



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jana Sigačevová

Stochastická optimalizace na náhodných sítích

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Michal Houda, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a
ekonometrie

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 20. července 2017

Jana Sigačevová

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému vedoucímu práce Mgr. Michalovi Houdovi, Ph.D za cenné připomínky, trpělivost a za drahocenný čas, který mi věnoval. Dále bych chtěla velice poděkovat svým nejbližším za neustálou podporu při studiu. V neposlední řadě mé díky patří i Ing. Patrikovi Míčovi za poskytnutá data.

Název práce: Stochastická optimalizace na náhodných sítích

Autor: Bc. Jana Sigačevová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Michal Houda, Ph.D., Katedra aplikované matematiky a informatiky, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Ekonomická fakulta

Abstrakt: Deterministická teorie grafů, resp. sítí, je úspěšně užívána v případech, ve kterých se není potřeba zabývat náhodnou složkou. Řada rozhodovacích a konfliktních situací v praxi však vyžaduje zahrnutí stochastického elementu přímo do modelu. Předmětem této práce je představení stochastické optimalizace a její aplikace pro náhodné sítě. Čtenář se seznámí se třemi přístupy stochastické optimalizace. Konkrétně s dvoustupňovou optimalizací, vícestupňovou optimalizací a s úlohami s pravděpodobnostním omezením. Nakonec je studovaná problematika demonstrována na úloze z reálného prostředí telekomunikačních sítí.

Klíčová slova: stochastická optimalizace, teorie grafů, dvoustupňová optimalizace, vícestupňová optimalizace, úlohy s pravděpodobnostními omezeními, náhodná síť

Title: Stochastic Optimization on Random Networks

Author: Bc. Jana Sigačevová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Michal Houda, Ph.D., Department of Applied Mathematics and Informatics, University of South Bohemia in České Budějovice, Faculty of Economics

Abstract: The deterministic theory of graphs and networks is used successfully in cases where no random component is needed. However in practice, a number of decision-making and conflict situations require the inclusion of a stochastic element directly into the model. The objective of this thesis is the introduction of stochastic optimization and its application on random networks. The reader will become familiar with three approaches to stochastic optimization. Namely two-stage optimization, multi-stage optimization and chance constraint optimization. Finally, the studied issue is demonstrated on a real telecommunication network example.

Keywords: stochastic optimization, graph theory, two-stage optimization, multi-stage optimization, chance constraint optimization, stochastic network

Obsah

Úvod	2
1 Dvoustupňová stochastická optimalizace	3
1.1 Stochastická optimalizace	3
1.1.1 Obecná formulace úlohy stochastické optimalizace	3
1.2 Dvoustupňová stochastická optimalizace	5
1.3 Formulace úlohy lineární dvoustupňové stochastické optimalizace	7
1.4 Způsoby řešení lineární dvoustupňové úlohy s pevnou rekurzí	8
1.4.1 L-Shaped metoda	9
1.5 Model stochastického programování pro využití síťových zdrojů za přítomnosti nejistoty poptávky	11
1.5.1 Související modely pro využití síťových prostředků	11
2 Vícestupňová stochastická optimalizace	18
2.1 Formulace úlohy lineární vícestupňové stochastické optimalizace	18
2.1.1 Scénáře	20
2.2 Způsoby řešení úloh vícestupňové stochastické optimalizace	20
2.2.1 Vnořená L-shaped metoda	21
2.3 Odhalování pašeráků nukleárního materiálu na náhodné síti	23
2.3.1 Odhalování pašeráků nukleárního materiálu na bipartitní náhodné síti	24
3 Úlohy s pravděpodobnostními omezeními	27
3.1 Formulace úlohy s pravděpodobnostním omezením	27
3.1.1 Úloha se sdruženým pravděpodobnostním omezením	27
3.1.2 Úloha s individuálními pravděpodobnostními omezeními	28
3.2 Problém směřování vozidel	29
4 Vybraný příklad a jeho řešení	31
4.1 Popis mobilní sítě	31
4.2 Zadání	31
4.3 Popis a zpracování dat	32
4.4 Formulace úlohy	34
4.5 Řešení úlohy	38
4.6 Výsledek úlohy	41
4.7 Programový kód	43
Závěr	45
Seznam použité literatury	46
Seznam obrázků	48
Obsah příloženého CD	49

Úvod

Optimalizace se obecně zabývá volbou „nejlepšího“ rozhodnutí. Počátky optimalizace jako takové sahají do období druhé světové války. Zprvu se zabývá deterministickými optimalizačními úlohami, avšak v reálném životě je ve většině problémů přítomná určitá nejistota a vstupy takových úloh jsou náhodné. V takové situaci hovoříme o optimalizaci stochastické. Stochastická optimalizace je rozsáhlé odvětví optimalizace, které se začínalo rozvíjet v padesátých letech 20. století. Můžeme ji rozdělit na další dva směry, kde jedním směrem je problematika dvoustupňových a vícestupňových úloh a druhým směrem je pravděpodobnostní programování. Další velmi silnou oblastí matematiky je teorie grafů. Mnohé rozhodovací a konfliktní situace z praxe lze popsat právě pomocí grafů a posléze je řešit. Sítě, které spadají do teorie grafů, popisují rozličné systémy, se kterými lidé pracují. Jedná se například o sítě dopravní, telekomunikační, datové a mnohé další. I v této oblasti můžeme pracovat s deterministickými a náhodnými sítěmi, přičemž náhoda je opět takřka všudypřítomná. V okamžiku, kdy dojde k propojení těchto dvou praktických a zajímavých témat, jako je stochastická optimalizace a náhodné sítě, dostaneme velice užitečný nástroj, který nám umožňuje řešit mnohé komplikované situace.

Tématem této práce je tedy problematika modelování na náhodných sítích. V první a druhé kapitole pojednáme o dvoustupňové a vícestupňové stochastické optimalizaci, způsobu řešení úloh z tohoto odvětví a uvedeme jejich možné aplikace na náhodných sítích. Třetí kapitola se věnuje úlohám s pravděpodobnostními omezeními a formulaci úlohy z reálného prostředí, která je interpretovaná pomocí náhodné sítě. V poslední čtvrté kapitole je předvedena aplikace stochastické optimalizace na úloze, která je inspirovaná reálnými daty. K výpočtu jsou použity systémy GAMS, Mathematica a Excel.

1. Dvoustupňová stochastická optimalizace

Optimalizační úlohy obvykle dělíme na dva hlavní směry: deterministické a stochastické problémy. Co se týče deterministických optimalizačních úloh, zde jsou všechny koeficienty a parametry úlohy předem známé. Na základě zadaného problému a podmínek pak hledáme ideální řešení, které podmínky splňuje. V případě, že nám jednotlivé parametry nejsou předem známé, se jedná o problém stochastické optimalizace. My se v první části této kapitoly budeme věnovat právě stochastické optimalizaci. Vzápětí budeme rozebírat dvoustupňovou stochastickou optimalizaci, její řešení a aplikaci.

1.1 Stochastická optimalizace

Jak již bylo řečeno výše, s problematikou stochastické optimalizace se denně setkáváme v běžném životě. Dobrým příkladem problému stochastické optimalizace je následující úloha prodavače novin, kterou přebíráme z publikace [4]. Prodavač novin si může za nákupní cenu objednat každý den pevný počet výtisků novin. Prodejní cena jednoho výtisku novin je vyšší než cena nákupní. Jestliže prodavač všechny výtisky během dne neprodá, neprodané výtisky již nemůže vrátit. Prodavač však poptávku po novinách pro daný den při objednávání výtisků předem nezná. Cílem prodavače je maximalizovat svůj zisk a ideálně nakoupit tolik novin, kolik jich bude poptávaných. V okamžiku, kdy prodavači nějaké výtisky zbudou, nebo naopak bude poptávka vyšší než množství nakoupených výtisků, dojde k určité ztrátě, která sníží prodavačův zisk. Množství objednaných výtisků se pak volí na základě metod stochastické optimalizace.

1.1.1 Obecná formulace úlohy stochastické optimalizace

Než přistoupíme k formulaci obecné úlohy stochastické optimalizace, nejdříve vyslovíme obecnou deterministickou formulaci problému matematického programování, kterou přebíráme z publikace [11]:

$$\begin{aligned} \min \quad & g_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in X \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde x je rozhodovací vektor, X je množina přípustných řešení, $g_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je účelová funkce a $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ jsou funkce rozhodovacího vektoru x určující podmínky dané úlohy.

Nyní zadefinujeme dva následující pojmy.

Definice 1. (Konvexní množina). [7] Množina $X \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá konvexní, jestliže s každými dvěma body obsahuje také všechny jejich konvexní lineární kombinace, tj. pro každé $x, y \in X$ a $\lambda \in (0, 1)$ je $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

Definice 2. (*Konvexní polyedrická množina*). [7] *Konvexní polyedrická množina je množina, která je průnikem konečně mnoha uzavřených poloprostorů.*

Na základě funkcí g_i a množiny X můžeme rozlišovat úlohu (1.1) na

- a) *lineární*, jestliže je množina X polyedrická a konvexní a funkce $g_i, i = 0, \dots, m$ jsou lineární;
- b) *nelineární*, jestliže je alespoň jedna funkce $g_i, i = 0, \dots, m$ nelineární a X není konvexní polyedrická množina; nelineární úlohy dělíme na
 - b1) *konvexní*, jestliže $X \cup \{x | g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ je konvexní množina a g_0 je konvexní funkce;
 - b2) *nekonvexní*, jestliže $X \cup \{x | g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ není konvexní množina nebo účelová funkce g_0 není konvexní funkce.

Další speciální třídou problémů jsou *celočíselné problémy*, pro které platí, že veličiny $x_j, j = 1, \dots, n$ z množiny X jsou celočíselné. Poslední speciální třídou problémů, kterou si uvedeme, jsou *smíšené celočíselné problémy*, kde jsou alespoň některé z proměnných $x_j, j = 1, \dots, n$ celočíselné.

V problému (1.1) mnohdy není rozumné uvažovat deterministicky pevně dané funkce g_i ani pevně danou množinu X . Například v případě modelování vodních elektráren lze přítok do rezervoárů vhodně modelovat pomocí nejistého parametru, který je v nejlepším případě charakterizován pravděpodobnostním rozdělením. V závislosti na situaci, kterou chceme řešit, nemusí být formulace (1.1) pro popis problému vhodná.

Nyní přistoupíme ke stochastické formulaci problému. Jedná se o obdobný problém jako (1.1), avšak s náhodnými parametry. Obecnou formulaci úlohy stochastické optimalizace přebíráme také z publikace [11]

$$\begin{aligned} \min \quad & g_0(x, \tilde{\xi}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x, \tilde{\xi}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in X \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde $\tilde{\xi}$ je náhodný vektor z množiny $\Xi \subset \mathbb{R}^k$. Předpokládáme, že je dána rodina událostí \mathcal{F} taková, že $\mathcal{F} \subset \Xi$. Dále předpokládáme, že je dáno i pravděpodobnostní rozdělení P . Proto pro každou podmnožinu $A \subset \Xi$, t.j. $A \in \mathcal{F}$, je pravděpodobnost $P(A)$ známá. Funkce $g_i(x, \cdot) : \Xi \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall x, i$ jsou náhodné veličiny a pravděpodobnostní rozdělení P je nezávislé na x .

U problému (1.2) chceme učinit rozhodnutí x aniž bychom znali realizaci $\tilde{\xi}$, čili člen „min“ ani podmínky úlohy nejsou plně smysluplné. Proto je nutné proces modelování přepracovat, což vede na deterministickou podobu úlohy (1.1).

Po uvedení základní formulace stochastického problému nyní postupně přejdeme ke konkrétnější úloze stochastického programování.

Na základě publikace [1] tedy můžeme shrnout, že úlohy s nejistotou jsou takové úlohy, ve kterých se může v datech vyskytovat nějaká nejistota. Za rekurzivní programy považujeme takové úlohy, ve kterých mohou být rozhodnutí nebo rekurzivní procesy přijaty až po popsání nejistoty. Přítomnost nejistoty v datech znamená, že některá data v problémech mohou být reprezentována pomocí

náhodných veličin. Předpokládá se, že známe přesný pravděpodobnostní popis náhodných veličin ve formě pravděpodobnostních rozdělení, hustot nebo obecněji pravděpodobnostních měr. Konkrétní hodnoty náhodných veličin budou známy až po realizaci náhodného experimentu, t.j. vektor $\xi = \xi(\omega)$, symbolizující náhodu v datech, je znám až po uskutečnění experimentu ω . Množina rozhodnutí je pak rozdělena do dvou skupin:

- *jednostupňová rozhodnutí*, kde musí být rozhodnutí přijata před provedením experimentu. Období, ve kterém je rozhodnutí učiněno, se nazývá *první stupeň*;
- *dvoustupňová rozhodnutí*, kde mohou být rozhodnutí přijata po provedení experimentu. Období, ve kterém je rozhodnutí učiněno, se nazývá *druhý stupeň*.

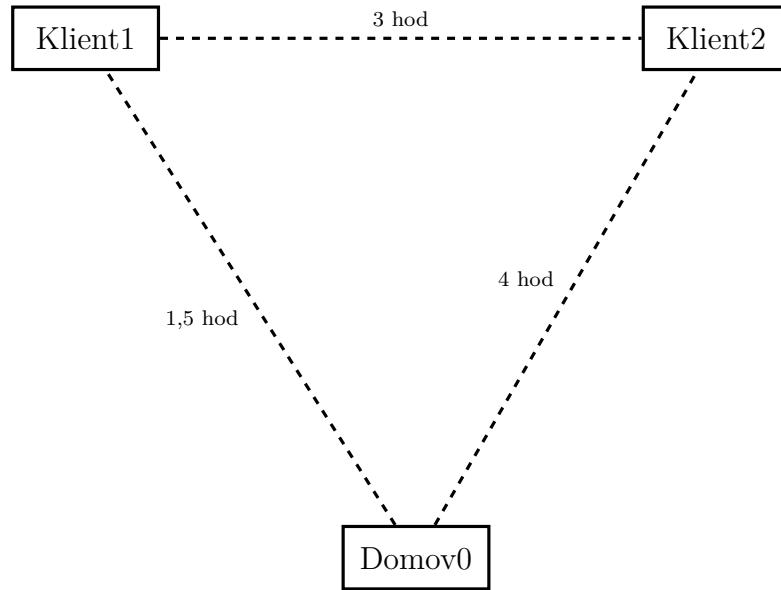
Jednostupňová rozhodnutí jsou reprezentována vektorem x , zatímco dvoustupňová rozhodnutí jsou reprezentována vektorem $y(\omega, x)$. Posloupnost událostí a rozhodnutí je následující

$$x \rightarrow \xi(\omega) \rightarrow y(\omega, x).$$

1.2 Dvoustupňová stochastická optimalizace

Na konci předchozí sekce jsme uvedli dělení množiny rozhodnutí do dvou skupin na jednostupňová a dvoustupňová rozhodnutí. Nyní pokračujeme z publikace [1] a uvedeme příklad cestovní prodavačky, na kterém si objasníme princip dvoustupňového programování.

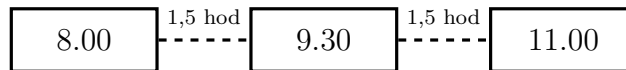
Cestovní prodavačka každý den obdrží jednu položku, přičemž následně navštívuje klienty a snaží se jim tuto položku prodat. Vrací se domů v okamžiku, kdy buď našla kupce pro danou položku, nebo pokud už navštívila všechny klienty. Klienti se o koupi rozhodují zcela náhodně a jejich rozhodnutí není ovlivněné rozhodnutími z předchozích dní. Cílem prodavačky je určit pořadí, ve kterém klienty navštíví tak, aby dorazila domů co nejdříve. Strávený čas v procesu zahrnuje čas strávený cestováním a dobou strávenou u každého navštíveného klienta. Pro zjednodušení uvažujeme, že posloupnost klientů, které je potřeba navštívit, je pevně daná. První stupeň tkví v zafixování posloupnosti a cestě k prvnímu klientovi. Druhý stupeň je variabilní v závislosti na délce trvání obsluhy po sobě jdoucích klientů, kteří si buď zboží koupí, či nikoliv. Uvažujeme následující konkrétní příklad cestovní prodavačky. Mějme dva klienty, kde první klient nakoupí zboží s pravděpodobností 0,3 a druhý klient nakoupí s pravděpodobností 0,8. Čas strávený cestováním (obsahuje i obsluhu) je ilustrován na obrázku (1.1).



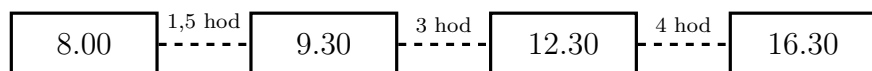
Obrázek 1.1: Příklad cestovní prodavačky.

Předpokládejme, že den začíná v 8.00. Jestliže uvažujeme posloupnost putování (*Klient1*, *Klient2*), pak mohou nastat dvě varianty.

- První variantu sledujeme na následujícím diagramu, kde prodavačka obslouží klienta č. 1 v 9.30. Klient zboží koupí a prodavačka se může vrátit domů a cestu ukončí v 11.00.



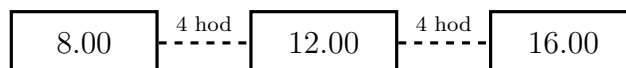
- Druhá varianta je taková, že klient č. 1 zboží nekoupí, a tudíž prodavačka pokračuje ke klientovi č. 2. Klienta č. 2 obslouží ve 12.30. Ať už klient č. 2 zboží koupí, či nikoliv, prodavačka končí doma v čase 16.00.



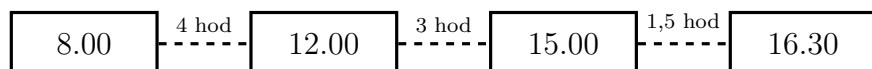
První stupeň u těchto dvou variant trvá vždy od 8.00 do 9.30 a druhý stupeň pak začíná v 9.30 a končí buď v 11.00, jestliže klient č. 1 nakoupí, nebo v 16.00, jinak.

Jestliže uvažujeme posloupnost (*Klient2*, *Klient1*), pak mohou nastat také dvě varianty trvání prodeje.

- První variantu sledujeme v následujícím diagramu. Zde dojde ke koupi u klienta č. 2 a prodavačka v tomto případě ukončí cestu v 16.00 návratem domů.



- Druhá varianta je taková, že klient č. 2 zboží nekoupí a prodavačka pokračuje ke klientovi č. 1. Tato varianta končí v čase 16.30.



První stupeň u těchto dvou variant trvá od 8.00 do 12.00 a druhý stupeň pak začíná ve 12.00 a končí buď v 16.00, jestliže klient č. 2 nakoupí, nebo v 16.30, jinak.

Vidíme tedy, že první stupeň varianty ($Klient2, Klient1$) může někdy skončit později, nežli druhý stupeň varianty prodeje ($Klient1, Klient2$).

1.3 Formulace úlohy lineární dvoustupňové stochastické optimalizace

V této sekci se budeme zabývat formulací dvoustupňového problému stochastické lineární optimalizace a budeme čerpat z publikací [1], [10] a [17].

Dvoustupňový stochastický lineární program může mít více podob v závislosti na tom, které komponenty problému jsou náhodné a které jsou deterministické. My zde uvedeme obecnější formulaci, kterou lze následně modifikovat. Dvoustupňová stochastická lineární úloha má následující tvar:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + E_{\xi}[\min q(\omega)^T y(\omega)] & (1.3) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega), \\ & 0 \leq x, \quad 0 \leq y(\omega). \end{aligned}$$

Zde $E_{\xi}[\]$ značí operátor střední hodnoty. V prvním stupni reprezentuje veličina x o velikosti $n_1 \times 1$ rozhodovací vektor programu. Mezi další vektory prvního stupně, které souvisejí s rozhodovacím vektorem x , patří vektor c o velikosti $n_1 \times 1$, vektor b o velikosti $m_1 \times 1$ a matice A o rozměru $m_1 \times n_1$. Tyto veličiny jsou deterministické, čili předem známé. Mezi vektory druhého stupně úlohy patří vektor $q(\omega)$ velikosti $n_2 \times 1$, $h(\omega)$ velikosti $m_2 \times 1$, matice $T(\omega)$ o rozměru $m_2 \times n_2$ a matice $W(\omega)$ o rozměru $m_2 \times n_2$. Matici $T(\omega)$ nazýváme *matice technologií* a matici $W(\omega)$ nazýváme *rekurzivní matice*. V případě těchto veličin druhého stupně se jedná o stochastické komponenty problému (1.3). Data $q(\omega), h(\omega), T(\omega), W(\omega)$ budou známá až po realizaci náhodných událostí $\omega \in \Omega$. Rozhodovacím vektorem druhého stupně úlohy je vektor $y(\omega)$ o velikosti $n_2 \times 1$. V případě, že uvažujeme matici W pevně danou, pak program (1.3) nazýváme *dvoustupňový stochastický lineární program s pevnou rekurzí*. Na základě publikace [5] uvedeme další dělení stochastického lineárního programu podle rekurzivní matice $W(\omega)$. Dále rozlišujeme *stochastický lineární program s úplně pevnou rekurzí*, kde $W = W(\omega)$ a pro libovolnou pravou stranu z má soustava $Wy = z$ nezáporné řešení. Dalším typem úloh jsou *stochastické lineární programy s jednoduchou rekurzí*, které jsou speciálními případy problémů s úplnou pevnou rekurzí. Zde se pak v řádcích systému $W(\omega)y + T(\omega)x = h(\omega)$ vyskytují pouze dva typy nesrovnalostí y_i^+ a y_i^- , které jsou rozlišeny a penalizovány. Proto je odpovídající rekurzivní matice ve formě $W = (I, -I)$, kde I je jednotková matice odpovídající dimenze. Nakonec v případě, že je problém druhého stupně přípustný pro libovolné $x \in X$ a $\omega \in \Omega$, program nazýváme *stochastický lineární program s relativně úplnou rekurzí*.

Poskládáním všech komponent z druhého stupně dohromady dostaneme vektor $\xi(\omega)$ velikosti k ve tvaru $\xi(\omega) = (q(\omega), h(\omega), T(\omega), W(\omega))$. Všechny prvky vektoru jsou náhodné.

Nechť je $\Xi \subset \mathbb{R}^k$ nejmenší uzavřená podmnožina \mathbb{R}^k taková, že $P(\Xi) = 1$, jedná se o nosič ξ . V prvním stupni tedy činíme rozhodnutí x , pak následuje realizace náhodné události ω , čímž poznáme data druhého stupně, která závisela na ω . Nakonec následuje rozhodnutí ve druhém stupni $y(\omega)$. Schéma této posloupnosti vypadá následujícím způsobem

$$x \rightarrow \xi(\omega) \rightarrow y(\omega).$$

Závislost y na ω je zcela odlišné povahy než závislost q, h, T, W na ω . Nejedná se o funkci ω , ale znamená to, že po realizaci x nejsou rozhodnutí y obvykle stejná. Rozhodnutí y se volí tak, aby náhodná omezení z úlohy (1.3) platila skoro jistě. Účelová funkce programu (1.3) je tvořena deterministickým členem $c^T x$ a střední hodnotou účelové funkce druhého stupně $q(\omega)^T y(\omega)$ přes všechny realizace náhodné události ω . Člen odpovídající druhému stupni je komplikovanější, jelikož je hodnota $y(\omega)$ pro každé ω řešením lineárního programu.

K problému (1.3) formulujeme deterministickou podobu, kterou lze vyřešit a je následujícího tvaru

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + Q(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \quad 0 \leq x, \end{aligned} \tag{1.4}$$

kde

$$Q(x) = E_{\xi} Q(x, \xi(\omega))$$

a

$$Q(x, \xi(\omega)) = \min_y \{q(\omega)^T y \mid Wy = h(\omega) - T(\omega)x, 0 \leq y(\omega)\}.$$

1.4 Způsoby řešení lineární dvoustupňové úlohy s pevnou rekurzí

Obecný dvoustupňový model řeší výběr počátečního rozhodnutí, které minimalizuje náklady plus střední hodnotu budoucích rekurzivních akcí. Samozřejmě se nemusí jednat pouze o minimalizaci nákladů, záleží na tom, co je cílem dané optimalizační úlohy. S konečným počtem realizací druhého stupně a se všemi lineárními funkcemi vždy můžeme zformulovat deterministickou podobu lineárního programu, nebo rozšířenou formu úlohy. S narůstajícím počtem realizací jsou však takové formy příliš rozsáhlé. Nejčastěji používaná metoda k řešení lineární dvoustupňové úlohy s pevnou rekurzí je založená na budování vnější linearizace rekurzivní funkce nákladů a následném řešení prvního stupně plus této linearizace. Tato technika sečných nadrovin se ve stochastickém programování nazývá *L-shaped metoda*. Existuje však řada dalších dekompozičních metod a procedur řešících dvoustupňové úlohy. Mezi ně patří například *vnitřní linearizace*, *Dantzingův-Wolfeův přístup*, který řeší duál problému L-shaped metody a další.

V předchozí sekci jsme uvedli obecnou úlohu dvoustupňové stochastické optimalizace (1.3), kde byly prvky $q(\omega), h(\omega), T(\omega), W(\omega)$ náhodné. V této části budeme uvažovat rekurzivní matici W nenáhodnou, a tudíž zde budeme rozebírat způsob řešení dvoustupňového stochastického lineárního programu s pevnou rekurzí.

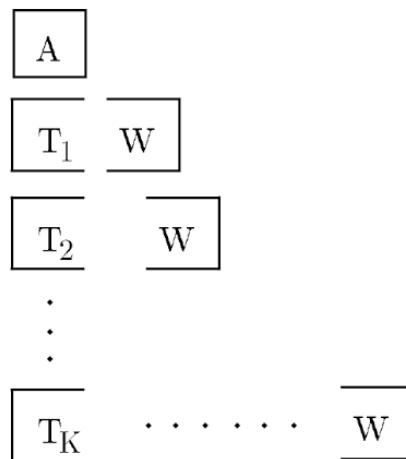
1.4.1 L-Shaped metoda

Jak bylo řečeno výše, L-shaped metoda je technika sečných nadrovin, která řeší dvoustupňové úlohy stochastického programování. Princip této metody předvedeme na základě publikace [1].

Uvažujme úlohu (1.4). Základní myšlenkou L-shaped metody je aproximace nelineárního členu v účelové funkci. Základní princip tohoto přístupu je následující. Nelineární člen v účelové funkci (rekurzivní funkce) v sobě zahrnuje řešení všech rekurzivních lineárních programů druhého stupně a cílem této metody je zabránit četnému vyhodnocování funkce. Proto využíváme tento nelineární člen pouze k vytvoření hlavního programu pro x , ale rekurzivní funkci spočítáme přímo jako podproblém. K tomu aby bylo možné tento přístup uskutečnit, předpokládáme, že náhodný vektor ξ má konečný nosič. Buďte $k = 1, \dots, K$ indexy možných realizací a buďte p_k pravděpodobnosti těchto realizací. Na základě našeho předpokladu můžeme zapsat deterministickou podobu programu v rozšířené formě. Tato forma je zkonstruovaná na základě spojení jedné množiny rozhodnutí druhého stupně, řekněme y_k , ke každé realizaci ξ , t.j. ke každé realizaci q_k, h_k a T_k . Jedná se o rozsáhlý lineární problém, který můžeme definovat následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \sum_{k=1}^K p_k q_k^T y_k & (1.5) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & T_k x + W y_k = h_k, \quad k = 1, \dots, K \\ & 0 \leq x, 0 \leq y_k, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Na obrázku (1.2) je vyobrazena bloková struktura rozšířené formy (1.5), odkud je také patrné odvození názvu metody L-shaped.



Obrázek 1.2: Bloková struktura dvoustupňové rozšířené formy problému převzatá z publikace [1].

Nyní přistoupíme k algoritmu L-shaped metody.
KROK 0 Polož $r = s = v = 0$ (inicializace na 0).

KROK 1 Polož $v = v + 1$ (v je index iterace). Vyřeš následující lineární program

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x + \theta \\ \text{s.t.} \quad Ax &= b, \\ D_l x &\geq d_l, \quad l = 1, \dots, r \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} E_l x + \theta &\geq e_l, \quad l = 1, \dots, s \\ 0 &\leq x, \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Buď (x^v, θ^v) optimální řešení. Jestliže není přítomna podmínka (1.7), pak θ^v polož rovno $-\infty$ a neber jej v úvahu při výpočtu x^v .

KROK 2 Pro $k = 1, \dots, K$ řeš následující lineární program (fáze I simplexu)

$$\begin{aligned} \min w' &= e^T v^+ + e^T v^- \\ \text{s.t.} \quad Wy + Iv^+ - Iv^- &= h_k - T_k x^v, \\ 0 &\leq y, 0 \leq v^+, 0 \leq v^-, \end{aligned}$$

kde $e^T = (1, \dots, 1)$ dokud pro nějaké k není optimální hodnota $w' > 0$. V takovém případě buďte σ^v odpovídající multiplikátory simplexu a definuj

$$\begin{aligned} D_{r+1} &= (\sigma^v)^T T_k, \\ d_{r+1} &= (\sigma^v)^T h_k, \end{aligned}$$

kteří slouží ke generování řezů přípustnosti, tedy podmínky typu (1.6).

Nastav $r = r + 1$, přidej podmínku do množiny podmínek (1.6) a vrať se zpět ke KROKU 1. Jestliže je pro všechna k $w' = 0$, jdi na KROK 3.

KROK 3 Pro $k = 1, \dots, K$ vyřeš lineární program

$$\begin{aligned} \min \quad z &= q_k^T y \\ \text{s.t.} \quad Wy_k &= h_k - T_k x^v, \\ 0 &\leq y. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Buďte π_k^v multiplikátory simplexu odpovídající optimálnímu řešení problému k typu (1.8). Definuj

$$\begin{aligned} E_{s+1} &= \sum_{k=1}^K p_k (\pi_k^v)^T T_k, \\ e_{s+1} &= \sum_{k=1}^K p_k (\pi_k^v)^T h_k. \end{aligned}$$

Buď $w^v = e_{s+1} - E_{s+1} x^v$. Jestliže $\theta^v \geq w^v$, KONEC, x^v je optimální řešení.

Jinak, nastav $s = s + 1$, přidej řez optimality do množiny omezení (1.7) a vrať se na KROK 1.

1.5 Model stochastického programování pro využití síťových zdrojů za přítomnosti nejistoty poptávky

V této části uvedeme příklad dvoustupňové stochastické optimalizace na síti, který přebíráme z publikace [8]. Uvedeme zde několik aplikací, ve kterých jsou výnosy, které jsou distribuovány přes síť, generovány pomocí rekurze.

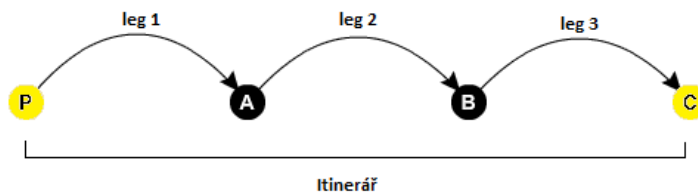
V úvodu nejprve zmíníme varianty interpretace modelovaných situací pomocí sítě. V některých případech se jedná o síť prostorové, v jiných případech o síť časové. Vrcholy v prostorové síti odpovídají umístěním na síti a hrany odpovídají schopnosti transportovat zboží nebo poskytovat služby (jako například u leteckého transportu a telekomunikačního průmyslu). Na druhé straně časové sítě jsou formovány diskretizací času a častěji se užívají pro modely řízení výnosu například pro půjčovny aut, hotely atd. V těchto modelech jsou uzly často spojené s body v čase a hrany korespondují s rezervacemi v čase. V obou případech je důležité uznat, že poptávka je často dána pomocí zdrojů spojených s vícenásobnými hranami sítě. Zákazníci aerolinek mohou využít vícenásobné hrany k dokončení jejich cestovních tras, hovory mohou být směrovány přes vícenásobné linky telekomunikačních sítí a pronájem automobilů a hoteloví zákazníci si mohou ponechat zařízení, respektive hotelový pokoj po několik dní. Mimoto tyto sítě slouží více třídám zákazníků, z nichž některé platí vyšší ceny než ostatní. Například pokud někdo potřebuje bezprostředně provést videokonferenci, může být ochoten zaplatit více, než například univerzity, které mají po stejné síti předem zaplacené vysílání přednášek. Obdobně jsou do tříd řazeni i zákazníci leteckých společností dle cen jízdného, stejně jako hoteloví zákazníci nebo zákazníci půjčoven aut. V libovolné z těchto aplikací závisí zisky plynoucí ze sítě na řídicí politice, která je pro management sítě užívána. Intuitivně za dobrou kontrolní politiku považujeme takovou politiku, která vede k systému, který při zachování vysoké úrovně využití zdrojů obslouží co nejvíce vysoce placících zákazníků.

V nadcházející části uvedeme modely, které umožňují efektivní správu zdrojů umístěných na síti. Poptávka proudí po dvojicích *Počátek-Cíl*, které budeme značit *P-C* dvojice (v publikaci [8] autoři značí tuto dvojici *O-D* vzhledem k anglickému *origin-destination*).

1.5.1 Související modely pro využití síťových prostředků

V této části předvedeme formulace modelů, které se používají k zachycení dopadu příjmů z několika *P-C* dvojic. Dochází k rozhodnutí, zda na základě marginální hodnoty spojené se zdroji má být zákazník přijat, či nikoliv. Tato politika se v literatuře managementu výnosů označuje jako kontrolní politika cenové nabídky, kde marginální hodnoty odpovídají cenovým nabídkám. Navzdory širokému uplatnění třídy modelů se jedná o letecký průmysl, který učinil hlavní vývoj a nasazování těchto modelů. Proto převezmeme některé termíny právě z terminologie leteckých společností. Budeme používat termíny *itinerář* a *leg*. Itinerář z pohledu leteckých společností symbolizuje cestovní deník, popis cesty, trati s jejími zvláštnostmi. V našem případě itineráře symbolizují na síti cesty a kombinace tříd zákazníků. Leg, další pojem vypůjčený z letectví, značí v leteckých

společnostech samostatný nepřerušovaný let, čili jeden leg začíná v okamžiku, kdy se letadlo odlepí od země a končí v okamžiku, kdy přistává. Cesta je tvořená posloupností legů, kde každý z nich má určenou kapacitu, která se rozdělí mezi různé třídy zákazníků. V našem případě tedy budou legy symbolizovat jednotlivé hrany, které tvoří cestu na síti. Na následujícím obrázku (1.3) je ilustrována symbolika itineráře a legů v síti.



Obrázek 1.3: Symbolika itineráře a legů v síti.

Potřebné pojmy z teorie grafů

Dříve než se vydáme formulovat modely pro využití síťových prostředků, zdefinujeme některé pojmy z teorie grafů, které čerpáme z práce [18]. Tato práce se z části zabývala teorií grafů na základě publikací [2, 13, 15].

Definice 3. (*Graf*). Graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je nějaká neprázdná množina a E je množina dvoubodových podmnožin množiny V . Prvky množiny V se jmenují vrcholy grafu G a prvky množiny E hrany grafu.

Definice popisuje obyčejný neorientovaný graf.

Definice 4. (*Orientovaný graf*). Orientovaný graf G je trojice (V, E, ϵ) , která je tvořená neprázdnou konečnou množinou V , jejíž prvky nazýváme vrcholy, a konečnou množinou E , jejíž prvky nazýváme orientovanými hranami, a zobrazení $\epsilon : E \rightarrow V^2$, které nazýváme vztahem incidence. Zobrazení ϵ přiřazuje každé hraně $e \in E$ uspořádanou dvojici vrcholů (x, y) , kde první z nich x nazýváme počátečním vrcholem hrany a značíme jej $PV(e)$ a druhý vrchol y nazýváme koncovým vrcholem hrany a značíme jej $KV(e)$.

Hrana e vede z vrcholu x do vrcholu y . O vrcholech x, y říkáme, že jsou incidentní s hranou e nebo také, že hrana e je incidentní s vrcholy x, y . Jestliže $PV(e) = KV(e)$, pak se hrana e nazývá orientovanou smyčkou.

Definice 5. (*Ohodnocený graf*). Graf $G = (V, E)$ je grafem s ohodnocenými hranami, jestliže pro každou hranu $e \in E$ je dáno číslo $w(e)$, které nazýváme váha (ohodnocení) hrany e .

Definice 6. (*Síť*). Libovolný orientovaný graf $G = (V, E, \epsilon)$ spolu s ohodnocením w , kde $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, se nazývá síť.

Ohodnocení hran v grafech a sítích reprezentují např. doby trvání nebo náklady činností, propustnost potrubí, pravděpodobnosti událostí apod.

Definice 7. (*Orientovaný sled*). Posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ nazýváme orientovaným sledem, jestliže pro každou hranu e_i z této posloupnosti platí $PV(e_i) = v_{i-1}$ a $KV(e_i) = v_i$.

Vrchol v_0 nazýváme počátečním vrcholem a vrchol v_k koncovým vrcholem sledu. Sled tedy vede z vrcholu v_0 do vrcholu v_k . V orientovaném sledu požadujeme, aby byly všechny hrany orientovány „vpřed ve směru sledu“. V obecných sledech se mohou vrcholy i hrany opakovat a každý sled je jednoznačně určen posloupností svých hran.

Definice 8. (*Orientovaná cesta*). *Orientovaný sled, ve kterém se neopakuje žádný vrchol, nazýváme orientovanou cestou.*

Definice 9. (*Uzavřený sled*). *Orientovaný sled, který má alespoň jednu hranu a jehož počáteční a koncový vrchol splývají, nazýváme uzavřeným sledem.*

Definice 10. (*Uzavřená cesta*). *Uzavřená cesta je uzavřený sled, ve kterém se neopakují vrcholy a navíc se neopakují ani hrany.*

Neorientovaná uzavřená cesta se nazývá kružnice a orientovaná uzavřená cesta se nazývá cyklus.

Definice 11. (*Dostupnost*). *Vrchol y je orientovaně dostupný z vrcholu x , jestliže existuje orientovaný sled, který vede z vrcholu x do vrcholu y .*

Definice 12. (*Matice incidence*). *Nechť je $G = (V, E, \epsilon)$ orientovaný graf bez smyček s n vrcholy. Označme vrcholy v_1, \dots, v_n (v libovolném, ale pevném pořadí) a zvolme také pořadí hran e_1, \dots, e_m . Matice incidence grafu G je matice $B_G = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ definovaná předpisem*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže je } v_i \text{ počátečním vrcholem hrany } e_j, \\ -1, & \text{jestliže je } v_i \text{ koncovým vrcholem hrany } e_j, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tímto jsme uvedli důležité pojmy z teorie grafů, které jsou potřebné k formulaci modelů pro využití síťových prostředků. V následující sekci nejprve uvedeme deterministickou formulaci úlohy a posléze formulaci pozměníme pro přítomnost náhodné veličiny. Bude se jednat o formulaci úlohy jednoduché rekurze, po které uvedeme vylepšený model stochastického programování. Nakonec předvedeme rozšíření modelu stochastického programování, který povede ke značnému zjednodušení úlohy.

Formulace deterministické úlohy lineárního programování

Zde začneme formulací deterministické úlohy a posléze formulaci pozměníme pro přítomnost náhodné veličiny.

Předpokládáme, že poptávka pro každou trasu je známá, tedy v úloze se nevykytuje náhoda.

i	index itineráře;
x_i	množství zdrojů přidělených k itineráři i ;
A_i	vektor incidence, který specifikuje cestu související s itinerářem i ; je tvořen tolika prvky, kolik je v síti legů;
$a_{l,i}$	$= \begin{cases} 1, & \text{pokud leg } l \text{ patří do cesty s itinerářem } i, \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$
v_i	jednotky výnosů spojené s itinerářem i ;

C vektor dostupných kapacit legů s elementy c_i ;
 \bar{d}_i poptávka pro itinerář i ;

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i v_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i A_i x_i \leq C, \\ & 0 \leq x_i \leq \bar{d}_i, \quad \forall i. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Maximalizujeme výnosy ze zdrojů přes všechny itineráře za podmínky, že množství zdrojů nepřevyšuje poptávku a za podmínky, že součet legů v jednotlivých itinerářích pro zdroje nepřevyšuje dostupné kapacity legů.

\tilde{d}_i náhodná poptávka pro itinerář i .

Poptávka \bar{d}_i použitá v modelu (1.9) je obvykle střední hodnota náhodné veličiny \tilde{d}_i . V případě, že je poptávka náhodná veličina, můžeme uvažovat model pravděpodobnostního nelineárního programu, který vypadá následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i v_i \mathbf{E} [\min\{x_i, \tilde{d}_i\}] \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i A_i x_i \leq C, \\ & 0 \leq x_i, \quad \forall i. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Jestliže pro všechny trasy i platí $\tilde{d}_i = \bar{d}_i$, pak řešení (1.9) řeší také úlohu (1.10). Jestliže jsou poptávky náhodné, čili obecně $\tilde{d}_i \neq \bar{d}_i$, pak nejistotu tento model nedokáže vyřešit. To znamená následující: jestliže nastane $\tilde{d}_i < x_i$, pak model nezachycuje možnost přerozdělit nevyužitou kapacitu na jiné itineráře. V takovém případě není model (1.10) pro modelování příjmů příliš vhodný.

Formulace stochastické úlohy jednoduché rekurze

Pro zlepšení nedokonalosti modelu (1.10) přejdeme k obecnější třídě stochastických formulací. Přepíšeme (1.10) na jednoduchý rekurzivní problém následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i \{v_i x_i - \mathbf{E} [h_i(x_i, \tilde{d}_i)]\} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i A_i x_i \leq C, \\ & 0 \leq x_i, \quad \forall i, \end{aligned} \tag{1.11}$$

kde

$$\begin{aligned} h_i(x_i, \tilde{d}_i) &= \min \quad v_i z_i^- \\ \text{s.t.} \quad & z_i^+ - z_i^- = d_i - x_i \\ & 0 \leq z_i^+, z_i^-. \end{aligned} \tag{1.12}$$

V podproblému (1.12) se vyskytuje kladná a záporná část veličiny z_i^+, z_i^- . V optimalizaci při rozdělení veličiny na kladnou a zápornou část vždy dostaneme jednu z hodnot nulovou. Čili v případě omezení $z_i^+ - z_i^- = d_i - x_i$ bude rozdíl buď záporný $-z_i^-$ nebo kladný $+z_i^+$. V účelové funkci podproblému (1.12) minimalizujeme $v_i z_i^-$. Výnos je nezáporný a snažíme se tedy minimalizovat z_i^- . Chceme, aby byl rozdíl $d_i - x_i$ buď kladný, což nastane v případě, že $z_i^- = 0$, nebo pokud má být rozdíl $d_i - x_i$ záporný, pak chceme, aby byl co nejbližší k 0. To znamená, že požadujeme, aby pro omezení $d_i - x_i$, které symbolizuje poptávka mínus množství zdrojů, splňovalo buď, že je poptávka větší než množství zdrojů, nebo aby množství zdrojů příliš nepřevyšovalo poptávku.

Poznamenejme, že model (1.11) je ekvivalentní s modelem (1.10), což plyne z následujících rovností

$$h_i(x_i, d_i) = v_i \max(0, x_i - d_i)$$

a

$$v_i x_i - \mathbf{E}[h_i(x_i, d_i)] = v_i x_i + v_i \mathbf{E}[\min(0, \tilde{d}_i - x_i)] = v_i \mathbf{E}[\min(x_i, \tilde{d}_i)].$$

Funkce lineárního programu ve formě „min“ je konvexní, a tedy i model (1.11)/(1.10) je konvexní dvoustupňový program s oddělitelnými podproblémy. Jestliže platí $d_i - x_i < 0$, pak není přebytečná kapacita odpovídajícím způsobem převedena na jiné trasy.

Model stochastického programování

Nyní uvedeme model stochastického programování, který překonává některé nedostatky předchozích přístupů (1.9) a (1.10). Model poskytuje lepší reprezentaci přidělení nevyužité kapacity. Jedná se o dvoustupňový model, kde první stupeň přiděluje kapacitu různým třídám zákazníků a druhá etapa poskytuje způsob, jak modelovat využití kapacit. Účelová funkce prvního stupně reprezentuje očekávané příjmy a podmínky spojené s prvním stupněm reprezentují kapacity legů sítě. Lagrangeovy multiplikátory spojené s těmito podmínkami pro první stupeň reprezentují marginální hodnoty spojené s každým legem a jsou použity jakožto ceny nabídky. Model druhého stupně schopnosti využití kapacit je lineární program, který má velmi mnoho společného s modelem (1.9).

Začněme uvedením následujících proměnných

L	množina legů;
c_l	kapacita odpovídající legu $l \forall l \in L$;
S	množina tříd zákazníků;
$y_{s,l}$	kapacita legu l odpovídající třídě $s \forall (s,l) \in S \times L$;
y	vektor přidělení zdrojů;
\tilde{d}_i	náhodná poptávka zákazníka pro itinerář i ;
	reprezentuje celkový počet požadavků na kapacitu;
\tilde{d}	vektor náhodných poptávek;
$h(y, d)$	příjmy generované počátečním rozhodnutím y pro poptávku d .

V provedení vlastního řízení nebudou hrát prvotní rozhodovací proměnné y roli, nicméně omezení pro tyto proměnné nám pomohou vyhodnotit marginální hodnoty kapacity, což lze posléze použít pro regulaci ceny nabídky.

$$\begin{aligned} \max \quad & E[h(y, \tilde{d})] \\ \text{s.t.} \quad & \sum_s y_{s,l} \leq c_l, \quad \forall l \in L, \\ & 0 \leq y. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Jestliže jsme schopni dobře aproximovat $h(y, d)$, pak mohou být Lagrangeovy multiplikátory spojené s podmínkou kapacit použity k poskytnutí ceny nabídky. Funkce h může být modelována použitím druhého lineárního programu, ve kterém jsou příjmy maximalizovány za podmínek předběžného přidělení zdrojů y a poptávky d . Nechť

- $f_i \equiv$ počet zákazníků obslužených na itineráři i ;

Parametry použité v modelu jsou následující

- $I \equiv$ množina všech itinerářů;
- $L \equiv$ množina všech legů v síti;
- $I_l \equiv$ množina itinerářů užívajících leg $l \in L$;
- $s(i) \equiv$ třída odpovídající itineráři i ;
- $v_i \equiv$ příjem generovaný zákazníkem obsluženým na itineráři i .

Pak je model maximalizace příjmů lineárního programování následující

$$\begin{aligned} h(y, d) = \max \quad & \sum_{i \in I} v_i f_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\{i \in I | s(i)=s\}} f_i \leq y_{s,l} \quad \forall s \in S, \quad l \in L, \\ & 0 \leq f_i \leq d_i \quad \forall i \in I. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Rozdíly mezi formulací stochastické úlohy lineárního programování (SLP) (1.13) a deterministické úlohy lineárního programování (DLP) (1.9) jsou následující. Za prvé, model přidělení prostředků (DLP) (1.9) je založený na trasách (kombinacích tříd tras), zatímco (SLP) (1.13) modely přiřazení zdrojů jsou založené na kombinacích tříd legů. To do určité míry umožňuje přerozdělit volnou kapacitu, pokud je kapacita k dispozici. To znamená, že přidělená kapacita legu je k dispozici všem trasám využívajícím tento leg. Nicméně toto přerozdělení zůstává omezené podle tříd zákazníků, takže nevyužitá kapacita, která je přidělena jedné třídě zákazníků, pak není k dispozici jiným třídám zákazníků. Druhým rozdílem je skutečnost, že každý leg má v problému (DLP) (1.9) jedno kapacitní omezení, kdežto v podproblému (SLP) (1.14) má každý leg samostatné omezení pro každou třídu.

Rozšíření modelu stochastického programování

Ačkoliv stochastický lineární model (1.13) přináší výhody z pohledu výnosů častěji než model deterministického lineárního programování (1.9), zdá se, že zavedení dodatečných tříd cen letenek může tyto výhody omezit. Existují dva základní rozdíly, které je potřeba vyšetřit: *vnoření* a *načasování*. Vnoření odkazuje na schopnost prodat kapacitu, která byla přidělena určité třídě zákazníků, zákazníkům, kteří jsou ochotni zaplatit vyšší cenu. Načasování odkazuje na skutečnost, že příjem poptávky se může významně lišit v závislosti na třídě; zákazníci z nižší třídy jízdného budou mít tendenci k dřívějšímu návratu než zákazníci z vyšší třídy jízdného. Model stochastického programování (1.13) některé z těchto podmínek nebere v úvahu a je možné, že model, který bude zahrnovat tyto provozní podmínky, bude generovat ceny přinášející vyšší výnosy. Abychom přibližně zaznamenali dopad vnoření, musíme modelovat schopnost zákazníků ze skupiny s vyšším jízdným získat přístup ke kapacitě, která byla přidělena skupině s nižším jízdným. Podmínka $\sum_{\{i \in I_l | s(i)=s\}} f_i \leq y_{s,l} \quad \forall s \in S, \quad l \in L$ omezuje prodeje podle třídy zákazníků. Za předpokladu, že jsou třídy zákazníků uspořádané tak, že $v_s \leq v_{s'}$ kdykoliv $s' \leq s$, můžeme tuto podmínku nahradit následující podmínkou

$$\sum_{i \in I_l | s(i) \geq s} f_i \leq \sum_{s' \geq s} y_{s',l} \quad \forall s \in S, \quad l \in L.$$

Při řešení výsledného stochastického programu dojde díky této modifikaci ke značnému zjednodušení prvního stupně modelu. Veškerá kapacita bude přidělena třídě zákazníků s nejvyšším indexem. Prostřednictvím řešení podproblému může být kapacita kompletně přesměrovaná pro každý scénář poptávky.

2. Vícestupňová stochastická optimalizace

Většina praktických rozhodovacích problémů obsahuje posloupnost rozhodnutí, která reagují na výstupy vyvíjející se v čase. V první kapitole jsme se zabývali dvoustupňovou stochastickou optimalizací a v případě vícestupňové optimalizace uvažujeme horizont rozhodování větší než dva stupně. Ukázkovým příkladem vícestupňové stochastické optimalizace je například problém prodavačky květin, kterou přebíráme z publikace [6]. Problém prodavačky květin spočívá v tom, že květinářka nakupuje růže za nákupní cenu a prodává je za cenu prodejní. Prodejní cena květin je vyšší než cena nákupní a květiny, které v daný nákupní den květinářka neprodá, mohou být uloženy a prodány následující den, kdy prodavačka začne s prodejem právě těchto odložených květin. Květiny se nesmí přenášet o více než jeden den. V takovém případě jsou vyhozeny. Poptávka po květinách je pro každý den náhodná. Cílem květinářky je samozřejmě maximalizovat očekávaný zisk. Horizont prodeje květin souvisí s počtem dní, během kterých prodavačka prodává květiny bez jakéhokoliv přerušení.

Princip vícestupňové stochastické optimalizace přebíráme z publikací [1] a [5]. Při formulaci vícestupňových stochastických úloh je běžné nejdříve zafixovat horizont a posloupnost časů, ve kterých budou rozhodnutí učiněna. V obecném stochastickém programu N -tého stupně uvažujeme náhodná data $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{N-1})$ a rozhodnutí procesu $x = (x_1, \dots, x_N)$. Rozhodnutí x_2, \dots, x_N a vektor ω jsou náhodné veličiny, zatímco rozhodnutí x_1 je nenáhodné. Požadujeme, aby rozhodnutí učiněná v jakékoliv fázi rozhodovacího procesu byla *neanticipativní*, což znamená, že rozhodnutí učiněná v libovolném stupni procesu nezávisí ani na budoucí realizaci náhodných dat, ani na budoucích rozhodnutích, zatímco je využíváno informací z minulosti, stejně jako znalostí pravděpodobnostního rozdělení dat. Rozhodnutí prvního stupně je tvořeno všemi rozhodnutími, která musí být vybrána dříve, než budou odhaleny další informace, zatímco rozhodnutí druhého stupně se mohou těmito informacím přizpůsobit. Takto se postupuje i v dalších stupních úlohy. Schéma posloupnosti rozhodnutí a realizace náhody je

$$x_1 \rightarrow \omega_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \omega_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{N-1} \rightarrow \omega_{N-1} \rightarrow x_N.$$

Stupně nemusí nutně odkazovat na časové období, nýbrž odpovídají jednotlivým krokům v rozhodovacím procesu.

2.1 Formulace úlohy lineární vícestupňové stochastické optimalizace

Nyní přistoupíme k matematické formulaci lineární vícestupňové stochastické úlohy z publikace [1]. Konkrétně se jedná o vícestupňovou úlohu stochastické optimalizace s pevnou rekurzí a vypadá následujícím způsobem:

$$\min \quad c^1 x^1 + \mathbf{E}_{\xi^2}[\min c^2(\omega)x^2(\omega^2) + \dots + \mathbf{E}_{\xi^N}[\min c^N(\omega)x^N(\omega^N)] \dots] \quad (2.1)$$

$$\text{s.t.} \quad W^1 x^1 = h^1,$$

$$T^1(\omega)x^1 + W^2 x^2(\omega^2) = h^2(\omega),$$

$$\vdots$$

$$T^{N-1}(\omega)x^{N-1}(\omega^{N-1}) + W^N x^N(\omega^N) = h^N(\omega),$$

$$0 \leq x^1, \quad 0 \leq x^t(\omega^t), \quad t = 2, \dots, N,$$

kde c^1 je známý vektor z \mathbb{R}^{n_1} , h^1 je známý vektor z \mathbb{R}^{m_1} , každá matice W^t velikosti $m_t \times n_t$ je známá. Rozhodnutí x závisí na historii do času t , kterou značíme ω^t . $\xi^t(\omega) = (c^t(\omega), h^t(\omega), T^{t-1}(\omega))$ je náhodný vektor, který obsahuje všechny náhodné složky. Dále předpokládáme, že Ξ^t je nosič ξ^t .

Vícestupňové problémy stochastické optimalizace jsou přímočarým zobecněním dvoustupňového rekurzivního problému, přičemž zde lze činit rozhodnutí v různých časech $1, 2, \dots, N$.

Nyní k tomuto problému (2.1) formulujeme deterministickou podobu úlohy. Pro poslední stav (stupeň) máme

$$Q^N(x^{N-1}, \xi^N(\omega)) = \min c^N(\omega)x^N(\omega) \quad (2.2)$$

$$\text{s.t.} \quad W^N x^N(\omega) = h^N(\omega) - T^{N-1}(\omega)x^{N-1},$$

$$x^N(\omega) \geq 0.$$

Rekurzi pro $t = 2, \dots, N - 1$ získáme tím, že pro všechna t položíme

$$Q^{t+1}(x^t) = \mathbf{E}_{\xi^{t+1}}[Q^{t+1}(x^t, \xi^{t+1}(\omega))],$$

kde

$$Q^t(x^{t-1}, \xi^t(\omega)) = \min c^t(\omega)x^t(\omega) + Q^{t+1}(x^t) \quad (2.3)$$

$$\text{s.t.} \quad W^t x^t(\omega) = h^t(\omega) - T^{t-1}(\omega)x^{t-1},$$

$$x^t(\omega) \geq 0,$$

kde používáme x^t jako indikátor stavu systému. Další informace o stavu z hlediska realizace náhodných parametrů až do času t by měly být zahrnuty ve formulaci, jestliže rozdělení ξ^t nezávisí na minulých výstupech. Hodnota, kterou hledáme je

$$\min z = c^1 x^1 + Q(x^1) \quad (2.4)$$

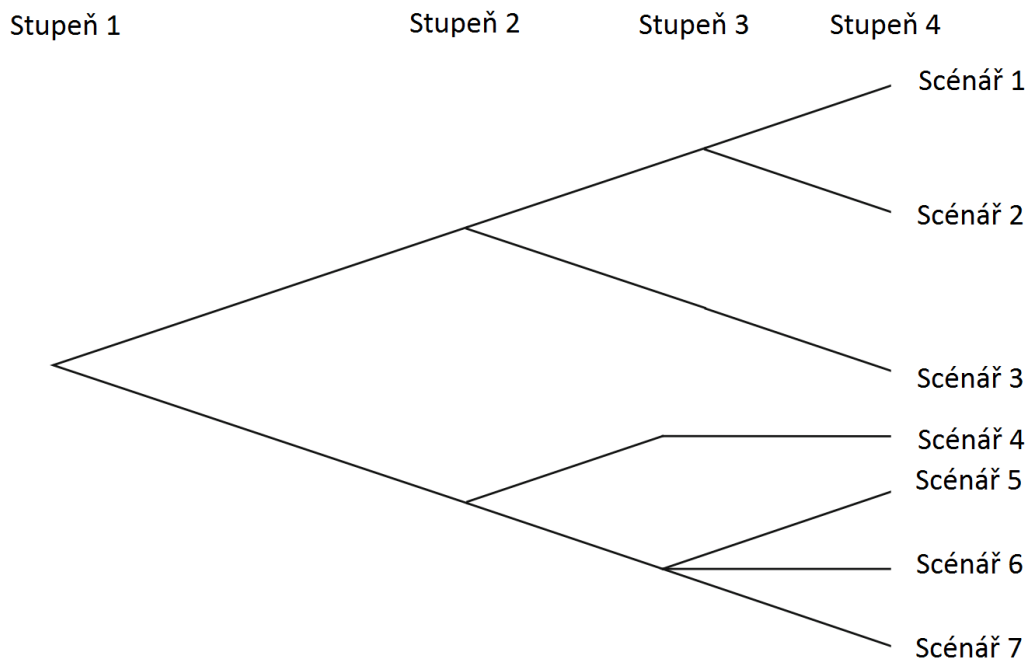
$$\text{s.t.} \quad W^1 x^1 = h^1,$$

$$x^1 \geq 0.$$

Tato úloha je stejného formátu jako dvoustupňová deterministická úloha z první kapitoly.

2.1.1 Scénáře

Pro práci s vícestupňovými úlohami stochastického programování je potřeba uvažovat *scénáře*. Informace k tomuto tématu přebíráme taktéž z publikace [1]. Jedná se o množinu možných budoucích posloupností výstupů. Princip scénářů si vysvětlíme pomocí stromu, který je vytvořený na základě publikace [1] a je ilustrovaný na obrázku (2.1). Při pohledu na poslední stupeň ($N = 4$) registrujeme sedm scénářů. V předchozích stupních ($t < 4$) máme omezený počet možných realizací, které nazýváme *scénáře stupně t* . Každý z těchto scénářů stupně t má jediného *předchůdce*, což je předcházející scénář ve stupni ($t - 1$) a možná několik *následovníků*, což jsou scénáře ve stupni ($t + 1$). Poznamenejme, že různé scénáře ve stupni t mohou odpovídat stejným realizacím ξ^t a jsou rozlišeny pouze rozdíly v jejich předchůdcích.



Obrázek 2.1: Strom o sedmi scénářích přes čtyři stupně.

2.2 Způsoby řešení úloh vícestupňové stochastické optimalizace

Při řešení vícestupňových úloh dochází ke zobecňování metod řešení úloh dvoustupňových. Mezi nejslibnější metody řešení patří opět metody založené na dekompozici, jako je například *vnořená L-shaped metoda* nebo *Benderův rozklad*. Základní myšlenkou těchto dvou metod je umístění řezů do $\mathcal{Q}^{t+1}(x^t)$ v (2.3) a přidání dalších řezů k tomu, aby se získalo x^t , které je přípustné pro všechny scénáře. Řezy představují postupné lineární aproximace \mathcal{Q}^{t+1} . Tento proces vzhledem k polyedrické struktuře \mathcal{Q}^{t+1} konverguje k optimálnímu řešení při konečném počtu kroků. My se v této práci zaměříme na vnořenou L-shaped metodu.

2.2.1 Vnořená L-shaped metoda

Vnořená L-shaped metoda je rozšířením klasické L-shaped metody, které jsme se věnovali v první kapitole v podkapitole 1.4.1. Princip metody a její algoritmus přebíráme z článku [3] a knihy [1].

Nejprve uvedeme některé veličiny, se kterými budeme v algoritmu pracovat.

ξ_i^t	realizace náhodných parametrů stupně t ;
$(\xi_{i^2}^2, \dots, \xi_{i^t}^t)$	scénář stupně t ;
$\xi^{t,k}$	realizace náhodných parametrů scénáře k ve stupni t ;
$p^{t,k}$	pravděpodobnost scénáře k ve stupni t ;
$a(k)$	předchůdce scénáře k ve stupni t ;
$\mathcal{D}(k)$	množina následovníků scénáře k ve stupni t ;

Vícestupňovou úlohu stochastické optimalizace (2.1) pro účely vnořené L-shaped metody přeformulujeme pomocí scénářů. Předpokládejme, že náhodné elementy jsou definovány na diskretním pravděpodobnostním prostoru $(\Xi, \sigma(\Xi), P)$, kde $\Xi = \Xi^2 \otimes \dots \otimes \Xi^N$ je nosič náhodných veličin pro stupně od 2 do N a kde

$$\Xi^t = \{\xi_i^t = (h^t(\xi_i^t), c^t(\xi_i^t), T_{:,1}^{t-1}(\xi_i^t), \dots, T_{:,n}^{t-1}(\xi_i^t))\}.$$

Uzly stupně t jsou ve stromě scénářů definovány realizacemi ξ_i^t náhodných parametrů ve stupni t a historií realizací $(\xi_{i^2}^2, \dots, \xi_{i^{t-1}}^{t-1})$ náhodných parametrů do stupně $t-1$. Formulace vícestupňové stochastické úlohy lineárního programování pomocí scénářů je následující:

$$\min z = c^1 x^1 + \mathcal{Q}^2(x^1) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & W^1 x^1 = h^1, \\ & x^1 \geq 0, \end{aligned}$$

kde pro libovolné rozhodnutí scénáře $x^{t-1,k}$ ve stupni $t-1$ je střední hodnota rekursivní funkce $\mathcal{Q}^t(x^{t-1,k})$ ve stupni t je dána výrazem

$$\mathcal{Q}^t(x^{t-1,k}) = \sum_{m \in \mathcal{D}(k)} \frac{p^{t,m}}{p^{t-1,k}} \mathcal{Q}^t(x^{t-1,k}, \xi^{t,m}).$$

Nechť h značí scénář stupně t v $\mathcal{D}(k)$. Pak rekursivní náklady stupně t , získané z rozhodnutí $x^{t-1,k}$ stupně $t-1$ a z realizace $\xi^{t,h} \in \Xi^t$, zapíšeme jako další optimalizační problém

$$\mathcal{Q}^t(x^{t-1,k}, \xi^{t,h}) = \min c^t(\xi^{t,h}) x^{t,h} + \mathcal{Q}^{t+1}(x^{t,h}) \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & W^t x^{t,h} = h^t(\xi^{t,h}) - T^{t-1}(\xi^{t,h}) x^{t-1,k}, \\ & x^{t,h} \geq 0. \end{aligned}$$

Ve stupni N se předpokládá, že $\mathcal{Q}^{N+1}(x^N) = 0$ pro všechny hodnoty x^N .

S pomocí této formulace úlohy nyní přistoupíme ke způsobu řešení úlohy vícestupňové stochastické optimalizace pomocí algoritmu vnořené L-shaped metody. Stejně jako v L-shaped algoritmu, tak i zde algoritmus vnořené L-shaped metody

nahrazuje v každém podproblému stupně $t+1$ střední hodnotou rekurzivní funkce s proměnnou $\theta^{t,k}$ a následně omezuje $\theta^{t,k}$ po sobě jdoucími lineárními aproximacemi $Q^{t+1}(x^{k,t})$. Lineární aproximace, nebo řezy optimality, dávají dolní hranice středních hodnot rekurzivních funkcí pro všechna přípustná řešení podproblému stupně t .

V uzlu k stupně t je vyřešen následující program

$$Q^t(x^{t-1,a(k)}, \xi^{t,k}) = \min c^t(\xi^{t,k})x^{t,k} + \theta^{t,k} \quad (2.7)$$

$$\text{s.t.} \quad W^t x^{t,k} = h^t(\xi^{t,k}) - T^{t-1}(\xi^{t,k})x^{t-1,a(k)}, \quad (2.8)$$

$$D_i^{t,k} x^{t,k} \geq d_i^{t,k}, i = 1, \dots, r^{t,k}, \quad (2.9)$$

$$E_i^{t,k} x^{t,k} + \theta^{t,k} \geq e_i^{t,k}, i = 1, \dots, s^{t,k}, \quad (2.10)$$

$$x^{t,k} \geq 0,$$

kde je $\theta^{t,k}$ neomezené.

Omezení (2.9) jsou řezy přípustnosti a omezení (2.10) jsou řezy optimality. Oba dva typy řezů jsou generovány postupně během algoritmu. Algoritmus začíná bez jakýchkoliv řezů přípustnosti a optimality v podproblémech a pro všechny hodnoty k a t je $\theta^{t,k}$ nastaveno na nulu. Nejprve dojde k vyřešení podproblému prvního stupně. Každý z podproblémů druhého stupně je pak uvažován s použitím aktuálního řešení prvního stupně pro nastavené pravé strany. Celý algoritmus pak tímto způsobem pokračuje přes celý strom scénářů.

Jestliže je podproblém $Q^t(\hat{x}^{t-1,a(k)}, \xi^{t,k})$ stupně t nepřípustný pro konkrétní řešení $\hat{x}^{t-1,a(k)}$ scénáře ze stupně $t-1$, pak je přidáno do podproblému stupně $t-1$ další omezení, které odstraní $\hat{x}^{t-1,a(k)}$ z množiny přípustných řešení. Z duality nepřípustnost $Q^t(\hat{x}^{t-1,a(k)}, \xi^{t,k})$ implikuje existenci směru $\hat{\pi}^{t,k}$, při kterém se duální problém stává neomezeným, a který splňuje následující nerovnost

$$\hat{\pi}^{t,k}(h^t(\xi^{t,k}) - T^{t-1}(\xi^{t,k})\hat{x}^{t-1,a(k)}) > 0.$$

Čili u úlohy $Q^{t-1}(\bullet, \xi^{t-1,a(k)})$ je odebráno $\hat{x}^{t-1,a(k)}$ z množiny přípustných řešení stupně $t-1$ přidáním omezení

$$D_{r^{t-1}+1}^{t-1,a(k)} x^{t-1,a(k)} \geq d_{r^{t-1}+1}^{t-1,a(k)},$$

kde $D_{r^{t-1}+1}^{t-1,a(k)} = \hat{\pi}^{t,k}T^{t-1}(\xi^{t,k})$, a $d_{r^{t-1}+1}^{t-1,a(k)} = \hat{\pi}^{t,k}h^t(\xi^{t,k})$ a r^{t-1} je aktuální počet řezů přípustnosti v podproblému stupně $t-1$.

Jestliže je podproblém prvního stupně nepřípustný, pak je celý problém nepřípustný a algoritmus končí.

Typický proces tvorby řezů optimality začíná v okamžiku, kdy jsou vyřešeny všechny podproblémy pro celý strom scénářů. Algoritmus začíná ve stupni $N-1$ zpětným procházením stromu scénářů. V podproblému k ve stupni t je zřízená dolní mez stupně $t+1$ střední hodnoty rekurzivní funkce $Q^{t+1}(x^{t,k})$ odpovídající aktuálnímu uzlu. Toto omezení je ve formě lineární funkce $x^{t,k}$ a váženého součtu optimálních duálních multiplikátorů z každého následovného uzlu stupně $t+1$.

Duální multiplifikátory značíme $(\pi^{t+1,m}, \delta^{t+1,m}, \sigma^{t+1,m})$. Předpokládejme, že aktuální řešení v tomto uzlu je $\tilde{x}^{t,k}$ a aproximace střední hodnoty rekurzivní funkce je $\tilde{\theta}^{t,k}$. Dolní mez je pro $x^{t,k} = \tilde{x}^{t,k}$ tvořena následujícím způsobem

$$\theta^{t,k} \geq \sum_{m \in \mathcal{D}(k)} \frac{p^{t+1,m}}{p^{t,k}} (\pi^{t+1,m} (h^{t+1}(\xi^{t+1,m}) - T^t(\xi^{t+1,m}) x^{t,k}) + \delta^{t+1,m} d^{t+1,m} + \sigma^{t+1,m} e^{t+1,m}) = \bar{\theta}^{t,k}.$$

Omezení ve tvaru (2.10) je pak získáno položením

$$E_i^{t,k} = \sum_{m \in \mathcal{D}(k)} \frac{p^{t+1,m}}{p^{t,k}} \pi^{t+1,m} T^t(\xi^{t+1,m})$$

a

$$e_i^t = \sum_{m \in \mathcal{D}(k)} \frac{p^{t+1,m}}{p^{t,k}} (\pi^{t+1,m} h^{t+1}(\xi^{t+1,m}) + \delta^{t+1,m} d^{t+1,m} + \sigma^{t+1,m} e^{t+1,m})$$

pro $i = s^{t,k} + 1$. Jestliže už aktuální aproximace střední hodnoty rekurzivní funkce není platná (t.j. $\tilde{\theta}^{t,k} < \bar{\theta}^{t,k}$), pak je toto lineární omezení pro řez optimality přidáno do podproblému tohoto uzlu. Proces pokračuje dokud není přidán do podproblému prvního stupně řez optimality odpovídající prvnímu stupni. V tomto okamžiku je problém vyřešen.

Každý řez může být jednoznačně přidělen do optimální báze podproblému, který má konečný počet bází, čili tento algoritmus končí v konečném čase. Navíc algoritmus končí s optimálním řešením (pokud existuje).

2.3 Odhalování pašeráků nukleárního materiálu na náhodné síti

Nyní uvedeme příklad vícestupňové stochastické optimalizace na síti na základě článku [14]. Tento příklad je motivovaný zdokumentovanými incidenty nezákonného obchodování s nukleárním materiálem a opakovanými pokusy teroristických skupin o získání nukleárních zbraní. Jedná se o problematiku pašování nukleárního materiálu přes hranice, kdy je cílem nainstalovat radiační detektory na transportní síť tak, aby se minimalizovala pravděpodobnost úniků pašeráků za podmínky, že je rozpočet na instalaci detektorů omezen. Budeme zde předpokládat, že v čase, kdy je potřeba určit prioritní místa pro instalaci detektorů, je rozpočet nejistý. Dále předpokládejme, že pašerák může narazit na nejvýše jeden detektor při jeho cestě z počátečního místa do cílové stanice (takovou cestu budeme označovat krátce *p-c* cesta). Jelikož všechny počáteční, nebo všechny cílové stanice leží v jedné zemi a detektory lze tedy instalovat na kontrolní body hranic této země, jedná se v tomto případě o model jedné země. Kontrolní body hranice budeme dále nazývat checkpointy.

V následujícím textu budeme často uvažovat pojem *pašerák*, který představuje osobu, která se snaží vyhnout odhalení na hranicích. Proti němu stojí *interdiktor* neboli ochránce, který chce pašeráka na hranici detekovat. Na základě nejistoty rozpočtu interdiktora stanoví množinu scénářů rozpočtu s odpovídající pravděpodobnostní funkcí. Optimální hodnotou modelu upřednostnění míst k instalaci

detektorů je seznam pořadí umístění detektorů. Jakmile je rozpočet odhalen, detektory jsou nainstalovány na základě priorit od nejvyšší k nejnižší prioritě, dokud nedojde k vyčerpání rozpočtu. V okamžiku, kdy je známý přírůstek rozpočtu, nelze přemístit detektory, které již byly nainstalovány.

2.3.1 Odhalování pašeráků nukleárního materiálu na bipartitní náhodné síti

Cílem modelu pro odhalování pašeráků nukleárního materiálu na bipartitní náhodné síti je minimalizovat pravděpodobnost, že se pašerák nukleárního materiálu vyhne detekci na bipartitní síti. Proč se v tomto případě jedná o bipartitní síť vysvětlíme níže. Nejprve však zadefinujeme pojem bipartitní graf.

Definice 13. (*Bipartitní graf*). [13] Graf $G(V, E)$ se nazývá bipartitní, pokud množinu V můžeme rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny V_1 a V_2 takové, že každá hrana z množiny E spojuje vrchol z V_1 s vrcholem V_2 .

Předpoklady modelu

Předpokládejme, že scénáře ohrožení pašeráky, kterým budeme čelit, nejsou předem známy, ale jsou řízeny známou pravděpodobnostní funkcí. Úniky pašeráků na každé hraně jsou vzájemně nezávislé a předpokládáme, že rozpočet pro odhalení pašeráků je náhodná veličina nezávislá na identitě pašeráka. Pro pašeráka ω je pravděpodobnost úniku přes checkpoint k rovna q_k^ω v případě, že je na checkpointu nainstalován detektor a p_k^ω v případě, že detektor nainstalován není, přičemž $p_k^\omega \geq q_k^\omega$.

Předpokládáme, že interdiktory a pašerák mají totožné vnímání, to znamená, že se shodnou na všech původních možnostech úniku přes hranice, stejně tak se shodnou na možnosti úniku v každém kontrolním bodě, a to v obojím případě, jak s nainstalovaným detektorem tak i bez něho. V modelu interdiktory jedné země uvažujeme, že každý pašerák se může setkat s nejvýše jedním detektorem na cestě p - c . V důsledku toho může být transportní síť transformovaná na síť s bipartitní strukturou, kde se jedna množina uzlů skládá z dvojic p - c , které přiřazujeme pašerákům, a druhá množina uzlů se skládá z hraničních checkpointů, přes které mohou pašeráci cestovat. Hrana spojuje uzel p - c s uzlem checkpointu. Předpokládáme, že každý pašerák vybírá takovou cestu, aby maximalizoval pravděpodobnost skutečnosti, že se vyhne detekci při jeho cestě ze startovní do cílové stanice, přičemž zná podmnožinu checkpointů, které jsou opatřeny detektory. Předpokládá se, že známá pravděpodobnostní funkce řídí scénáře ohrožení.

Formulace modelu

Načasování rozhodnutí a pozorování stochastických parametrů v modelu tvoří třístupňový proces. První stupeň je upřednostňování checkpointů ze strany interdiktora. Ještě dříve, než dojde k realizaci rozpočtu interdiktora, dochází k přiřazení checkpointů k množině předem stanovených úrovní dle priorit. Druhý stupeň začíná v okamžiku odhalení rozpočtu a spočívá instalaci detektorů na místa ohodnocená od nejvyšší k nejnižší prioritě, dokud není rozpočet vyčerpán. Třetí stupeň modelu nastává po odhalení scénáře ohrožení pašeráka. V tento okamžik

jsou známé všechny akce interdiktora a pašerák cestuje ze své počáteční stanice p^ω přes checkpoint k do jeho cílové stanice c^ω . Pašerák vybírá tuto cestu tak, aby maximalizoval pravděpodobnost svého úniku. Nejdříve můžeme spočítat cestu pro každou dvojici p - c přes každý checkpoint, tím by se snížil výběr cesty pašeráka na k cest.

Tato úloha je modelována jako úloha smíšeného programování a její formulace je následující.

$\omega \in \Omega$	výběrový prostor scénářů ohrožení z pohledu pašeráka;
$k \in K$	kandidáti na instalaci detektorů (checkpointy);
$K^\omega \subseteq K$	podmnožina checkpointů, které si může pašerák vybrat k překročení;
$\beta \in B$	výběrový prostor scénářů rozpočtu;
$l \in L$	úrovně priorit;
p_k^ω	pravděpodobnost úniku pašeráka ω na checkpointu $k \in K$ bez nainstalovaného senzoru;
q_k^ω	pravděpodobnost úniku pašeráka ω na checkpointu $k \in K$ s nainstalovaným senzorem; $q_k^\omega \leq p_k^\omega$;
(p^ω, c^ω)	pašerákova dvojice počátek-cíl;
γ_k^ω	produkt pravděpodobnosti úniku ω z p^ω do k a z k do c^ω , $k \in K$;
n_l	počet checkpointů přiřazených úrovni priority l (přírůstek rozpočtu);
$I_l^\beta = \begin{cases} 1, & \text{jestliže scénář rozpočtu } \beta \text{ financuje prioritní úroveň } l, \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$	
ϕ^ω	pravděpodobnostní funkce na Ω ;
ψ^β	pravděpodobnostní funkce na B ;
$x_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže je checkpoint } k \in K \text{ přidělen prioritní úrovni } l, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$	

Pro scénář rozpočtu β je rozhodovací problém pro pašeráka ω dán následujícím způsobem

$$h(x, (p^\omega, c^\omega), I^\beta) = \max_{k \in K^\omega} \{ \gamma_k^\omega p_k^\omega (1 - x_k^\beta), \gamma_k^\omega q_k^\omega x_k^\beta \}, \quad (2.11)$$

kde

$$x_k^\beta = \sum_{l \in L} I_l^\beta x_{kl}, \quad x = (x_{kl})_{k \in K, l \in L} \in X$$

a

$$X = \{ x : \sum_{k \in K} x_{kl} = n_l, \sum_{l \in L} x_{kl} \leq 1, x_{kl} \in \{0, 1\}, k \in K, l \in L \}.$$

První omezení v množině X říká, že ke každé prioritě l je přiřazeno právě n_l checkpointů. Druhé omezení v této množině říká, že libovolný checkpoint může být přiřazen nejvýše jedné úrovni l a třetí omezení znamená, že výběry interdiktora jsou modelované jako binární rozhodovací proměnné.

Linearizací funkce h z předpisu (2.11) formulujeme model odhalování pašeráků nukleárního materiálu na náhodné síti jako následující stochastický program smíšené lineární optimalizace

$$z^* = \min_{x, \theta} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{\beta \in B} \phi^\omega \psi^\beta \theta^{\omega\beta}, \quad (2.12)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in K} x_{kl} = n_l, l \in L, \quad (2.3a)$$

$$\sum_{l \in L} x_{kl} \leq l, k \in K, \quad (2.3b)$$

$$x_k^\beta = \sum_{l \in L} I_l^\beta x_{kl}, k \in K, \beta \in B, \quad (2.3c)$$

$$\theta^{\omega\beta} \geq \gamma_k^\omega p_k^\omega (1 - x_k^\beta), k \in K^\omega, \beta \in B, \omega \in \Omega, \quad (2.3d)$$

$$\theta^{\omega\beta} \geq \gamma_k^\omega q_k^\omega x_k^\beta, k \in K^\omega, \beta \in B, \omega \in \Omega, \quad (2.3e)$$

$$x_{kl} \in \{0,1\}, k \in K, l \in L. \quad (2.3f)$$

Účelová funkce (2.12) je pravděpodobnost úniku tvořená pomocí váženého součtu pravděpodobností úniku za podmínky ω a β . Omezení (2.3a), (2.3b) a (2.3f) zohledňují požadavky na platný seznam priorit. Omezení (2.3c) definuje x_{kl} , který nabývá hodnoty 1 v případě, že za scénáře rozpočtu β je na checkpoint k nainstalovaný detektor a jinak nabývá hodnoty 0. Omezení (2.3d) a (2.3e) společně s minimalizací v účelové funkci (2.12) linearizují „max“ z rovnice (2.11) pro $\theta^{\omega\beta} = h(x, (p^\omega, c^\omega), I^\beta)$.

Tento model lze dále zjednodušit. Jelikož $q_k^\omega \leq p_k^\omega$ a x_k^β je binární, pak pravá strana podmínky (2.3e) může být nahrazena výrazem $\gamma_k^\omega q_k^\omega$, kde platí, že $\theta^{\omega\beta} \geq \gamma_k^\omega q_k^\omega, k \in K^\omega, \beta \in B, \omega \in \Omega$. Nyní položme $\hat{q}^\omega = \max_{k \in K^\omega} \gamma_k^\omega q_k^\omega, \omega \in \Omega$ a poznamenejme, že \hat{q}^ω značí maximální pravděpodobnost úniku pro ω , jestliže každé umístění $k \in K^\omega$ přijímá detektor, t.j.

$$\theta^{\omega\beta} \geq q^\omega, \omega \in \Omega, \beta \in B$$

může nahradit podmínku (2.3e). Model (2.12) lze transformovat na následující stochastickou úlohu smíšeného programování, jestliže položíme $r_k^\omega = (\gamma_k^\omega p_k^\omega - \hat{q}^\omega)^+ \equiv \max\{\gamma_k^\omega p_k^\omega - \hat{q}^\omega, 0\}$ a $\hat{\theta}^{\omega\beta} = \theta^{\omega\beta} - \hat{q}^\omega$, kde $\hat{\theta}^{\omega\beta}$ je zdola omezená nulou

$$\hat{z}^* = \min_{x, \theta} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{\beta \in B} \phi^\omega \psi^\omega \hat{\theta}^{\omega\beta}, \quad (2.13)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in K} x_{kl} = n_l, l \in L, \quad (2.4a)$$

$$\sum_{l \in L} x_{kl} \leq l, k \in K, \quad (2.4b)$$

$$x_k^\beta = \sum_{l \in L} I_l^\beta x_{kl}, k \in K, \beta \in B, \quad (2.4c)$$

$$\hat{\theta}^{\omega\beta} \geq r_k^\omega (1 - x_k^\beta), k \in K^\omega, \beta \in B, \omega \in \Omega, \quad (2.4d)$$

$$x_{kl} \in \{0,1\}, k \in K, l \in L. \quad (2.4f)$$

Autoři ve zdrojovém textu [14] tento problém smíšeného celočíselného programování řeší pro různá území pomocí CPLEXu verze 10.1 a uvádějí zde i heuristický přístup k hledání řešení. Pro bližší informace odkazujeme na článek [14].

3. Úlohy s pravděpodobnostními omezeními

Stochastickou optimalizaci můžeme rozdělit na dva směry, kde jedním směrem je problematika dvoustupňových a vícestupňových úloh, kterým jsme se věnovali v prvních dvou kapitolách. Dalším směrem, kterým se stochastická optimalizace ubírá, je pravděpodobnostní programování. Pravděpodobnostnímu programování odpovídají dva silně propojené modely, kde prvním modelem je maximalizace (nebo minimalizace) pravděpodobnosti za určitých podmínek a druhým modelem je optimalizace s pravděpodobnostními omezeními. Čili rozlišujeme situace, kdy je pravděpodobnost v účelové funkci, anebo v omezeních. My se v této kapitole zaměříme na úlohy s pravděpodobnostními omezeními.

3.1 Formulace úlohy s pravděpodobnostním omezením

V této části budeme diskutovat stochastické optimalizační problémy s pravděpodobnostními omezeními, které dále dělíme na *úlohy se sdruženým pravděpodobnostním omezením* a *úlohy s individuálními pravděpodobnostními omezeními* a teorii přebíráme z publikací [17] a [9].

3.1.1 Úloha se sdruženým pravděpodobnostním omezením

Nejprve představíme úlohu se sdruženým pravděpodobnostním omezením. Buď $p \in [0,1]$ předepsaná pravděpodobnost. Pak je formulace úlohy se sdruženým pravděpodobnostním omezením následující

$$\begin{aligned} \min \quad & c(x) \\ \text{s.t.} \quad & P_F\{g(x, \xi) \leq 0\} \geq p, \\ & x \in X_1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

přičemž uvažujeme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) s prvky ω a veličina $\xi : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$ je k -dimenzionální náhodný vektor. Označme $\xi(\omega) = [\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega)]$. Dále je $F(z), z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ sdružená distribuční funkce vektoru ξ a $P_F(\cdot)$ je odpovídající pravděpodobnostní míra. Nosičem pravděpodobnostní míry je $\Xi \in \mathbb{R}^k$. Dále buď $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reálná (měřitelná) účelová funkce a $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ je množina nezávislá na náhodném parametru ξ . Tento model vyžaduje, aby byly omezující podmínky splněny s předem danou pravděpodobnostní p . Buď $g(x, \xi) = (g_1(x, \xi), \dots, g_s(x, \xi))$. Mezi jednotlivými nerovnostmi je pak v modelu přítomná statistická závislost, což vede k netriviálním optimalizačním problémům.

3.1.2 Úloha s individuálními pravděpodobnostními omezeními

Nyní uvedeme model s individuálními pravděpodobnostními omezeními, jehož formulace je následující

$$\begin{aligned} \min \quad & c(x) \\ \text{s.t.} \quad & P_{F_i}\{g_j(x, \xi) \leq 0\} \geq p_j, \quad j = 1, \dots, s, \\ & x \in X_1, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde navíc pro $j = 1, \dots, s$ jsou $g_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ reálné měřitelné funkce, $p_j \in [0, 1]$ jsou předepsané pravděpodobnosti, $F_i(z_i)$, $z_i \in \mathbb{R}$ je distribuční funkce veličin ξ_i a $P_{F_i}(\cdot)$ jsou odpovídající pravděpodobnostní míry s nosičem $\Xi_i \subset \mathbb{R}$. U úlohy s individuálními pravděpodobnostními omezeními stačí splnění každé nerovnosti $g_j(x, \xi) \leq 0$ zvláště s odpovídajícími pravděpodobnostmi p_j . Jestliže známe pro každé $x \in X_1$ rozdělení funkcí $g_j(x, \xi(\omega))$, pak lze nalézt explicitní řešení úlohy.

V případě, že se náhoda vyskytuje pouze na pravé straně omezujících podmínek, pak lze použít kvantily příslušných marginálních distribucí. Pro zjednodušení uvažujme $k = s$ a máme tedy úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & c(x) \\ \text{s.t.} \quad & P_{F_i}\{f_i(x) \leq \xi_i\} \geq p_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ & x \in X_1, \end{aligned} \tag{3.3}$$

kde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$. Pak přepis pomocí kvantilů F_i^{-1} vypadá následovně

$$\begin{aligned} \min \quad & c(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \leq F_i^{-1}(p_i) \quad i = 1, \dots, k, \\ & x \in X_1, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde je p -kvantil distribuční funkce F definován předpisem

$$F^{-1}(p) := \sup\{z : F(z) \leq p\}.$$

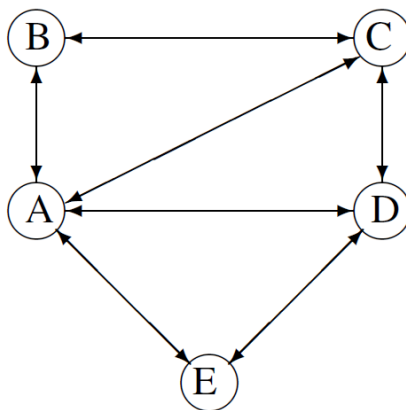
Účelová funkce může být reprezentována pomocí střední hodnoty, nebo míry rizika, tedy $c(x) = \mathbf{E}[f(x, \xi)]$, nebo $c(x) = \rho(f(x, \xi))$. Jestliže je funkce $f(\cdot, \xi)$ spojitá v x_0 a existuje integrační náhodná veličina $\hat{\xi}$ taková, že $|f(x, \xi(\omega))| \leq \hat{\xi}(\omega)$ pro P -skoro všechna $\omega \in \Omega$ a pro všechna x v okolí x_0 , pak pro všechna x v okolí x_0 je střední hodnota funkce $c(x)$ dobře definovaná a je spojitá v x_0 . Navíc konvexitá $f(\cdot, \xi)$ implikuje konvexitu střední hodnoty funkce $c(x)$. Proto můžeme provést analýzu problémů s pravděpodobnostními omezeními tak, že použijeme obecnou účelovou funkci $c(x)$ s tím, že v některých případech může být definovaná jako střední hodnota.

3.2 Problém směřování vozidel

I v této kapitole věnované úlohám s pravděpodobnostními omezeními předvedeme příklad na náhodné síti, který přebíráme z publikace [17]. Jedná se o známý problém směřování vozidel, ve kterém je cílem uspokojit dopravní poptávku. Uvažujme síť s m hranami, na kterých vzniká náhodná dopravní poptávka. Dále mějme množinu n tras na síti, které jsou popsány pomocí matice incidence T dimenze $m \times n$ takové, že

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže trasa } j \text{ obsahuje hranu } i, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Trasám musíme přidělit vozidla tak, abychom uspokojili poptávku. Obrázek (3.1) zobrazuje malou síť směřování vozidel a na obrázku (3.2) sledujeme matici incidence 19 tras na síti z obrázku (3.1). Například trasa 5 je tvořená hranami AB , BC a CA .



Obrázek 3.1: Síť směřování vozidel převzatá z publikace [17].

Hrana	Trasa																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
AB	1				1						1				1		1		
AC		1				1	1						1						1
AD			1					1	1			1							
AE				1						1				1		1			1
BA	1					1						1				1		1	
BC					1						1				1		1		
CA		1			1			1						1			1		
CB						1						1				1		1	
CD							1				1		1		1		1	1	
DA			1				1			1	1								
DC								1				1		1		1	1	1	
DE									1				1		1				1
EA				1					1				1		1				1

Obrázek 3.2: Matice incidence směřování vozidel převzatá z publikace [17].

Naším cílem je uspokojit poptávku s vysokou předepsanou pravděpodobností $p \in (0,1)$. Buď x_j počet vozidel přiřazených trase $j, j = 1, \dots, n$. Poptávka na cestování po každé hraně je dána náhodnými veličinami $Z_i, i = 1, \dots, m$. Položme $Z = (Z_1, \dots, Z_m)^T$. Náklady odpovídající provozu vozidla na trase j jsou dány veličinou c_j a položme $c = (c_1, \dots, c_n)^T$. Pak model problému směřování vozidel vypadá následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
& \min && c^T x && (3.5) \\
& \text{s.t.} && P\{Tx \geq Z\} \geq p, \\
& && x \in \mathcal{Z}_+^n.
\end{aligned}$$

V praktických aplikacích lze uvažovat heterogenní flotilu vozidel s různými kapacitami. Lze také požadovat určitá omezení na čas přepravy atd.

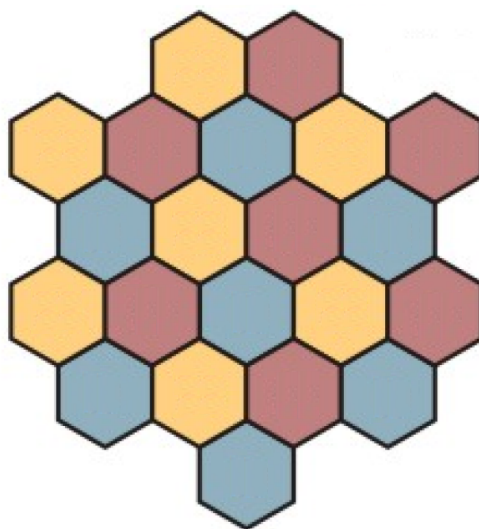
4. Vybraný příklad a jeho řešení

V poslední kapitole zformulujeme a vyřešíme úlohu problematiky stochastické optimalizace na náhodných sítích, která je inspirována reálnými daty. Úloha se týká mobilní sítě, na které zkoumáme kapacitní vytížení buněk pokrytých vysílači.

4.1 Popis mobilní sítě

Dříve než začneme formulovat úlohu, stručně zde popíšeme prostředí mobilních sítí, se kterými budeme pracovat.

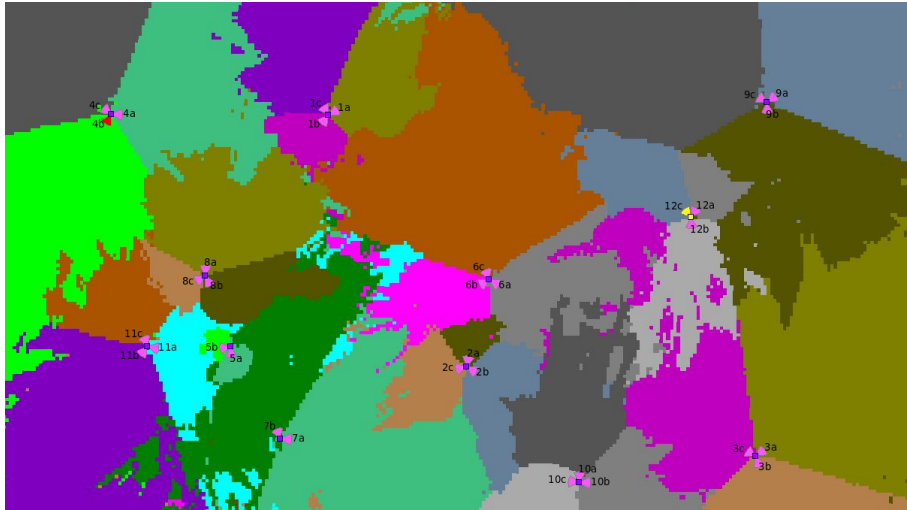
Mobilní síť je tvořena buňkami, které představují geografickou oblast, která je pokryta příslušným vysílačem na definované frekvenci. Buňkový princip spočívá v rozdělení geografického území pomocí buněk tak, aby při použití konkrétní frekvence v jedné buňce, žádná z bezprostředně sousedních buněk tuto frekvenci nepoužívala. Tímto se vzájemně sousední buňky neovlivňují. Síť takových buněk se nejčastěji zobrazuje pomocí šestiúhelníků, kde každý šestiúhelník představuje jednu buňku. Na obrázku (4.1) je ilustrována síť buněk, kde různé barvy buněk představují různé frekvence. Obrázek sítě buněk jsme obstarali z knihy [16].



Obrázek 4.1: Síť buněk.

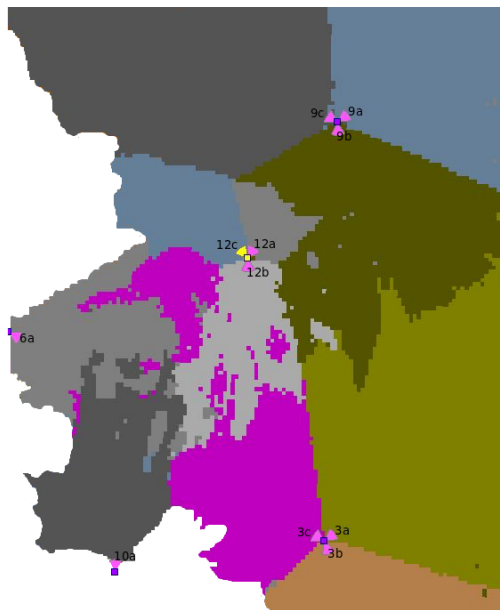
4.2 Zadání

Mějme dānu určitou geografickou oblast na území České republiky. Oblast je pokrytā společností T-Mobile Czech Republic a.s. vysílači a tvoří tak LTE síť buněk. Naším úkolem je minimalizovat náklady na výstavbu nových potenciálních buněk, které je nutné vystavět v případě, že kapacity stávajících buněk nebudou dostatečné. Na obrázku (4.2) je zobrazena mapa území buněk, která je ekvivalentní k výše zmiňovaným šestiúhelníkům v síti. Vějířky zobrazují směry antén a barvy zobrazují jednotlivé buňky LTE sítě.



Obrázek 4.2: Mapa geografické oblasti.

Vzhledem k tomu, že poskytnutá síť je rozsáhlá, pro tento ilustrativní příklad uijeme náhradní síť výběru několika buněk. Tento výběr sledujeme na obrázku (4.3).



Obrázek 4.3: Mapa výběru několika buněk.

4.3 Popis a zpracování dat

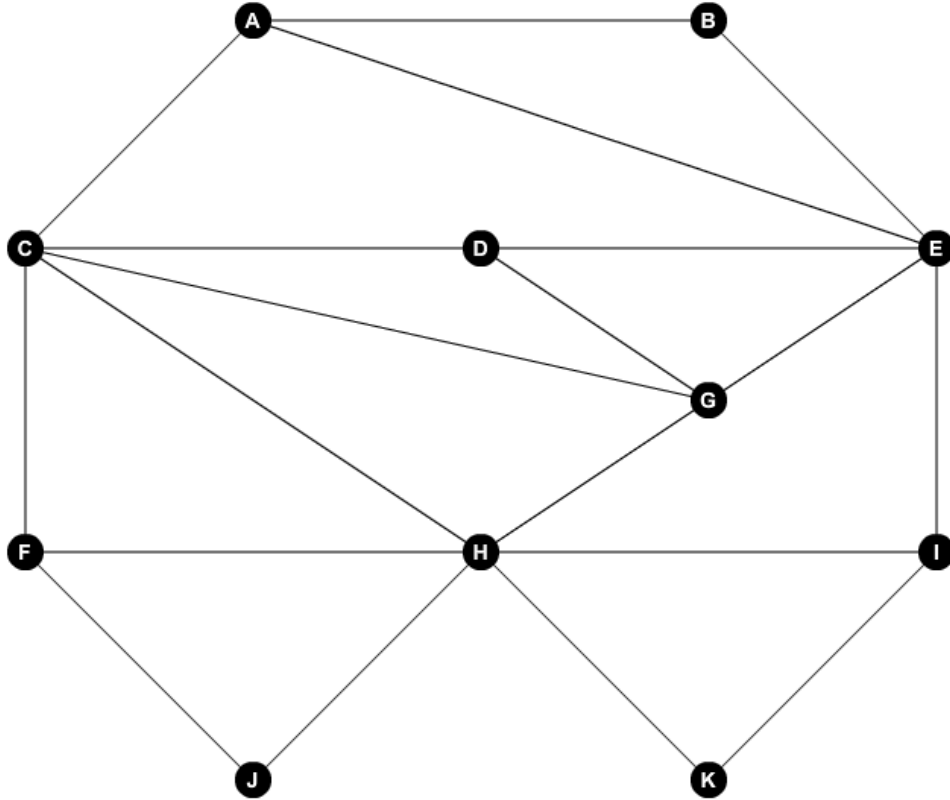
Od společnosti T-Mobile Czech Republic a.s. jsme získali k jednotlivým buňkám data týkající se sledování vytížení buněk. Jedná se o měsíční data ode dne 1.8.2014 do 1.5.2017. Konkrétně se jedná o agregovaná data z hlavní provozní hodiny za příslušných 30 dní zpětně s informací o alokaci zdrojů buňky ve směru od uživatelů k vysílači. Údaje jsou v procentech. V případě, že by nějaká buňka dosáhla 100 %, znamenalo by to, že by byla permanentně přetížená ve sledovaných

hlavních provozních hodinách, respektive její zdroje by byly 100% využity.

Datum/Buňky	9c=A	9a=B	12c=C	12a=D	9b=E	6a=F	12b=G	3c=H	3a=I	10a=J	3b=K
1.8.2014	1,31	3,54	6,52	0,54	0,68	4,46	0,91	0,99	1,47	0,3	1,64
1.9.2014	1,56	1,73	6,34	3,47	0,44	0,82	3,49	0,5	1,62	0,56	1,45
1.10.2014	24,37	28,77	5,23	3,92	9,41	19,72	3,02	7,45	12,2	11,56	13,66
1.11.2014	13,66	15,3	4,29	4,4	4,57	7,86	3,56	8,33	13,35	4,42	5,14
1.12.2014	15,19	14,23	13,45	4,25	6,12	10,59	2,62	9,14	8,4	3,8	5,2
1.1.2015	12,84	16,34	6,78	3,84	9,54	9,27	3,85	7,86	12,7	3,84	5,42
1.2.2015	18	13,32	7,02	5,09	6,5	8,89	3,96	11,75	22,45	8,99	8,02
1.3.2015	19,03	15,55	6,31	6,3	6,26	7,72	4,36	9,44	22,45	8,87	8,18
1.4.2015	27,43	21,18	16,59	7,5	6,57	16,28	3,81	7,7	11,7	7,28	8,29
1.5.2015	22,08	13,46	11,5	10,69	7,18	10,02	4,03	7,36	21,63	9,34	6,8
1.6.2015	24,78	23,99	12	9,95	8,45	9,38	5,4	17,33	26,46	9,96	9,37
1.7.2015	26,82	20,09	15,6	12,85	8,38	16,04	5,47	20,12	27,07	15,81	12,39
1.8.2015	24,63	41,35	18,57	14,08	8,86	19,23	7,39	18,77	43,08	19,62	20,28
1.9.2015	29	38,77	21,45	18,49	10,27	18,1	9,95	27,79	39,7	16,53	12,14
1.10.2015	44,09	39,11	22,65	14,35	10,7	18,13	8,85	26,1	37,36	11,91	22,6
1.11.2015	63,33	58,66	27,63	22,14	10,58	24,2	9,46	28,13	56,97	19,06	22,88
1.12.2015	36,29	55,71	37,26	19,34	18,81	20,66	9,9	27,93	52,81	13,21	14,36
1.1.2016	38,85	43,53	29,02	17,22	19,41	28,3	10,46	42,54	52,49	15,22	10,53
1.2.2016	41,97	43,68	24,6	19,75	21,68	32	14,91	34,37	30,48	20,65	12,47
1.3.2016	33,39	36,44	25,77	17,97	24,57	30,12	9,93	35,08	39,94	22,32	13,4
1.4.2016	42,62	60,47	35,33	21,1	40,2	30,92	10,19	49,73	43,26	30,12	18,3
1.5.2016	58,19	72,54	54	15,99	31,06	28,17	14,57	36,92	38,83	28,37	13,19
1.6.2016	41,38	48,87	32,12	19,76	36,34	29,36	20,17	40,87	42,26	30,33	14,98
1.7.2016	45,66	30,89	24,35	21,65	29,75	27,43	19,88	39,54	36,13	28,16	19,41
1.8.2016	51,61	33,33	26,37	34,1	45,43	18,66	29,65	37,24	43,79	35,98	15,2
1.9.2016	41,71	41,44	25,62	30,07	39,32	26,08	26,26	37,59	31,55	34,47	10,59
1.10.2016	43,96	58,33	32,67	29,57	37,98	34,54	25,58	37,94	48,51	29,02	16,25
1.11.2016	54,95	56,69	32,68	24,42	46,86	37,74	23,5	45,97	46,27	33,45	20,94
1.12.2016	59,25	53,97	31,25	26,24	39,73	50,53	29,97	46,6	42,03	30,2	18,4
1.1.2017	66,3	66,43	35,08	33,29	39,94	65	33,35	48,27	40,32	52,11	16,08
1.2.2017	74,11	60,03	45,37	31,61	39,54	41,61	44,57	63,26	36,55	38,86	19,5
1.3.2017	66,79	53,68	62,35	33,47	45,24	45,17	22,66	56,81	39,9	36,04	22,02
1.4.2017	58,24	57,24	39,48	25,11	41,16	37,46	25,47	49,23	49,28	34,42	20,17
1.5.2017	50,94	58,49	52,01	27,54	51,3	45,44	33,01	45,18	54,9	44,77	21,05

Obrázek 4.4: Tabulka hodnot.

Nyní tedy máme k dispozici 11 buněk, které sledujeme na obrázku (4.4), kde pro každou buňku máme celkem 34 pozorování. Buňky jsme přejmenovali pomocí písmen $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$ a nyní převedeme mapu do grafu. Graf vytvoříme tak, že za uzly považujeme jednotlivé buňky a hrany mezi uzly odpovídají možným přechodům z jedné buňky do druhé. Vzniklou síť označme $G(V, E)$ s množinou uzlů V a množinou hran E , kde $|V| = m = 11$, $|E| = n = 19$. Vrcholy označme v_1, v_2, \dots, v_m a hrany označme e_1, e_2, \dots, e_n . Model náhradní sítě sledujeme na obrázku (4.5). Tuto síť považujeme za náhodnou, jelikož se zde vyskytuje náhoda v podobě kapacitního vytížení jednotlivých uzlů.



Obrázek 4.5: Náhradní síť buněk.

Cílem úlohy je tedy minimalizace nákladů na výstavbu nových buněk, které je nutné vystavět v případě, že kapacita aktuálních buněk bude nedostatečná. Od společnosti T-Mobile Czech Republic a.s. jsme dále obdrželi hodnotu základního prahu, který udává omezení, při jehož překročení dochází k přetížení buněk. Tento práh budeme označovat proměnnou a a jeho hodnota je 60 %.

4.4 Formulace úlohy

V tento okamžik tedy známe množinu uzlů

$$V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\},$$

množinu hran

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

a prahovou hodnotu

$$a = 60.$$

Pro formulaci úlohy a k jejímu následnému řešení dále určíme množinu potenciálních buněk k výstavbě. Jedná se o buňky, kterým určíme přesnou polohu v rámci stávající sítě. V případě, že některé z aktuálních buněk nebudou uspokojovat požadavky zákazníků, dojde k výstavbě nové buňky v bezprostředním okolí těchto neuspokojivých buněk. Množinu nových potenciálních buněk označme

$$V' = \{L, M, N, O, P, Q, R, S, T\}$$

a jejich rozložení sledujeme na obrázku (4.6). S novými buňkami přibudou i nové potenciální hrany

$$E' = \{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+k}\},$$

které i zde znamenají bezprostřední přechod mezi jednotlivými buňkami. Dále necht' je vektor

$$c = (c_L, c_M, c_N, c_O, c_P, c_Q, c_R, c_S, c_T)$$

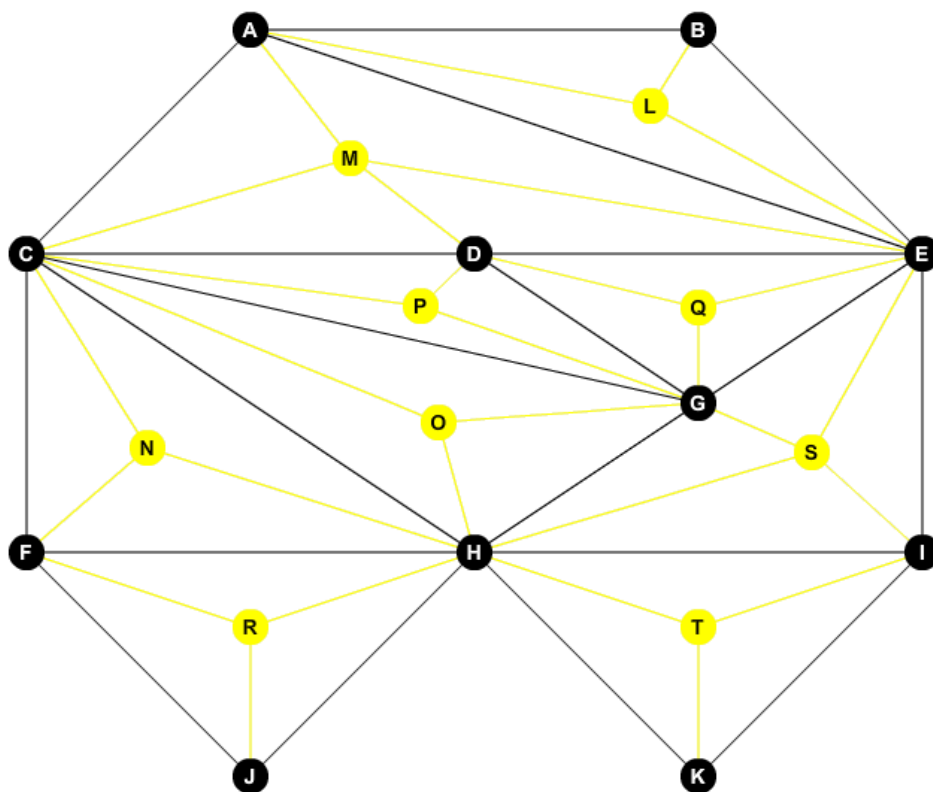
vektor nákladů na výstavbu nových buněk a množina

$$\xi = \{\xi_A, \xi_B, \xi_C, \xi_D, \xi_E, \xi_F, \xi_G, \xi_H, \xi_I, \xi_J, \xi_K\}$$

obsahuje náhodné veličiny poptávky ve stávajících buňkách. Nakonec buď

$$x = (x_L, x_M, x_N, x_O, x_P, x_Q, x_R, x_S, x_T)$$

vektor 0-1, který dává $x_i = 1$, jestliže je potřeba vystavět i -tou potenciální buňku a $x_i = 0$ jinak, pro $i = L, M, \dots, T$.



Obrázek 4.6: Náhradní síť buněk s potenciálními novými buňkami a hranami.

Nyní přistoupíme k samotné formulaci úlohy. Vzhledem k přítomnosti náhodných veličin tuto úlohu nazveme úlohou s nejistotou.

$$\min \quad c^T x, \quad (4.1)$$

$$\text{s.t.} \quad (1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L)\xi_A \leq a, \quad (A)$$

$$(1 - \frac{1}{3}x_L)\xi_B \leq a, \quad (B)$$

$$(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_P - \frac{1}{3}x_O - \frac{1}{3}x_N)\xi_C \leq a, \quad (C)$$

$$(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_P - \frac{1}{3}x_Q)\xi_D \leq a, \quad (D)$$

$$(1 - \frac{1}{3}x_L - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_Q - \frac{1}{4}x_S)\xi_E \leq a, \quad (E)$$

$$(1 - \frac{1}{3}x_N - \frac{1}{3}x_R)\xi_F \leq a, \quad (F)$$

$$(1 - \frac{1}{3}x_Q - \frac{1}{3}x_P - \frac{1}{3}x_O - \frac{1}{4}x_S)\xi_G \leq a, \quad (G)$$

$$(1 - \frac{1}{3}x_R - \frac{1}{3}x_N - \frac{1}{3}x_O - \frac{1}{4}x_S - \frac{1}{3}x_T)\xi_H \leq a, \quad (H)$$

$$(1 - \frac{1}{4}x_S - \frac{1}{3}x_T)\xi_I \leq a, \quad (I)$$

$$(1 - \frac{1}{3}x_R)\xi_J \leq a, \quad (J)$$

$$(1 - \frac{1}{3}x_T)\xi_K \leq a, \quad (K)$$

$$\frac{1}{3}x_L\xi_A + \frac{1}{3}x_L\xi_B + \frac{1}{3}x_L\xi_E \leq a, \quad (L)$$

$$\frac{1}{4}x_M\xi_A + \frac{1}{4}x_M\xi_C + \frac{1}{4}x_M\xi_D + \frac{1}{4}x_M\xi_E \leq a, \quad (M)$$

$$\frac{1}{3}x_N\xi_C + \frac{1}{3}x_N\xi_F + \frac{1}{3}x_N\xi_H \leq a, \quad (N)$$

$$\frac{1}{3}x_O\xi_C + \frac{1}{3}x_O\xi_G + \frac{1}{3}x_O\xi_H \leq a, \quad (O)$$

$$\frac{1}{3}x_P\xi_C + \frac{1}{3}x_P\xi_D + \frac{1}{3}x_P\xi_G \leq a, \quad (P)$$

$$\frac{1}{3}x_Q\xi_D + \frac{1}{3}x_Q\xi_E + \frac{1}{3}x_Q\xi_G \leq a, \quad (Q)$$

$$\frac{1}{3}x_R\xi_F + \frac{1}{3}x_R\xi_J + \frac{1}{3}x_R\xi_H \leq a, \quad (R)$$

$$\frac{1}{4}x_S\xi_E + \frac{1}{4}x_S\xi_G + \frac{1}{4}x_S\xi_H + \frac{1}{4}x_S\xi_I \leq a, \quad (S)$$

$$\frac{1}{3}x_T\xi_H + \frac{1}{3}x_T\xi_I + \frac{1}{3}x_T\xi_K \leq a, \quad (T)$$

$$x_L, x_M, x_N, x_O, x_P, x_Q, x_R, x_S, x_T \in \{0, 1\}.$$

Nyní podrobněji vysvětlíme význam těchto omezení. Vzhledem k tomu, že nové potenciální buňky umísťujeme na plochu již pokrytou stávajícími buňkami, pak po vytvoření nové buňky tato nová buňka převezme určitou část poptávky

okolních buněk. My jsme pro jednoduchost zvolili takové rozložení nových buněk, že každá nová buňka přebírá rovnoměrně poptávku buněk sousedních. Například omezení $(1 - \frac{1}{3}x_L)\xi_B \leq a$ znamená, že jestliže je $x_L = 1$, pak $\frac{2}{3}\xi_B \leq a$ a jestliže $x_L = 0$, pak $\xi_B \leq a$. Čili jestliže je vystavěna buňka L do stávající sítě, pak převezme jednu třetinu náhodné poptávky buňce B . Tímto způsobem vzniklo prvních 11 omezení. Zbylá omezení se týkají nových potenciálních buněk a vysvětlíme si je na omezení $(\frac{1}{3}x_L\xi_A + \frac{1}{3}x_L\xi_B + \frac{1}{3}x_L\xi_E) \leq a$. Toto omezení nám říká, že náhodná poptávka nové potenciální buňky L , vzniklá součtem jedné třetiny náhodné poptávky buňky A , jedné třetiny náhodné poptávky buňky B a jedné třetiny náhodné poptávky buňky E , je menší než práh a , za předpokladu, že $x_L = 1$.

Jak již bylo řečeno výše, jedná se o úlohu s nejistotou, přičemž se zde vyskytují celočíselné proměnné. Tuto úlohu převedeme na úlohu s individuálními pravděpodobnostními omezeními. Zvolili jsme variantu s individuálními pravděpodobnostními omezeními, jelikož vede ke zjednodušení problému, ve kterém budeme pracovat s jednorozměrnými kvantily. Pokud bychom uvažovali formulaci se sdruženým omezením, úloha by byla daleko složitější a museli bychom se potýkat s kvantily mnohorozměrnými. V úloze s individuálními pravděpodobnostními omezeními požadujeme, aby přípustná rozhodnutí $x = (x_L, \dots, x_T)$ splňovala každé omezení alespoň s předem danou pravděpodobností menší než 1. V tomto případě označme hladinu pravděpodobnosti $\alpha = 0,95$. Teorii k této problematice jsme rozebírali podkapitole 3.1.2.

$$\min \quad c^T x, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & P\left\{\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L\right)\xi_A \leq a\right\} \geq \alpha, \\ & P\left\{\left(1 - \frac{1}{3}x_L\right)\xi_B \leq a\right\} \geq \alpha, \\ & P\left\{\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_P - \frac{1}{3}x_O - \frac{1}{3}x_N\right)\xi_C \leq a\right\} \geq \alpha, \\ & P\left\{\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_P - \frac{1}{3}x_Q\right)\xi_D \leq a\right\} \geq \alpha, \\ & P\left\{\left(1 - \frac{1}{3}x_L - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_Q - \frac{1}{4}x_S\right)\xi_E \leq a\right\} \geq \alpha, \\ & P\left\{\left(1 - \frac{1}{3}x_N - \frac{1}{3}x_R\right)\xi_F \leq a\right\} \geq \alpha, \\ & P\left\{\left(1 - \frac{1}{3}x_Q - \frac{1}{3}x_P - \frac{1}{3}x_O - \frac{1}{4}x_S\right)\xi_G \leq a\right\} \geq \alpha, \\ & P\left\{\left(1 - \frac{1}{3}x_R - \frac{1}{3}x_N - \frac{1}{3}x_O - \frac{1}{4}x_S - \frac{1}{3}x_T\right)\xi_H \leq a\right\} \geq \alpha, \\ & P\left\{\left(1 - \frac{1}{4}x_S - \frac{1}{3}x_T\right)\xi_I \leq a\right\} \geq \alpha, \\ & P\left\{\left(1 - \frac{1}{3}x_R\right)\xi_J \leq a\right\} \geq \alpha, \\ & P\left\{\left(1 - \frac{1}{3}x_T\right)\xi_K \leq a\right\} \geq \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P\left\{\frac{1}{3}x_L\xi_A + \frac{1}{3}x_L\xi_B + \frac{1}{3}x_L\xi_E \leq a\right\} \geq \alpha, \\
& P\left\{\frac{1}{4}x_M\xi_A + \frac{1}{4}x_M\xi_C + \frac{1}{4}x_M\xi_D + \frac{1}{4}x_M\xi_E \leq a\right\} \geq \alpha, \\
& P\left\{\frac{1}{3}x_N\xi_C + \frac{1}{3}x_N\xi_F + \frac{1}{3}x_N\xi_H \leq a\right\} \geq \alpha, \\
& P\left\{\frac{1}{3}x_O\xi_C + \frac{1}{3}x_O\xi_G + \frac{1}{3}x_O\xi_H \leq a\right\} \geq \alpha, \\
& P\left\{\frac{1}{3}x_P\xi_C + \frac{1}{3}x_P\xi_D + \frac{1}{3}x_P\xi_G \leq a\right\} \geq \alpha, \\
& P\left\{\frac{1}{3}x_Q\xi_D + \frac{1}{3}x_Q\xi_E + \frac{1}{3}x_Q\xi_G \leq a\right\} \geq \alpha, \\
& P\left\{\frac{1}{3}x_R\xi_F + \frac{1}{3}x_R\xi_J + \frac{1}{3}x_R\xi_H \leq a\right\} \geq \alpha, \\
& P\left\{\frac{1}{4}x_S\xi_E + \frac{1}{4}x_S\xi_G + \frac{1}{4}x_S\xi_H + \frac{1}{4}x_S\xi_I \leq a\right\} \geq \alpha, \\
& P\left\{\frac{1}{3}x_T\xi_H + \frac{1}{3}x_T\xi_I + \frac{1}{3}x_T\xi_K \leq a\right\} \geq \alpha, \\
& x_L, x_M, x_N, x_O, x_P, x_Q, x_R, x_S, x_T \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

4.5 Řešení úlohy

V úloze stochastické optimalizace předpokládáme, že umíme úlohu vyřešit, jestliže známe rozdělení náhodných veličin. Pro vyslovenou úlohu s individuálními pravděpodobnostními omezeními z praktických důvodů předpokládáme normalitu všech náhodných veličin. Díky normálnímu rozdělení lze posléze použít kvantily normálního rozdělení a úlohu tak převést na deterministickou. Naším předpokladem je tedy normalita náhodných veličin, avšak neznáme jejich střední hodnoty ani rozptyly. Proto použijeme parametrické odhady ve formě výběrových průměrů, výběrových rozptylů a výběrových směrodatných odchylek, které jsme pro poskytnutá data vypočetli pomocí programu Excel (verze 2013). Hodnoty sledujeme na obrázku (4.7).

Převod z pravděpodobnostního omezení na deterministické omezení předvedeme v následujícím úseku pro omezení týkající náhodné poptávky na buňce A a následně pro náhodnou poptávku potenciální buňky L .

Buňky	Výb. Průměr	Výb. Rozptyl	Výb. Sm. Odch.
A	37,48029412	363,137512	19,0561673
B	38,15147059	385,4046311	19,63172512
C	24,91941176	224,2391693	14,9746175
D	17,35470588	101,8951287	10,0943117
E	22,43617647	266,6760304	16,33021832
F	24,40882353	213,9446531	14,626847
G	14,24	129,6536	11,38655347
H	28,93617647	305,0213577	17,46486065
I	33,17382353	241,6418425	15,54483331
J	20,86911765	182,1931053	13,49789262
K	13,53823529	37,66911194	6,137516757

Obrázek 4.7: Tabulka s výběrovými průměry, výběrovými rozptyly a výběrovými směrodatnými odchylkami pro poskytnutá data.

Buď $\Phi(x)$ distribuční funkce normálního rozdělení a $\Phi^{-1}(\alpha) = u_\alpha$ buď α -kvantil normovaného normálního rozdělení. Předpokládejme, že $\xi_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$. Platí, že $1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L \neq 0$. Ve výpočtu budeme místo střední hodnoty a směrodatné odchylky používat výběrový průměr a výběrovou směrodatnou odchylku z obrázku (4.7). Pak je úprava omezení pro náhodnou poptávku buňky A následující:

$$\begin{aligned}
P\left\{\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L\right)\xi_A \leq a\right\} &\geq \alpha, \\
P\left\{\xi_A \leq \frac{a}{\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L\right)}\right\} &\geq \alpha, \\
P\left\{\frac{\xi_A - \mu_A}{\sigma_A} \leq \frac{\frac{a}{\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L\right)} - \mu_A}{\sigma_A}\right\} &\geq \alpha, \\
\Phi\left(\frac{\frac{a}{\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L\right)} - \mu_A}{\sigma_A}\right) &\geq \alpha, \\
\frac{\frac{a}{\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L\right)} - \mu_A}{\sigma_A} &\geq \Phi^{-1}(\alpha), \\
\frac{\frac{a}{\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L\right)} - \mu_A}{\sigma_A} &\geq u_\alpha, \\
\frac{a}{\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L\right)} &\geq u_\alpha\sigma_A + \mu_A, \\
a &\geq (u_\alpha\sigma_A + \mu_A)\left(1 - \frac{1}{4}x_M - \frac{1}{3}x_L\right), \\
a - (u_\alpha\sigma_A + \mu_A) + (u_\alpha\sigma_A + \mu_A)\frac{1}{4}x_M + (u_\alpha\sigma_A + \mu_A)\frac{1}{3}x_L &\geq 0.
\end{aligned}$$

Po dosazení $a = 60$, $u_{0,95} = 1,645$, $\mu_A = 37,48$, $\sigma_A = 19,06$ získáváme omezení

$$60 - 68,83 + \frac{1}{4}68,83x_M + \frac{1}{3}68,83x_L \geq 0,$$

tedy

$$60 - 68,83 + 17,21x_M + 22,94x_L \geq 0.$$

U omezení týkajícího se nové potenciální buňky L předpokládejme navíc, že náhodné veličiny $\xi_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $\xi_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ a $\xi_E \sim N(\mu_E, \sigma_E^2)$ jsou nezávislé. Tento předpoklad požadujeme kvůli konvoluci, a při tomto předpokladu platí $\xi_A + \xi_B + \xi_E \sim N(\mu_A + \mu_B + \mu_E, \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_E^2)$. Pro úpravy při převodu omezení požadujeme, aby $x_L \neq 0$. Pokud je však $x_L = 0$, pak $P\{0 \leq a\} = 1$ a omezení je splněno triviálně. Úprava omezení buňky L je následující:

$$\begin{aligned}
P\left\{\frac{1}{3}x_L\xi_A + \frac{1}{3}x_L\xi_B + \frac{1}{3}x_L\xi_E \leq a\right\} &\geq \alpha, \\
P\left\{\frac{1}{3}x_L(\xi_A + \xi_B + \xi_E) \leq a\right\} &\geq \alpha, \\
P\left\{(\xi_A + \xi_B + \xi_E) \leq \frac{a}{\frac{1}{3}x_L}\right\} &\geq \alpha, \\
P\left\{\frac{(\xi_A + \xi_B + \xi_E) - (\mu_A + \mu_B + \mu_E)}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_E^2}} \leq \frac{\frac{a}{\frac{1}{3}x_L} - (\mu_A + \mu_B + \mu_E)}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_E^2}}\right\} &\geq \alpha, \\
\Phi\left(\frac{\frac{a}{\frac{1}{3}x_L} - (\mu_A + \mu_B + \mu_E)}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_E^2}}\right) &\geq \alpha, \\
\frac{\frac{a}{\frac{1}{3}x_L} - (\mu_A + \mu_B + \mu_E)}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_E^2}} &\geq \Phi^{-1}(\alpha), \\
\frac{\frac{a}{\frac{1}{3}x_L} - (\mu_A + \mu_B + \mu_E)}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_E^2}} &\geq u_\alpha, \\
\frac{a}{\frac{1}{3}x_L} &\geq u_\alpha\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_E^2} + (\mu_A + \mu_B + \mu_E), \\
a - [u_\alpha\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_E^2} + (\mu_A + \mu_B + \mu_E)]\frac{1}{3}x_L &\geq 0.
\end{aligned}$$

Po dosazení $a = 60$, $u_{0,95} = 1,645$, $\mu_A = 37,48$, $\mu_B = 38,15$, $\mu_E = 22,44$, $\sigma_A^2 = 363,14$, $\sigma_B^2 = 385,40$, $\sigma_E^2 = 266,68$ získáváme omezení

$$60 - \frac{1}{3}150,48x_L \geq 0,$$

tedy

$$60 - 50,16x_L \geq 0.$$

Těmito dvěma postupy upravíme všechna ostatní omezení úlohy (4.2). Předpokládáme normalitu a vzájemnou nezávislost všech náhodných poptávek. Nutno podotknout, že nezávislost náhodných veličin je druhým zjednodušujícím předpokladem, který nám umožňuje využít konvoluci normálního rozdělení a snadno tak převést úlohu na deterministickou. Po úpravách získáme následující deterministickou úlohu, kterou budeme řešit pomocí programu GAMS

$$\begin{aligned}
& \min \quad c^T x, & (4.3) \\
\text{s.t.} \quad & 60 - 68,83 + 22,94x_L + 17,21x_M \geq 0, \\
& 60 - 70,45 + 23,48x_L \geq 0, \\
& 60 - 49,55 + 12,39x_M + 16,52x_N + 16,52x_O + 16,52x_P \geq 0, \\
& 60 - 33,96 + 8,49x_M + 11,32x_P + 11,32x_Q \geq 0, \\
& 60 - 49,3 + 16,43x_L + 12,32x_M + 16,43x_Q + 12,32x_S \geq 0, \\
& 60 - 48,47 + 16,16x_N + 16,16x_R \geq 0, \\
& 60 - 32,97 + 10,99x_O + 10,99x_P + 10,99x_Q + 8,24x_S \geq 0, \\
& 60 - 57,67 + 19,22x_N + 19,22x_O + 19,22x_R + 14,42x_S + 19,22x_T \geq 0, \\
& 60 - 58,75 + 14,69x_S + 19,58x_T \geq 0, \\
& 60 - 43,07 + 14,36x_R \geq 0, \\
& 60 - 23,63 + 7,88x_T \geq 0, \\
& 60 - 50,16x_L \geq 0, \\
& 60 - 38,26x_M \geq 0, \\
& 60 - 41,04x_N \geq 0, \\
& 60 - 36,77x_O \geq 0, \\
& 60 - 30,54x_P \geq 0, \\
& 60 - 30,25x_Q \geq 0, \\
& 60 - 39,26x_R \geq 0, \\
& 60 - 37,33x_S \geq 0, \\
& 60 - 38,47x_T \geq 0, \\
& x_L, x_M, x_N, x_O, x_P, x_Q, x_R, x_S, x_T \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

Jelikož jsme neobdrželi informace o možných reálných nákladech, vektor nákladů na výstavbu nových potenciálních buněk jsme zvolili ad hoc

$$c = (2400, 3295, 6200, 960, 3200, 1460, 1170, 300, 1000).$$

4.6 Výsledek úlohy

Úlohu jsme vyřešili pomocí solveru CPLEX v programu GAMS a na obrázku (4.8) sledujeme výstup úlohy. Řešením této úlohy je tedy volba vektoru $x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ a hodnota účelové funkce je 2400. Čili závěrem je rozhodnutí o výstavbě nové buňky L . Pro zajímavost jsme změнили hodnotu prahu na 55 %, tedy $a = 55$. Řešení úlohy pak sledujeme na obrázku (4.9). Zde vyšel rozhodovací vektor $x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ a hodnota účelové funkce 2700. Pro nižší prahovou hodnotu činíme rozhodnutí o výstavbě dvou nových buněk, kterými jsou buňky L a S s náklady ve výši 2700.

```

**** REPORT SUMMARY :          0      NONOPT
                              0 INFEASIBLE
                              0 UNBOUNDED
GAMS 24.2.2 r44857 Released Mar  4, 2014 WEX-WEI x86_64/MS Windows 06/10/17 11:56:
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
E x e c u t i o n

```

```

----  41 VARIABLE x1.L          =          1.000
      VARIABLE x2.L          =          0.000
      VARIABLE x3.L          =          0.000
      VARIABLE x4.L          =          0.000
      VARIABLE x5.L          =          0.000
      VARIABLE x6.L          =          0.000
      VARIABLE x7.L          =          0.000
      VARIABLE x8.L          =          0.000
      VARIABLE x9.L          =          0.000
      VARIABLE z.L           =         2400.000

```

```

EXECUTION TIME      =          0.000 SECONDS      2 MB  24.2.2 r44857 WEX-WEI

```

```

USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC  G871201/0000CA-ANY
      Free Demo, 202-342-0180, sales@gams.com, www.gams.com DC0000

```

Obrázek 4.8: Výstup GAMS pro práh $a = 60$.

```

**** REPORT SUMMARY :          0      NONOPT
                              0 INFEASIBLE
                              0 UNBOUNDED
GAMS 24.2.2 r44857 Released Mar  4, 2014 WEX-WEI x86_64/MS Windows 06/10/17 12:15:
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
E x e c u t i o n

```

```

----  41 VARIABLE x1.L          =          1.000
      VARIABLE x2.L          =          0.000
      VARIABLE x3.L          =          0.000
      VARIABLE x4.L          =          0.000
      VARIABLE x5.L          =          0.000
      VARIABLE x6.L          =          0.000
      VARIABLE x7.L          =          0.000
      VARIABLE x8.L          =          1.000
      VARIABLE x9.L          =          0.000
      VARIABLE z.L           =         2700.000

```

```

EXECUTION TIME      =          0.000 SECONDS      2 MB  24.2.2 r44857 WEX-WEI

```

```

USER: GAMS Development Corporation, Washington, DC  G871201/0000CA-ANY
      Free Demo, 202-342-0180, sales@gams.com, www.gams.com DC0000

```

Obrázek 4.9: Výstup GAMS pro práh $a = 55$.

Vyřešili jsme tedy úlohu stochastické optimalizace na náhodné síti. Nakonec však zkontrolujeme, zda náhodné veličiny splňují normalitu, či nikoliv. K testování normality jsme použili Shapirov-Wilkův test, který je založený na nulové hypotéze, že náhodný výběr pochází z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ oproti alternativě, která praví, že náhodný výběr pochází z jiného rozdělení. Tento test jsme zvolili na základě publikace [12] a normalitu jsme testovali pomocí komerčního software

Wolfram Mathematica (verze 10.0). Tabulku vypočtených hodnot sledujeme na obrázku (4.10). Nulovou hypotézu jsme testovali na hladině spolehlivosti 5 %. Normalitu jsme nezamítli u 9 buněk a zamítáme ji u buněk *E* a *G*. Pro výpočet našeho ilustrativního příkladu jsme však tuto skutečnost pro jednoduchost zanedbali. Práci by šlo v tomto směru rozšířit a pracovat bez striktního předpokladu normality.

Buňky	S-W p-hodnota	Norm. rozd.
A	0,695891	PRAVDA
B	0,102197	PRAVDA
C	0,106789	PRAVDA
D	0,116055	PRAVDA
E	0,00122491	NEPRAVDA
F	0,247866	PRAVDA
G	0,00181516	NEPRAVDA
H	0,0869465	PRAVDA
I	0,056204	PRAVDA
J	0,216725	PRAVDA
K	0,241203	PRAVDA

Obrázek 4.10: Tabulka s p-hodnotami.

Na telekomunikačních sítích lze řešit mnohé problémy. V naší úloze jsme řešili kapacitní omezení na uzlech, avšak nabízí se zde mnoho dalších problémů, při jejichž optimalizaci lze pracovat například i s kapacitami hran. Ilustrativní úlohu stochastické optimalizace jsme na základě diplomové práce pojali jakožto problém s individuálními pravděpodobnostními omezeními, na kterém jsme předvedli základní kroky pro jeho vyřešení. Jak bylo řečeno výše, jedná se pouze o ilustrativní příklad inspirovaný reálnou skutečností, který nabízí další možnosti rozšíření.

4.7 Programový kód

Následující program je napsán pro optimalizační systém GAMS. Řeší výše uvedenou optimalizační úlohu celočíselného programování.

Variable

```
z;  
*proměnná, kterou budeme minimalizovat
```

Binary Variables

```
x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9;  
*binární proměnné, které určují v rozhodnutí o vystavění nové  
buňky, či nikoliv
```

Scalars a prah /60/;

```
*omezení, při jehož překročení dochází k přetížení buněk
```

Equations

```
UcelovaFunkce, om1, om2, om3, om4, om5, om6, om7, om8, om9, om10, om11, om12,
```

```

om13,om14,om15,om16,om17,om18,om19,om20;
*účelová funkce a omezující podmínky
UcelovaFunkce..z=e=x1*2400+x2*3295+x3*6200+x4*960+x5*3200+x6*1460+
      x7*1170+x8*300+x9*1000;
om1..a-68.82768932+22.94256311*x1+17.20692233*x2 =g= 0;
om2..a-70.44565841+23.48188614*x1 =g= 0;
om3..a-49.55265756+12.38816439*x2+16.51755252*x3+
      16.51755252*x4+16.51755252*x5 =g= 0;
om4..a-33.95984863+8.489962157*x2+11.31994954*x5+11.31994954*x6
      =g= 0;
om5..a-49.29938561+16.43312854*x1+12.3248464*x2+16.43312854*x6+
      12.3248464*x8 =g= 0;
om6..a-48.46998684+16.15666228*x3+16.15666228*x7 =g= 0;
om7..a-32.97088046+10.99029349*x4+10.99029349*x5+10.99029349*x6+
      8.242720116*x8 =g= 0;
om8..a-57.66587225+19.22195742*x3+19.22195742*x4+19.22195742*x7+
      14.41646806*x8+19.22195742*x9 =g=0;
om9..a-58.74507432+14.68626858*x8+19.58169144*x9 =g= 0;
om10..a-43.07315101+14.357717*x7 =g= 0;
om11..a-23.63445036+7.87815012*x9 =g= 0;
om12..a-50.16057825*x1 =g= 0;
om13..a-38.2628416*x2 =g= 0;
om14..a-41.0366853*x3 =g= 0;
om15..a-36.77387468*x4 =g= 0;
om16..a-30.54451153*x5 =g= 0;
om17..a-30.24961442*x6 =g= 0;
om18..a-39.25758197*x7 =g= 0;
om19..a-37.32528657*x8 =g= 0;
om20..a-38.47092176*x9 =g= 0;
*zápis jednotlivých omezení

  Model Naklady /all/;
*definujeme model

  Solve Naklady using MIP minimizing z;
*model řešíme pomocí MIP (mixed integer programing), čili smíšené
celočíslné programování
*MIP se užívá k řešení čistě celočíselných úloh nebo smíšených
celočíslných úloh

  Display x1.l,x2.l,x3.l,x4.l,x5.l,x6.l,x7.l,x8.l,x9.l,z.l;
*požadované hodnoty necháme vypsát

```


Závěr

V této práci jsme se věnovali třem přístupům stochastické optimalizace, které jsme aplikovali při práci s náhodnými sítěmi. V prvních třech kapitolách jsme se věnovali teorii stochastické optimalizace, kdy jsme postupně formulovali úlohy dvoustupňové a vícestupňové stochastické optimalizace a úlohu s pravděpodobnostními omezeními, zvláště pro individuální pravděpodobnostní omezení a sdružené pravděpodobnostní omezení. Pro dvoustupňové a vícestupňové úlohy jsme uvedli algoritmus pro řešení takových úloh, založený na budování vnější linearizace. Na konci každé z těchto tří kapitol jsme vyslovili příklad na náhodných sítích, který se zabýval danou problematikou konkrétních kapitol. Nejprve jsme řešili model stochastického programování pro využití síťových zdrojů za přítomnosti nejistoty poptávky, kde jsme maximalizovali výnosy ze zdrojů. Zde se aplikovala dvoustupňová optimalizace. Druhý příklad se týkal problematiky pašování nukleárního materiálu přes hranice, ve kterém bylo cílem minimalizovat pravděpodobnost úniku pašeráků při přecházení hranic. V tomto případě byla úloha formulovaná jako třístupňová úloha stochastické optimalizace. Ve třetí kapitole jsme se zabývali problémem směřování vozidel, při kterém jsme minimalizovali náklady s cílem uspokojit poptávku s předem danou vysokou pravděpodobností, čili jednalo se o problém s pravděpodobnostními omezeními. V poslední kapitole jsme se pak věnovali vybranému ilustrativnímu příkladu na náhodné telekomunikační síti, který jsme vyslovili ve formě úlohy s individuálním pravděpodobnostním omezením a který jsme následně vyřešili.

Interpretace reálných situací a procesů pomocí deterministických sítí nám umožňuje řešit řadu rozhodovacích procesů z běžného života. Častěji se však v reálném životě střetáváme se situacemi, ve kterých se dějí určité skutečnosti náhodně. Proto je k modelování obecně, ne pouze na náhodných sítích, stochastická optimalizace velmi užitečným nástrojem. Práci by bylo možné rozšířit prohloubením teoretických informací problematiky stochastické optimalizace a přidat další praktické příklady ze světa náhodných sítí.

Seznam použité literatury

- [1] Birge, John R. a Louveaux, François: *Introduction to Stochastic Programming*. Springer-Verlag, New York, 1. vydání, 1997, ISBN 0-387-98217-5.
- [2] Demel, Jiří: *Grafy a jejich aplikace*. Akademie věd České republiky, Praha, 1. vydání, 2002, ISBN 80-200-0990-6.
- [3] Donohue, Christopher J. a Birge, John R.: *The Abridged Nested Decomposition Method for Multistage Stochastic Linear Programs with Relatively Complete Recourse*. Algorithmic Operations Research, 1(1):20–30, 2006.
- [4] Dupačová, Jitka: *Stochastické programování*. Dočasná vysokoškolská učebnice, 1986.
- [5] Dupačová, Jitka: *Portfolio Optimization and Risk Management via Stochastic Programming*, svazek 1 z *CSFI Lecture Notes Series*. Osaka University Press, Osaka, 2009, ISBN 978-4-87259-276-4.
- [6] Dupačová, Jitka, Hurt, Jan a Štěpán, Josef: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, svazek 75 z *Applied Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2002, ISBN 1-4020-0840-6.
- [7] Dupačová, Jitka a Lachout, Petr: *Úvod do optimalizace*. Matfyzpress, Praha, 1. vydání, 2011, ISBN 978-80-7378-176-7.
- [8] Hindle, Julia L. a Suvrajeet, Sen: *A Stochastic Programming Model for Network Resource Utilization in the Presence of Multiclass Demand Uncertainty*. V Wallace, Stein S. a Ziemba, William T. (editoři): *Applications of Stochastic Programming*, svazek MP05 z *MOS-SIAM Series on Optimization*, strany 299–313. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005, ISBN 978-0-89871-555-2.
- [9] Houda, Michal: *Stabilita a odhady v úlohách stochastického programování (Speciální případy)*. Diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2001.
- [10] Kall, Peter a Mayer, János: *Stochastic Linear Programming: Models, Theory, and Computation*, svazek 80 z *International Series in Operations Research & Management Science*. Springer Science + Business Media, Inc., New York, 2005, ISBN 978-0-387-24440-2.
- [11] Kall, Peter a Wallace, Stein W.: *Stochastic Programming*. John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, 1994, ISBN 0-471-95108-0.
- [12] Kotlorz, Lukáš: *Testy normality*. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2012.
- [13] Matoušek, Jiří a Nešetřil, Jaroslav: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Univerzita Karlova v Praze, Praha, 3. vydání, 2007, ISBN 978-80-246-1411-3.

- [14] Michalopoulos, Dennis P., Morton, David P. a Barnes, J. Wesley: *Prioritizing Network Interdiction of Nuclear Smuggling*. V Gassmann, Horand I. a Ziemba, William T. (editoři): *Stochastic Programming: Applications in Finance, Energy, Planning and Logistics*, svazek 4 z *World Scientific Series in Finance*, strany 313–346. World Scientific Publishing, 2013.
- [15] Nešetřil, Jaroslav: *Teorie grafů*. Nakladatelství technické literatury, Praha, 1. vydání, 1979.
- [16] Pravda, Ivan: *Mobilní telekomunikační síť*. <https://publi.cz/books/236/02.html>[cit. 2017-05-25].
- [17] Shapiro, Alexander, Dentcheva, Darinka a Ruszczyński, Andrzej: *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. MPS-SIAM, Philadelphia, 1. vydání vydání, 2009, ISBN 978-0-898716-87-0.
- [18] Sigačevová, Jana: *Náhodné síť*. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2014.

Seznam obrázků

1.1	Příklad cestovní prodavačky.	6
1.2	Bloková struktura dvoustupňové rozšířené formy problému převzatá z publikace [1].	9
1.3	Symbolika itineráře a legů v síti.	12
2.1	Strom o sedmi scénářích přes čtyři stupně.	20
3.1	Sít směřování vozidel převzatá z publikace [17].	29
3.2	Matice incidence směřování vozidel převzatá z publikace [17].	30
4.1	Sít buněk.	31
4.2	Mapa geografické oblasti.	32
4.3	Mapa výběru několika buněk.	32
4.4	Tabulka hodnot.	33
4.5	Náhradní síť buněk.	34
4.6	Náhradní síť buněk s potenciálními novými buňkami a hranami.	35
4.7	Tabulka s výběrovými průměry, výběrovými rozptyly a výběrovými směrodatnými odchylkami pro poskytnutá data.	39
4.8	Výstup GAMS pro práh $a = 60$	42
4.9	Výstup GAMS pro práh $a = 55$	42
4.10	Tabulka s p-hodnotami.	43

Obsah přiloženého CD

- Zpracování dat, odhady parametrů, odvození omezení úlohy, informace o datech: 1.Práce s daty.ods
- Okomentovaný kód programu: 2.Okomentovaný kód.gms
- Testování normality výběru dat: 3.Testování normality.nb
- Diplomová práce Stochastická optimalizace na náhodných sítích: 4.Stochastická optimalizace na náhodných sítích.pdf