pomoc. Diplomová práce jedné z nich, Karin Korčákové, byla významným zdrojem informací pro tuto podkapitolu [4].

[19] V době Marie Montessori děti chtěly pracovat spíše samostatně, dnes často chtějí spolupracovat. Je to zřejmě dáno tím, že dříve byly rodiny početné, ve škole si tedy děti chtěly od větší společnosti „odpočinout“ a pracovat samy. Dnes bývají děti často samy, a ve škole tedy chtějí spíše pracovat společně s kamarády.

Růžová věž

Růžová věž[20] (obr. 2.21) je příklad originální pomůcky, se kterou se dítě prvně setká již ve školce. Skládá se z deseti růžových krychlí vyrobených z lakovaného dřeva. Krychle se liší velikostí, jejich hrany mají vždy délku vyjádřitelnou v celých centimetrech – největší krychle má hranu dlouhou deset centimetrů, nejmenší jeden centimetr.

Obrázek 2.21: Růžová věž

V předškolním věku věž slouží jako stavebnice, děti staví kostky na sebe do výšky, setkávají se s principem rovnováhy skupiny těles a hlavně si kostky osahávají a prvně zkoumají. Pokud srovnají kostky na sebe či na zem vedle sebe podle velikosti, nejmenší kostka vždy vyplní „schod“ mezi dvěma následujícími kostkami (položením nejmenší kostky na jinou kostku s výjimkou největší získáme věž o výšce rovné hraně následující kostky). Hrany kostek tedy narůstají vždy „o nejmenší kostku“. Právě na Růžové věži se děti učí počítat do deseti (s vjemem vzrůstající velikosti, nikoli pouze jako básničku).

Později se s Růžovou věží setkají, když pracují s mocninami, pomůcku již znají, mocnin se pak „nebojí“. Dřevěné krychle bývají doplněny čtverci odpovídajícími velikostí stěnám krychle. Ke každé krychli přitom existuje právě šest čtverců téže velikosti. Na čtverce se dá položit příslušná krychle či lze zjišťovat, kolik by se na něj dalo – do jedné vrstvy, nikoli nad sebe – položit nejmenších krychliček (na nejmenší čtverec se vejde jedna, na druhý čtyři, na třetí devět apod.). Takto se mohou žáci seznámit s druhými mocninami. Růžová věž jim dokonce pomůže pochopit i třetí mocniny – do druhé nejmenší kostky by se nejmenší vešla osmkrát, do třetí sedmadvacetkrát atd. Žáci tak pomocí čtverců a krychlí získají reálnou představu mocnin a tudíž i odmocnin jako délek hrany krychle či strany čtverce.

Čtverce mohou též sloužit jako „oblečky“ pro krychli, tedy k poznávání sítí krychle a případně jejího povrchu.

[20]Montessori pomůcky se vyrábějí ve standardních barvách, které se pak často objevují i v názvech pomůcek.

Hnědé schody

Obrázek 2.22: Hnědé schody

Hnědé schody (obr. 2.22) jsou, podobně jako Růžová věž, smyslový materiál (tedy ten, jež působí na více smyslů svoji barevností, materiálem – lze je zkoumat nejen pohledem, ale také hmatem). Růžové věži se principiálně podobá, avšak neskládá se z deseti krychlí, ale z deseti kvádrů, které mají právě dvě protilehlé podstavy čtvercové. Strany čtvercové podstavy jsou dlouhé od jednoho do deseti centimetrů, tyto délky lze opět vyjádřit v celých centimetrech. Výška je pro všechny kvádry stejná, obvykle mívá 20 cm.

Ve školce si děti hrají s Hnědými schody jako se stavebnicí – staví věže, schody, zkoumají materiál, různou velikost kvádrů a podobně. Později se pomocí nich mohou například naučit určovat objem kvádru.

Základní aktivitou je pokládání schodů od nejmenšího po největší na podložku. Podobně jako u Růžové věže lze ukázat, že nejmenší kvádr vyplní „schod“, o který se liší libovolné dva následující kvádry (při pokládání kvádrů obdélníkovou stěnou dolů – viz 2.22).

Žáci s pokročilejšími znalostmi mohou pomocí Hnědých schodů odpovídat na otázky, kolik nejmenších kvádrů by se vešlo do druhého, třetího atd. Svými odpověďmi (4, 9 atd.) se děti v Montessori škole seznámí s druhými mocninami a odmocninami.

Barevné válečky

Pomůcka se skládá ze čtyř sad válečků odlišených barvou (obr. 2.23). V každé sadě je deset válečků, přičemž v žádné z nich nejsou dva stejné. Červené válečky mají stejnou výšku, ale liší se průměrem podstavy. Modré válečky mají navzájem shodné podstavy, ale každý má jinou výšku. Zelené a žluté válečky se liší jak výškou, tak podstavami, avšak opět v rámci jedné barvy nenajdeme dva stejné válečky. Seřadíme-li je vzestupně podle výšky, pak první váleček zelené sady bude mít stejný poloměr jako poslední váleček sady žluté (zelená a žlutá sada jdou „proti sobě“ co se týče vzrůstající výšky a poloměru podstavy).

Tato pomůcka slouží k hlubšímu poznávání velikostí – tělesa v každé sadě lze seřadit podle nějakého parametru (vzrůstající výška či poloměr). Válce (zejména červené a modré) mohou také sloužit pro znázorňování vztahu pro objem válce tím, že se u nich mění buď výška, nebo poloměr.

Obrázek 2.23: Čtyři sady barevných válečků

Modrá tělesa

Modrá tělesa je název pro sadu deseti dřevěných, modře lakovaných těles (obr. 2.24)[21]. Najdeme zde krychli, pravidelný čtyřboký hranol a jehlan, pravidelný trojboký hranol a jehlan, rotační kužel a válec, kouli, elipsoid (přesněji řečeno těleso, jehož plášť je elipsoid) a ovoid („vajíčko"). Poslední tři jmenovaná tělesa jsou ze zřejmých důvodů opatřena podstavci. Oblá tělesa mají ve vhodně zvolených polohách (viz obr. 2.24) všechna stejný půdorys, průměr podstav, resp. průměr největší rovnoběžkové kružnice, resp. průměr koule je stejně velký jako hrana krychle. Krychle, čtyřboký hranol a čtyřboký jehlan mají shodné postavy, totéž platí pro trojboká tělesa. Kromě krychle a koule jsou všechna tělesa stejně vysoká.

Obrázek 2.24: Geometrická modrá tělesa

Modrá tělesa jsou také smyslovým materiálem, se kterým se děti setkávají už od školky. Staví si z nich domečky a vesničky. Během hraní si doslova osahají jejich různé vlastnosti, podle nichž je dokáží roztřídit. V prvním trojročí se učí nejen jejich názvy, ale i další geometrické pojmy (například hrana, stěna, vrchol, plášť, síť, podstava, výška). Klasifikují je i podle toho, zda se „převrací", „kutálí" či obojí (jsou schopné je roztřídit do skupin, které odpovídají množinám ve

[21]Obrázek převzat z adresy: `http://montessorihracky.cz/4584-thickbox_default/geometricka-tlesa-s-podstavci-a-krabici.jpg`

Vennových diagramech).

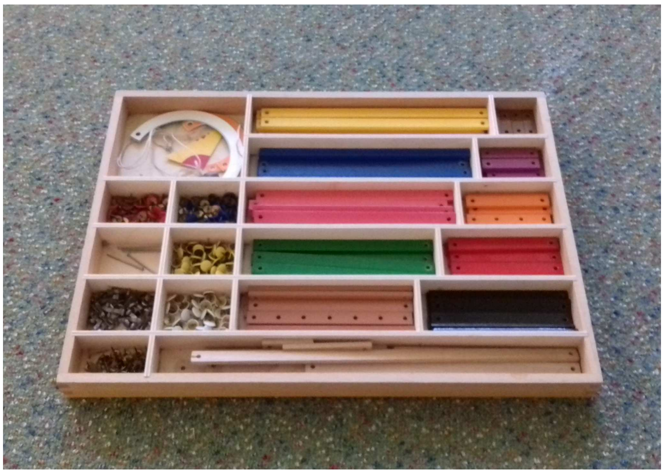
Děti také zkoumají, jak která tělesa vypadají z různých stran (hledají nárys, půdorys, bokorys). Matoucí prý pro ně bývá osvětlení stěn, nemusí snadno vidět, že kužel a jehlan mají v nárysu stejný obrys. Učitel jim v takovém případě může pomoci vhodným nasvícením lampičkou. Děti kreslí nárysy a půdorysy těles. Nejenže tím pokládají základy pro pozdější případné studium deskriptivní geometrie, ale uvědomují si podobné vlastnosti různých těles.

Ke každému tělesu děti přiřazují kartičky s obrázky věcí z reálného světa, které mají tvary daných těles. Tím propojují geometrii a svět kolem nás. Přiřazovat mohou ale také karty s obrázky těles v nějakém promítání (volné rovnoběžné promítání, pravoúhlá axonometrie, Mongeovo promítání) či s čísly vyjadřujícími počty hran, stěn apod.

Další aktivitou může být vytváření sítí těles. Dítě vezme jednoduché hranaté těleso, obkreslí jednu jeho stranu, překlopí ho podél jedné hrany a obkreslí další stranu. Překlápí tak, aby se mu stěny nepřekrývaly, byl jich správný počet a byly ve správném pořadí. Pokud si žák myslí, že má síť nakreslenou správně, vystřihne ji a zkusí složit těleso. Zkouší takto „obléci“ co nejvíce těles.

Geometrický konstrukční materiál

Tato pomůcka bývá někdy nazývána Geometrická krabice. Najdeme v ní dřevěné tyčky různých délek s dírkami (obr. 2.25). Tyčky různých délek jsou barevně odlišeny. Dále zde je spojovací materiál, úhloměr, olovnice, tzv. půlkruhy (ve skutečnosti se jedná o poloviny mezikruží, používají se na vyznačování úhlů či konstruování oblých tvarů) a špendlíky sloužící k přichycení k podložce. Materiál se používá k poznávání úhlů a mnohoúhelníků, zejména pak trojúhelníků a jejich vlastností (třídění podle velikostí úhlů, délek stran apod.).



Obrázek 2.25: Geometrický konstrukční materiál

Žáci se s uvedenou pomůckou setkají v prvním trojročí, kdy z tyček tvoří ramena úhlů, přičemž se učí terminologii (úhel, rameno úhlu, vrchol úhlu). Úhly pak třídí na pravé, ostré, tupé, plné, přímé, konvexní, nekonvexní apod. Seznámí se i se stupněm coby jednotkou velikosti úhlu. Jednotlivým úhlům děti přiřazují zlomky, které vyjadřují, jaká část roviny je úhlem pokryta. Pomocí úhloměru se pak učí úhly měřit.

Tyčkami rovněž reprezentují jednotlivé strany mnohoúhelníků. Při zkoumání mnohoúhelníků se zprvu zaměřují zejména na trojúhelníky a jejich klasifikaci. Třídí je na rovnostranné, rovnoramenné, obecné, ostroúhlé, tupoúhlé, pravoúhlé. Přitom se intuitivně (či pomocí tzv. *trojstupňové výuky*[22]) učí terminologii.

Ostatní sestrojené mnohoúhelníky už nejsou tak „stabilní“ jako trojúhelník – ačkoliv jsou tyčky spojené, dá se měnit tvar mnohoúhelníku. Díky barevné odlišnosti různě dlouhých tyček lze snadno poznat rovnostranný trojúhelník (či mnohoúhelník, jež má všechny strany stejné velikosti).

Dřevěný krychlový materiál

Pomůcka se skládá z krychlí, destiček a tyček, které reprezentují a pomáhají pochopit objem, obsah a délku, násobení a mocniny (obr. 2.26). Najdeme zde sadu alespoň 100 krychliček s rozměry 1×1×1 cm, krychli 2×2×2 cm, destičky 2×2×1 cm, tyčky 2×1×1 cm, krychli 3×3×3 cm, destičky 3×3×1 cm, tyčky 3×1×1 cm, dále obdobně až do délky hrany krychle 10 cm. V některých případech bývají části náležející různým délkám hrany krychle barevně odlišeny, jindy bývá materiál v přirozené barvě dřeva.

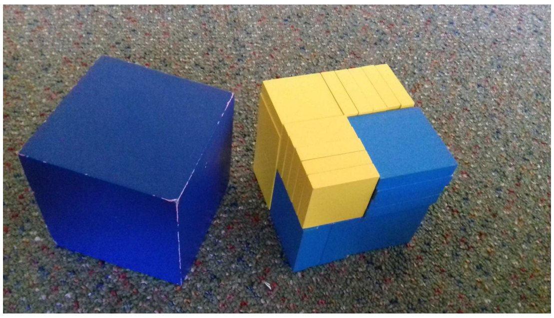
Obrázek 2.26: Barevný krychlový materiál.

Pomůcka pomáhá chápat prostor a pojmy s ním související – bod, délka, plocha, objem. Lze se ptát, kolik krychliček musíme umístit za sebe, abychom dostali prostorový útvar, jehož jeden rozměr je rovný délce některé tyčky; kolik destiček položených na sebe bude mít stejný objem jako daná krychle apod. Můžeme pracovat buď jen s krychlemi, nebo vytvářet kvádry kombinací různých plošek, tyček i krychlí. Tímto děti mohou dojít ke vztahům pro výpočet objemu krychle a kvádru, v pokročilejším stadiu pak i objevit binomickou větu (obr. 2.27) – na to pak ale v Montessori škole najdeme i speciální pomůcku zvanou Binomická krychle, která se však obvykle nachází i v kabinetech klasických škol.

Geometrická komoda

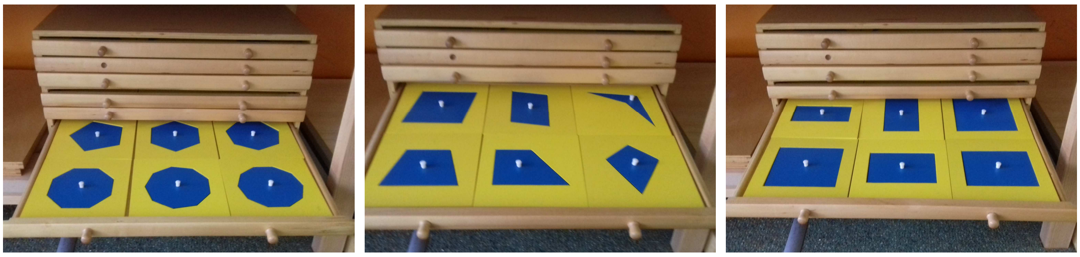
Geometrická komoda je skříňka se šesti zásuvkami (obr. 2.28). V každé zásuvce najdeme několik rovinných tvarů. Tvary mohou být v komodě umístěny

[22] Trojstupňová výuka je metoda učení nových pojmů. Nejprve učitel představí novou věc a pojmenuje ji (např. „Toto těleso je kužel.“), poté dítě plní úkoly typu „vezmi kužel a dej ho na stůl“, ve třetím stupni žák nový termín sám použije („Toto je kužel.“).



Obrázek 2.27: Binomická věta demonstrovaná pomocí krychlového materiálu

například následovně: první zásuvka obsahuje různé typy trojúhelníků (ostroúhlý, tupoúhlý, pravoúhlý, rovnoramenný ostroúhlý, rovnoramenný tupoúhlý, rovnoramenný pravoúhlý), druhá čtyřúhelníky (kosočtverec, rovnoběžník, rovnoramenný lichoběžník, pravoúhlý lichoběžník, deltoid, nekonvexní čtyřúhelník symetrický podle jedné úhlopříčky), třetí různé obdélníky, čtvrtá kruhy různých velikostí, pátá pravidelné mnohoúhelníky (pětiúhelník až desetiúhelník) a šestá skrývá rovnostranný trojúhelník a některé atypické tvary (sférický trojúhelník, vejčitý tvar, elipsa, čtyřlístek). Útvary jsou modré barvy a mají úchyty pro lepší manipulaci. V komodě jsou umístěny ve čtvercových, vyjímatelných šablonách.



Obrázek 2.28: Vybrané zásuvky geometrické komody

Jednotlivé tvary se děti učí pojmenovat (začínaje od běžnějších, jednodušších). Komoda však slouží jako zásobárna pro nejrůznější aktivity. Často se kombinuje s jinými pomůckami. Například s pomocí Výškoměru trojúhelníku (viz dále) zjistí, že jeden trojúhelník má až tři různě dlouhé výšky a pokud je tupoúhlý, leží jen jedna z nich uvnitř trojúhelníku.

Děti také trojúhelníky obkreslují, poté vystřihují a dále odstřihávají jejich vrcholy a lepí je k sobě. Hledají trojúhelník, který má součet velikostí vnitřních úhlů jiný než ostatní – takový nenajdou, a tak formulují hypotézu o součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku. Obdobně mohou pracovat s ostatními tvary.

U mnohoúhelníků se zabývají například jejich úhlopříčkami.

Červené tyče

Červené tyče (obr. 2.29)[23] jsou sadou deseti hranolů, které mají rozměry $2{,}5 \times 2{,}5 \times 10$ až 100 cm (třetí rozměr jednotlivých tyčí „roste“ po celých decimetrech). Prvotně slouží k osvojování pojmů týkajících se délky či velikosti, avšak využití mají vícero.

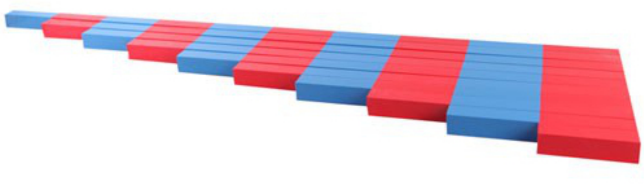
Obrázek 2.29: Červené tyče

Dítě předškolního věku rovná tyče podle velikosti (podobně jako tělesa tvořící Růžovou věž či Hnědé schody) od největšího po nejmenší či naopak. Když srovnání hravě zvládne s otevřenýma očima, zkouší splnit stejný úkol poslepu. Pokládáním vhodných tyčí ihned za sebe (tak, aby se dotýkaly čtvercovými stěnami) vytváří stejně dlouhé tyče (čímž procvičují jednoduché sčítání a odčítání). Pomocí pěti takto „napojených“ tyčí (dlouhých 11 dm) mohou děti poskládat pravidelný pětiúhelník.

Tyče se dají dále kombinovat s Růžovou věží a Hnědými schody, avšak tím bychom se spíše „navrátili ke stavebnici“.

Červenomodré tyče

Červenomodré tyče jsou velmi podobné tyčím červeným, jedná se opět o deset hranolů o rozměrech jako v předchozím případě (obr. 2.30)[24]. Liší se však barevností, po decimetrech jsou střídavě vybarveny červenou a modrou barvou. Tím jsou reprezentovány číslice od jedné do deseti (např. tyč délky 70 cm přísluší číslici 7 a je pomocí dvou barev rozdělená na 7 dílů, z nichž každý je 1 dm dlouhý) – k počítání od 1 do 10 se také tato pomůcka primárně využívá. Tyče též pomáhají s jednoduchými početními operacemi (sčítání, odčítání). Položíme-li tyče do polohy znázorněné na obr. 2.30, vedle sebe umístěné červené dílky „demonstrují“ pojem *liché číslo*, modré dílky pojem *sudé číslo*.



Obrázek 2.30: Červenomodré tyče

Po zavedení jednotek *decimetr* a *metr* se tyče používají k jejich převodům. Dětem můžeme položit následující otázky. „Kolikrát se tyč délky jedna (decimetr)

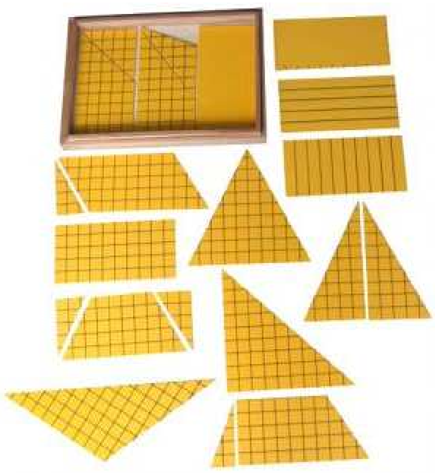
[23] Obrázek převzat z: http://mandala-montessori.eu/montessori-smyslovy-material/27-cervene-tyce-8596027003985.html?search_query=cervene+tyce&results=5

[24] Obrázek je dostupný na adrese: http://mandala-montessori.eu/numericke-tyce/104-cervenomodre-bukove-tyce.html?search_query=cervene+tyce&results=5

‚vejde' do tyče délky deset?" neboli „Kolik decimetrů se ‚vejde' do metru?". Zkombinováním s malými krychličkami o velikosti nejmenší krychličky Růžové věže (tj. krychličky o straně 1 cm) a zavedením pojmu *centimetr* se děti seznamují s převody i mezi centimetry a decimetry, resp. metry.

Žluté trojúhelníky

Jedná se o sadu obdélníků z překližky s rozměry 5×10 cm, které mají na sobě vyznačené čtverečky o straně jeden centimetr (obr. 2.31)[25]. Většina obdélníků je rozřezaná tak, aby se z nich daly složit různé typy trojúhelníků (ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý, rovnostranný, rovnoramenný) či některé čtyřúhelníky (rovnoběžník, lichoběžník, obdélník). Na dvou nerozřezaných obdélnících jsou vyznačené pouze pruhy (vertikální a horizontální) – jeden „ukazuje" šířku, druhý délku obdélníku. Ještě jeden obdélník není rozřezaný, díky němu se dají spočítat na něm namalované čtverečky (čtvereční centimetry), tedy určit jeho obsah a nalézt pravidlo pro výpočet obsahu – délka jedné strany násobená délkou druhé strany.



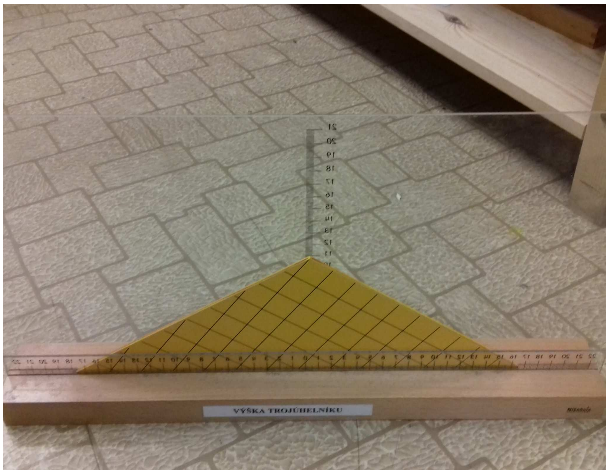
Obrázek 2.31: Žluté trojúhelníky

Výpočet obsahu ostatních útvarů (rovnoběžníků, trojúhelníků, lichoběžníků) je převeden na výpočet obsahu obdélníku. Trojúhelníky i čtyřúhelníky se dají vždy přeskládat na nějaký obdélník. Z toho pak lze vyvodit vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku, rovnoběžníku či lichoběžníku.

Výškoměr trojúhelníku

Výškoměr trojúhelníku je stojan se vztyčeným pravítkem (obr. 2.32). Do stojanu s drážkou lze vložit různé trojúhelníky (např. z Geometrické komody) a měřit jejich výšku. Výškoměr názorně ukazuje, že výška trojúhelníku je kolmá k příslušné straně a že ke každé straně výška trojúhelníku existuje. I výšky tupoúhlých

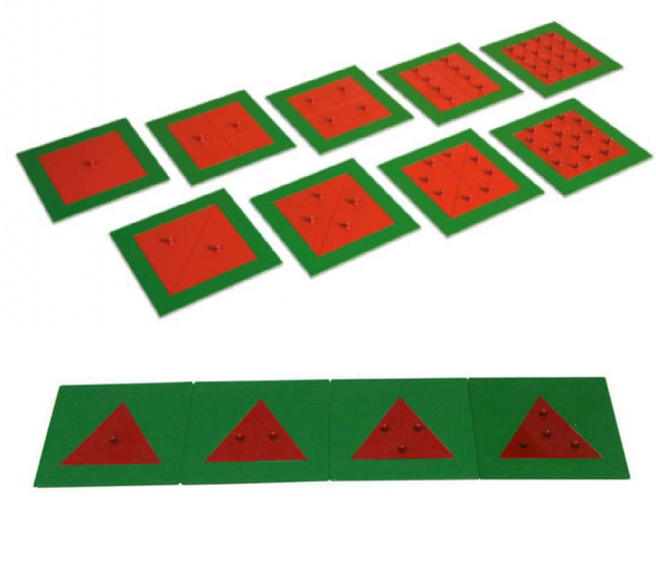
[25] Obrázek převzat z: `http://montessorimaterials.com/sites/default/files/styles/node-product/public/imported/4.50.jpg?itok=h_bvT-Om`



Obrázek 2.32: Výškoměr trojúhelníku.

trojúhelníků, z nichž dvě leží mimo trojúhelník, jsou díky výškoměru dobře viditelné. Výškoměr se tedy obvykle kombinuje s dalšími „trojúhelníkovými" pomůckami (trojúhelníky z Geometrické komody, se Žlutými trojúhelníky atd.) nebo jej žáci používají v kombinaci s papírovými vystřiženými trojúhelníky.

Kovové čtverce a trojúhelníky



Obrázek 2.33: Kovové čtverce a trojúhelníky

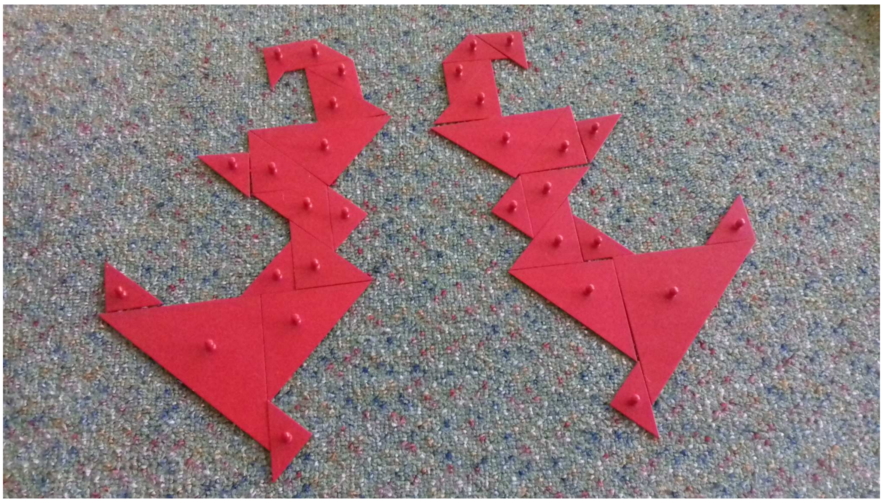
Kovové čtverce a trojúhelníky slouží k snazšímu pochopení problematiky obsahů čtverců, obdélníků a trojúhelníků. Jedná se o devět stejných čtvercových zelených rámů (obr. 2.33)[26]. V prvním je umístěný červený čtverec, ve druhém

[26] Obrázek čtverců převzat z adresy: https://montessori.org.au/sites/default/files/styles/large/public/products/n011500.jpg?itok=xSkCDSv5, obrázek trojúhelníků převzat z: http://www.montessoriwholesalecanada.com/Elementary/MetalTriangStands.jpg

a třetím jsou dvě poloviny čtverce[27] – jednou dva obdélníky, jednou dva trojúhelníky. Ve čtvrtém a pátém jsou čtyři čtvrtiny čtverce (vždy poloviny předchozích tvarů) atd. Všechny díly jsou opatřeny úchytem pro lepší manipulaci. Pomůcka je někdy nazývána Dělení čtverců.

Kovové trojúhelníky jsou principem podobné kovovým čtvercům. Jsou to čtyři zelené rámy, do prvního patří červený rovnostranný trojúhelník. Ve druhém jsou dvě poloviny trojúhelníku, ve třetím tři třetiny (tři rovnoramenné trojúhelníky), ve čtvrtém je trojúhelník rozčtvrcen (na čtyři rovnostranné trojúhelníky). Atraktivnější variantou jsou tzv. Konstrukční trojúhelníky, které jsou barevnější, ale nemají úchyty.

S kovovými čtverci nebo trojúhelníky lze například pracovat při výuce zlomků. Pomůcka je ale i výbornou demonstrací pro souměrnosti (obr. 2.34). Příkladem může být aktivita, kdy učitel pobídne žáka, aby stavěl tentýž útvar jako pedagog, avšak zrcadlově převrácený. Postupně se střídají v kladení dílů ze sady a vznikají dva osově souměrné obrazce.



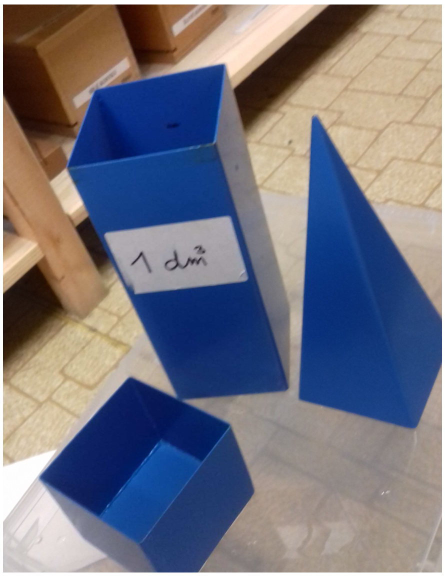
Obrázek 2.34: Pomůcka Kovové čtverce využitá pro výuku osové souměrnosti

Objem jehlanu

Na demonstraci výpočtu objemu jehlanu najdeme v Montessori školách praktickou pomůcku, která se skládá z více částí. Jedná se o kovový dutý čtyřboký hranol, dutý čtyřboký jehlan a dutou krychli (obr. 2.35). Mají stejné, tj. čtvercové podstavy, hranol a jehlan mají stejnou výšku, přičemž hrana krychle je vůči ní třetinová. Do těles lze samozřejmě nalít voda. Do jehlanu a krychle se vejde stejné množství vody, třetinové oproti hranolu (lze zjistit přeléváním: „Vodou z kolika

[27]Pro daný osově souměrný rovinný útvar uvažujme příslušnou osovou souměrnost (osa zobrazení a osa útvaru jsou totožné). Potom polovinou tohoto rovinného útvaru rozumíme takovou jeho část, která spolu se svým obrazem v osové souměrnosti pokrývá disjunktně celý útvar.

krychlí či jehlanů naplníme hranol?“). Takto děti názorně zažijí, že objem V_j jehlanu s výškou v a podstavou o obsahu S je třetinový oproti objemu hranolu V_h se stejnou výškou a podstavou, tedy že $V_j = \frac{1}{3}V_h = \frac{1}{3}S \cdot v$.



Obrázek 2.35: Pomůcka umožňující objevení vzorce pro výpočet objemu jehlanu

3. Návrhy a realizace pomůcek

Podstatnou částí této práce jsou návrhy a výroba dalších pomůcek pro výuku geometrie. Pomůcky se týkají různých témat. Původní záměr vyrobit nové pomůcky, které na trhu či v kabinetech škol chybí, byl zachován, avšak v průběhu psaní práce, mapování dostupných pomůcek a výroby pomůcek vlastních bylo zjištěno, že některé se již vyrábějí či v minulosti vyráběly. V případech, že se původní autorčin nápad „projevil neoriginálně“, byl ze seznamu nápadů odstraněn, a v několika případech tedy nedošlo ani k jeho původně zamýšlené realizaci. Jelikož je ale trh s pomůckami obrovský, nebylo možné ho zmapovat celý. Ač je možné (ba dokonce pravděpodobné), že se některá z navrhovaných pomůcek shoduje s nějakou již průmyslově vyráběnou, nejde o záměr. Autorka se snažila vždy přijít s pomůckami, které se u nás neprodávají a které by pomohly žákovi „zviditelnit“ daný problém.

Podobně jako ve druhé kapitole budeme i nadále předpokládat, že dětem stačí vizualizace situace namísto důkazu.

V následujících odstavcích si ukážeme procesy realizace jednotlivých pomůcek včetně stručného náhledu do problematiky a návrhy jejich použití ve výuce.

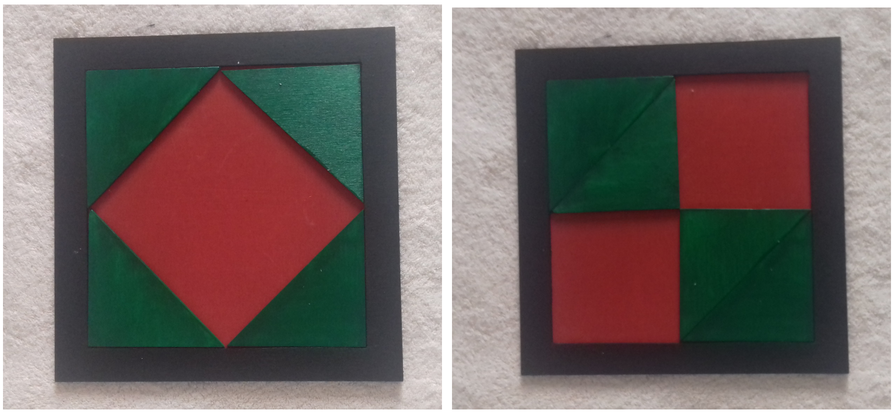
3.1 Pýthagorova věta

Pýthagorova věta pojednává o vztahu mezi odvěsnami a přeponou pravoúhlého trojúhelníku. Tento vztah znali již v Mezopotámském Babylonu (přibližně 1800 let př. n. l.) – délku úhlopříčky čtverce počítali jako součin délky jeho strany a $\sqrt{2}$, jejíž hodnotu znali na stotisíciny přesně [5]. Je dokázáno, že Babyloňané znali též pýthagorejské trojice[1], neboť několik jich bylo nalezeno na hliněné destičce. Ve starém Egyptě sice stavěli pyramidy se základy tvaru pravoúhlých čtyřúhelníků, není však známo, zda znali Pýthagorovu větu či nikoli. Uvádí se, že k vyměřování pravých úhlů používali provazy s dvanácti uzly, pomocí nichž konstruovali pravoúhlý trojúhelník odpovídající trojici (3, 4, 5). První zmínky o důkazu věty pochází až ze starověkého Řecka – do té doby lidé důkaz nejspíše neměli potřebu hledat.

Ve starověkém Řecku vznikaly nejprve instrukce, jak se má člověk na problém dívat, aby spatřil jeho platnost. Tyto návody bývaly vizuální, a tudíž v nich lze čerpat inspiraci pro výrobu pomůcek. Lze jen odhadovat, jaký důkaz věty po něm pojmenované prováděl sám Pýthagorás, který ji údajně pro Evropu objevil. Pravděpodobně byl založený na přeskládávání trojúhelníků a čtverců, avšak prvotně jen ve speciálním případě rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku [1] (pomocí navržené pomůcky znázorněno na obrázku 3.1)[2]. Tento důkaz byl znám již ve staré Číně, a to včetně obecnějších případů, kdy se nejedná o rovnoramenný trojúhelník. Eukleidés pak ve svých Základech podává dva jiné důkazy – jeden v *Knize I* jako důkaz věty číslo 47, druhý důkaz pro obecnější útvary (konkrétně podobné obdélníky) sestrojené nad stranami pravoúhlého trojúhelníku pak v *Knize VI* jako důkaz věty číslo 31.

[1]Pýthagorejskou trojici (a, b, c) tvoří taková přirozená čísla a, b, c, která vyhovují rovnici $a^2 + b^2 = c^2$.

[2]Bližší popis důkazu viz další strany této kapitoly.



Obrázek 3.1: Grafický (Čínský) důkaz Pýthagorovy věty pro rovnoramenný trojúhelník

Za dlouhá staletí a tisíciletí, co je Pýthagorova věta známa, bylo formulováno mnoho jejích důkazů.

Ačkoliv je tato věta vskutku známá, pro úplnost a připomenutí si ji tu uvedeme.

Věta 1 (Pýthagorova)**.** *Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou c pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad jeho dvěma odvěsnami a a b. Symbolicky zapisujeme*

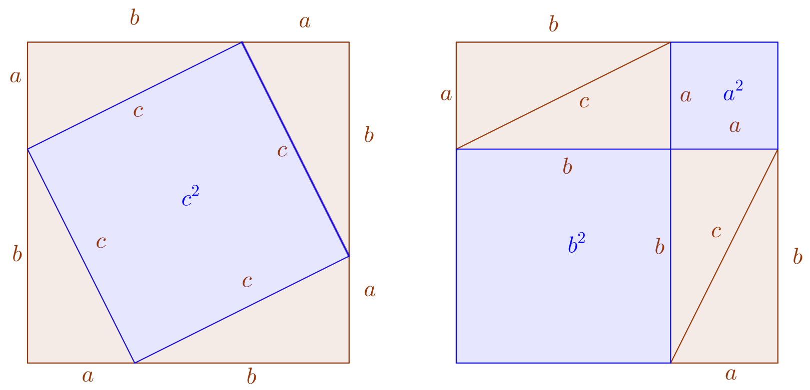
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Při mapování pomůcek na základních školách (klasických a waldorfských) autorka nenarazila na atraktivní a názornou pomůcku demonstrující Pýthagorovu větu. Existuje však Montessori pomůcka, jejíž jedna část ukazuje platnost věty pro rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky, druhá podává vysvětlení pomocí Eukleidova důkazu[3].

Pro Pýthagorovu větu existuje, jak již bylo řečeno, spousta důkazů. Asi nejznámější grafický důkaz (někdy zvaný Čínský) se vyskytuje v učebnicích, a lze tedy předpokládat, že se s ním žáci setkají (ať už podáním učitele či v učebnici). Důkaz lze malovat na tabuli, avšak se vzrůstajícím trendem nechat si žáky s problémem pohrát a vhodnými otázkami je směrovat k nalezení zákonitostí zde chybí „hračka“, která by toto umožňovala. V důkazu se využívá přeuspořádání trojúhelníků.

Důkaz. Na obrázku 3.2 jsou znázorněna dvě uspořádání týchž rovinných útvarů. Je zde čtverec o straně $a+b$, v němž jsou čtyři shodné oranžové pravoúhlé trojúhelníky o odvěsnách a, b a přeponě c. V prvním případě je ve čtverci o obsahu $(a+b)^2$ kromě oblasti zakryté trojúhelníky ještě modrá čtvercová oblast o obsahu c^2. Ve druhém případě jsou trojúhelníky umístěné přeponami k sobě tak, že tvoří dva obdélníky o stranách a a b, přičemž čtverec o obsahu $(a+b)^2$ obsahuje kromě nich ještě dva modré čtverce, a to o obsazích a^2 a b^2. Jelikož trojúhelníky pokrývají v obou případech plochu stejného obsahu, musí se i obsah modré plochy v prvním

[3] Tuto pomůcku autorka v Montessori škole Na Beránku neobjevila, proto není ve výčtu pomůcek Montessori.



Obrázek 3.2: Grafický („školský“) důkaz Pýthagorovy věty

uspořádání rovnat obsahu modré plochy v druhém uspořádání, tedy $c^2 = a^2 + b^2$.
□

Tento důkaz je velice názorný a přímo navádí k výrobě skládanky či „puzzlí“. Pomůcka by mohla být využitelná ve školách, v nichž si dítě přichází na zákonitosti (zcela či částečně) samo[4]. Samozřejmě by se pomůcka neztratila ani v klasické škole, kde ovšem dítě obvykle nemá čas si s pomůckou pohrát, tudíž by se z „hračky“ stala demonstrační pomůcka celkem snadno nahraditelná ilustrací podobnou obrázku 3.2.

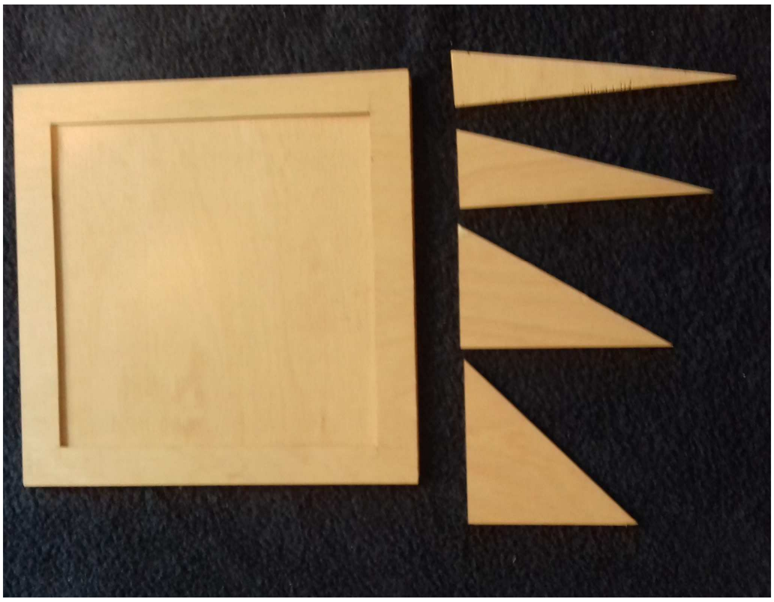
Výroba a popis pomůcky

Na výrobu pomůcky byla použita buková překližka tloušťky 3 mm, ze které byly vyřezány následující díly (obr. 3.3):

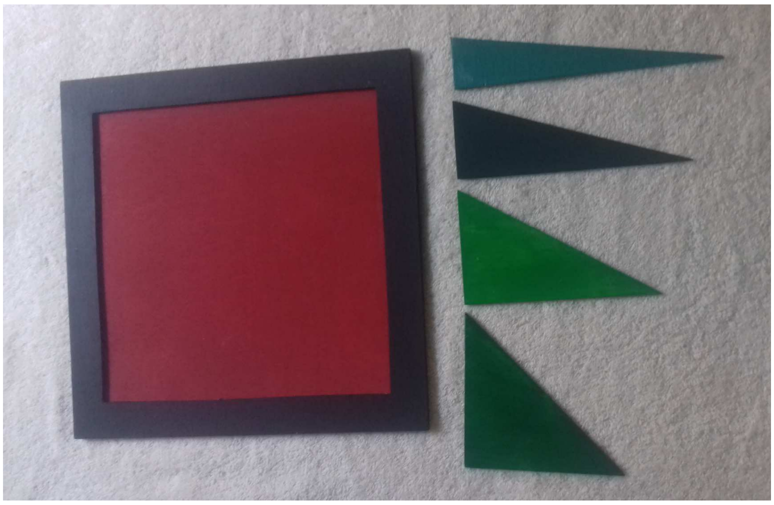
- čtverec o straně 30 cm
- čtvercový rámeček o vnější straně 30 cm a vnitřní 24 cm (šířka rámečku 3 cm)
- čtyři pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, délka ramene 12 cm
- čtyři pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami 6 cm a 18 cm
- čtyři pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami 9 cm a 15 cm
- čtyři pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami 4 cm a 20 cm

Čtverec byl poté nabarven červenou barvou z lícové a tabulovou černou barvou z rubové strany, rámeček také černou tabulovou barvou a trojúhelníky různými odstíny zelené (navzájem shodné trojúhelníky však mají odstín totožný). Rámeček byl následně přilepen na čtverec (obr. 3.4). Tím, že je rámeček natřen tabulovou barvou, lze na něj psát školními křídami (např. názvy stran apod.).

[4] V dnešní době vzniká spousta soukromých škol právě s takovou filosofií.



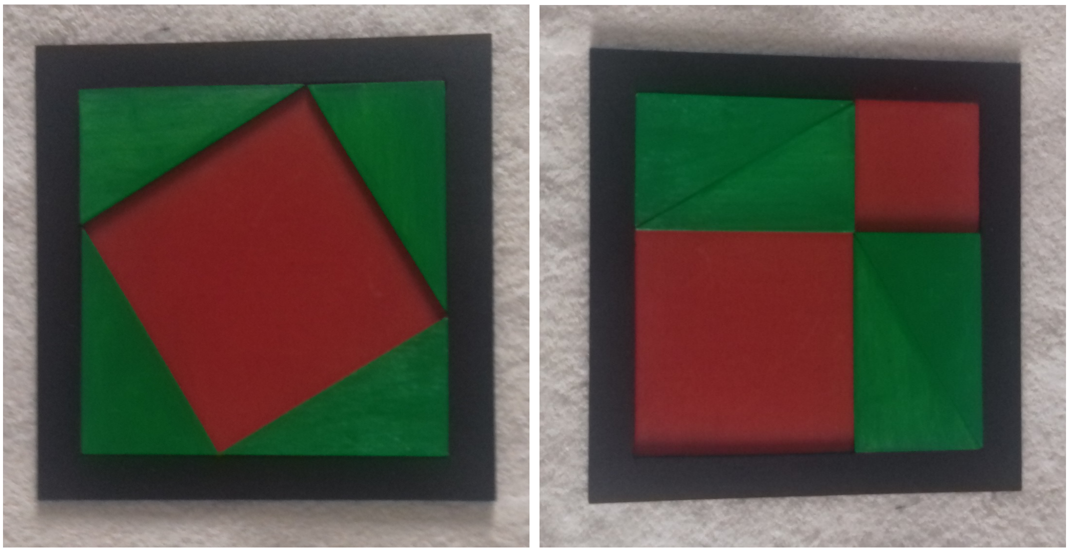
Obrázek 3.3: Jednotlivé díly pomůcky pro důkaz Pýthagorovy věty (na obrázku je pro přehlednost pouze jeden trojúhelník každého typu)



Obrázek 3.4: Pomůcka pro důkaz Pýthagorovy

Použití pomůcky

Pomůcka je zamýšlena spíše pro konstruktivistický (zjednodušeně řečeno: žák poznává sám – zevnitř) než pro transmisivní (žák přijímá hotové vědomosti – zvenčí) styl vyučování. Tedy dítě dostane pomůcku např. s následujícím pokynem: „Vem si čtyři trojúhelníky téhož odstínu zelené a zkus je do rámečku poskládat tak, aby zbylá, tj. nepokrytá červená plocha měla tvar čtverce.“ Pro začátek mohou být dítěti dány pouze trojúhelníky rovnoramenné (obr. 3.1), avšak lze pracovat rovnou s trojúhelníky, které mají odvěsny různých délek (obr. 3.5).



Obrázek 3.5: Dvě uspořádání trojúhelníků do rámečku.

Když žák úkol zvládne (obr. 3.1, resp. 3.5 vlevo), může ho učitel pobídnout k výpočtu obsahu celé červené plochy uvnitř rámečku případně obsahu menší červené plochy vzniklé zakrytím částí původní červené plochy zelenými trojúhelníky: „Změř si cokoli potřebuješ a zkus vypočítat obsah červeného vnitřku rámečku a také obsah menšího červeného čtverce, který jsi právě vytvořil.“ Nebo by otázka mohla mířit obecněji: „Kdyby se tato odvěsna jmenovala a a tato b, jaký by byl obsah vnitřku rámečku? Kdyby přepona trojúhelníků byla c, jak velký by byl obsah vzniklého čtverce?“ Dále může učitel pokračovat pokynem: „Zkus teď trojúhelníky přeskládat tak, aby nepokrytou plochou byly dva čtverce. Jaké mají obsahy? Můžeme součet jejich obsahů porovnat s obsahem čtverce z předchozího uspořádání?“ (obr. 3.1, resp. 3.5 vpravo).

Žák pak může totéž zkoušet s další čtveřicí trojúhelníků. Podobnými otázkami a pobídkami učitel směruje žáka k objevení Pýthagorovy věty. Díky tomu, že se na pohled jedná o „hračku“, tak se dítěti může problém předložit dříve, než je běžné (není třeba vyšších znalostí algebry) čistě pro získání základních představ o tvarech a vztazích mezi nimi.

Alternativní využití pomůcky: binomická věta

Ačkoliv binomická věta není ve školách řazena do geometrie, dovolíme si zde uvést pomůcku i na její znázornění (omezíme se na druhou mocninu $(a + b)^2$ součtu dvou reálných čísel). Jde totiž o tutéž pomůcku jako na Pýthagorovu větu.

V případě druhého uspořádání (obr. 3.2, resp. 3.5 vpravo) je obsah celého čtverce o straně $(a+b)$ disjunktně rozdělen na čtyři oblasti: dva čtverce o stranách a, resp. b a dva shodné obdélníky o stranách a a b. Obsah velkého čtverce je součtem obsahů jeho částí. Tedy

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

což je přesně ten vzorec, jež se žáci (mnohdy bohužel pouze zpaměti) učí.

3.2 Kuželosečky

Kuželosečkami se zabývali již antičtí Řekové. Když zjistili, že problém zdvojení krychle nelze řešit pomocí eukleidovských konstrukcí (tj. pouze pomocí pravítka a kružítka), zkoumali nové možnosti přístupu k otázce. Menaichmos, který žil ve 4. stol. př. n. l. a kterému bývá připisován objev kuželoseček, používal k řešení zdvojení krychle právě tyto křivky. Podle něj kuželosečky vznikaly jako řezy rotačních kuželových ploch rovinami kolmými k nějaké jejich povrchové přímce. Typ kuželosečky byl tedy závislý pouze na vrcholovém úhlu[5] kuželové plochy. Je pravděpodobné, že takto vnímali kuželosečky i Archimédés či Eukleidés [8].

Apollónios z Pergy sepsal pojednání o kuželosečkách mající osm knih (dochovalo se jich však jen sedm). Podle Apollónia kuželosečky vznikají řezem (může být i kosý vůči povrchovým přímkám) libovolné rotační kuželové plochy. Knihy se zabývají např. asymptotami hyperboly, konstrukcemi tečen kuželoseček, jejich polárními vlastnostmi, obsahy útvarů ohraničených tečnami a sečnami kuželoseček, ohnisky a jejich vlastnostmi, vzájemnými polohami kuželoseček, zmiňují i středy křivosti. Apollóniovy metody v podstatě souhlasí s dnešním pojetím z pohledu analytické geometrie. Tu ale „stvořili" až v 17. stol. René Descartes a Pierre de Fermat[6].

3.2.1 Kuželosečky jako řezy rotační kuželové plochy rovinou

Kuželosečky jsou křivky vznikající řezem rotační kuželové plochy rovinou[7]. Podle vzájemné polohy roviny a kuželové plochy vzniká elipsa, parabola či hyperbola, ve speciálních případech pak kružnice, bod, přímka či dvě různé přímky.

- **Kružnice**: Rovina řezu je kolmá na osu kuželové plochy a neprochází vrcholem.
- **Elipsa**: Rovina řezu neprochází vrcholem kuželové plochy a rovina s ní rovnoběžná vedená vrcholem nemá s kuželovou plochou žádné jiné společné body. Osa kuželové plochy tedy s rovinou řezu svírá úhel větší než s povrchovými přímkami[8].

[5] Pojem používaný např. ve strojírenství. Jedná se o úhel, který svírají dvě povrchové přímky ležící v rovině procházející osou kuželové plochy.

[6] Fermat objevil Apollóniovy spisy o kuželosečkách, které ho inspirovaly k vytvoření analytické geometrie.

[7] Dále budeme vždy uvažovat rotační kuželovou plochu s vlastním vrcholem.

[8] Elipsa a kružnice mohou vzniknout i jako řezy rotační válcové plochy rovinou.

- **Parabola**: Rovina řezu neprochází vrcholem kuželové plochy a je rovnoběžná s některou z povrchových přímek plochy.
- **Hyperbola**: Rovina řezu neprochází vrcholem kuželové plochy a rovina s ní rovnoběžná vedená vrcholem má s kuželovou plochou společné další body (dvě různoběžné přímky). Osa kuželové plochy tedy svírá s rovinou řezu úhel menší než s povrchovými přímkami.
- **Bod*** (degradovaná elipsa): Rovina prochází vrcholem a nemá s kuželovou plochou žádné další společné body.
- **Jedna přímka*** (degradovaná parabola): Rovina se kuželové plochy dotýká podél jedné povrchové přímky, a prochází tedy vrcholem.
- **Dvě různoběžné přímky*** (degradovaná hyperbola): Rovina prochází vrcholem a s kuželovou plochou má i další společné body.

Případy označené hvězdičkou * se řadí mezi tzv. *singulární* či *degradované kuželosečky*. Ostatní kuželosečky se nazývají *regulární*.

Vznik regulárních kuželoseček jakožto řezů kuželových ploch znázorňuje následující pomůcka.

Výroba a popis pomůcky

Jedná se o dutý rotační kužel z čiré plastové folie[9] (obr. 3.6). Výška kužele je přibližně 20 cm, průměr podstavy je 10 cm. V podstavě je kruhový otvor, kterým se do kužele dá nalít např. voda.

Obrázek 3.6: Průhledný kužel k demonstraci vzniku kuželoseček jako řezů kuželové plochy

[9]Tato folie se používá např. jako přední strana při kroužkové vazbě papírů.

Model je lepený „podomácku“ sekundovým lepidlem a čirou lepicí páskou. Jedná se tedy spíše o návrh pomůcky. V ideálním případě by byla vyrobena z tenkého plastu, čímž by se odstranil problém se spojováním materiálu a pomůcka by byla estetičtější, bytelnější a nejspíše by se s ní lépe pracovalo. Materiál je nicméně volen tak, aby se na kužel dalo psát fixami určenými na psaní na tabule a následně nápisy či náčrtky smazat.

Použití pomůcky

Hladina vody bývá téměř „rovná“ (zanedbáme-li smáčení kolem stěn nádoby), tudíž můžeme řez demonstrovat jako mez hladiny vody zčásti naplněného kužele. Tvar řezu pak závisí na náklonu kužele (hladina bude samozřejmě stále vodorovná). Je vhodné použít obarvenou vodu či jinou kapalinu (např. čaj, mléko apod.), aby hladina lépe vynikla (obr. 3.7). Hladinu pak můžeme obkreslit barevným fixem a vidět tak i po vylití kapaliny, že se jedná o kuželosečku (resp. její část – u parabolického a hyperbolického řezu nikdy neuvidíme řez celý).

Obrázek 3.7: Ukázka vzniku kružnice, elipsy, části paraboly a části hyperboly pomocí hladiny vody

Dalším úkolem by mohlo být narýsování či načrtnutí kuželosečky na papír (spíše tvrdší), vystřihnutí tvaru ohraničeného danou kuželosečkou a následné navlečení na kužel. Zadání může znít například následovně: „Zkuste načrtnout tvary, které utvořila hladina v kuželi. Tyto nakreslené kuželosečky „vystřihněte“ a navlékněte je na kužel pokud možno tak, aby pasovaly.“

Mírně odlišné je použití kužele jako „loďky“. Princip je podobný, rovina řezu je znázorněná hladinou vody, avšak tentokrát není voda uvnitř kužele, ale kužel potápíme do nádoby s vodou. Nevýhodou tohoto použití může být obtížnější obkreslování hladiny a horší viditelnost ukázky ve třídě. Může se též stát, že vztlaková síla mírně zdeformuje kužel.

Obrázek 3.8: Ukázka alternativního použití kužele

3.2.2 Definice elipsy

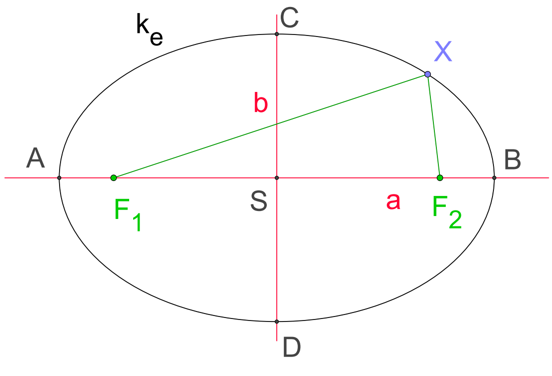
Ačkoli všechny kuželosečky vznikají řezem rotační kuželové plochy rovinou, není to jejich jediná společná vlastnost. Všechny regulární kuželosečky[10] jsou rovinné křivky, lze je tedy studovat jakožto rovinné útvary, a to (zvláště z počátku výkladu) bez jakékoliv poznámky, že se jedná o řezy kuželové plochy.

V rovině lze elipsu, hyperbolu a parabolu definovat jednou společnou definicí, která kuželosečky popisuje jako množiny bodů v rovině mající od dané přímky a daného bodu, který na ní neleží, konstantní poměr vzdáleností. Typ kuželosečky přitom závisí na oné konstantě[11]. Touto definicí se nebudeme dále zabývat[12]. Dále existují „samostatné“ definice pro jednotlivé kuželosečky. Jde vždy o množinu bodů v rovině daných vlastností[13].

Jelikož se navržená pomůcka týká elipsy, budeme se dále zabývat pouze touto kuželosečkou.

Definice 1. *Nechť je dána konstanta $a > 0$ a dva různé body F_1 a F_2 takové, že platí $2a > |F_1F_2|$. Pak elipsa k_e je množina všech bodů v rovině ϱ (obsahující body F_1 a F_2), které mají konstantní součet vzdáleností od bodů F_1 a F_2 roven $2a$. Tedy*

$$k_e = \{X \in \varrho; |F_1X| + |F_2X| = 2a, kde \;\; 2a > |F_1F_2|\}.$$



Obrázek 3.9: Definice a značení elipsy

[10]Dále budeme uvažovat pouze regulární kuželosečky.

[11]Touto definicí nelze popsat kružnici.

[12]Existují papírové předtisky, do kterých lze podle této definice jednotlivé body vkreslovat a poté kuželosečky načrtnout.

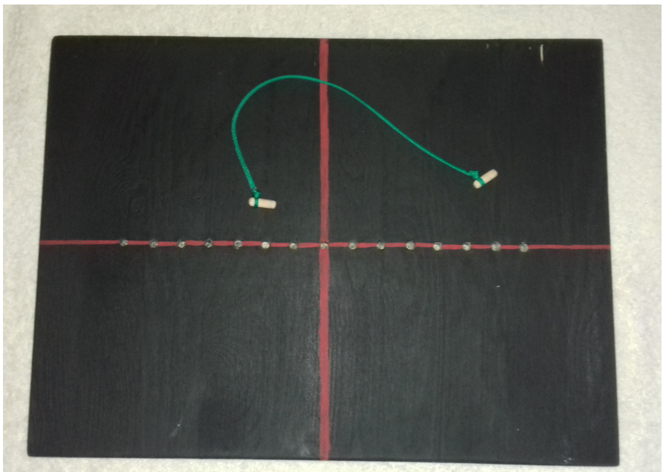
[13]Více o kuželosečkách se lze dočíst např. v knize *Desktiptivní geometrie I* [7].

S pomocí obrázku 3.9 si zavedeme některé základní pojmy. *Hlavní osa elipsy* je úsečka AB, *vedlejší osa elipsy* je úsečka CD. *Hlavní poloosa elipsy* je úsečka AS nebo BS, její délka je $|AS| = a$. *Vedlejší poloosa elipsy* je úsečka CS či DS, její délka je $|CS| = b$.[14] Body A a B nazýváme *hlavními vrcholy elipsy*, body C a D pak *vedlejší vrcholy elipsy*. Bod S je *střed elipsy*. Body F_1 a F_2 nazýváme *ohniska*. Bod X je *bodem elipsy* a úsečky XF_1 a XF_2 jsou *průvodiče bodu X*.

Jednou ze základních konstrukcí elipsy je tzv. *zahradnická konstrukce*, která vychází přímo z definice elipsy. Tuto konstrukci znázorňuje následující pomůcka.

Výroba a popis pomůcky

Pomůcka se skládá z dřevěné desky o rozměrech 30×40×2,5 cm. Rovnoběžně s její delší, resp. kratší stranou je středem desky vedena červená linie znázorňující hlavní, resp. vedlejší osu elipsy. V linii hlavní osy je v pravidelných intervalech vyvrtáno 15 dírek (vzdálenost první dírky od poslední je 30 cm). Prostřední dírka leží v průsečíku červených linií. K pomůcce přísluší ještě zelený provázek délky 30 cm, který má na obou koncích připevněné dřevěné kolíčky zapadající do dírek v desce. Délka provázku odpovídá délce hlavní osy elipsy, tj. $2a = 30$ cm.



Obrázek 3.10: Pomůcka znázorňující definici elipsy a zahradnickou konstrukci

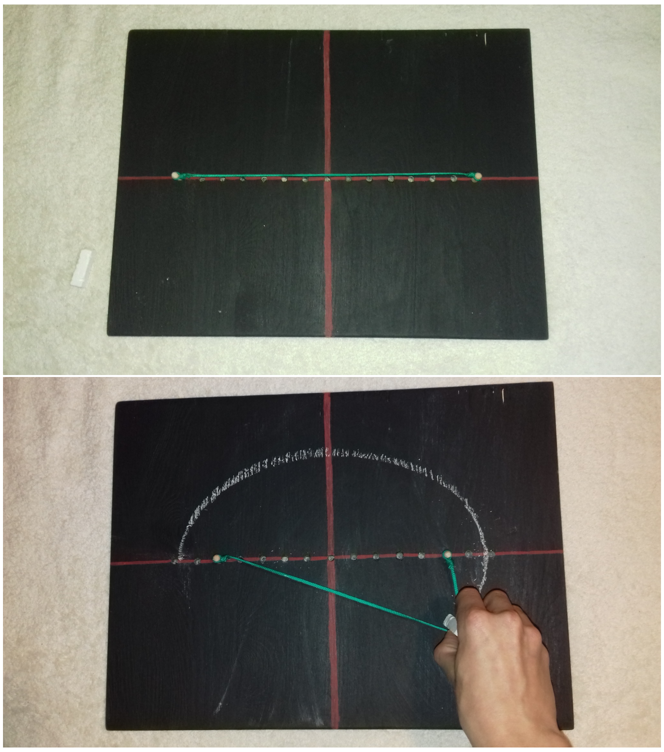
Deska je natřena tabulovou barvou, lze na ni psát školními křídami, které lze snadno setřít – nejlépe vlhkým hadříkem či houbou. Červená barva použitá na znázornění linií je akrylová, nehrozí tedy její setření.

Použití pomůcky

Princip používání pomůcky spočívá v umístění ohnisek (kolíčků) do dírek symetricky od průsečíku os a následné vykreslování elipsy pomocí přiložení křídy k napnutému provázku a „obkreslení jeho dosahu".

Umístíme-li kolíčky do krajních dírek v desce, provázek bude napnutý, čímž žákům ukážeme, proč je v definici podmínka $2a > |F_1F_2|$. Kdybychom kreslili křídou podél provázku, vznikne úsečka délky $2a$ (obr. 3.11 vlevo).

[14] Někdy hlavní či vedlejší (polo)osou rozumíme přímo délky uvedených úseček a někdy celé přímky, na kterých úsečky leží.



Obrázek 3.11: Ukázka použití pomůcky na zahradnickou konstrukci elipsy

Jestliže umístíme kolíčky do jiných dírek (omezíme se na případy, kdy jsou umístěné symetricky podle středu pomůcky), do provázku vložíme křídu a při napnutém provázku „obkreslujeme jeho dosah", vznikne nám elipsa (obr. 3.11 vpravo). Čím blíže umístíme kolíčky k sobě, tím více se výsledná křivka blíží kružnici. Můžeme se žáků rovněž zeptat, co by vzniklo, kdybychom mohli umístit do průsečíku os oba kolíčky. Naopak čím jsou kolíčky od sebe dále, tím je vzniklá elipsa plošší, více se tvarem blížící úsečce.

3.3 Stereometrie

Stereometrií jakožto prostorovou geometrií se zabývaly již starověké národy. Slovo stereometrie pochází z řeckého *stereos* (těleso) a *metria* (měření), volný překlad tedy zní „měření těles". Měření prostorových útvarů bylo k praktickým účelům potřeba již dokonce v pravěkých kulturách. S rozvojem zemědělství pak bylo nutné umět spočítat obsahy rovinných i prostorových útvarů. Právě vytvoření návodů pro výpočty (dnes bychom řekli vzorců) bylo pro starověké civilizace velikou výzvou. Na stavbu egyptských mastab, pyramid a chrámů nebo mezopotámských zikkuratů bylo třeba umět vypočítat množství potřebného materiálu, případně ho správně opracovat[15]. Proto se jedny z prvních stereometrických úloh týkají výpočtu objemů jehlanů, komolých jehlanů či jiných těles, případně jejich seřezáváním. Obdobné problémy řešili i staří Číňané. Babylonské způsoby výpočtů se však ne vždy shodovaly s egyptskými. Antičtí Řekové zjišťovali, které cesty vedou ke správným výsledkům a které k aproximacím, přičemž používali důkazové metody a racionální argumentaci [2].

[15] Řezáním kamene se zabývá zvláštní odvětví stereometrie zvané *stereotomie*.

V Řecku se též zabývali vlastnostmi těles a vzájemnými polohami prostorových útvarů – jedenáctá kniha Eukleidových Základů je věnována právě prostorové geometrii, dvanáctá kniha pak pojednává o objemech těles. Zde nejde již o návody, ale o deduktivní systém, abstraktní vědu. Na tomto přerodu se značně podíleli Thalés z Milétu a Pýthagorás ze Samu. Platón pak stereometrii jmenuje zvláštní disciplínou (vedle aritmetiky, geometrie, astronomie a hudby). Démokritos byl nejspíše první, kdo vyjádřil obecný vzorec pro výpočet objemu jehlanu. Řekové se též značně zabývali pravidelnými mnohostěny. Ořezáváním jejich vrcholů pak vznikala tzv. Archimédovská tělesa (polopravidelné mnohostěny). Archimédés přispěl novými myšlenkami ke stanovování povrchů a objemů těles ohraničených křivými plochami [6].

Stereometrie jakožto geometrie v prostoru někdy ve studentech vzbuzuje zbytečné obavy. Může to být nedostatečným tréninkem prostorové představivosti v mladším věku či malé názornosti probírané látky. V případě, že výuka stereometrie proběhne pouze na tabuli či v sešitě (tj. v rovině), nemusí dojít k pochopení a přijetí prostorových vztahů mezi objekty a jejich vlastností.

Obávanou kapitolou stereometrie bývají řezy krychle či jiných těles rovinami. Právě na tuto problematiku se zaměřuje další autorkou navržená pomůcka. Je určena zejména pro ty, kteří „prostorově nevidí“ – zameškali s rozvojem své prostorové představivosti a chtějí pomoci vybudovat prostorové vnímání pomocí hmatatelných situací.

Výroba a popis pomůcky

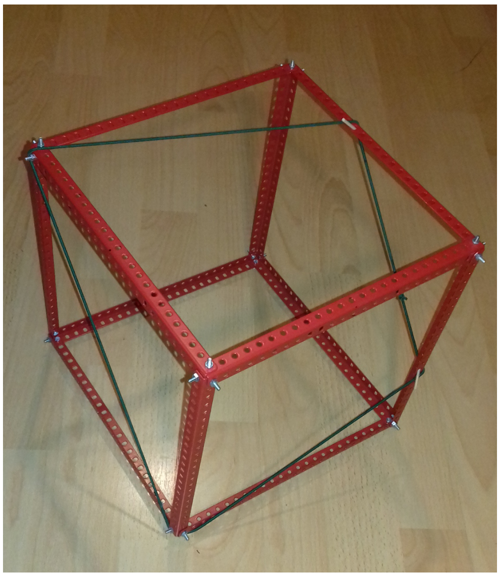
Jedná se o model krychle, na nějž lze upevňovat gumičky tak, že znázorňují hranice řezů (obr. 3.12). Pomůcka je vyrobena pomocí stavebnice Merkur. Skládá se z dvanácti červených úhelníků o 25 dírkách, které mají mezi sebou centimetrové rozestupy, hrana krychle je 25 cm. Úhelníky jsou spojené do tvaru krychle[16] šroubky. Důležitou součástí pomůcky je pak gumička, kterou lze pomocí dřevěných tyček natáhnout a připevnit k libovolné dírce na hraně krychle. Pomocí špejlí lze gumičku připevnit i na pomyslné stěny či do prostoru uvnitř pomyslné krychle. Při napínání gumičky jsme bohužel omezeni jednotlivými pozicemi dírek, může kvůli tomu dojít k nepřesnostem.

Krychle je dostatečně veliká, tudíž se hodí jednak jako demonstrační pomůcka pro frontální výuku a jednak jako pomůcka, na níž si student může vyzkoušet, jak řešit daný příklad prostorově dřív, než ho bude ve volném rovnoběžném promítání kreslit do sešitu. Jednou z výhod práce s krychlí je možnost objevovat prostorové vztahy a zákonitosti bez znalosti promítání.

Použití pomůcky

Učitel zadá příklad buď přímo pomocí bodů (dírek) na krychli či nechá studenty, aby jej vyčetli z předloženého obrázku a do krychle pomocí gumičky namodelovali. Několik úloh zde uvedeme i s okomentovaným postupem a teorií k němu potřebnou. Příklady jsou přejaté z učebnice *Matematika pro gymnázia – Stereometrie* [6].

[16]Dále budeme mluvit o krychli, i když ve skutečnosti tvoří model jen její hrany.



Obrázek 3.12: Pomůcka na stereometrii, zejména na řezy krychle rovinou

Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami

Základním vztahem mezi objekty je náležení. Uvedeme si zde několik vět, které pro body, přímky a roviny v prostoru platí:

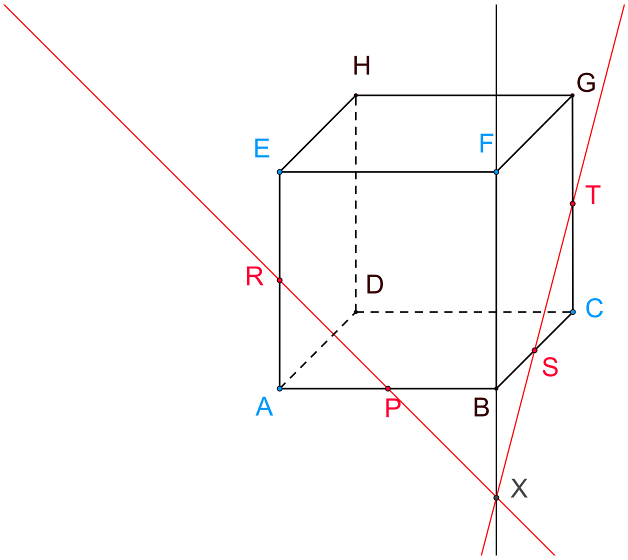
- Jestliže bod A leží na přímce p a přímka p leží v rovině ϱ, pak i bod A leží v rovině ϱ.
- Dvěma různými body prochází právě jedna přímka.
- Jestliže v rovině ϱ leží dva různé body A, B, pak také přímka p, která je jimi určena, leží v rovině ϱ.
- Třemi různými nekolineárními body prochází právě jedna rovina.
- Přímkou a bodem, který na ní neleží, prochází právě jedna rovina.
- Dvěma různoběžnými přímkami prochází právě jedna rovina.
- Dvěma různými rovnoběžnými přímkami prochází právě jedna rovina.

Příklad 1 ([6], str. 20, Příklad 2): Body P, R, S, T jsou po řadě středy hran AB, AE, BC, CG krychle $ABCDEFGH$ (obr. 3.13). Zjistěte, zda leží v téže rovině body

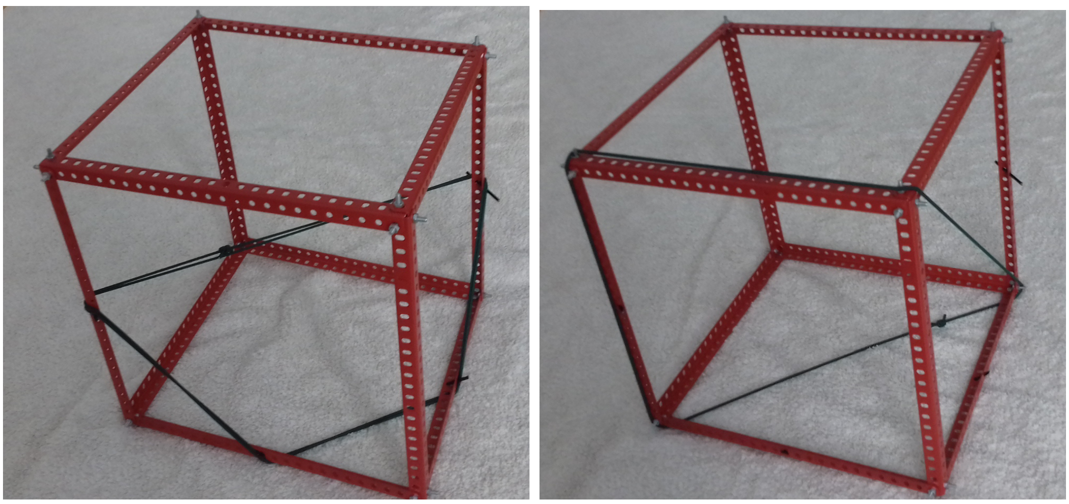
a) P, R, S, T,

b) A, C, E, F.

a) Přímka ST leží v rovině boční stěny. Přímku BF protíná v bodě X. Jelikož trojúhelník SCT je shodný (podle věty *usu*) s trojúhelníkem SBX, platí $|BX| = |BS| = \frac{1}{2}a$ (a je délka hrany krychle). Přímka PR ležící v přední stěně krychle protíná přímku BF taktéž v bodě X, jelikož trojúhelník PAR je shodný (opět dle věty *usu*) s trojúhelníkem PBX, tedy i $|BX| = |BP| = \frac{1}{2}a$. Protože jsou



Obrázek 3.13: Zadání Příkladu 1



Obrázek 3.14: „Řešení“ Příkladu 1 pomocí krychle s gumičkami

přímky PR a ST různoběžné, určují rovinu, tedy body P, R, S, T leží v jedné rovině.

Při „řešení" pomocí pomůcky umístíme zarážky z kousků špejlí do prostředních dírek požadovaných hran krychle, čímž reprezentujeme body P, R, S, T, a napneme na ně gumičku. Po napnutí nás zřejmě napadne hypotéza, že přímky RT a PS jsou rovnoběžné, a tedy určují rovinu (obr. 3.14 vlevo). Tuto domněnku lze „ověřit" tím, že na gumičku položíme tvrdý arch papíru (či nějakou lehkou desku) a zjistíme, že se archu dotýkají všechny části gumičky (celá gumička leží v rovině), tj. body P, R, S, T leží v jedné rovině.

b) Napneme-li gumičku na vrcholy A, C, E, F krychle, hned vidíme, že v rovině neleží (obr. 3.14 vpravo). Body A, E, F leží v přední stěně krychle, ale bod C v ní neleží.

Vzájemné polohy přímek v prostoru

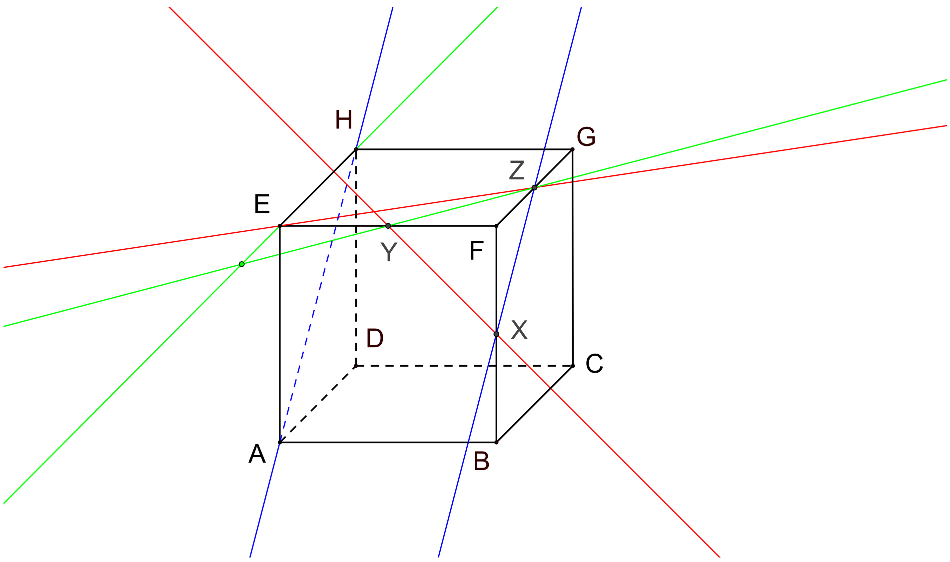
Přímky v prostoru mohou být *rovnoběžné* (různé či splývající), *různoběžné* a *mimoběžné*. Na následujícím příkladu si ukážeme, jak lze úlohy na polohu dvou přímek řešit pomocí „naší" pomůcky.

Příklad 2 ([6], str. 25, Úloha 2.9): Je dána krychle $ABCDEFGH$; body X, Y, Z jsou po řadě středy hran FB, FE, FG (obr. 3.15). Určete vzájemnou polohu přímek

a) XY, EZ,

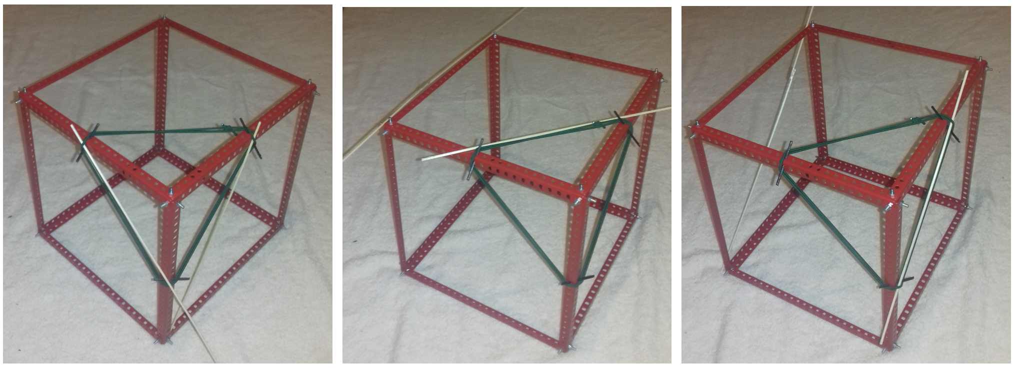
b) YZ, EH,

c) XZ, AH.



Obrázek 3.15: Zadání Příkladu 2

Umístíme zarážky do středů hran FB, FE, FG a pro lepší názornost na ně můžeme napnout gumičku. Zadané přímky reprezentujeme špejlemi. V případě a) se špejle „nepotkávají“, leží v různoběžných stěnách – (na obr. 3.13 červené) přímky jsou mimoběžné (obr. 3.16 vlevo). V případě b) leží obě špejle (a tedy přímky) v rovině horní stěny a přitom nejsou rovnoběžné – (na obr. 3.13 zelené) přímky jsou tedy různoběžné, „setkávají“ se na prodloužení hrany EH (obr. 3.16 uprostřed). V případě c) leží špejle v protějších (tedy rovnoběžných) stěnách krychle a protože jsou trojúhelníky HEA a ZFX podobné, jsou (na obr. 3.13 modré) přímky XZ a AH rovnoběžné (obr. 3.16 vpravo).



Obrázek 3.16: „Řešení“ Příkladu 2 pomocí krychle s gumičkami a špejlemi

Závěr

V práci jsme se zabývali učebními pomůckami využívanými ve výuce geometrie. Nejprve jsme se v první kapitole seznámili s učivem geometrie na českých základních a středních školách. V následující kapitole jsme se zaměřili na mapování pomůcek více či méně používaných ve školách klasických i v některých školách s alternativním přístupem k výuce matematiky. V poslední kapitole jsme se věnovali samotným návrhům a realizaci pomůcek. Byly vytvořeny celkem čtyři modely, což je méně, než bylo původně zamýšleno. Během psaní bakalářské práce se totiž ukázalo, že některé z pomůcek, jejichž výroba byla plánována, již na českém trhu existují. Nebylo by proto efektivní je v nepříliš inovované podobě vyrábět znovu.

Není nám známo, že by v České republice existoval podobný přehled dostupných modelů, který by shrnoval jak pomůcky nacházející se v klasických školách, tak ty ve školách s přístupem alternativním. Věříme, že jsme učitelům či vysokoškolským studentům pedagogických oborů rozšířili obzory. Co se námi vytvořených pomůcek týče, jejich výroba byla radostí a příjemným uvolněním. Budeme rádi, když námi navržené pomůcky žákům a studentům usnadní pochopení příslušného problému či čtenáře povzbudí k výrobě jeho vlastních modelů, jež mu nejen ozvláštní a případně vylepší výuku, ale i nabídnou ono „tvůrčí uvolnění“ v jeho zodpovědné a na trpělivost náročné profesi.

Seznam použité literatury

[1] Bečvář, Jindřich. *Hrdinský věk řecké matematiky. Historie matematiky I.* In Bečvář J., Fuchs E. (ed.): Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 19.8.–22.8. 1993, Jednota českých matematiků a fyziků, Brno, 1993, str. 20–107.

[2] Cromwell, Peter. *Polyhedra.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. ISBN 9-521-55432-2

[3] Hejný, Milan, Novotná, Jarmila, Stehlíková, Naďa. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze, Praha, 2004. ISBN 80-7290-189-3. Dostupné z: `http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/PublikaceKnihy/25KapitolZDM.pdf`

[4] Korčáková, Karin. *Geometria pre 1.–3. ročník základného vzdelávania v pedagogike Montessori.* Diplomová práce. Katolícka univerzita v Ružomberku, Pedagogická fakulta, Katedra špeciálnej pedagogiky a pedagogiky mentálne postihnutých, Ružomberok, 2016. Dostupné z: `http://opac.crzp.sk/openURL?stype=0&sid=E725DF4FE130A806836854018B4B`

[5] Maor, Eli. *The Pythagorean theorem: a 4,000-year history.* Princeton University Press, Princeton, 2007. ISBN 978-0-691-12526-8.

[6] Pomykalová, Eva. *Matematika pro gymnázia – Stereometrie.* 4. vydání. Prometheus, Praha, 2009. ISBN 987-80-7196-389-9.

[7] Urban, Alois. *Deskriptivní geometrie I.* 1. vydání. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1965. ISBN 80-85863-27-8.

[8] Vetter, Quido. *Jak mohl Menaichmos objeviti definici hyperboly.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 54 (1925), č. 4, str. 348–350. Dostupné z: `http://dml.cz/dmlcz/122315`

[9] *Co je to „Hejného metoda“? H-mat.* H-mat. Zasloužená radost z poznávání [online]. [cit. 29. 06. 2017]. Dostupné z: `http://www.h-mat.cz/hejneho-metoda`

[10] *12 klíčových principů — H-mat.* H-mat. Zasloužená radost z poznávání [online]. [cit. 29. 06. 2017]. Dostupné z: `http://www.h-mat.cz/principy`

[11] *Odkaz Marie Montessori.* Vzdělávací rodinné centrum Montessori [online]. [cit. 1. 4. 2017]. Dostupné z: `www.montessori-brno.cz/montessori-metoda/odkaz-marie-montessori.html`

[12] *Rejstřík škol a školských zařízení* [online]. [cit. 11. 12. 2016]. Dostupné z: `http://rejskol.msmt.cz/`

[13] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. Výzkumný ústav pedagogický v Praze, Praha, 2007 [cit. 22. 11. 2016]. Dostupné z: `http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-gymnazia`

[14] *Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Kombinované lyceum* [online]. MŠMT, Praha, 2009 [cit. 11. 12. 2016]. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP_3_vlna/RVP%207842M06%20Kombinovane%20lyceum.pdf

[15] *Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Stavebnictví* [online]. MŠMT, Praha, 2007 [cit. 16. 12. 2016]. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%203647M01%20Stavebnictvi.pdf

[16] *Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Strojírenství* [online]. MŠMT, Praha, 2007 [cit. 16. 12. 2016]. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%202341M01%20Strojirenstvi.pdf

[17] *Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Technické lyceum* [online]. MŠMT, Praha, 2007 [cit. 15. 12. 2016]. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%207842M01%20Technicke%20lyceum.pdf

[18] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Výzkumný ústav pedagogický v Praze, Praha, 2007 [cit. 20. 11. 2016]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani

[19] *Školní vzdělávací program „Klíč ke vzdělání“*. Gymnázium Nad Štolou 1 [online]. [cit. 10. 6. 2017]. Dostupné z: http://mail.gymstola.cz/svp.pdf

[20] *Specifika waldorfského vyučování*. Waldorfská základní a střední škola Semily [online]. [cit. 8. 6. 2017]. Dostupné z: http://www.waldorf-semily.cz/web/pedagogika/temata.php?tema=specifika

Seznam obrázků

2.1 Pomůcka na odvození objemu jehlanu. 10
2.2 Pomůcka na odvození objemu jehlanu 11
2.3 Pomůcka na odvození objemu jehlanu 11
2.4 Binomická krychle 12
2.5 Tělesa a jejich sítě 12
2.6 Plastové modely těles s vyznačenými důležitými liniemi či rovinami 12
2.7 Plastové „plnící“ modely těles s jejich sítěmi (vlevo), drátěné modely těles (vpravo) 13
2.8 Kout pro výuku práce s kartézskou soustavou souřadnic 13
2.9 Drátěné modely těles 14
2.10 Drátěný model pravoúhlé axonometrie 15
2.11 Sbírka dřevěných těles, v popředí model řezů kužele 15
2.12 Plastový průhledný model řezů válce a kužele 16
2.13 Kulová plocha, koule a pojmy s nimi související 16
2.14 Stavby z kostek 18
2.15 Parkety 19
2.16 Geoboardy – ciferníkový (vlevo), 3×3 (vpravo) 20
2.17 Kreslení forem neboli geometrie volné ruky ve 4. a 5. třídě waldorfské ZŠ 22
2.18 Obrazec sestrojený pomocí rýsovacích potřeb v 6. třídě (vlevo), kreslení dle principů lineární perspektivy v 7. třídě (vpravo) . . . 23
2.19 Lepené modely složitějších těles a koule vytesaná z kamene 23
2.20 Fotografie M. Montessori 24
2.21 Růžová věž 26
2.22 Hnědé schody 27
2.23 Čtyři sady barevných válečků 28
2.24 Geometrická modrá tělesa 28
2.25 Geometrický konstrukční materiál 29
2.26 Barevný krychlový materiál. 30
2.27 Binomická věta demonstrovaná pomocí krychlového materiálu . . 31
2.28 Vybrané zásuvky geometrické komody 31
2.29 Červené tyče 32
2.30 Červenomodré tyče 32
2.31 Žluté trojúhelníky 33
2.32 Výškoměr trojúhelníku. 34
2.33 Kovové čtverce a trojúhelníky 34
2.34 Pomůcka Kovové čtverce využitá pro výuku osové souměrnosti . . 35
2.35 Pomůcka umožňující objevení vzorce pro výpočet objemu jehlanu 36

3.1 Grafický (Čínský) důkaz Pýthagorovy věty pro rovnoramenný trojúhelník 38
3.2 Grafický („školský“) důkaz Pýthagorovy věty 39
3.3 Jednotlivé díly pomůcky pro důkaz Pýthagorovy věty (na obrázku je pro přehlednost pouze jeden trojúhelník každého typu) 40
3.4 Pomůcka pro důkaz Pýthagorovy 40

3.5 Dvě uspořádání trojúhelníků do rámečku. 41
3.6 Průhledný kužel k demonstraci vzniku kuželoseček jako řezů kuželové plochy 43
3.7 Ukázka vzniku kružnice, elipsy, části paraboly a části hyperboly pomocí hladiny vody 44
3.8 Ukázka alternativního použití kužele 45
3.9 Definice a značení elipsy 45
3.10 Pomůcka znázorňující definici elipsy a zahradnickou konstrukci . . 46
3.11 Ukázka použití pomůcky na zahradnickou konstrukci elipsy 47
3.12 Pomůcka na stereometrii, zejména na řezy krychle rovinou 49
3.13 Zadání Příkladu 1 50
3.14 „Řešení“ Příkladu 1 pomocí krychle s gumičkami 50
3.15 Zadání Příkladu 2 51
3.16 „Řešení“ Příkladu 2 pomocí krychle s gumičkami a špejlemi . . . 52

Seznam použitých zkratek

ČR	Česká republika
MŠMT	Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
RVP	Rámcový vzdělávací program
RVP G	Rámcový vzdělávací program pro gymnázia
RVP KL	Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Kombinované lyceum
RVP STA	Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Stavebnictví
RVP STR	Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Strojnictví
RVP TL	Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání Technické lyceum
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
SOŠ	Střední odborná škola
SŠ	Střední škola
ŠVP	Školní vzdělávací program
WŠ	Waldorfská škola
ZŠ	Základní škola