Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Významné body v trojúhelníku

Geometricaly inportant points of triangle

Miroslava Lacinová

Vedoucí práce: Mgr. Marie Holíková, Ph.D.
Studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – jednoobor

Praha 2017

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Významné body v trojúhelníku* vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 10. 7. 2017 ....

podpis studentky

Poděkování:

Ráda bych poděkovala Mgr. Marie Holíkové, Ph.D., za cenné rady a připomínky, za laskavý a vstřícný přístup, za podporu a zájem o moji práci. Velmi si vážím času, který věnovala pečlivé kontrole mé práce.

Anotace

Cílem této práce je seznámit čtenáře s nejvýznamnějšími body v trojúhelníku. Práce se zabývá nejen běžně známými body ze základní a střední školy jako jsou střed strany, těžiště, ortocentrum, či středy kružnic opsané, vepsané a připsané, ale i dalšími význačnými body, kterými jsou Lemoinův bod, Longchampův bod, Fermatův bod, Gergonnův bod, Nagelův bod, střed Feuerbachovy kružnice a Švrčkův bod. První kapitola práce obsahuje základní pojmy. Další kapitoly jsou věnovány vždy jednomu významnému bodu v trojúhelníku. V každé kapitole jsou nejprve zadefinovány pojmy potřebné k určení významného bodu, pak je popsána jeho konstrukce, případně je dokázána jeho existence. Zbývající část kapitoly popisuje vlastnosti významných bodů a jejich využití v geometrii trojúhelníku.

Klíčová slova: bod, trojúhelník, těžiště, ortocentrum

Annotation

The aim of this thesis is to make the reader familiar with the most important points in a triangle. The work focuses not only on the well-known ones from primary and secondary schools such as the center of a side in a triangle, the center of gravity, the orthocenter or the circumcenter, the incenter and the excenter, but also on other significant points such as the Lemoine point, the de Longchamps point, the Fermat point, the Gergonne point, the Nagel point, the nine-point center and the Švrček point. The first chapter contains basic terms and definitions. Each of the following chapters is dedicated to one important point in a triangle. At first, the necessary terms to introduce the significant point are defined, then its construction is described or its existence is proven. The rest of the chapter deals with the properties of significant points and their use in the geometry of a triangle.

Keywords: point, triangle, centroid, orthocenter

Obsah

Úvod

Cílem této práce je ukázat čtenáři, že kromě vrcholů trojúhelníku a těžiště, které všichni známe již ze základní školy, existuje v trojúhelníku mnoho významných bodů, které vzniknou jako průsečíky význačných přímek. Tyto body mají spoustu zajímavých vlastností, které jsou mimo jiné ovlivněny růzností trojúhelníků a jejich vnitřních úhlů.

Práce je určena pro každého, kdo se zajímá o geometrii trojúhelníku. Není však koncipována jako učebnice matematiky, ale zabývá se jenom některými skutečnostmi v trojúhelníku a to jeho významnými body. Chceme čtenáři poskytnout ucelený text o nejznámějších významných bodech v trojúhelníku, jejich vlastnostech a vzájemných vztazích.

Celá bakalářská práce má 14 kapitol. První kapitola obsahuje obecné poznatky o trojúhelnících, jejich rozdělení a různé vlastnosti, dále základní informace o kružnicích, neboť mnoho významných bodů v trojúhelníku jsou právě středy kružnic. Další kapitoly se už týkají jednotlivých významných bodů. Je v nich popsán jejich vznik a poloha z hlediska různosti trojúhelníku. Dále kapitoly obsahují námi vybrané vlastnosti využívající znalosti těchto bodů.

Naše práce má pro lepší pochopení jednotlivých důkazů a pojmů mnoho obrázků, které vytvořila sama autorka v programu GeoGebra.

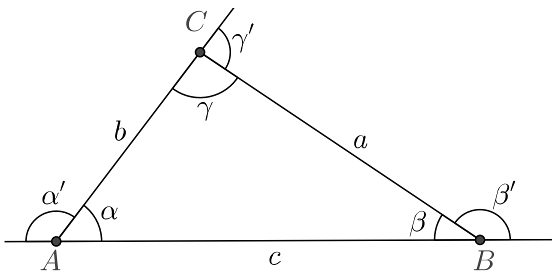
Kapitola 1

Obecné informace

Dříve než se začneme zabývat jednotlivými body v trojúhelníku, uvedeme několik obecných informací, které budeme v dalším textu používat.

Definice 1. „Jsou dány tři nekolineární body A, B, C. Trojúhelník ABC je průnik polorovin $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{BCA}, \overleftrightarrow{ACB}$." [1]

Vrcholy trojúhelníku značíme velkými tiskacími písmeny A,B,C. Strany trojúhelníku, což jsou úsečky AB, BC a AC, značíme malými písmeny c, a, b v tomto pořadí. Vnitřní úhly v trojúhelníku značíme písmeny řecké abecedy, tedy α, β, γ.
Ke každému vnitřnímu úhlu existuje úhel vedlejší, značíme α', β', γ' tak, že
$\alpha + \alpha' = 180°, \beta + \beta' = 180°, \gamma + \gamma' = 180°$.



Obrázek 1.1: Obecný trojúhelník

Podle velikosti stran dělíme trojúhelníky na

[1] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 71.

- rovnostranné $a = b = c$,

- rovnoramenné $a = b \wedge c \neq a \wedge c \neq b$,

- různostranné $a \neq b \neq c$.

Podle velikosti vnitřních úhlů dělíme trojúhelníky na

- ostroúhlé $\alpha, \beta, \gamma < 90°$,

- pravoúhlé (jeden úhel je roven 90°),

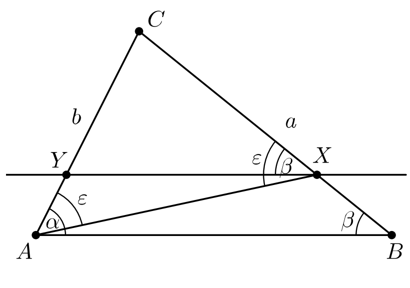
- tupoúhlé (jeden úhel je větší než 90°).

Věta 1. *Součet dvou libovolných délek stran trojúhelníku je větší než délka strany zbývající.*

Důkaz. Využijeme znalosti konstrukce trojúhelníku při zadání délek všech tří stran. Trojúhelník sestrojíme tak, že narýsujeme stranu délky $c = AB$ a kružnice $k(A, b)$ a $k'(B, a)$. Vrchol C je průsečík kružnic k a k'.

Pokud bude součet délek dvou stran menší než délka strany třetí, kružnice k a k' budou mít prázdný průnik, takže trojúhelník nevznikne. Zbývá už jen možnost, že součet délek dvou stran bude roven délce třetí strany. Vrchol C sice vznikne, ale bude ležet na úsečce AB, takže body A, B, C určují přímku, nikoliv trojúhelník. Jedinou možností je, aby součet délek tvou stran byl větší než délka strany třetí. $\square$

Tvrzení 1. *Proti delší straně v trojúhelníku leží větší úhel.*



Obrázek 1.2: Ilustrace k důkazu tvrzení 1

Důkaz. Mějme trojúhelník ABC s příslušnými vnitřními úhly α a β. Předpokládejme, že $a > b$. Chceme ukázat, že z toho vyplývá $\alpha > \beta$.

Postupujeme podle obrázku 1.2. Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník AXC tak, aby $|AC| = |XC|$ a $X \in BC$. Označme ε úhly při základně, tedy $\varepsilon = |\angle XAC| = |\angle AXC|$. Protože trojúhelník AXC leží uvnitř trojúhelníku ABC, platí pro úhly příslušné k vrcholu A nerovnost $\alpha > \varepsilon$.

Nyní sestrojíme rovnoběžku se stranou AB procházející bodem X.Průsečík strany AC s touto rovnoběžkou označíme Y. S využití znalosti souhlasných úhlů platí, že $|\angle YXC| = \beta$. Trojúhelník YXC leží uvnitř trojúhelníku AXC a tedy pro úhly příslušné k vrcholu X nastává nerovnost $\varepsilon > \beta$. Při spojení obou dokázaných vlastností získáváme

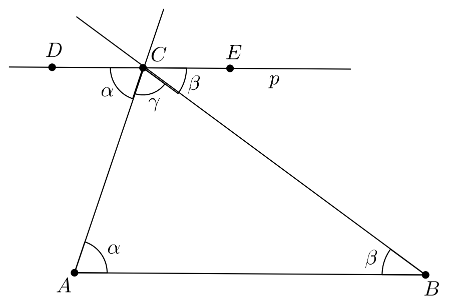
$$\alpha > \varepsilon > \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha > \beta.$$

□

Tvrzení 2. *Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven* 180°.

Důkaz. Lze využít znalosti střídavých úhlů podle obrázku 1.3 .

Sestrojíme přímku p rovnoběžnou se stranou AB procházející bodem C a na ní body $D, E \wedge D \neq E \neq C$ tak, že polopřímky CD a CE jsou opačné (viz obrázek 1.3). Pak úsečky AC a BC jsou příčky dvou rovnoběžných přímek $p, \leftrightarrow AB$. Z definice střídavých úhlů platí, že $|\angle BAC| = |\angle ACD| = \alpha$ a $|\angle ABC| = |\angle BCE| = \beta$ a tedy součet $\alpha + \beta + \gamma$ je roven přímému úhlu, který má velikost 180°. □



Obrázek 1.3: Ilustrace k důkazu tvrzení 2

Tvrzení 3. *Součet dvou vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven vnějšímu úhlu u zbývajícího vrcholu.*

Důkaz. Z předchozího tvrzení víme, že $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ a pokud vedlejší úhel k úhlu γ označíme γ', pak platí $\gamma + \gamma' = 180°$. Složením těchto dvou rovností dostáváme dokazovaný vztah $\alpha + \beta = \gamma'$. □

V důkazech mnohých vět budeme potřebovat znát vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku, a proto si uvedeme Eukleidovy věty.

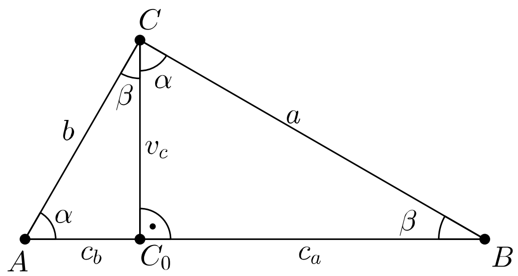
Věta 2. *V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C platí*

$$v_c{}^2 = c_a \cdot c_b \text{ (Euklidova věta o výšce)},$$
$$a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b \text{ (Euklidovy věty o odvěsnách)}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz Euklidovy věty o výšce pomocí podobnosti trojúhelníků ACC_0, CBC_0 podle věty (uu) (viz obrázek 1.4).

$$\triangle ACC_0 \sim \triangle CBC_0$$
$$\frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c}$$
$$v_c{}^2 = c_a \cdot c_b.$$

K důkazu Euklidových vět o odvěsnách $a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b$ využijeme po řadě podobnosti trojúhelníků $\triangle ABC, \triangle CBC_0$ a $\triangle ABC, \triangle ACC_0$. □



Obrázek 1.4: Ilustrace k důkazu Euklidových vět

O vztahu mezi stranami v pravoúhlém trojúhelníku hovoří Pythagorova věta.

Věta 3. *V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C platí* $a^2 + b^2 = c^2$.

Důkaz. Využijeme Euklidovy věty o odvěsnách.

$$a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b = c(c_a + c_b) = c \cdot c = c^2.$$

□

Poměry mezi stranami v trojúhelníku a příslušnými vnitřními úhly se zabývají sinová a kosinová věta.

Věta 4. *V každém trojúhelníku ABC platí*

$$\tfrac{a}{\sin\alpha} = \tfrac{b}{\sin\beta} = \tfrac{c}{\sin\gamma}.$$

Důkaz. Označme C_0 patu výšky vedenou z bodu C na přímku AB. Pak v pravoúhlých trojúhelnících ACC_0, BCC_0 platí

$$\sin\alpha = \tfrac{v}{b},$$
$$\sin\beta = \tfrac{v}{a}.$$

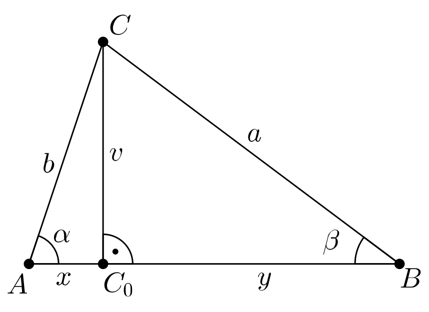
Po vyjádření výšky v obou vztazích získáme rovnost

$$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta,$$

a tedy

$$\tfrac{a}{\sin\alpha} = \tfrac{b}{\sin\beta}.$$

Analogicky dokážeme zbývající rovnosti. □



Obrázek 1.5: Ilustrace k důkazu sinové a kosinové věty

Věta 5. *V každém trojúhelníku ABC platí*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Důkaz. Označme $x = |AC_0|$ a $y = |C_0B|$ části strany c, takže platí $c = x + y$ (viz obrázek 1.5). Z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0 vyjádříme úhel β

$$\tfrac{y}{a} = \cos\beta, \text{ a tedy } y^2 = a^2 \cdot \cos^2\beta\ .$$

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník BCC_0 vyjádříme vzorec pro výšku

$$a^2 = v^2 + y^2,$$
$$v^2 = a^2 - y^2,$$
$$v^2 = a^2 - a^2 \cdot \cos^2\beta.$$

Pro důkaz kosinové věty potřebuje ještě určit velikost druhé mocniny délky x. Využijeme vztahu $c = x + y$, tedy

$$x = c - y = c - a \cdot \cos\beta$$
$$x^2 = c^2 - 2ac\cos\beta + a^2 \cdot \cos^2\beta.$$

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník ACC_0 a dříve dokázaných vztahů platí

$$b^2 = v^2 + x^2 = a^2 - a^2 \cdot \cos^2\beta + c^2 - 2ac\cos\beta + a^2 \cdot \cos^2\beta = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Analogicky dokážeme pravdivost zbývajících rovností kosinové věty. □

Nyní uvedeme vzorec pro výpočet obsahu S trojúhelníku ABC.

$$S = \tfrac{1}{2}a \cdot v_a = \tfrac{1}{2}b \cdot v_b = \tfrac{1}{2}c \cdot v_c,$$

kde v_a, v_b, v_c jsou výšky v trojúhelníku ABC. (viz kapitola ortocentrum). Vzorec lze odvodit ze vzorce pro obsah rovnoběžníku.

Dále budeme v některých důkazech vět využívat vlastnosti jednoznačné existence bodu, který je průsečíkem daných přímek. O takovém bodě informuje Cèvova věta, proto si ji nyní uvedeme.

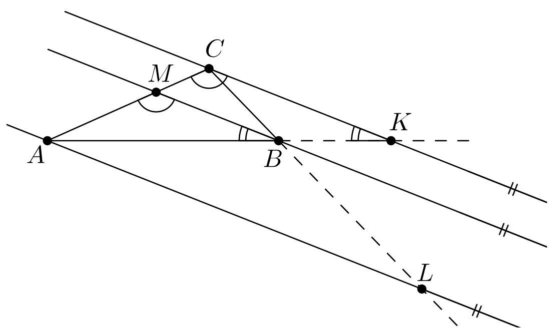
Věta 6. *„V rovině je dán trojúhelník ABC. Na přímkách AB, BC, AC leží po řadě body K, L, M, které jsou různé od vrcholů trojúhelníku. Pak přímky KC, LA, MB prochází jedním bodem nebo jsou rovnoběžné právě tehdy, když*

1. *právě jeden z bodů K, L, M je bodem trojúhelníku ABC nebo každý z nich je bodem trojúhelníku ABC*

2. $\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$“ [2]

Důkaz. Věta je ve tvaru ekvivalence, takže provedeme důkaz dvou implikací.

Nejprve předpokládejme, že přímky AL, BM, CK jsou rovnoběžné (viz obrázek 1.6). Pak právě jeden bod z trojice bodů K, L, M je bodem trojúhelníku ABC. Zvolme



Obrázek 1.6: Ilustace k důkazu věty 6

tedy bod M. Ve stejnolehlosti se středem ve vrcholu A se trojúhelník AMB zobrazí na trojúhelník AKC. Pro poměry stran těchto trojúhelníků platí

$$\frac{|AC|}{|MC|} = \frac{|AK|}{|BK|}.$$

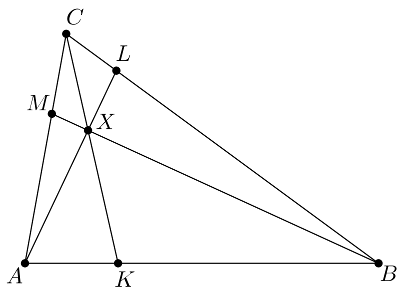
Analogicky ve stejnolehlosti se středem ve vrcholu C se trojúhelník CMB zobrazí na trojúhelník CLA a pro poměry stran platí

$$\frac{|BL|}{|CL|} = \frac{|MA|}{|CA|}.$$

To dosadíme do levé strany rovnosti

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1, \text{ kde platí } \frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|AC|}{|MC|} \cdot \frac{|MA|}{|CA|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

[2]BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. *Planimetrie.* 2., rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2, s. 53.



Obrázek 1.7: Ilustace k důkazu věty 6

Nyní předpokládejme, že přímky AL, BM, CK se protnou v bodě X (viz obrázek 1.7). Vyjádříme si obsahy vhodných trojúhelníků

$$S_{AKX} = \frac{1}{2}|AK| \cdot v \text{ a } S_{BKX} = \frac{1}{2}|BK| \cdot v$$
$$S_{AKC} = \frac{1}{2}|AK| \cdot w \text{ a } S_{BKC} = \frac{1}{2}|BK| \cdot w,$$

kde v, w jsou po řadě vzdálenosti bodů X, C od přímky AB. Za pomoci těchto vztahů si vyjádříme poměr obsahů $S_{AXC} : S_{BXC}$ takto

$$\frac{S_{AXC}}{S_{BXC}} = \frac{S_{AKC}-S_{AKX}}{S_{BKC}-S_{BKX}} = \frac{\frac{1}{2}|AK|\cdot w-\frac{1}{2}|AK|\cdot v}{\frac{1}{2}|BK|\cdot w-\frac{1}{2}|BK|\cdot v} = \frac{|AK|}{|BK|}.$$

Analogicky vyjádříme poměry $\frac{|BL|}{|CL|}, \frac{|CM|}{|AM|}$ a poté je vynásobíme mezi sebou navzájem

$$\frac{|BL|}{|CL|} = \frac{S_{AXB}}{S_{AXC}}$$
$$\frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BXC}}{S_{AXB}}.$$
$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{AXC}}{S_{BXC}} \cdot \frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} \cdot \frac{S_{BXC}}{S_{AXB}} = 1.$$

Tím jsme dokázali platnost implikace zleva doprava.

Druhou implikaci dokážeme následovně. Předpokládejme, že přímky BM, AL se protnou v bodě X. Chceme dokázat, že bodem X prochází i přímka CK. Důkaz provedeme sporem. Nechť existuje bod $K' \neq K$, který je průsečíkem přímek CX, AB. Podle obrácené implikace Cévovy věty platí

$$\frac{|AK'|}{|BK'|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1. \tag{1.1}$$

Z předpokladu dokazované věty platí

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1. \tag{1.2}$$

Ze vztahů 1.1 a 1.2 získáváme rovnost

$$\frac{|AK'|}{|BK'|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|AK'|}{|BK'|} = \frac{|AK|}{|BK|}.$$

Podle polohy bodů L, M lze jasně odvodit, zda bod K bude ležet uvnitř trojúhelníku ABC nebo vně. Proto z rovnosti poměrů vyplývá, že $K' = K$, což je spor s předpokladem, že $K' \neq K$.
Pokud předpokládáme, že přímky AL, BM jsou rovnoběžné, tak chceme dokázat, že $AL \parallel KC$. Důkaz provedeme sporem podobně jako důkaz neexistence bodu $K' \neq K$ pro průsečík X přímek AL, MB, CK. □

Definice 2. „Je dán bod S a kladné číslo r. **Kružnice** je množina všech bodů roviny, které mají od bodu S vzdálenost r.“ [3]

Bod S nazýváme střed kružnice a r poloměr kružnice.
Body A, B rozdělí kružnici na dva tzv. kružnicové oblouky, které se rovnají, pokud úsečka AB prochází středem kružnice. Pak tyto oblouky nazýváme půlkružnice.

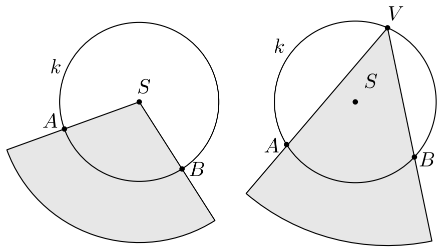
Definice 3. „Úhel, jehož vrcholem je střed kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku A, B kružnice k, se nazývá **středový úhel** příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.“ [4]

Pokud je úhel ASB, kde S je střed kružnice k, menší než 180°, nazýváme středový úhel konvexní. Pokud je tento větší než 180°, nazýváme ho nekonvexní středový úhel.

Definice 4. „Každý úhel AVB, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k ($V \neq A, V \neq B$), se nazývá **obvodový úhel** příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.“ [5]

Věta 7. *„Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušnému k témuž oblouku.“* [6]

[3] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.* 4. upr. vydání. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4, s. 52.
[4] Tamtéž, s. 59.
[5] Tamtéž, s. 60.
[6] Tamtéž, s. 61.



Obrázek 1.8: Středový a obvodový úhel

Důkaz. Označme ASB středový úhel příslušný oblouku AB a ACB obvodový úhel příslušný stejnému oblouku. Důkaz rozdělíme na čtyři části podle umístění bodu C na kružnici, která obsahuje oblouk AB.

- Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu B (viz první případ na obrázku 1.9).

  Bod S je střed přepony AC. Trojúhelník BCS je rovnoramenný, tedy $|\angle SBC| = |\angle BCS|$. Podle tvrzení 3 platí

  $$|\angle ASB| = |\angle SBC| + |\angle BCS| = 2|\angle BCS|.$$

- Trojúhelník ABC je ostroúhlý (viz druhý případ na obrázku 1.9).
  Označme $|\angle ACS| = \alpha$, $|\angle BCS| = \beta$ a X průsečík strany AB s přímkou CS. Chceme dokázat, že

  $$|\angle ASB| = |\angle BSX| + |\angle ASX| = 2\alpha + 2\beta.$$

  Trojúhelník BCS je rovnoramenný, takže $|\angle CBS| = \alpha$ a podle tvrzení 3 je $|\angle BSX| = 2\alpha$. Analogicky dokážeme, že $|\angle ASX| = 2\beta$.

- Trojúhelník ABC je tupoúhlý, středový úhel ASB je konvexní (viz třetí případ na obrázku 1.9).
  Sestrojíme přímku $\leftrightarrow CS$ a její průsečík s kružnicí označíme X.
  Pak $|\angle ACB| = |\angle BCX| - |\angle ACX|$. Z rovnoramenného trojúhelníku ABS

a tvrzení 3 platí, že $|\angle ASX| = 2|\angle ACX|$. Analogicky z rovnoramenného trojúhelníku BCS platí $|\angle BSX| = 2|\angle BCX|$. Pro velikost středového úhlu ASB platí

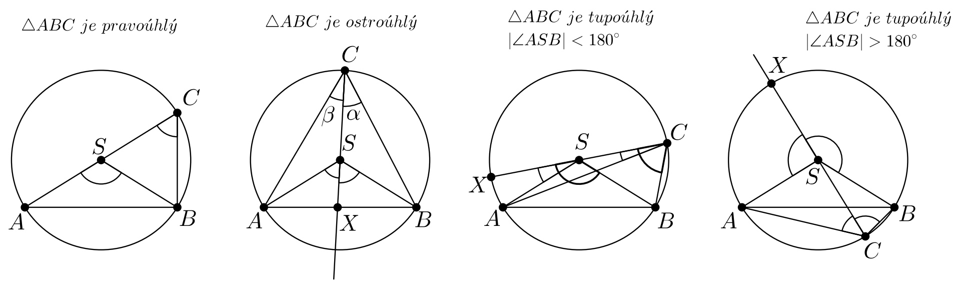
$$|\angle ASB| = |\angle BSX| - |\angle ASX| = 2|\angle BCX| - 2|\angle ACX|.$$

- Trojúhelník ABC je tupoúhlý, středový úhel ASB je nekonvexní (viz čtvrtý případ na obrázku 1.9).

  Podle stejných úvah jako v předchozích částech důkazu ukážeme, že

$$|\angle ASX| = 2|\angle ACS| \text{ a } |\angle BSX| = 2|\angle BCS|,$$

  kde X je průsečík přímky CS s kružnicí.



Obrázek 1.9: Vzájemné velikost obvodového a středového úhlu

□

Kapitola 2

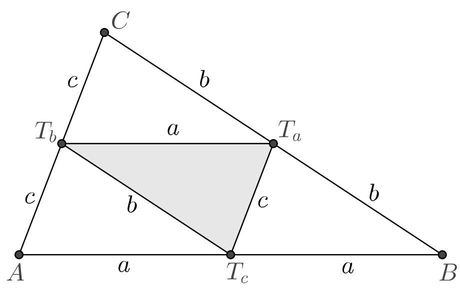
Střed strany

V první kapitole se budeme zabývat středy stran trojúhelníku a spojnicemi těchto středů, které nazýváme střední příčky trojúhelníku. Dále vysvětlíme pojem příčkový trojúhelník.

Definice 5. Střed strany AB je bod $X \in AB$, pro který platí $|AX| = |BX|$.

V celé práci budeme pro střed strany $AB = c$ používat označení T_c. Analogicky vznikne označení T_a a T_b.

Definice 6. „Střední příčka trojúhelníku je spojnice středů dvou stran.“ [1]



Obrázek 2.1: Střední příčky trojúhelníku

[1]KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 72.

Střední příčka je vždy rovnoběžná s odpovídající stranou trojúhelníku a její velikost je rovna polovině velikosti strany, s níž je rovnoběžná (viz obrázek 2.1). Vyplývá to ze stejnolehlosti s koeficientem $\kappa = \frac{1}{2}$

$$H(A, \tfrac{1}{2}) : \triangle ABC \to \triangle AT_cT_b,$$

kde se úsečka BC zobrazí na úsečku T_cT_b, takže jsou tyto úsečky rovnoběžné a platí $|T_aT_b| = \frac{1}{2}|AB|$.

Věta 8. *„Střední příčky trojúhelníku dělí trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky."* [2]

Důkaz. Z obrázku 2.1 je zřejmé, že všechny trojúhelníky jsou shodné podle věty (sss).

□

Trojúhelník, který vznikne v trojúhelníku sestrojením všech tří jeho středních příček, se nazývá **příčkový trojúhelník** a značíme ho $\triangle T_aT_bT_c$. Jeho obsah je roven $\frac{1}{4}$ obsahu původního trojúhelníku.

Z podobnosti trojúhelníků $ABC, T_aT_bT_c$ podle věty (sss) vyplývá, že pokud je trojúhelník ABC ostroúhlý (popř. pravoúhlý, popř. tupoúhlý), je také jeho příčkový trojúhelník $T_aT_bT_c$ ostroúhlý (popř. pravoúhlý, popř. tupoúhlý).

[2] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 63.

Kapitola 3

Těžiště

V této kapitole si zavedeme pojem těžnice, která využívá znalosti středu strany z předchozí kapitoly. Dále uvedeme výpočet velikosti těžnic pomocí stran trojúhelníku, důkaz existence těžiště v každém trojúhelníku a několik vlastností odvozených od těžnic a těžiště.
Dříve než zavedeme těžiště, musíme si zadefinovat pojem těžnice.

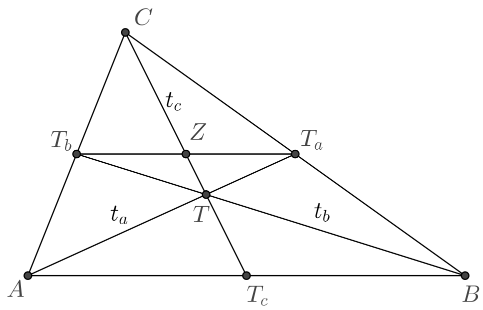
Definice 7. „Každá úsečka, jejíž krajní body jsou vrchol trojúhelníku a střed jeho protilehlé strany, se nazývá těžnice trojúhelníku.“ [1]

Dále budeme používat označení t_a pro těžnici spojující střed úsečky BC a bod A. Analogicky budeme značit t_b a t_c.
V každém trojúhelníku lze sestrojit tři těžnice.

Věta 9. *„Těžnice v trojúhelníku procházejí týmž bodem.“* [2]
Důkaz. Mějme libovolný trojúhelník ABC se středy jednotlivý stran T_a, T_b a T_c. Potom označme T průsečík těžnic AT_a a BT_b. Chceme ukázat, že těžnice CT_c také prochází bodem T.
Z obrázku 3.1 vidíme, že trojúhelníky ABC a T_bT_aC jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě C. Z toho vyplývá, že střed úsečky T_aT_b, označme ho Z, leží na přímce

[1] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 72.

[2] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 23.



Obrázek 3.1: Těžiště trojúhelníku

CT_c. Dále jsou stejnolehlé i trojúhelníky ABT a T_aT_bT se středem stejnolehlosti v bodě T. Tím zjistíme, že body T, Z a T_c leží na jedné přímce. Protože v jedné přímce leží také body C, Z a T_c, těžnice CT_c prochází bodem T. [3] □

Bod T nazýváme **těžiště** trojúhelníku.

Věta 10. *„Těžiště trojúhelníku dělí každou z těžnic v poměru 2:1, přičemž delší úsek leží blíže příslušnému vrcholu trojúhelníka."* [4]

Důkaz. Využije obrázek 3.1. Protože trojúhelníky ABC a T_bT_aC jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě C a Z je střed úsečky T_aT_b, platí, že $|CZ| = |ZT_c|$. Podle druhé stejnolehlosti (se středem v bodě T) je $|TT_c| = 2\,|TZ|$. To znamená, že $6\,|TZ| = |T_cC|$ a $4\,|TZ| = |TC|$. Takže z rovnosti

$$|T_cC| = |T_cT| + |TC| = 2\,|TZ| + 4\,|TZ|$$

vyplývá, že $|T_cT| : |TC| = 2 : 4 = 1 : 2$. [5]
Důkaz provedeme analogicky pro zbývající dvě těžnice. □

Z předchozí věty lze určit následující vztahy
$|AT| = \frac{2}{3}\,|t_a|\,,$ $|BT| = \frac{2}{3}\,|t_b|\,,$ $|CT| = \frac{2}{3}\,|t_c|.$

[3]ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 24.
[4]Tamtéž.
[5]Tamtéž.

Nyní si ukážeme, jak vypočítat velikost těžnice v trojúhelníku pouze za předpokladu, že známe velikosti jednotlivých stran trojúhelníku.
K výpočtu využijeme kosinovou větu pro trojúhelník ABT_b (viz obrázek 3.2). Platí tedy

$$t_b{}^2 = c^2 + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 - cb\cos\alpha.$$

Z kosinové věty pro trojúhelník ABC platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Z této rovnosti si vyjádříme $bc\cos\alpha$, dosadíme do první rovnosti, upravíme a dostáváme vztah

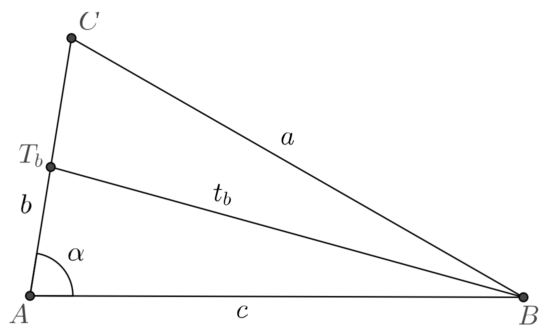
$$\begin{aligned} t_b{}^2 &= c^2 + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right) \\ t_b{}^2 &= \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{2}a^2 \\ t_b{}^2 &= \tfrac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2) \end{aligned}$$

$$t_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

Analogicky vypočítáme velikost ostatních těžnic v trojúhelníku, tedy

$$t_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$t_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$



Obrázek 3.2: Výpočet velikosti těžnice

Tvrzení 4. *Těžnice trojúhelníku rozdělí trojúhelník ABC na šest částí stejného obsahu.*[6]

Důkaz. Nejprve ukážeme, že obsah trojúhelníku ABT, tedy S_{ABT}, je roven S_{BCT} i S_{ACT}. (viz obrázek 3.3)

Využijeme podobnost trojúhelníků T_cXT a T_cYC podle věty (uu). Platí tedy s využitím předchozí věty, že

$$|CY| : |TX| = |CT_c| : |TT_c| = 3 : 1.$$

Toto zjištění si přepíšeme do tvaru $|TX| = \frac{1}{3}|CY|$, který použijeme v dalším dokazování.

Pro obsah trojúhelníku ABT platí

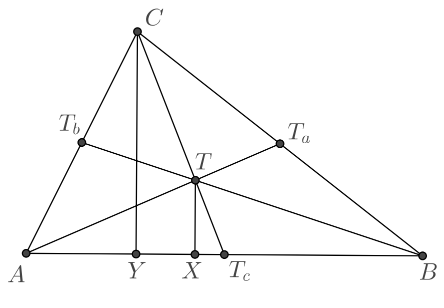
$$S_{ABT} = \frac{1}{2}|AB||XT| = \frac{1}{2}|AB|\frac{1}{3}|CY| = \frac{1}{6}|AB||CY| = \frac{1}{3}S_{ABC}.$$

Analogicky dokážeme, že platí

$$S_{BCT} = \frac{1}{3}S_{ABC} \text{ a } S_{ACT} = \frac{1}{3}S_{ABC}.$$

Z toho je očividné, že $S_{ABT} = S_{BCT} = S_{ACT}$.

Teď už zbývá jenom dokázat, že $S_{AT_cT} = S_{BT_cT}$, tedy $\frac{1}{2}|AT_c||TX| = \frac{1}{2}|BT_c||TX|$. A to platí, protože T_c je střed úsečky AB a tím $|AT_c| = |BT_c|$. Analogicky dokážeme, že $S_{BT_aT} = S_{CT_aT}$ a $S_{AT_bT} = S_{CT_bT}$. □



Obrázek 3.3: Ilustrace k důkazu tvrzení 4

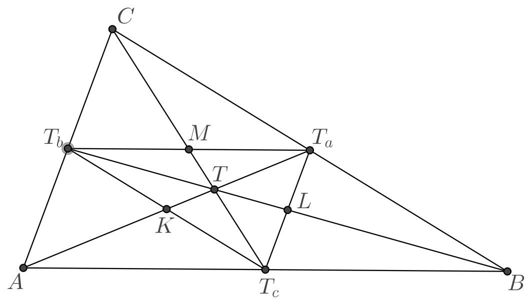
[6] BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. *Planimetrie.* 2., rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2, s. 57.

Věta 11. *„Těžiště trojúhelníku splývá s těžištěm jeho příčkového trojúhelníku.“* [7]

Ve stejnolehlosti se středem v těžišti a koeficientem $\kappa = -0,5$ se trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $T_aT_bT_c$.
Lze zapsat formálně:

$$H(T, -0,5) : \triangle ABC \to \triangle T_aT_bT_c.$$

Důkaz. Z obrázku 3.4 vidíme, že věta je splněna, pokud body K, L, M jsou středy stran trojúhelníku $T_aT_bT_c$. Ve stejnolehlosti se středem v bodě A se trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník AT_cT_b. Tedy i střed úsečky $BC = T_a$ se zobrazí na střed úsečky $T_cT_b = K$. Analogicky důkaz provedeme i pro body L a M. □



Obrázek 3.4: Splynutí těžiště příčkového a obecného trojúhelníka

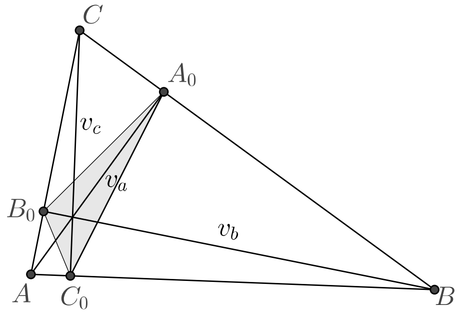
[7] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 25.

Kapitola 4

Ortocentrum

Tato kapitola, ač to možná podle názvu není patrné, se bude zabývat výškami v trojúhelníku. Jsou to kolmice z vrcholů trojúhelníku na protější strany. Jejich průsečík se nazývá ortocentrum a na rozdíl od těžiště může ležet i mimo daný trojúhelník. Dále ukážeme vzájemnou polohu výšky a těžnice ve speciálních typech trojúhelníků.
Pomocí vyjádření velikosti výšek přes strany trojúhelníku lze spočítat obsah trojúhelníku a určit vzájemný poměr mezi stranami a výškami v trojúhelníku.
Začneme od základního pojmu této kapitoly tedy definicí výšky trojúhelníku.

Definice 8. „Každá úsečka, která prochází vrcholem trojúhelníku a je kolmá k přímce obsahující k němu protilehlou stranu, se nazývá **výška** trojúhelníku.“ [1]



Obrázek 4.1: Výšky v trojúhelníku

[1] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 72.

Výšku na stranu a budeme označovat v_a a patu této výšky A_0. Analogicky budeme značit i ostatní výšky v trojúhelníku a jejich paty.
Trojúhelník $A_0B_0C_0$ se nazývá **ortický trojúhelník**. V pravoúhlém trojúhelníku tento trojúhelník nelze sestrojit, neboť paty dvou různých výšek splynou v jeden bod.

K výpočtu velikosti jednotlivých výšek v ostroúhlém trojúhelníku využijeme definici sinu v pravoúhlém trojúhelníku (viz obrázek 4.1).

$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b} \qquad \Rightarrow \qquad v_c = b\sin\alpha.$$

Stejným způsobem určíme i velikost ostatních výšek.

$$v_a = c\sin\beta,$$
$$v_b = c\sin\alpha.$$

Nyní si odvodíme vzorec pro výpočet velikosti výšek v trojúhelníku při znalosti pouze velikostí jeho jednotlivých stran.
Již víme, že platí

$$|AC_0| = b\cos\alpha.$$

S využitím Pythagorovy věty pro trojúhelník AC_0C a předchozího vztahu získáváme

$$v_c{}^2 = b^2\left(1-\cos^2\alpha\right). \tag{4.1}$$

Abychom z našeho vztahu odstranili $\cos\alpha$, vyjádříme si ho pomocí kosinové věty pro trojúhelník ABC, tedy

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

dosadíme ho do vztahu (4.1) a upravíme

$$v_c{}^2 = b^2\left(1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right) = b^2\frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2} = \frac{(a+c-b)(a+c+b)(b+c-a)(a+b-c)}{4c^2}.$$

Dále použijeme přepis $a+b+c=2s$ a dostaneme

$$v_c{}^2 = \frac{2(s-b)2s2(s-a)2(s-c)}{4c^2},$$
$$v_c = \frac{2}{c}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Protože pro obsah trojúhelníka platí $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Heronův vzorec), můžeme psát

$$v_c = \tfrac{2}{c}S.$$

Analogicky vypočítáme i velikost zbývajících výšek

$$v_a = \tfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \tfrac{2}{a}S$$
$$v_b = \tfrac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \tfrac{2}{b}S.$$

Z těchto informací lze odvodit poměr mezi výškami a stranami trojúhelníku

$$v_a : v_b : v_c = \tfrac{2}{a}S : \tfrac{2}{b}S : \tfrac{2}{c}S = \tfrac{1}{a} : \tfrac{1}{b} : \tfrac{1}{c},$$

ale i vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku při znalosti strany trojúhelníku a výšky na tuto stranu. Použijeme vztah $v_a = \frac{2}{a}S$, který jsme odvodili už dříve, a pouhým vyjádřením obsahu S získáme daný vzorec

$$S = \tfrac{1}{2}\, a \cdot v_a.$$

Pro výpočet obsahu lze použít libovolnou stranu trojúhelníku a příslušnou výšku, tedy

$$S = \tfrac{1}{2}\, a \cdot v_a = \tfrac{1}{2}\, b \cdot v_b = \tfrac{1}{2}\, c \cdot v_c.$$

Tvrzení 5. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC s výškami AA_0, BB_0, CC_0 platí rovnost* $|A_0C| \cdot |BC| = |B_0C| \cdot |AC|$.[2]

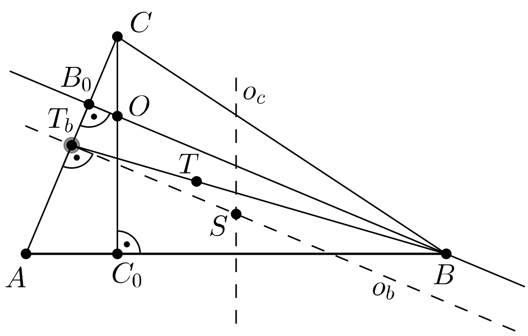
Důkaz. Využijeme Euklidovu větu o odvěsně nejprve pro trojúhelník AC_0C, kde ${v_c}^2 = |B_0C| \cdot |AC|$, poté pro trojúhelník BC_0C, kde ${v_c}^2 = |A_0C| \cdot |BC|$. Porovnáním obou rovností získáme námi dokazovanou rovnost. □

Věta 12. *„Výšky v trojúhelníku procházejí týmž bodem.“* [3]

[2]KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 88.

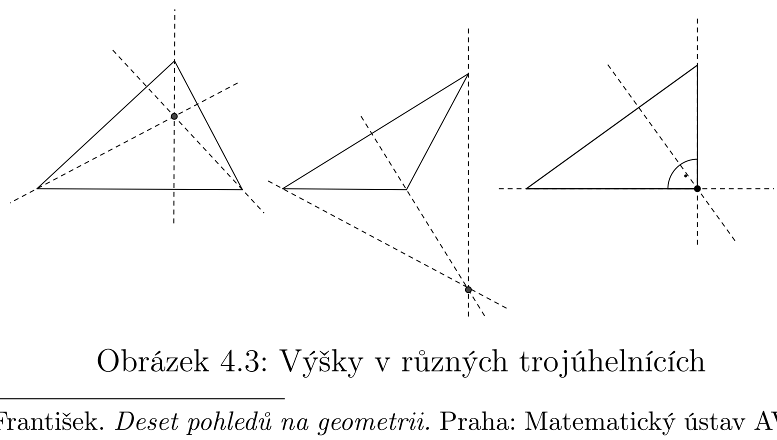
[3]ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 26.

Důkaz. Ve stejnolehlosti se středem v těžišti T a koeficientem $\kappa = -2$ se bod T_b zobrazí na bod B, tedy osa úsečky AC, která je kolmá na tuto stranu, se zobrazí na úsečku kolmou na stranu AC procházející bodem B, což je výška v_b (viz obrázek 4.2). Stejným způsobem se zobrazí i ostatní osy úseček. Neboť osy stran prochází jedním bodem (viz kapitola Střed kružnice opsané), tak se tento bod zobrazí na průsečík výšek. Výšky v trojúhelníku proto procházejí jedním bodem. [4] □



Obrázek 4.2: Ortocentrum

Tento bod se nazývá průsečík výšek nebo-li **ortocentrum** a značíme ho O. V ostroúhlém trojúhelníku leží ortocentrum uvnitř tohoto trojúhelníku, v tupoúhlém leží mimo trojúhelník a v pravoúhlém je shodné s vrcholem, u něhož je pravý úhel.



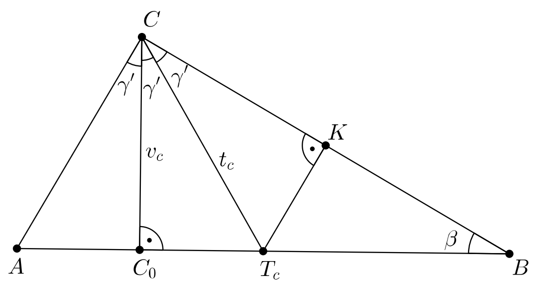
Obrázek 4.3: Výšky v různých trojúhelnících

[4] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 77-78.

Nyní se budeme zabývat vzájemnou polohou výšky a těžnice ve speciálních typech trojúhelníků.
V rovnostranném trojúhelníku výšky a příslušné těžnice splynou, což znamená, že splynou i ortocentrum a těžiště.
V rovnoramenném trojúhelníku splyne pouze výška a těžnice vedené z vrcholu proti základně, ostatní jsou různé. Ortocentrum a těžiště nesplývají, ale leží na výšce kolmé k základně.
Pro pravoúhlý trojúhelník platí následující tvrzení.

Tvrzení 6. *Jestliže v daném trojúhelníku těžnice a výška k téže straně dělí úhel, z něhož obě úsečky vychází, na tři shodné části, je tento úhel v trojúhelníku pravý.*

Toto tvrzení však neplatí obecně pro všechny typy pravoúhlých trojúhelníků, ale pouze pro ty, kde zbývající úhly jsou 60° a 30°, jak bude vidět v důkazu.



Obrázek 4.4: Ilustrace k důkazu tvrzení 6

Důkaz. Označme ABC trojúhelník splňující pro výšku a těžnici předpoklady dokazovaného tvrzení, tedy že rozdělí úhel γ na třetiny, kde libovolný z nich označíme γ'. Dále označíme C_0 patu výšky v_c a T_c střed strany AB, takže těžnice $t_c = T_cC$. Trojúhelník AT_cC je rovnoramenný, protože $\triangle AC_0C \simeq \triangle T_cC_0C$ podle věty (usu). Tedy $|AC| = |T_cC|$ a $|AC_0| = |T_cC_0|$. Protože je T_c střed úsečky AB, platí $|BT_c| = 2|T_cC_0|$. Z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0 získáváme vztah

$$2\gamma' + \beta = 90^\circ,$$

pokud využijeme značení z obrázku 4.4.

Nyní sestrojíme pomocný bod K, který je patou výšky vedené ze středu T_c na stranu BC. Vzniklý trojúhelník T_cCK je shodný s trojúhelníkem T_cCC_0 podle věty (usu), takže $|T_cK| = |T_cC_0|$. V pravoúhlém trojúhelníku T_cBK platí

$$\sin\beta = \frac{|T_cK|}{|T_cB|} = \frac{|T_cC_0|}{|T_cB|} = \frac{1}{2},$$

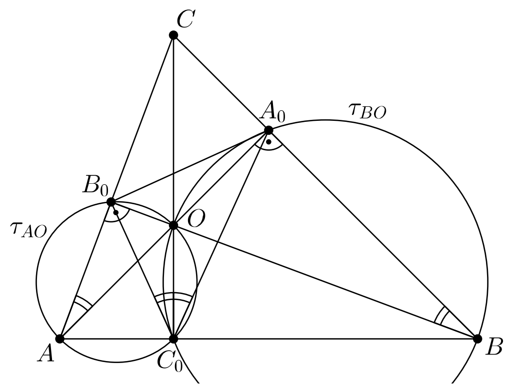
$$\beta = 30°.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku BC_0C vyplývá, že $2\gamma' + \beta = 90°$, takže $\gamma' = 30°$, a tedy

$$\gamma = 3\gamma' = 3 \cdot 30° = 90°.$$

□

Tvrzení 7. *Úhly ortického trojúhelníku k danému trojúhelníku jsou půleny výškami tohoto trojúhelníku.*



Obrázek 4.5: Ilustrace k důkazu trvzení 4

Důkaz. Označme $A_0B_0C_0$ ortický trojúhelník trojúhelníku ABC a O ortocentrum trojúhelníku ABC (viz obrázek 4.5). Sestrojíme Thaletovy kružnice τ_{AO} a τ_{BO}. Podle věty o obvodovém úhlu platí, že

$$|\angle B_0AO| = |\angle B_0C_0O| \tag{4.2}$$

$$|\angle A_0BO| = |\angle A_0C_0O|. \tag{4.3}$$

Trojúhelníky AOB_0, BOA_0 jsou podobné, protože se shodují dvojice úhlů $\angle AB_0O, \angle BA_0O$ a $\angle AOB_0, \angle BOA_0$. Z toho vyplývá, že

$$|\angle OBA_0| = |\angle OAB_0|.$$

Z této rovnosti a rovností 4.2 a 4.3 platí $|\angle OC_0B_0| = |\angle OC_0A_0|$. Takže výška dělí úhel $B_0C_0A_0$ na poloviny, a je tedy jeho osou úhlu. $\square$

Kapitola 5

Střed kružnice opsané

Jak už název napovídá, v této kapitole se budeme zabývat osami stran, jejichž průsečíkem je střed kružnice opsané. Kružnici opsanou lze sestrojit k libovolnému trojúhelníku. Její poloměr lze vyjádřit pomocí strany trojúhelníku a protilehlého úhlu. Speciálním případem kružnice opsané je Thaletova kružnice, která je opsána pravoúhlému trojúhelníku.
Také si ukážeme důkaz Nagelovy věty a v jakých souměrnostech se ortocentrum zobrazí na kružnici opsanou.

Definice 9. „Osa úsečky AB je množina všech bodů, které mají od daných bodů A, B stejnou vzdálenost.“ [1]

Definici lze zapsat symbolicky

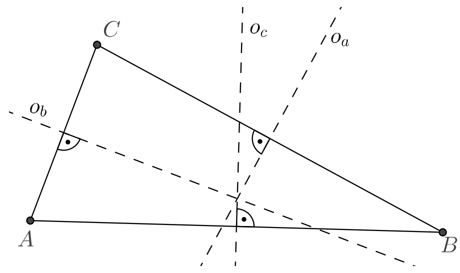
$$o = \{X \in \rho : |XA| = |XB|\}.$$

Osu úsečky $AB = c$ v trojúhelníku ABC budeme značit o_c. Analogicky označíme i ostatní osy stran.

Tvrzení 8. *Osa úsečky je vždy kolmá na tuto úsečku.*

Důkaz. Označme X libovolný bod na ose úsečky AB mimo střed této úsečky T_c. Trojúhelník AXB je rovnoramenný se základnou AB. Těžnice na tuto základnu T_cX splývá s její výškou, tudíž je přímka T_cX kolmá na stranu AB. □

[1] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.*4. upr. vydání. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4, s. 90.

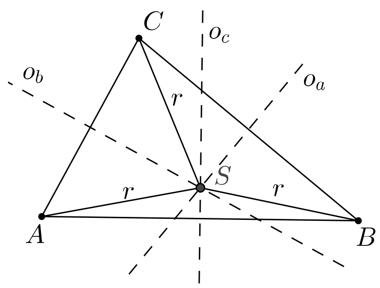


Obrázek 5.1: Osy stran

Věta 13. *„Osy stran libovolného trojúhelníku ABC procházejí jedním bodem.“* [2]

Tento bod budeme označovat S a nazýváme ho **střed kružnice opsané trojúhelníku**.

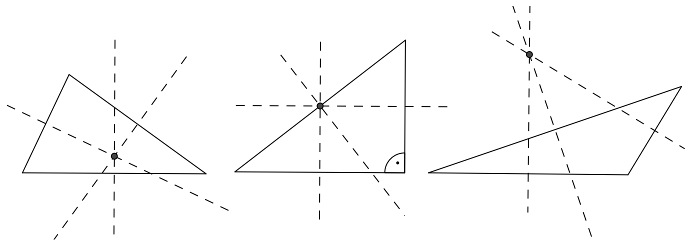
Důkaz. Osy o_a a o_b se protínají v bodě S (viz obrázek 5.2). Pro tento bod z předchozí definice platí $|SA| = |SB| = |SC|$. Protože má bod S stejnou vzdálenost od bodů A a B, leží také na ose o_c. Takže bod S je průsečík všech os v trojúhelníku ABC. □



Obrázek 5.2: Střed kružnice opsané

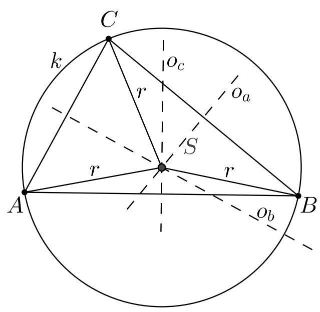
V ostroúhlém trojúhelníku leží střed kružnice opsané uvnitř trojúhelníku, v pravoúhlém splývá se středem přepony a v tupoúhlém leží mimo trojúhelník. V rovnostranném trojúhelníku splývá s těžištěm a v rovnoramenném trojúhelníku leží střed kružnice opsané na výšce kolmé k základně.

[2] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 75.



Obrázek 5.3: Osy stran v různých trojúhelnících

Podle předchozí věty lze sestrojit kružnici se středem v bodě S a poloměrem $|SA| = r$, která bude procházet všemi vrcholy trojúhelníku ABC. Tato kružnice se nazývá **kružnice opsaná trojúhelníku**.



Obrázek 5.4: Kružnice trojúhelníku opsaná

Nyní si odvodíme vzorec pro výpočet poloměru kružnice opsané. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí $|\angle ASB| = 2\,|\angle ACB|$ (viz obrázek 5.5). Trojúhelník ABS je rovnoramenný, takže $|\angle T_cSB| = |\angle ACB|$. Z trojúhelníka T_cBS, který je pravoúhlý, lze vyjádřit

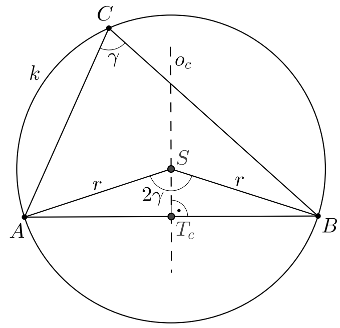
$$\sin\gamma = \tfrac{c}{2} \cdot \tfrac{1}{r}.$$

Jednoduchou úpravou dostáváme vzorec pro výpočet poloměru

$$r = \tfrac{c}{2\sin\gamma}.$$

Pro výpočet lze použít i ostatní úhly v trojúhelníku a platí

$$r = \tfrac{a}{2\sin\alpha} = \tfrac{b}{2\sin\beta} = \tfrac{c}{2\sin\gamma}.$$



Obrázek 5.5: Výpočet poloměru kružnice opsané

V pravoúhlém trojúhelníku je poloměr kružnice opsané roven

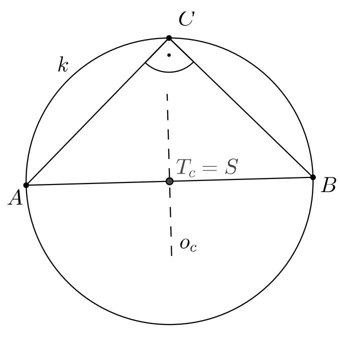
$$r = \frac{1}{2}c,$$

protože střed kružnice opsané leží ve středu strany AB. Tato kružnice se nazývá **Thaletova kružnice**.

Definice 10. „Thaletova kružnice je množina všech bodů, z nichž vidíme danou úsečku AB pod pravým úhlem.“ [3]

Tuto definici lze zapsat symbolicky

$$\tau_{AB} = \{X \in \rho : |\angle AXB| = 90°\}.$$



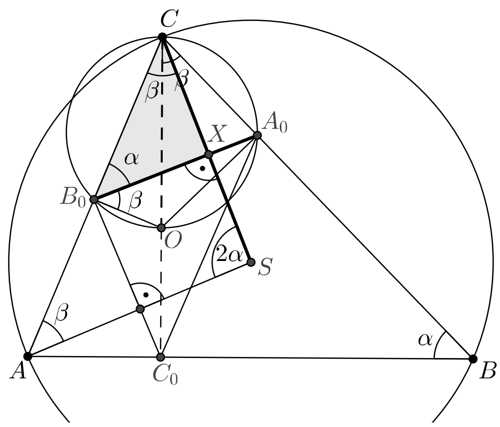
Obrázek 5.6: Thaletova kružnice

[3]POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.*4. upr. vydání. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4, s. 94.

Věta 14. *„Buď S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Potom přímky SA, SB, SC jsou kolmé postupně k přímkám B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 procházejícím stranami ortického trojúhelníku."* [4]

Tato věta bývá často označována jako Nagelova věta.

Důkaz. Chceme dokázat, že přímka A_0B_0 je kolmá k přímce CS. Průsečík těchto přímek si označíme X, úhel $\angle XB_0C$ označíme α a úhel $\angle CAS$ označíme β. Body B_0, A_0, C, O leží na Thaletově kružnici s průměrem $|CO|$. Podle definice obvodového úhlu s tětivou OA_0 je v Thaletově kružnici $|\angle OB_0A_0| = |\angle OCA_0| = \beta$. Protože $\angle OB_0C$ je pravý, je úhel $\beta = 90° - \alpha$. V pravoúhlém trojúhelníku BCC_0 je úhel při vrcholu C roven β, a tedy úhel při vrcholu B roven α, proto s využitím vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem v kružnici opsané trojúhelníku ABC je $|\angle ASC| = 2\alpha$. A protože body A, C leží na kružnici opsané, leží střed S na ose úsečky AC. Víme, že $|AS| = |SC| = r$, a proto je trojúhelník ASC rovnoramenný a platí $|\angle ACS| = \beta$. Ze znalosti velikosti součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku a informace, že $\alpha + \beta = 90°$, vyplývá, že $\angle B_0XC$ je pravý (viz obrázek 5.7).
Analogicky dokážeme, že i přímky C_0B_0, AS a A_0C_0, BS jsou na sebe kolmé. $\square$

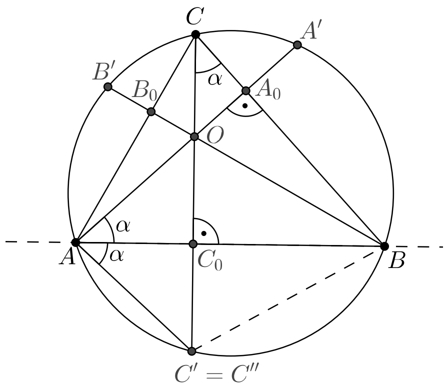


Obrázek 5.7: Nagelova věta

[4] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 35.

Tvrzení 9. *„Buď ABC libovolný trojúhelník a buďte A', B', C' postupně symetrické obrazy ortocentra O v osových souměrnostech s osami BC, CA, AB. Body A', B', C' leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané.“* [5]

Důkaz. Průsečík kružnice opsané trojúhelníku a přímky CC_0 označíme C'' a chceme dokázat, že tento bod splyne s bodem C'. Podle definice obvodového úhlu nad tětivou $C'B$ je $|\angle C'AB| = |\angle C'CB|$ a tento úhel označíme α (viz Obrázek 5.8).
Trojúhelníky CBC_0 a ABA_0 jsou podobné (podle věty uu – shodují se v pravém úhlu a úhlu při vrcholu B), takže $|\angle C_0CB| = |\angle BAA_0| = \alpha$. Z toho vyplývá, že trojúhelníky $AC''C_0$ a AOC_0 jsou shodné podle věty (usu) a $|OC_0| = |C_0C''|$. Bod C'' je osově souměrný s ortocentrem podle osy AC_0, tudíž $C'' = C'$. Analogicky dokážeme i rovnosti $A'' = A'$ a $B'' = B'$. [6] □



Obrázek 5.8: Ilustrace k důkazu tvrzení 9

Tvrzení 10. *„Je dán trojúhelník ABC. Pak vzdálenost středu S kružnice trojúhelníku opsané od strany AB je poloviční než vzdálenost ortocentra od vrcholu C.“* [7]

Důkaz. Označme $|ST_c| = x$. Chceme dokázat, že $|OC| = 2x$. Ve stejnolehlosti se středem v těžišti T trojúhelníku ABC a koeficientem $\kappa = -2$ se bod S zobrazí na bod O

[5] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 34.

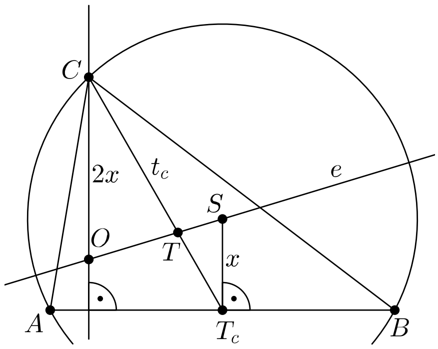
[6] Tamtéž, s. 34-35.

[7] BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF.*Planimetrie.* 2., rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2, s. 57.

(body S, T, O leží na Eulerově přímce) a bod T_c se zobrazí na vrchol C (úsečka T_cC je těžnice trojúhelníku ABC). Z definice stejnolehlost platí

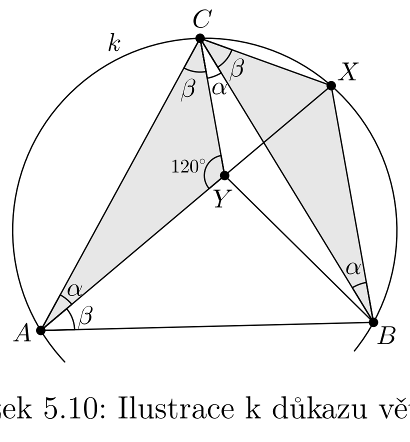
$$|CO| = |\kappa| \cdot |ST_c| \;\Rightarrow\; |CO| = |-2| \cdot x = 2x.$$

□



Obrázek 5.9: Ilustrace k důkazu tvrzení 10

Věta 15. *„Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, kterému je opsána kružnice k. Pak pro libovolný bod $X \in k$ platí, že největší ze vzdáleností bodu X od vrcholů trojúhelníku ABC je rovna součtu vzdáleností od zbývajících vrcholů.“* [8]



Obrázek 5.10: Ilustrace k důkazu věty 15

[8] BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. *Planimetrie.* 2., rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2, s. 72.

Důkaz. Pro speciální případ, že bod X splývá s libovolným vrcholem, věta platí, protože dvě vzdálenosti jsou si rovny a zbývající je nulová. Zvolme tedy bod X různý od vrcholů trojúhelníku ABC na oblouku BC. Pak chceme dokázat, že platí

$$|AX| = |BX| + |CX|.$$

Sestrojíme rovnostranný trojúhelník XYC tak, aby bod Y ležel uvnitř kružnice k.
Z věty o obvodovém úhlu platí

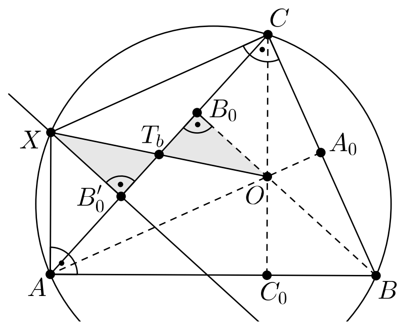
$$|\angle CAX| = |\angle CBX| = \alpha \text{ a } |\angle BCX| = |\angle BAX| = \beta.$$

Pak $\alpha + \beta = 60°$. Z toho vyplývá, že $|\angle YCB| = \alpha$ a $|\angle ACY| = \beta$. Trojúhelníky ACY, BCX jsou shodné podle věty (sus), kde $|AC| = |BC|$ a $|CY| = |CX|$. Bod Y leží na přímce AX, neboť $|\angle AYC| = 180° - \alpha - \beta = 120°$ a $|\angle CYX| = 60°$.
Ze shodnosti trojúhelníků ACY, BCX dostáváme rovnost

$$|AX| = |AY| + |YX| = |XB| + |XC|.$$

□

Tvrzení 11. *Ortocentrum se ve středové souměrnosti podle středů stran trojúhelníku zobrazí na kružnici opsanou tomuto trojúhelníku.*



Obrázek 5.11: Ilustrace k důkazu tvrzení 14

Důkaz. Ve středové souměrnosti se středem v bodě T_b se bod B_0 zobrazí na bod $B_0{}'$ a úsečka OB_0 na úsečku $XB_0{}'$. Trojúhelníky $T_bOB_0, T_bXB_0{}'$ jsou tedy shodné podle věty (usu) viz obrázek 5.11. Zbývá už jen dokázat, že bod X leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané. Protože se vrchol C ve středové souměrnosti zobrazí na vrchol A, je přímka CC_0 vzorem k přímce AX a úhel BAX je pravý. Analogicky, protože vrchol A se zobrazí na vrchol C, se přímka AA_0 zobrazí na přímku XC a úhel BCX je také pravý.

Ve čtyřúhelníku $ABCX$, kde součet vnitřních úhlů je vždy roven $360°$, a kde

$$|\angle BAX| = |\angle BCX| = 90°,$$

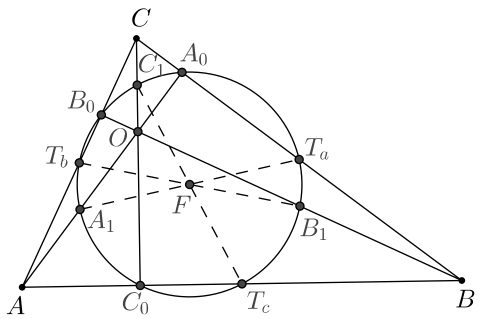
musí pro úhly ABC, AXC platit, že $|\angle ABC| + |\angle AXC| = 180°$, takže čtyřúhelník $ABCX$ je tětivový, lze mu tedy opsat kružnici, a proto bod X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. $\square$

Kapitola 6

Střed Feuerbachovy kružnice

V této kapitole zadefinujeme Feuerbachovu kružnici, na které leží středy stran, paty výšek a body A_1, B_1, C_1, což jsou středy úseček AO, BO, CO, kde O je ortocentrum. Ukážeme polohu jednotlivých bodů na Feuerbachově kružnici v různých typech trojúhelníků. Zavedeme si pojem Eulerova přímka a ukážeme poměry mezi významnými body na této přímce. V podkapitole se budeme věnovat Simsonově přímce a vlastnostmi, které platí pro body na kružnici opsané trojúhelníku.

Věta 16. *„Buď ABC libovolný trojúhelník. Potom středy jeho stran, paty jeho výšek a středy A_1, B_1, C_1 úseček AO, BO, CO, kde O je ortocentrum, leží na kružnici.“* [1]



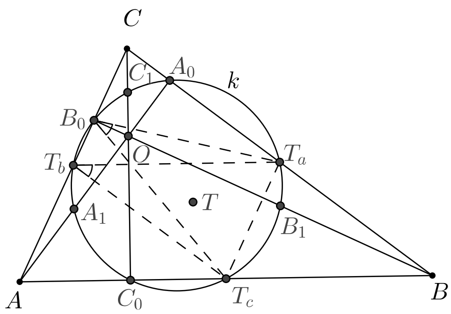
Obrázek 6.1: Feuerbachova kružnice

Jedná se o kružnici opsanou trojúhelníku středních příček trojúhelníku ABC. Tuto

[1] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 36.

kružnici nazýváme **Feuerbachova kružnice** nebo též kružnice devíti bodů. Její střed budeme značit F.

Důkaz. Ve stejnolehlosti se středem v těžišti a koeficientem $\kappa = -0,5$ se trojúhelník ABC zobrazí na příčkový trojúhelník $T_aT_bT_c$, a tedy kružnice opsaná trojúhelníku ABC se zobrazí na kružnici, kterou označíme k a která prochází body T_a, T_b, T_c. Nyní ukážeme, že na kružnici k leží i paty výšek a body A_1, B_1, C_1. Postupujme podle obrázku 6.2. Trojúhelník BCB_0 je pravoúhlý, proto body B, C a B_0 leží na Thaletově

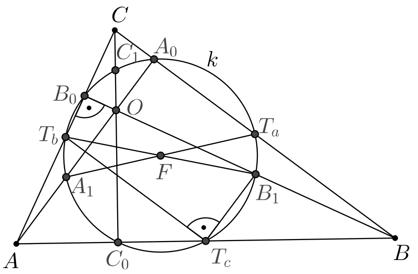


Obrázek 6.2: Ilustrace k důkazu věty 16

kružnici se středem v bodě T_a a poloměrem $|T_aB|$, tedy platí $|T_aB| = |T_aC| = |T_aB_0|$. Proto je trojúhelník B_0BT_a rovnoramenný a platí $|B_0T_a| = |T_aB| = \frac{1}{2}|BC| = |T_cT_b|$, za pomoci vlastností příčkového trojúhelníku. Zjišťujeme tedy, že lichoběžník $T_cT_aB_0T_b$ je rovnoramenný. Pro něj platí, že jeho ramena i úhlopříčky se rovnají, tudíž pro velikosti úhlů platí $|\angle T_cT_bT_a| = |\angle T_cB_0T_a|$. A z vlastnosti, že všechny body, z nichž je daná úsečka vidět pod stejným úhlem, leží na části kružnice, leží i bod B_0 na kružnici k. Analogicky dokážeme, že i body A_0, C_0 leží na kružnici k.

Podle obrázku 6.3 ukážeme, že na kružnici k leží i body A_1, B_1, C_1. V trojúhelníku ABO je úsečka T_cB_1 střední příčka odpovídající straně AO a je tedy kolmá ke straně BC a zároveň k její střední příčce T_bT_c, a proto platí, že $\angle B_1T_cT_b$ je pravý. Proto body B_1, T_c, T_b leží na Thaletově kružnici k s průměrem $|T_bB_1|$. Avšak trojúhelník $T_bB_1B_0$ je také pravoúhlý, takže i bod B_0 leží na kružnici k. Analogicky dokážeme, že body A_0 a C_0 leží na kružnici k. [2] □

[2]ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače peda-*



Obrázek 6.3: Ilustrace k důkazu věty 16

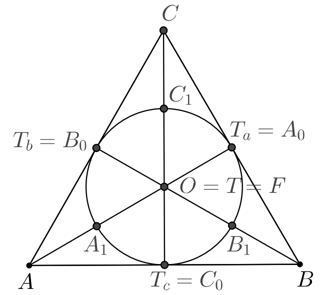
Z důkazu vyplývá, že střed Feuerbachovy kružnice F je středem úsečky A_1T_a (popř. B_1T_b nebo C_1T_c) a poloměr kružnice je roven polovině poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC ze stejnolehlosti se středem v těžišti T.

Feuerbachova kružnice se dotýká kružnice vepsané (vnitřní dotyk) a kružnic připsaných trojúhelníku (vnější dotyk), což jako první dokázal německý matematik K. W. Feuerbach. [3]

V různých typech trojúhelníků dochází ke splynutí některých bodů na Feuerbachově kružnici. Také střed F mění svou pozici.

- Rovnostranný trojúhelník

  Zde splývají středy stran a paty příslušných výšek, takže ortocentrum, těžiště i střed Feuerbachovy kružnice splývají. Feuerbachova kružnice splývá s kružnicí trojúhelníku vepsanou.



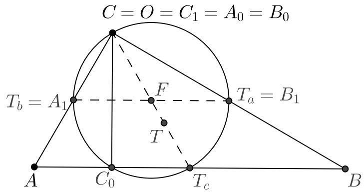
Obrázek 6.4: Feuerbachova kružnice v rovnostranném trojúhelníku

gogické fakulty Univerzity Karlovy]. 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 36-38.

[3] COXETER, Harold Scott MacDonald a Samuel L. GREITZER. *Geometry revisited.* Washington: Mathematical Association of America, c1967. New mathematical library, 19. ISBN 0-88385-619-0, s. 22.

- Různostranný pravoúhlý trojúhelník

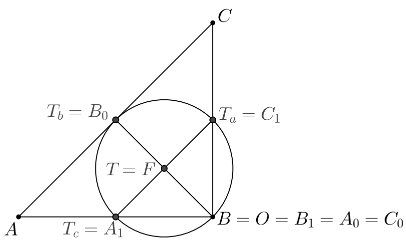
  Zde splynou středy odvěsen T_a, T_b po řadě s body B_1, A_1 a vrchol C s ortocentrem a body C_1, A_0, B_0. Střed kružnice F leží na na těžnici procházející středem přepony.



Obrázek 6.5: Feuerbachova kružnice v různostranném pravoúhlém trojúhelníku

- Rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník

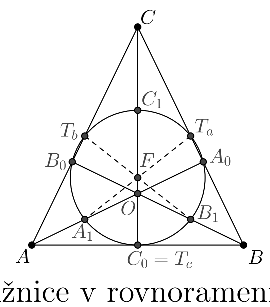
  Střed Feuerbachovy kružnice splývá s těžištěm trojúhelníku, protože středy odvěsen splynou s body A_1, C_1 a ortocentrum je ve vrcholu trojúhelníku stejně jako body B_1, A_0, C_0.



Obrázek 6.6: Feuerbachova kružnice v rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku

- Rovnoramenný nepravoúhlý trojúhelník

  V tomto případě splynou pouze střed základy s patou výšky vedenou na základnu. Střed F leží na výšce v_c.



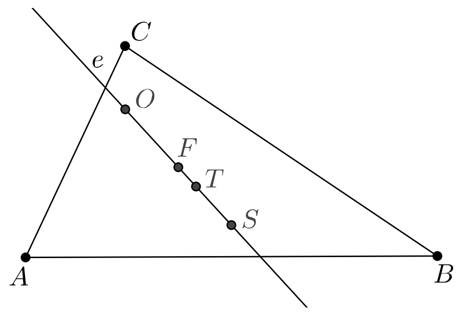
Obrázek 6.7: Feuerbachova kružnice v rovnoramenném nepravoúhlém trojúhelníku

Ve všech případech leží střed Feuerbachovy kružnice F na úsečce OT, tedy mezi těžištěm a ortocentrem, pokud s nimi nesplývá. Body F, O, T tedy leží na přímce.

Věta 17. *„Není-li trojúhelník ABC rovnostranný, potom střed kružnice jemu opsané S, těžiště T, ortocentrum O a střed F Feuerbachovy kružnice jsou čtyři různé body ležící na téže přímce v pořadí O, F, T, S tak, že platí*

$$|TS| = \tfrac{1}{3}|OS|, \qquad |FT| = \tfrac{1}{4}|OT|.\text{“}$$ [4]

Tato přímka se nazývá **Eulerova přímka** a budeme ji značit e.



Obrázek 6.8: Eulerova přímka

Důkaz. Body S, T, O leží na jedné přímce, neboť bod S se zobrazí ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $\kappa = -2$ na bod O. Nyní už zbývá jenom dokázat, že na této přímce leží i bod F. Podle důkazu předchozí věty vznikne i Feuerbachova kružnice stejnolehlostí kružnice opsané trojúhelníku se středem v těžišti a koeficientem $\kappa = -0,5$, potom tedy střed F Feuerbachovy kružnice vznikne stejnolehlostí bodu S. Tedy body F, T, S leží na jedné přímce a je zachováno i jejich pořadí (viz obrázek 6.9).

Z předchozích úvah vyplývají i délkové vztahy mezi jednotlivými body. Ze stejnolehlosti je patrné, že platí

$$|TS| = \tfrac{1}{2}|TO| \text{ a } |TF| = \tfrac{1}{2}|TS|.$$

[4] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 38.

První rovnost lze přeformulovat do podoby

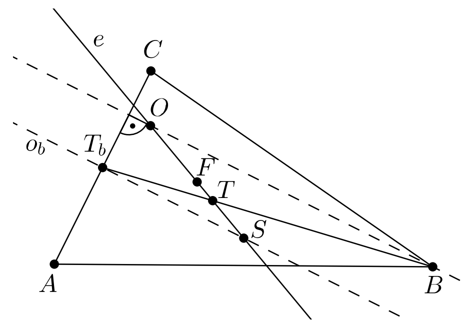
$$|TS| = \frac{1}{3}|OS|,$$

což je námi uvedený vztah v dokazované větě.

Druhý vztah uvedený v naší větě získáme spojením těchto informací, tedy

$$|TF| = \frac{1}{2}|TS| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|TO| = \frac{1}{4}|TO|.$$ [5]

$\square$

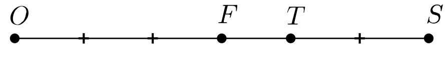


Obrázek 6.9: Ilustrace k důkazu věty 17

V rovnostranném trojúhelníku Eulerova přímka nevznikne, neboť všechny čtyři body splývají. V rovnoramenném trojúhelníku je Eulerova přímka kolmá z základně a v trojúhelníku pravoúhlém je její součástí těžnice k základně.

Vzdálenosti mezi jednotlivými body na Eulerově přímce lze vyjádřit i jako poměr. Platí tedy

$$|OF| : |FT| : |TS| = 3 : 1 : 2 \ .$$

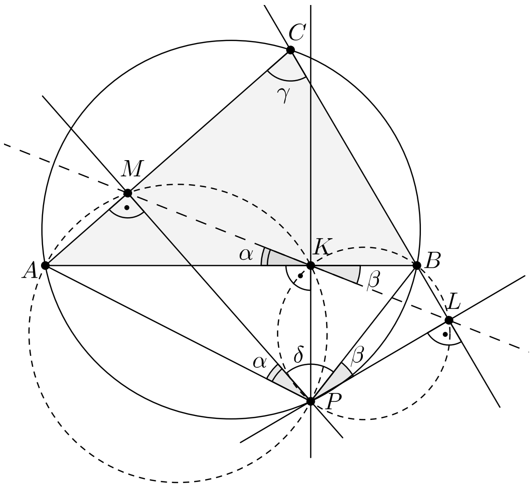


Obrázek 6.10: Body Eulerovy přímky

[5] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 38.

6.1 Simsonova přímka

Věta 18. *Je-li P libovolný bod kružnice opsané trojúhelníku ABC, leží paty kolmic sestrojených z bodu P na přímky AB, AC, BC v přímce.*[6]



Obrázek 6.11: Důkaz Simsonovy přímky

Důkaz. Označme paty kolmic sestrojených z bodu P na přímky AB, BC, AC po řadě K, L, M (viz obrázek6.11). Sestrojíme Thaletovu kružnici nad úsečkou AP, která prochází body K a M. Podle věty o obvodovém úhlu platí $|\angle APM| = |\angle AKM| = \alpha$. Analogicky sestrojíme Thaletovu kružnici nad úsečkou BP a získáme vztah

$$|\angle LPB| = |\angle LKB| = \beta.$$

Označme $\gamma = |\angle ACB|$ a $\delta = |\angle MPB|$. Protože bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, tedy čtyřúhelník $APBC$ je tětivový, platí pro dvojice protějších úhlů vztah $\delta + \alpha = 180° - \gamma$. Nyní si $\angle APB$ a $\angle MPL$ vyjádříme pomocí úhlů v příslušných trojúhelnících a pomocí úhlu γ

$$|\angle APB| = \alpha + \delta = 180° - \gamma,$$
$$|\angle MPL| = \beta + \delta = 180° - \gamma,$$

[6]COXETER, Harold Scott MacDonald a Samuel L. GREITZER. *Geometry revisited.* Washington: Mathematical Association of America, c1967. New mathematical library, 19. ISBN 0-88385-619-0, s. 41.

protože ve čtyřúhelníku $MPLC$ platí $|\angle PMC| = |\angle PLC| = 90°$. Z rovnosti těchto vztahů vyplývá, že $\alpha = \beta$. Tedy $\angle AKM$ a $\angle LKB$ jsou vrcholové úhly přímek AKB a MKL, takže body K, L, M leží v jedné přímce.[7]

□

Pokud bodem na kružnici opsané zvolíme libovolný vrchol trojúhelníku ABC, dvě ze tří pat kolmic na jednotlivé strany trojúhelníku splynou se zvoleným vrcholem. V tomto případě splyne Simsonova přímka s výškou vedenou z námi zvoleného vrcholu. Věta 18 platí i obráceně, což si nyní ukážeme.

Věta 19. *Jsou-li paty kolmic vedené z jednoho bodu na přímky procházející stranami trojúhelníku kolineární, leží tento bod na kružnici trojúhelníku opsané.*

Důkaz. Předpokládáme, že body K, L, M jsou různé a leží podle předpokladu v jedné přímce a bod P je umístěn jako na obrázku 6.11. Postup důkazu je analogický jako důkaz předchozí věty, ale postupujeme obráceně. Tedy $\alpha = |\angle AKM| = |\angle LKB| = \beta$ a z Thaletovy kružnice opsané nad úsečkou AP platí $|\angle APM| = |\angle AKM|$. Ve čtyřúhelníku $PLCM$, kde $|\angle PLC| = |\angle PMC| = 90°$ platí

$$\gamma + \delta + \beta = 180°$$
$$\alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma + \delta + \alpha = 180°,$$

což je součet dvou protilehlých úhlů čtyřúhelníku $APBC$, kterému lze tedy opsat kružnici. Bod P leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané. □

Věta 20. *„Buď ABC trojúhelník a buď P bod na kružnici trojúhelníku ABC opsané takový, že $P \neq A$. Potom přímka procházející vrcholem A a rovnoběžná se Simsonovou přímkou příslušnou bodu P protíná kolmici vedenou bodem P k přímce BC v bodě H, který leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané.“* [8]

Důkaz. Označme $H' \neq P$ průsečík přímky PL, kde L je pata kolmice vedená z bodu P na přímku BC, s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. Chceme dokázat, že $H' = H$.

[7] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 43.

[8] Tamtéž, s. 44-45.

Bod H' leží na kružnici opsané. Podle věty o obvodovém úhlu platí

$$|\angle AH'P| = |\angle ACP| = |\angle PCM|, \tag{6.1}$$

kde M je průsečík přímky AC se Simsonovou přímkou. Čtyřúhelníku $LCPM$, ve kterém $|\angle CLM| = |\angle LMP| = 90°$, lze opsat kružnici a tedy podle věty o obvodovém úhlu platí

$$|\angle PCM| = |\angle PLM|. \tag{6.2}$$

Z rovnosti (6.1) a (6.2) vyplývá, že $|\angle PLM| = |\angle PH'A|$. Jedná se o souhlasné úhly, takže přímky AH', LM jsou rovnoběžné. Námi zvolený bod $H' = H$. [9] □

Tvrzení 12. *Nechť P je libovolný bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Pak střed úsečky PO, kde O je ortocentrum trojúhelníku ABC, leží na Simsonově přímce.* [10]

Takto sestrojený bod navíc leží na Feuerbachově kružnici.[11]

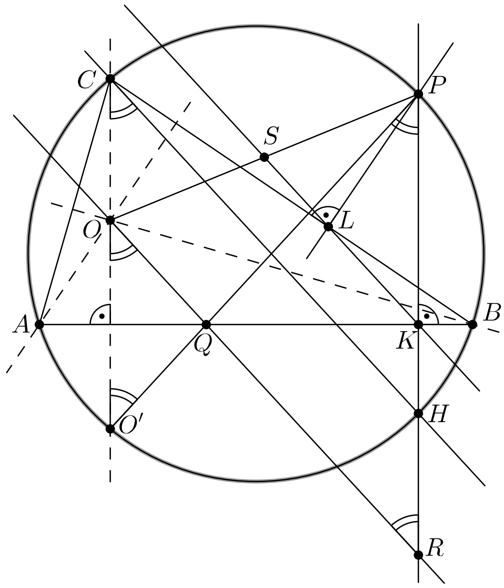
Důkaz. Budeme postupovat podle obrázku 6.12, kde označíme O' bod, který je souměrný s ortocentrem O podle přímky AB, označíme K patu kolmice vedené z bodu P na přímku AB a $H \neq P$ označíme průsečík přímky PK s kružnicí opsanou. Bod O' leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC (platí podle tvrzení 6). Dále sestrojíme bod Q jako průsečík přímek AB, PO' a bod R, který je průsečíkem přímek PK, OQ. Z konstrukce O' a Q vyplývá, že trojúhelník $OO'Q$ je rovnoramenný.
Protože přímky OO', PK jsou rovnoběžné, jsou trojúhelníky $OO'Q$ a RPQ stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě Q. Tedy jsou oba rovnoramenné. S využitím obvodových úhlů bude pro různou polohu bodu P platit buď

$$|\angle HPO'| = |\angle HCO'|, \text{ nebo}$$
$$|\angle HPO'| + |\angle HCO'| = 180°.$$

[9] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 45.

[10] Tamtéž, s. 46.

[11] Wikipedia: The Free Encyclopedia: *Simson line* [online]. c2017 [citováno 16. 06. 2017]. Dostupný z: https://en.wikipedia.org/wiki/Simson_line.



Obrázek 6.12: Aplikace Simsonovy přímky

Podle těchto rovností platí, že přímky CH a OR jsou rovnoběžné. Z věty 20 jsou tyto přímky rovnoběžné se Simsonovou přímkou.
Protože bod K je střed úsečky PR, je úsečka KS střední příčka trojúhelníku ORP a bod S je tedy střed úsečky OP. [12]

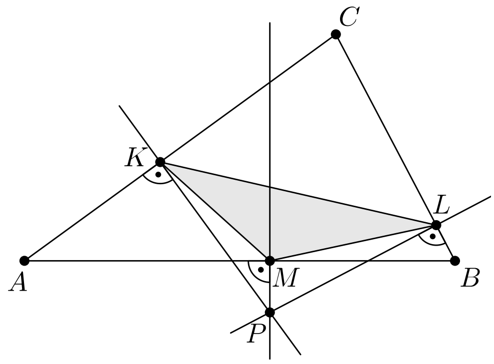
□

Pokud z věty 18 odstraníme podmínku, že bod P musí ležet na kružnici trojúhelníku opsané, paty kolmic sestrojených z bodu P na přímky procházejícími stranami trojúhelníku nejsou kolineární, ale vytvoří trojúhelník, který nazýváme **úpatnicový trojúhelník**.

Pokud bod P splývá se středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, je úpatnicový trojúhelník roven příčkovému trojúhelníku trojúhelníku ABC, neboť kolmice z bodu P jsou osami jednotlivých stran trojúhelníku ABC.

[12] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 45.

Pokud bod P splývá s ortocentrem trojúhelníku ABC, je úpatnicový trojúhelník roven ortickému trojúhelníku trojúhelníku ABC, neboť kolmice z bodu P jsou výškami trojúhelníku ABC. [13]



Obrázek 6.13: Úpatnicový trojúhelník

[13] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 46.

Kapitola 7

Střed kružnice vepsané

V této kapitole vysvětlíme pojem osa úhlu a pro naše potřeby rozlišíme pojmy vnitřní a vnější osa úhlu. Dokážeme, že vnitřní osy úhlu procházejí jedním bodem, který se nazývá střed kružnice vepsané, dále dokážeme několik dalších tvrzení, která se vztahují k osám úhlů. Odvodíme vzorec pro výpočet poloměru kružnice vepsané a porovnáme ho s poloměrem kružnice opsané. Oba tyto poloměry využijeme k důkazu Eulerovy věty.

Nejdříve zadefinujeme pojem osa úhlu. Planimetricky lze chápat osu úhlu jako polopřímku s krajním bodem ve vrcholu úhlu, která rozděluje úhel na dva shodné úhly nebo jako množinu všech středů kružnic, které se dotýkají obou ramen tohoto úhlu, společně s vrcholem úhlu.

My si nyní ale uvedeme jiné dvě definice. Nejprve pro daný úhel, poté pro danou dvojici různoběžek.

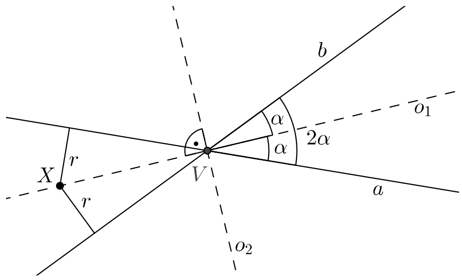
Definice 11. „Množina všech bodů daného konvexního úhlu $\angle AVB$, které mají stejnou vzdálenost od přímek, v nichž leží jeho ramena, je **osa** tohoto **úhlu**.“ [1]

Definici lze zapsat systematicky

$$\{X \in \angle AVB : |X \leftrightarrow VA| = |X \leftrightarrow VB|\}.$$

[1] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.* 4. upr. vydání. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4, s. 93.

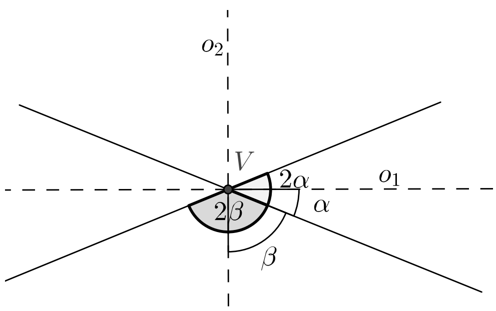
Definice 12. „Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek a, b, jsou **osy úhlů** sevřených různoběžkami a, b.“ [2]



Obrázek 7.1: Osa úhlu

Věta 21. *Osy úhlů dvou různoběžek jsou navzájem kolmé.*

Důkaz. Z obrázku 7.2 vidíme, že $2\alpha + 2\beta = 180°$. Úhel, který svírají osy úhlu je $\alpha + \beta$, což je rovno $90°$. □

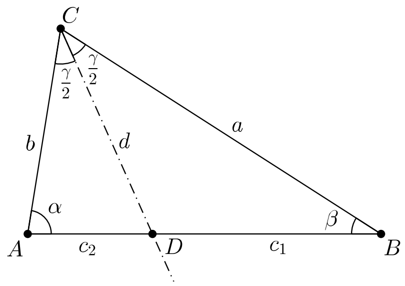


Obrázek 7.2: Kolmost os úhlu

Osu úhlu, která protíná libovolnou stranu trojúhelníku, nazýváme vnitřní osa úhlu. V opačném případě ji nazýváme vnější osa úhlu. Pro osy vnitřních úhlů daného trojúhelníku budeme používat označení $o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$ podle vnitřního úhlu trojúhelníku, který tyto osy rozdělují.

[2]POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.*4. upr. vydání. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4, s. 94.

Tvrzení 13. *Osa libovolného vnitřního úhlu trojúhelníku dělí protější stranu trojúhelníku v poměru stran přilehlých.* [3]



Obrázek 7.3: Ilustrace k důkazu tvrzení 13

Důkaz. Pro obecný trojúhelník ABC chceme dokázat, že platí $a : b = c_1 : c_2$, kde c_1 a c_2 jsou části strany c oddělené osou úhlu γ (viz obrázek 7.3). Průsečík osy úhlu se stranou c označme D.

K důkazu využijeme sinovou větu pro trojúhelník ADC, kde platí $\frac{d}{\sin\alpha} = \frac{c_2}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, a vztah $\frac{d}{\sin\beta} = \frac{c_1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ pro trojúhelník BDC, kde $d = |DC|$. Jejich spojením vznikne vztah

$$c_2 \sin\alpha = c_1 \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha : \sin\beta = c_1 : c_2.$$

Ze sinové věty pro trojúhelník ABC vyjádříme poměr $\sin\alpha : \sin\beta = a : b$. Nahrazením $\sin\alpha : \sin\beta$ v předchozí rovnosti získáme námi dokazovanou rovnost $a : b = c_1 : c_2$.

□

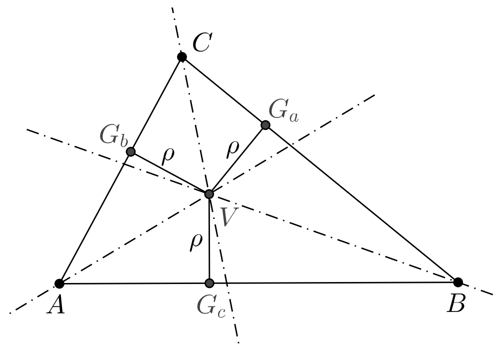
Věta 22. *„Osy vnitřních úhlů libovolného trojúhelníka ABC procházejí jedním bodem.“* [4]

Tento bod se nazývá **střed kružnice vepsané** a budeme ho značit V.

Důkaz. Z definice osy úhlu víme, že každý bod osy úhlu CAB o_α má stejnou vzdálenost od přímek AC, AB a také každý bod osy o_β má stejnou vzdálenost od přímek AB, BC. Tedy průsečík těchto os, označíme ho V, má stejnou vzdálenost od všech tří stran

[3] EUKLEIDÉS. *Eukleidovy základy: (elementa)*. Praha: Jednota českých mathematiků, 1907. s. 85.

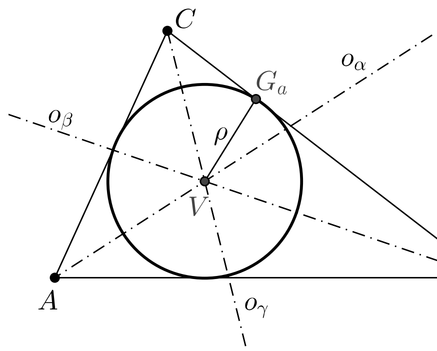
[4] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 76.



Obrázek 7.4: Střed kružnice vepsané

trojúhelníku ABC, tu označíme ρ. Z toho vyplývá, že i o_γ musí procházet bodem V, protože každý bod o_γ má stejnou vzdálenost od přímek AC, BC. $\square$

Z předchozího důkazu vyplývá, že libovolnému trojúhelníku lze vepsat kružnici, jejímž středem je bod V. Poloměr kružnice vepsané je roven ρ. Kružnice vepsaná se dotýká všech stran trojúhelníku ABC. Pro tyto body zavedeme značení G_a, G_b, G_c podle toho, na které straně trojúhelníku leží.
Je zřejmé, že střed kružnice vepsané leží vždy uvnitř trojúhelníku.



Obrázek 7.5: Kružnice trojúhelníku vepsaná

Nyní si odvodíme vzorec pro výpočet poloměru kružnice vepsané.
Z obrázku 7.5 vidíme, že obsah trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků CAV, ABV, BCV. Pro jejich obsahy platí následující vztahy

$$S_{ABV} = \tfrac{1}{2}c\rho, \qquad S_{BCV} = \tfrac{1}{2}a\rho, \qquad S_{CAV} = \tfrac{1}{2}b\rho.$$

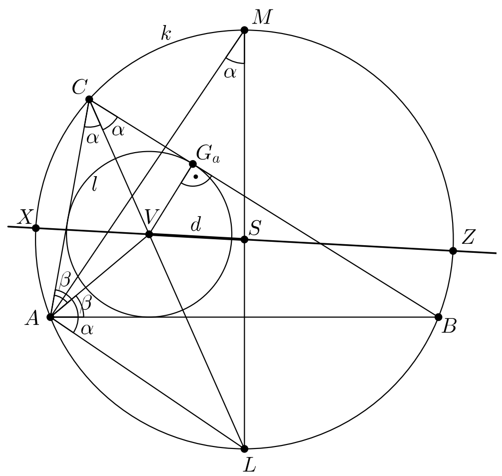
Z toho vyplývá, že

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}\rho(a+b+c),$$
$$\rho = \tfrac{S_{ABC}}{s}, \text{ kde } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

Věta 23. *„Nechť $k(S,r)$ a $l(V,\rho)$ jsou po řadě kružnice opsaná a vepsaná danému trojúhelníku. Pro vzdálenost d středů obou kružnic platí*

$$d = |SV| = \sqrt{r(r-2\rho)}.\text{“}$$ [5]

Tato věta bývá označována jako Eulerova věta.



Obrázek 7.6: Vzdálenost středů opsané a vepsané kružnice

Důkaz. Vezměme libovolný trojúhelník ABC, kterému opíšeme kružnici k a vepíšeme kružnici l (viz obrázek 7.6). Osa úhlu ACB prochází bodem L na kružnici k a bod M sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou LS ($L \neq M$). Z věty o obvodovém úhlu platí rovnosti $|\angle LAB| = |\angle LCB| = \alpha$ a $|\angle ACL| = |\angle AML| = \alpha$.
Označme β úhel BAV. V trojúhelníku ALC platí pro úhel ALC rovnost

$$|\angle ALC| = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta,$$

[5] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 41.

proto v trojúhelníku AVL platí pro velikost úhlu AVL vztah $|\angle AVL| = \alpha + \beta$. Úhly $\angle AVL$ a $\angle VAL$ jsou tedy shodné a proto je trojúhelník AVL rovnoramenný a platí $|VL| = |LA|$.

Označme G_a bod dotyku kružnice l se stranou BC. Pak jsou trojúhelníky CVG_a, MLA podobné podle věty (uu), protože z Thaletovy kružnice nad průměrem LM je $|\angle MAL| = 90°$. Z obou trojúhelníků si vyjádříme úhel α jako

$$\sin\alpha = \tfrac{|G_aV|}{|CV|} = \tfrac{|AL|}{|LM|}.$$

Z mocnosti bodu V ke kružnici k platí

$$|VX| \cdot |VZ| = (r-d)\cdot(r+d) = r^2 - d^2 = |VC| \cdot |VL|.$$

Zároveň z předešlých rovností platí

$$|VC| \cdot |VL| = |VC| \cdot |AL| = |VC| \cdot \tfrac{|G_aV|}{|G_aV|} \cdot |AL| \cdot \tfrac{|LM|}{|LM|} =$$
$$= |G_aV| \cdot (\sin\alpha)^{-1} \cdot |LM| \cdot \sin\alpha = |G_aV| \cdot |LM| = \rho \cdot 2r.$$

Proto

$$r^2 - d^2 = 2r\rho, \text{ a tedy } d^2 = r^2 - 2r\rho = r(r-2\rho).$$

□

Za pomoci vztahu pro vzdálenost mezi středem kružnice opsané a vepsané lze dokázat Eulerovu nerovnost, která porovnává poloměry obou kružnic.

Věta 24. *Je dán trojúhelník ABC, kterému je opsána kružnice $k(S, r)$ a vepsána kružnice $l(V, \rho)$. Pak platí $r \geq 2\rho$.* [6]

Rovnost nastane, pokud je trojúhelník rovnostranný.

Důkaz. Z věty 23 platí vztah $d^2 = r(r-2\rho)$. Platí tedy

$$d \geq 0 \wedge r > 0 \quad \Rightarrow \quad (r-2\rho) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad r \geq 2\rho.$$

□

[6] Wikipedia: The Free Encyclopedia: *Euler's theorem in geometry* [online]. [citováno 16. 06. 2017]. Dostupný z: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_ theorem_ in_ geometry.

Věta 25. *„Ortocentrum ostroúhlého trojúhelníku je středem kružnice vepsané jeho ortickému trojúhelníku. Dále platí*

$$|\angle B_0A_0C_0| = \pi - 2\alpha, \quad |\angle C_0B_0A_0| = \pi - 2\beta, \quad |\angle A_0C_0B_0| = \pi - 2\gamma.\text{“}$$ [7]

Důkaz. Body A, B_0, V, C_0 leží na Thaletově kružnici s průměrem $|AV|$. S využitím věty o obvodovém úhlu platí

$$|\angle A_0AC| = |\angle B_0C_0V| = \tfrac{\pi}{2} - \gamma,$$

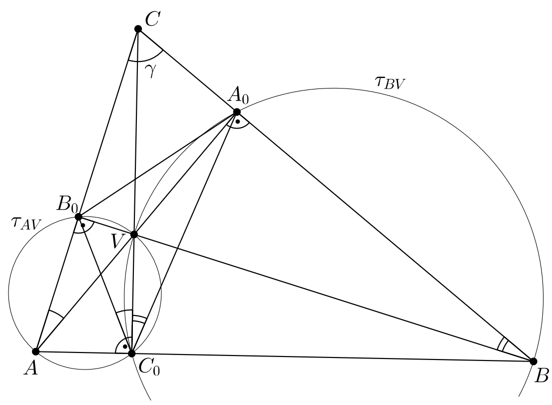
kde γ označíme úhel A_0CA. Stejně body VC_0BA_0 leží na Thaletově kružnici τ_{BV} a pro obvodové úhly platí

$$|\angle CBB_0| = |\angle A_0C_0V| = \tfrac{\pi}{2} - \gamma.$$

Tím jsme dokázali, že $|\angle B_0C_0V| = |\angle A_0C_0V|$, takže výška CC_0 je osou úhlu různoběžek B_0C_0, A_0C_0 a pro úhel $B_0C_0A_0$ platí

$$|\angle B_0C_0A_0| = 2|\angle A_0C_0V| = 2(\tfrac{\pi}{2} - \gamma) = \pi - 2\gamma.$$

Analogicky dokážeme, že zbývající výšky jsou osami příslušných úhlů i vztahy pro úhly v ortickém trojúhelníku. □



Obrázek 7.7: Ilustrace k důkazu věty 25

Tvrzení 14. *Nechť ABC je trojúhelník s vnitřními úhly α, β, γ a V je střed kružnice vepsané. Potom pro velikost úhlu AVB platí*

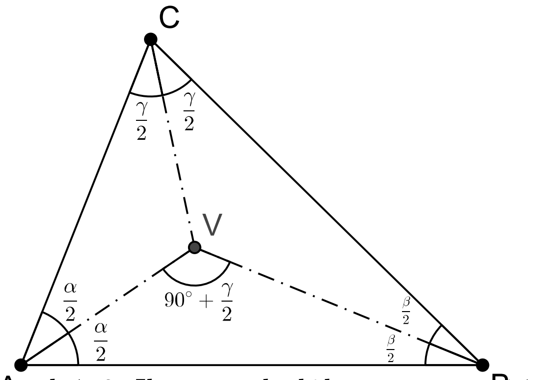
[7]ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 32.

$$|\angle AVB| = 90^\circ + \tfrac{\gamma}{2}.$$

Důkaz. Podle obrázku 7.8 a vlastnosti, že součet úhlů v trojúhelníku je 180° platí

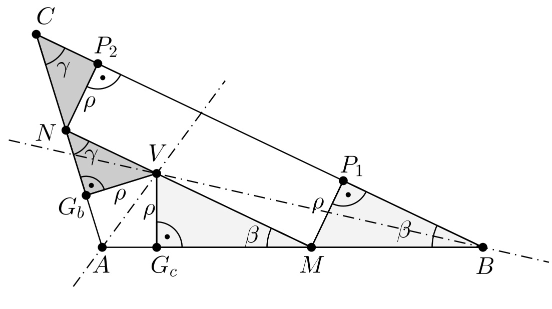
$$|\angle AVB| = 180^\circ - \tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\beta}{2} = 180^\circ - \tfrac{\alpha+\beta}{2} = 180^\circ - \tfrac{180^\circ-\gamma}{2} =$$
$$= \tfrac{360^\circ-180^\circ-\gamma}{2} = \tfrac{180^\circ-\gamma}{2} = 90^\circ + \tfrac{\gamma}{2}\ .\ ^{8}$$

□



Obrázek 7.8: Ilustrace k důkazu tvrzení 14

Tvrzení 15. *„Nechť V je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, MN je jeho příčka rovnoběžná se stranou BC procházející bodem V. Potom platí $|MN| = |MB| + |NC|$.“*[9]



Obrázek 7.9: Ilustrace k důkazu tvrzení 15

[8] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 77.

[9] Tamtéž, s. 88.

Důkaz. Postupujeme podle obrázku 7.9. Podle věty (usu) se shodují dvojice trojúhelníků $\triangle MBP_1, \triangle VMG_c$ a $\triangle NCP_2, \triangle VNG_b$. Z první shodnosti získáváme rovnost $|MB| = |VM|$ a z druhé shodnosti rovnost $|NC| = |VN|$. Součtem těchto rovností získáváme platnost dokazovaného tvrzení, tedy

$$|MB| + |NC| = |VM| + |VN| = |MN|.$$

□

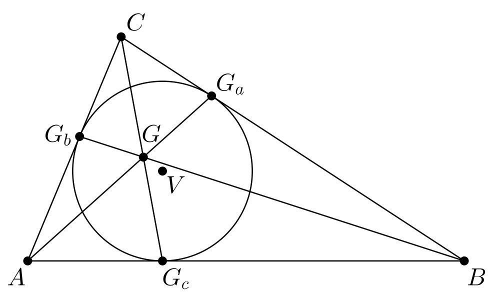
Kapitola 8

Gergonnův bod

V předchozí kapitole jsme se zmínili o bodech dotyku kružnice vepsané se stranami trojúhelníku a zavedli jsme si pro ně označení G_a, G_b, G_c. Nyní si ukážeme, jak pomocí těchto bodů sestrojíme Gergonnův bod.

Věta 26. *Spojnice bodů dotyku kružnice vepsané s protějšími vrcholy trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě.*

Tento bod se nazývá **Gergonnův bod** a označíme ho G. Leží vždy uvnitř trojúhelníku.



Obrázek 8.1: Gergonnův bod

Důkaz. Použijeme Cèvovu větu. Body G_a, G_b a G_c leží na stranách trojúhelníku ABC a jsou různé od jeho vrcholů. Přímky AG_b, AG_c jsou tečny ke kružnici vepsané trojúhelníku ABC z bodu A, proto se délky úseček AG_b a AG_c rovnají (viz obrázek 8.1). Obdobně se rovnají i délky $|BG_c| = |BG_a|$ a $|CG_a| = |CG_b|$, proto platí

$$\frac{|AG_c|}{|BG_c|} \cdot \frac{|BG_a|}{|CG_a|} \cdot \frac{|CG_b|}{|AG_b|} = 1.$$

Podle Cèvovy věty pak přímky AG_a, BG_b, CG_c procházejí jedním bodem. $\square$

Nyní si ukážeme, jak spočítat za pomoci délek stran trojúhelníku ABC vzdálenost bodů G_a, G_b, G_c od vrcholů trojúhelníku.

Využijeme vztahu $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ tj. $2s = (a+b+c)$.

Pro vyjádření $|BG_a|$ dosadíme za $a = |BG_a| + |G_aC|$, za $c = |AG_c| + |G_cB|$ a za $b = |AG_b| + |G_bC|$. Z důkazu předchozí věty víme, že $|G_aB| = |G_cB|$, $|AG_c| = |AG_b|$ a $|CG_a| = |CG_b|$. Spojením těchto poznatků dostáváme vztah

$$\begin{aligned} 2s &= |BG_a| + |G_aC| + b + |AG_c| + |G_cB| = |BG_a| + |G_bC| + b + |AG_b| + |BG_a| = \\ &= 2|BG_a| + 2b, \qquad \text{tedy platí} \qquad |BG_a| = s - b. \end{aligned}$$

Analogicky získáváme

$$|CG_b| = s - c, \qquad |AG_c| = s - a,$$

což lze přepsat

$$|G_aC| = a + b - s, \qquad |G_bA| = b + c - s, \qquad |G_cB| = c + a - s.$$ [1]

Tvrzení 16. *Je dán trojúhelník ABC, kterému je vepsána kružnice. Pak body dotyku kružnice vepsané se stranami trojúhelníku jsou vrcholy ostroúhlého trojúhelníku.*

Důkaz. Postupujeme podle obrázku 8.2, kde G_a, G_b, G_c jsou po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, AC, AB. Trojúhelníky G_cBV, G_aBV jsou shodné podle věty (Ssu) a úsečka G_cG_a je kolmá na osu o_α. Platí

$$|\angle VBG_a| = \frac{\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad |\angle BVG_a| = 90° - \frac{\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad |\angle VG_cG_a| = \frac{\beta}{2},$$

kde $\beta = |\angle ABC|$.

Analogicky získáme zbývající úhly trojúhelníku $G_aG_bG_c$, takže

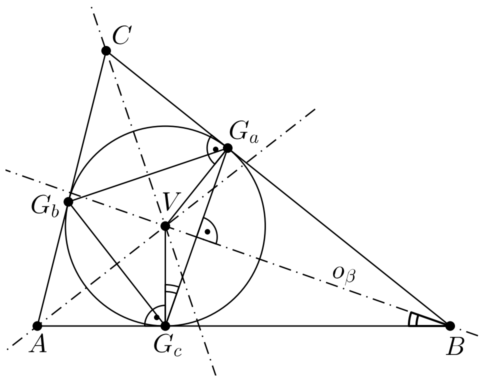
$$\begin{aligned} |\angle G_cG_aG_b| &= \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \\ |\angle G_aG_bG_c| &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \\ |\angle G_aG_cG_b| &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

[1] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 31.

Pro součet úhlů v trojúhelníku ABC platí

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad : 2$$
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ.$$

Součet libovolné dvojice polovičních úhlů musí být menší než 90°, a proto jsou všechny úhly v trojúhelníku $G_aG_bG_c$ ostré. □



Obrázek 8.2: Ilustrace k důkazu tvrzení 16

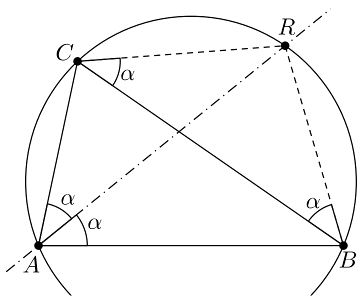
Kapitola 9

Švrčkův bod

Pro dokázání existence tohoto bodu na kružnici opsané využijeme znalosti osy úhlu a osy stran z předchozích kapitol. Ukážeme, že osa úhlu ACB dělí oblouk kružnice opsané AB v trojúhelníku ABC na poloviny, a že vzdálenost Švrčkova bodu od krajních bodů oblouku A, B je stejná jako jeho vzdálenost od středu kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

Nejprve si dokážeme pomocné tvrzení.

Tvrzení 17. *Nechť k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC a vnitřní osa úhlu BAC protíná kružnici opsanou v bodě $R \neq A$. Pak platí $|RC| = |RB|$.*



Obrázek 9.1: Ilustrace k důkazu tvrzení 17

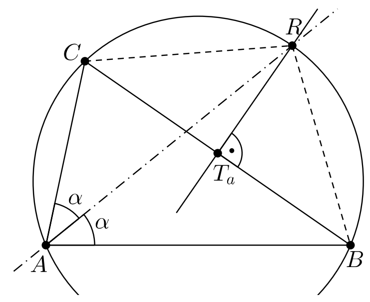
Důkaz. Podle věty o obvodovém úhlu platí v kružnici k následující vztahy

$$\alpha = |\angle BAR| = |\angle BCR|,$$
$$\alpha = |\angle RAC| = |\angle RBC|.$$

Z toho vyplývá, že trojúhelník BCR je rovnoramenný, a tedy $|RC| = |RB|$. □

Věta 27. *„Buď ABC trojúhelník takový, že $|CA| \neq |AB|$. Potom osa úhlu BAC protíná osu strany BC v bodě, který leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané. “* [1]

Tento bod se nazývá **Švrčkův bod** a budeme ho značit R.[2]



Obrázek 9.2: Švrčkův bod

Důkaz. Podle tvrzení 17 je trojúhelník BCR rovnoramenný, a proto výška na základnu BC prochází středem této úsečky a je tedy rovna ose strany BC. Bodem R tedy prochází i osa strany BC (viz obrázek 9.2).[3] □

Analogicky lze zadefinovat Švrčkův bod i pro zbývající vnitřní osy úhlu v trojúhelníku ABC.

Nyní si ukážeme, že na kružnici se středem v bodě R a poloměrem $|RB|$ leží střed kružnice vepsané.

Věta 28. *„Buď R Švrčkův bod příslušný ose úhlu $\angle BAC$ v trojúhelníku ABC, kde $|CA| \neq |AB|$ a buď V střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Pak platí*

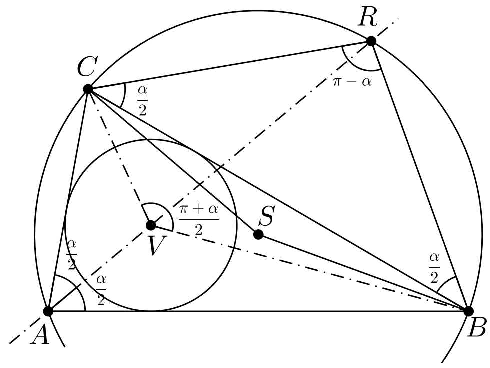
$$|RB| = |RV|. \text{“}$$ [4]

[1] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 38.

[2] KUCHAŘÍK, Jan. *Některé netradiční vhledy do geometrie.* Jihlava, 2011/2012. SOČ z matematiky. Gymnázium Jihlava, s. 45. Dostupné z: http://forum.matematika.cz/files/prace/SOČ_ Nektere_ netradicni_ vhledy_ do_ geometrie.pdf.

[3] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7, s. 15.

[4] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 38.



Obrázek 9.3: Ilustrace k důkazu věty 28

Důkaz. Označme úhly v trojúhelníku standardně $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle ABC| = \beta$, $|ACB| = \gamma$. Aby platila rovnost $|RB| = |RV|$, musíme ukázat, že body B, C a V leží na společné kružnici se středem v bodě R (viz obrázek 9.3). Uvažujme kružnici opsanou trojúhelníku ABC, body B a C rozdělují kružnici na dva kružnicové oblouky, na jednom oblouku je obvodový úhel $|\angle BAC| = \alpha$, proto na druhém oblouku je obvodový úhel $|\angle BRC| = \pi - \alpha$. Z toho vyplývá pro nekonvexní úhel u bodu R vztah

$$|\angle BRC| = 2\pi - (\pi - \alpha) = \pi + \alpha.$$

Ze součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku BCV platí

$$|\angle BVC| = \pi - \tfrac{\beta}{2} - \tfrac{\gamma}{2} = \tfrac{2\pi-\beta-\gamma}{2} = \tfrac{\pi+\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}|\angle BRC|,$$

což znamená, že úhel BVC je obvodový úhel ke středovému úhlu BRC, tedy body B, C, V leží na kružnici se středem v bodě R, a platí tedy $|RB| = |RV| = |RC|$. $\square$

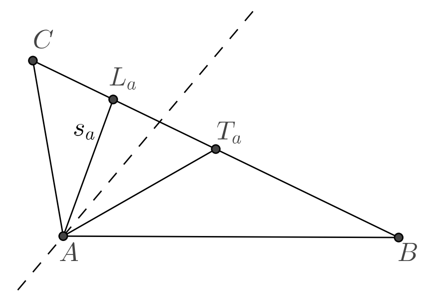
Kapitola 10

Lemoinův bod

Dalším významným bodem, který souvisí s těžnicemi a osami vnitřních úhlů v trojúhelníku je Lemoinův bod. K jeho konstrukci budeme potřebovat zadefinovat pojem symediána.

Definice 13. „Buď ABC libovolný trojúhelník. Symediánou z vrcholu A trojúhelníku ABC nazveme přímku souměrně sdruženou podle osy úhlu $\angle BAC$ s těžnicí z tohoto vrcholu.“ [1]

V celé práci budeme symediánu k těžnici t_a označovat s_a a průsečík symediány se stranou a trojúhelníku ABC L_a. Analogické označení zavedeme pro ostatní symediány i jejich průsečíky se stranami trojúhelníku.



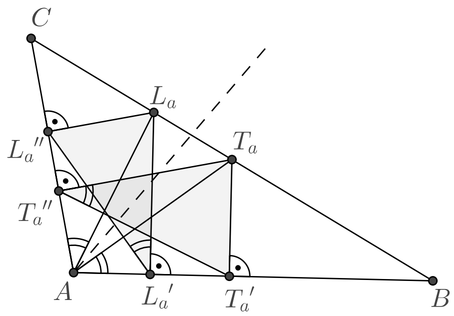
Obrázek 10.1: Konstrukce symediány

[1]ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 49.

V každém trojúhelníku lze sestrojit tři symediány, ke každé těžnici jednu. Symediány se protínají v jednom bodě. Pro důkaz jednoznačné existence průsečíku symedián potřebujeme následující tvrzení.

Tvrzení 18. *Buď L_a průsečík symediány s_a se stranou BC trojúhelníku ABC. Označme ${L_a}', {L_a}''$ paty kolmic sestrojených z bodu L_a po řadě na přímky AB, AC. Potom platí*

$$\frac{|L_a {L_a}'|}{|L_a {L_a}''|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$ [2]



Obrázek 10.2: Ilustrace k důkazu tvrzení 18

Důkaz. Označme ${T_a}', {T_a}''$ paty kolmic sestrojených z bodu T_a po řadě na přímky AB, AC (viz obrázek 10.2).

Trojúhelníky ABT_a, ACT_a mají stejný obsah, protože $|BT_a| = |CT_a|$ a protože výšky vedené z vrcholu A na protější stranu jsou v obou trojúhelnících stejně dlouhé (body B, T_a, C jsou kolineární). Tyto obsahy si vyjádříme

$$S_{ABT_a} = S_{ACT_a}$$
$$\frac{1}{2}|AB| \cdot |T_a {T_a}'| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |T_a {T_a}''|$$
$$\frac{|T_a {T_a}'|}{|T_a {T_a}''|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Nyní sestrojíme Thaletovu kružnici τ_{AT_a}, na které leží body ${T_a}', {T_a}''$. Podle věty o obvodovém úhlu platí

$$|\angle {T_a}' {T_a}'' T_a| = |\angle {T_a}' A T_a|.$$

[2]ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 49.

Analogicky sestrojíme Thaletovu kružnici τ_{AL_a}, na které leží body $L_a{}', L_a{}''$. Pro úhly platí

$$|\angle L_a L_a{}'' L_a{}'| = |\angle L_a{}'' A L_a|.$$

Z definice symediány s_a je zřejmě, že

$$|\angle T_a{}' A T_a| = |\angle L_a{}'' A L_a|.$$

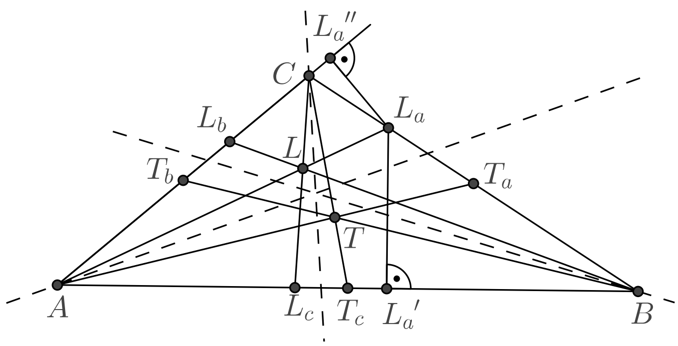
To znamená, že úhly $\angle T_a{}' A T_a, \angle T_a{}' T_a{}'' T_a, \angle L_a L_a{}'' L_a{}', \angle L_a{}'' A L_a$ jsou shodné. Stejným postupem ukážeme, že úhly $T_a T_a{}' T_a{}'', L_a L_a{}'' L_a{}'$ jsou také shodné. Tedy trojúhelníky $T_a T_a{}' T_a{}'', L_a L_a{}'' L_a{}'$ jsou podobné, a proto lze poměr stran vyjádřit jako

$$\frac{|L_a L_a{}'|}{|L_a L_a{}''|} = \frac{|T_a T_a{}''|}{|T_a T_a{}'|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$ [3]

$\square$

Věta 29. *„Symediány trojúhelníku procházejí týmž bodem.“* [4]

Tento bod nazýváme **Lemoinův bod** a značíme jej L. Lemoinův bod leží vždy uvnitř trojúhelníku ABC.



Obrázek 10.3: Lemoinův bod

[3] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 50.
[4] Tamtéž, s. 50.

Důkaz. Použijeme Cèvovu větu tak, že pokud platí předpoklad $\frac{|AL_c|}{|BL_c|} \cdot \frac{|BL_a|}{|CL_a|} \cdot \frac{|CL_b|}{|AL_b|} = 1$, potom přímky L_aA, L_bB, L_cC prochází jedním bodem.

Podle obrázku 10.3 sestrojíme paty kolmic $L_a{}', L_a{}''$ vedených z bodu L_a postupně na přímky AB, AC. Z pravoúhlého trojúhelníku $BL_aL_a{}'$ platí

$$\sin\beta = \frac{|L_aL_a{}'|}{|L_aB|}, \text{ kde } \beta \text{ je úhel při vrcholu } B \text{ v trojúhelníku } ABC.$$

Analogicky z pravoúhlého trojúhelníku $CL_aL_a{}''$ platí

$$\sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma = \frac{|L_aL_a{}''|}{|CL_a|}.$$

Poměr velikostí úseček BL_a, CL_a je z těchto vztahů roven

$$\frac{|BL_a|}{|CL_a|} = \frac{|L_aL_a{}''|\sin\gamma}{|L_aL_a{}'|\sin\beta},$$

což lze podle tvrzení 18 přepsat ve tvaru

$$\frac{|L_aL_a{}''|\sin\gamma}{|L_aL_a{}'|\sin\beta} = \frac{|AB|\sin\gamma}{|AC|\sin\beta}.$$

Analogicky vyjádříme i poměry velikostí úseček AL_c, BL_c a CL_b, AL_b a dosadíme do Cèvovy věty

$$\frac{|AL_c|}{|BL_c|} \cdot \frac{|BL_a|}{|CL_a|} \cdot \frac{|CL_b|}{|AL_b|} = \frac{|AC|\sin\beta}{|BC|\sin\alpha} \cdot \frac{|BC|\sin\alpha}{|AB|\sin\gamma} \cdot \frac{|AB|\sin\gamma}{|AC|\sin\beta} = 1.$$[5]

□

[5] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 50-51.

Kapitola 11

Střed kružnice připsané

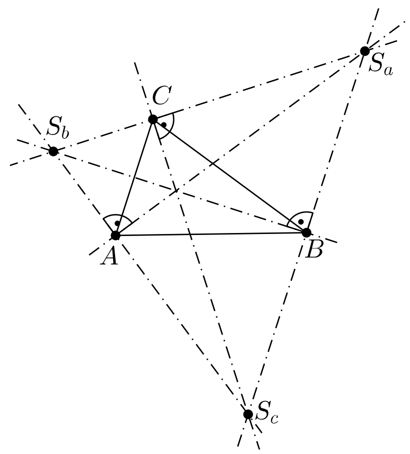
V kapitole střed kružnice vepsané jsme zadefinovali pojem vnější osa úhlu, nyní si zavedeme jeho značení. Dále si ukážeme, jak sestrojit kružnice danému trojúhelníku připsané, vzájemný vztah jejich poloměrů s poloměrem kružnice vepsané a speciální případ, kdy ortocentrum trojúhelníku splyne se středem kružnice připsané příslušného ortického trojúhelníku.
Vnější osu úhlu, která prochází bodem A a je kolmá na vnitřní osu úhlu o_α označíme o'_α. Analogicky označíme i ostatní vnější osy úhlu jako o'_β a o'_γ.
Ke každému trojúhelníku existují tři vnější osy úhlu.

Věta 30. *„Osy vnějších úhlů při dvou vrcholech trojúhelníku a osa vnitřního úhlu při třetím vrcholu procházejí týmž bodem. Vzdálenosti každého takového bodu od všech tří přímek BC, CA, AB jsou stejné.“* [1]

Tento bod nazýváme **střed kružnice trojúhelníku připsané** a značíme ho S_a, pokud vnitřní osa úhlu protíná stranu a trojúhelníku ABC. Leží vždy vně trojúhelníku ABC.

Důkaz. Předpokládáme, že ${o_c}' \cap {o_b}' = S_a$, a chceme dokázat, že $S_a \in o_a$.
Každý bod vnější osy úhlu ${o_c}'$ má podle definice stejnou vzdálenost od přímek AC, BC a každý bod vnější osy úhlu ${o_b}'$ má stejnou vzdálenost od přímek AB, BC. Z toho

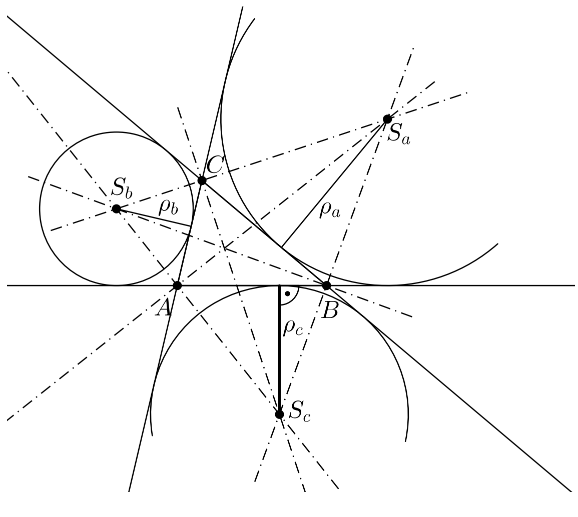
[1] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 30.



Obrázek 11.1: Středy kružnic trojúhelníku připsaných

vyplývá, že bod S_a má stejnou vzdálenost od přímek AB, AC, které splňují definici vnitřní osy úhlu o_a. Bod $S \in o_a$. [2] $\square$

Každému trojúhelníku lze připsat tři kružnice, které mají středy v bodech S_a, S_b, S_c a poloměry označme ρ_a, ρ_b, ρ_c. Tyto kružnice se dotýkají vždy jedné strany trojúhelníku a zbývajících dvou stran se dotýkají na přímkách, které je obsahují.



Obrázek 11.2: Kružnice trojúhelníku připsané

[2] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy]*. 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 32–33.

Pro výpočet poloměru kružnice připsané $k_a(S_a, \rho_a)$ využijeme obsah trojúhelníku ABC a obsahy trojúhelníků ABS_a, ACS_a, BS_aC,

$$S_{ABC} = S_{ABS_a} + S_{ACS_a} - S_{BS_aC} = \tfrac{1}{2}c\rho_a + \tfrac{1}{2}b\rho_a - \tfrac{1}{2}a\rho_a = \tfrac{1}{2}\rho_a(c+b-a) = \rho_a(s-a),$$

kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Analogicky lze vyjádřit i ostatní poloměry kružnic připsaných

$$\rho_b = \tfrac{S}{s-b},$$
$$\rho_c = \tfrac{S}{s-c}.$$

Nyní si ukážeme vztah mezi poloměrem kružnice vepsané a poloměry kružnic připsaných.

Tvrzení 19. *V každém trojúhelníku platí* $\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{\rho}$.

Důkaz. Využijeme vztahů pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí poloměrů kružnic připsaných a poloměru kružnice vepsané.

$$\tfrac{1}{\rho_a} + \tfrac{1}{\rho_b} + \tfrac{1}{\rho_c} = \tfrac{s-a}{S} + \tfrac{s-b}{S} + \tfrac{s-c}{S} = \tfrac{(s-a+s-b+s-c)}{S} = \tfrac{3s-(a+b+c)}{S} = \tfrac{3s-2s}{S} = \tfrac{s}{S} = \tfrac{1}{\rho}.$$

□

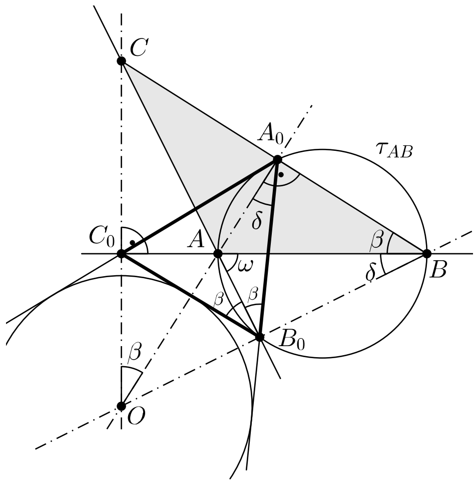
Věta 31. *Trojúhelník ABC je ortickým trojúhelníkem trojúhelníku* $S_aS_bS_c$.

Důkaz. Musíme dokázat, že S_aA, S_bB, S_cC jsou výšky v trojúhelníku $S_aS_bS_c$. To vyplývá z kolmosti os vnitřních a vnějších úhlů z daného vrcholu trojúhelníku ABC (viz obrázek 11.1). □

Věta 32. *„Buď ABC tupoúhlý trojúhelník s tupým úhlem při vrcholu A. Potom ortocentrum tohoto trojúhelníku je středem kružnice připsané jeho ortickému trojúhelníku* $A_0B_0C_0$ *proti vrcholu* A_0*. Dále platí*

$$|\angle C_0A_0B_0| = 2\alpha - 180^\circ, \quad |\angle A_0B_0C_0| = 2\beta, \quad |\angle B_0C_0A_0| = 2\gamma.$$ “ [3]

[3] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 33.



Obrázek 11.3: Ilustrace k důkazu věty 32

Důkaz. Budeme postupovat podle obrázku 11.3. Chceme ukázat, že výšky trojúhelníku ABC jsou zároveň osami úhlů v trojúhelníku $A_0B_0C_0$.

Úhly AB_0B, AA_0B jsou pravé, lze tedy sestrojit Thaletovu kružnici τ_{AB}. Z věty o obvodovém úhlu platí $\beta = |\angle ABA_0| = AB_0A_0$. Analogicky sestrojíme Thaletovu kružnici τ_{AO}, odkud pro velikosti úhlů platí $|\angle C_0OA| = |\angle C_0B_0A|$.

Z podobnosti trojúhelníků AOC_0, ABA_0 podle věty (uu) platí, že

$$|\angle C_0OA| = \beta \qquad \Rightarrow \qquad |\angle C_0B_0A| = \beta = |\angle AB_0A_0|.$$

Přímka CB_0 je vnitřní osou úhlu $C_0B_0A_0$, a protože $CB_0 \perp B_0B$, je přímka BB_0 vnější osou úhlu $C_0B_0A_0$. Analogicky určíme, že přímka CC_0 je vnější osou úhlu $A_0C_0B_0$ a přímka AA_0 je vnitřní osou úhlu $C_0A_0B_0$. Ortocentrum je tedy středem kružnice připsané trojúhelníku $A_0B_0C_0$.

Nyní zbývá dokázat druhou část věty o velikostech úhlů v trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Z předchozích úvah už víme, že $|\angle C_0B_0A_0| = 2\beta$ a analogicky dokážeme, že $|\angle B_0C_0A_0| = 2\gamma$. Označme $\delta = |\angle AA_0B_0| = |\angle ABB_0|$. Z trojúhelníku ABB_0 platí, že

$$\delta = 90^\circ - \omega \quad \text{a} \quad \omega + \alpha = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta = 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha - 90^\circ,$$
$$2\delta = 2\alpha - 180^\circ.$$

□

Kapitola 12

Nagelův bod

K definování existence Nagelova bodu využijeme znalosti kružnic trojúhelníku připsaných (viz kapitola Střed kružnice připsané). Dále si ukážeme odvození výpočtu délek úseček z bodů dotyku kružnic připsaných k vrcholům trojúhelníku pouze pomocí délek stran trojúhelníku.

Nejprve zavedeme označení N_a pro bod dotyku kružnice připsané $k_a(S_a, \rho_a)$ straně a trojúhelníku ABC. Analogicky označíme i zbývající body dotyku jako N_b, N_c. Tyto body existují v trojúhelníku vždy a jsou dány jednoznačně.
Dále označíme body dotyku kružnice připsané s přímkami procházejícími zbývajícími stranami trojúhelníku tak, že A_b je bod dotyku kružnice $k_b(S_b, \rho_b)$ s přímkou procházející stranou a trojúhelníku ABC. Analogicky označíme i zbývajících pět bodů C_b, B_c, A_c, C_a, B_a (viz obrázek 12.1).
Nyní si odvodíme vzorce pro výpočet délek úseček s jedním krajním bodem ve vrcholu trojúhelníku ABC a druhým krajním bodem v bodech dotyku N_a, N_b, N_c. Konkrétně si ukážeme odvození vzorce pro $|AN_c|$, ostatní vzorce se odvodí úplně analogicky.
Přímky AN_c, AB_c jsou tečny ke kružnici připsané $k_c(S_c, \rho_c)$ z vrcholu A, proto se délky úseček AN_c, AB_c rovnají. Ze stejného důvodu se rovnají i úsečky CB_c, CA_c a úsečky BN_c, BA_c.

$$2|CB_c| = |CB_c| + |CA_c| = |CA| + |AB_c| + |CB| + |BA_c| = b + |AN_c| + a + |BN_c| =$$
$$= a + b + c = 2s.$$

Proto $|CB_c| = s$. Pro délku úsečky AN_c platí

$$|AN_c| = |AB_c| = |CB_c| - |AC| = s - b.$$

Tím získáváme vyjádření délky úsečky AN_c pouze pomocí stran trojúhelníku ABC. Na konec uvedeme délky i pro ostatní úsečky

$$\begin{aligned}|AN_c| &= s - b = |CN_a|,\\ |BN_a| &= s - c = |AN_b|,\\ |CN_b| &= s - a = |BN_c|.\end{aligned}$$ [1]

Přímým důsledkem těchto vztahů je následující tvrzení.

Tvrzení 20. *Každá z přímek AN_a, BN_b, CN_c dělí trojúhelník ABC na dvě části stejného obvodu.*

Důkaz. Přímka AN_a rozdělí trojúhelník ABC na lomenou čáru ACN_a a ABN_a. Pro velikosti těchto lomených čar platí

$$|ACN_a| = |AN_b| + |N_bC| + |CN_a| = |BN_a| + |BN_C| + |AN_c| = |N_aBA|.$$

Pro obvod trojúhelníku ABC za pomoci bodů dotyku připsaných kružnic platí

$$o = |AN_b| + |N_bC| + |CN_a| + |N_aB| + |BN_C| + |N_cA| = 2(|AN_b| + |N_bC| + |CN_a|),$$

tedy obvod je roven dvojnásobku obvodů obou lomených čar ACN_a, ABN_a.

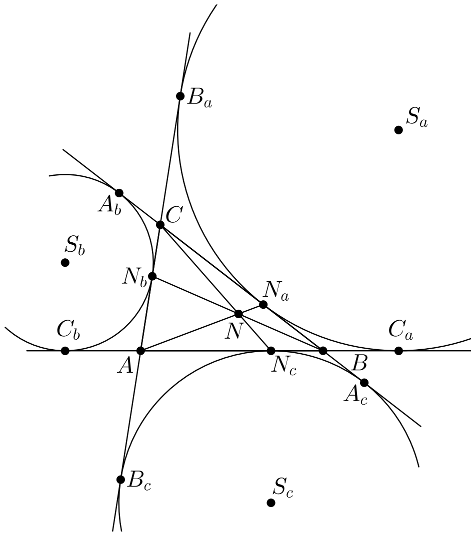
□

Věta 33. *V každém trojúhelníku ABC se přímky AN_a, BN_b, CN_c protínají v jednom bodě.*[2]

Tento bod se nazývá **Nagelův bod** a značíme ho N. Leží vždy uvnitř trojúhelníku ABC.

[1]ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1, s. 31–32.

[2]BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF.*Planimetrie.* 2., rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2, s. 78.



Obrázek 12.1: Nagelův bod

Důkaz. Důkaz, že přímky AN_a, BN_b, CN_c procházejí jedním bodem, provedeme pomocí Cèvovy věty. Víme, že všechny tři dotykové body N_a, N_b a N_c leží na stranách trojúhelníku ABC a jsou různé od vrcholů trojúhelníku.

Využijeme vzorce pro délky úseček odvozené v této kapitole a vynásobíme je mezi sebou

$$\frac{|AN_c|}{|BN_c|} \cdot \frac{|BN_a|}{|CN_a|} \cdot \frac{|CN_b|}{|AN_b|} = \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} = 1.$$

Získáváme platnost předpokladu Cèvovy věty a proto platí, že přímky AN_a, BN_b, CN_c procházejí jedním bodem.

□

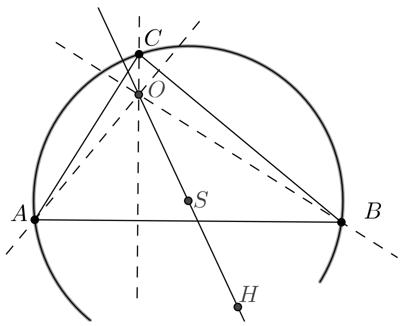
Kapitola 13

Longchampův bod

K definici Longchampova bodu využijeme ortocentrum a střed kružnice opsané, kterými jsme se zabývali v předchozích kapitolách. Dále ukážeme, že Longchampův bod leží na Eulerově přímce.

Definice 14. „**Longchampův bod** trojúhelníku ABC je bod, který je středově souměrný s ortocentrem podle středu kružnice trojúhelníku opsané.“ [1]

Tento bod si označíme H.



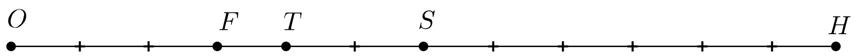
Obrázek 13.1: Longchampův bod

Z definice středové souměrnosti vyplývá, že body S, O a H leží na jedné přímce a to na Eulerově přímce, neboť body S a O na této přímce leží. Platí tedy

$$|HS| : |HO| = 1 : 2.$$

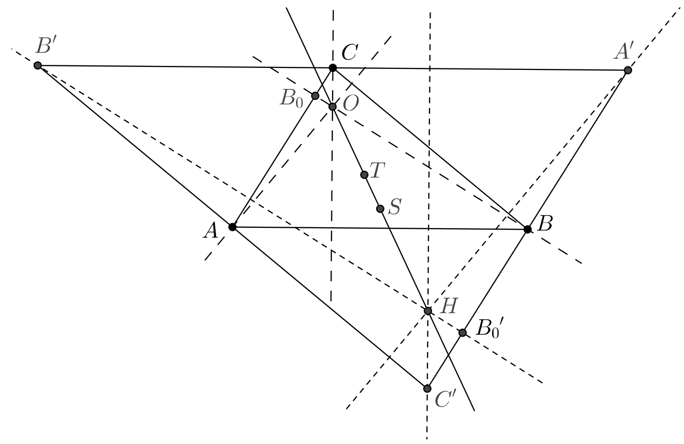
[1]BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. *Planimetrie.* 2., rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2, s. 58.

Další poměry Longchampova bodu s body na Eulerově přímce lze vyčíst z následujícího obrázku.



Obrázek 13.2: Vztahy mezi body na Eulerově přímce

Tvrzení 21. *„Longchampův bod je ortocentrem trojúhelníku $A'B'C'$, jehož příčkový trojúhelník je $\triangle ABC$.“* [2]



Obrázek 13.3: Longchampův bod – těžiště

Důkaz. Ve stejnolehlosti se středem v těžišti a koeficientem $\kappa = -2$ se trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$ (viz věta 11). Tedy úsečka BB_0 se zobrazí na úsečku $B'B_0{}'$. Zobrazení úseček $A'A_0{}'$ a $C'C_0{}'$ získáme analogicky. Kvůli zachování rovnoběžnosti v libovolné stejnolehlosti, jsou úsečky $A'A_0{}'$,$B'B_0{}'$ a $C'C_0{}'$ výškami trojúhelníku $A'B'C'$, takže i ortocentrum O se zobrazí na ortocentrum trojúhelníku $A'B'C'$, označme ho H. Zbývá už jen dokázat, že H je Longchampův bod.

Z vlastností stejnolehlosti víme, že body O, T a H leží na jedné přímce, kterou je Eulerova přímka. Na ní leží i střed kružnice opsané. Chceme dokázat, že $|SO| = |SH|$.

[2]BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF.*Planimetrie.* 2., rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2, s. 58.

Podle stejnolehlosti a vztahů pro významné body na Eulerově přímce (viz věta 17) platí následující rovnosti

$$
\begin{aligned}
2|TO| &= |TH|,\\
2(|SO| - |ST|) &= |ST| + |SH|,\\
2|SO| - 2|ST| &= |ST| + |SH|,\\
2|SO| - 3|ST| &= |SH|,\\
2|SO| - |SO| &= |SH|,\\
|SO| &= |SH|.
\end{aligned}
$$

□

Další zajímavou vlastností Longchampova bodu je jeho kolineárnost s Gergonnovým bodem a středem kružnice vepsané příslušného trojúhelníku.[3]

[3]Wikipedia: The Free Encyclopedia: *de Longchamps point* [online].[citováno 16. 06. 2017]. Dostupný z: https://en.wikipedia.org/wiki/De_ Longchamps_ point.

Kapitola 14

Fermatův bod

V této kapitole se seznámíme s Fermatovým bodem, což je bod uvnitř ostroúhlého trojúhelníku, z něhož jsou všechny strany daného trojúhelníku vidět pod úhlem 120°. Tento bod nám dále poslouží k důkazu věty o tzv. Napoleonovu trojúhelníku.

Věta 34. *„Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC existuje právě jediný bod X takový, že $|AX| + |BX| + |CX|$ je minimální.“* [1]

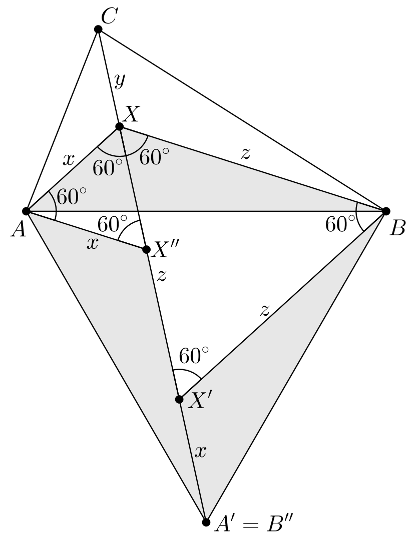
Tento bod X se nazývá **Fermatův bod**. V literatuře můžeme najít i označení Torricelliho bod.

Důkaz. Uvažujme bod X, pro který platí, že součet jeho vzdáleností od vrcholů trojúhelníku ABC je minimální. Označme $|AX| = y, |BX| = z, |CX| = x$ (viz obrázek 14.1). Rotací trojúhelníku ABX kolem bodu B o $+60°$ vznikne trojúhelník $A'BX'$. Trojúhelník BXX' je rovnostranný, protože $|BX| = |BX'|$ a $|\angle XBX'| = 60°$, z čehož vyplývá, že $|X'X| = z$ a $|A'X'| = x$. Aby byl součet

$$|AX| + |BX| + |CX| = |CX| + |XX'| + |A'X'|$$

minimální, musí bod X ležet na přímce CA'. Analogicky musí bod X ležet na přímce BC', kde C' vznikne rotací trojúhelníku AXC kolem bodu A o úhel $+60°$. Bod X je tedy jejich průsečík. □

[1]Wikipedia: The Free Encyclopedia: *Fermat point* [online].[citováno 16. 06. 2017]. Dostupný z: https:// en.wikipedia.org/wiki/Fermat_ point.

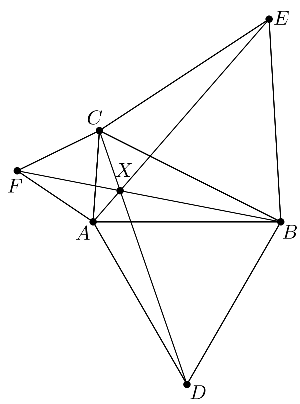


Obrázek 14.1: Fermatův bod

Věta 35. *Pro Fermatův bod v ostroúhlém trojúhelníku ABC platí*

$$|\angle AXB| = |\angle AXC| = |\angle BXC| = 120°.$$

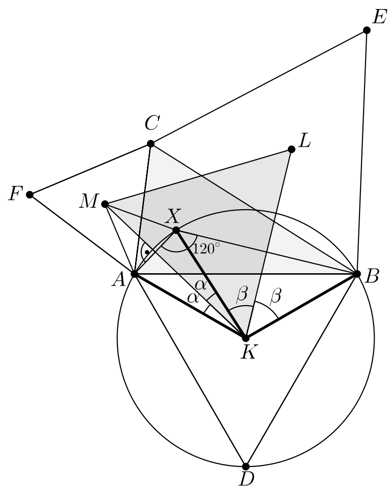
Důkaz. Využijeme znalosti z důkazu věty 34 a označení z obrázku 14.1. Trojúhelník XBX' je rovnostranný a $|\angle BXX'| = 60°$. Rotací trojúhelníku ABX kolem bodu A o úhel $-60°$ vznikne trojúhelník $AA'X''$. Pak trojúhelník $AX''X$ je rovnostranný, a proto $|\angle AXX''| = 60°$. Velikost úhlu AXB je tedy $120°$. Analogicky dokážeme i velikosti úhlů AXC, BXC. □



Obrázek 14.2: Sestrojení Fermatova bodu

Všimněme si, že trojúhelník ABA' využívaný v důkazech předchozích dvou vět je rovnostranný. Fermatův bod lze tedy zkonstruovat jako průsečík přímek CD, BF, AE, kde body D, E, F jsou vrcholy rovnostranných trojúhelníků sestrojených po řadě nad úsečkami AB, AC, BC (viz obrázek 14.2). Toto souvisí s takzvaným Napoleonovým trojúhelníkem, který zavedeme v následující větě.

Věta 36. *Mějme trojúhelník ABC. Nad stranami AB, BC, AC uvažujme rovnostranné trojúhelníky vně trojúhelníku ABC a to trojúhelníky ABD, BCE, CAF. Potom středy kružnic opsaných těmto rovnostranným trojúhelníkům (nebo–li těžiště těchto trojúhelníků) tvoří rovnostranný trojúhelník.* [2]



Obrázek 14.3: Napoleonův trojúhelník

Důkaz. Označme K, L, M po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABD, BCE a CAF (viz obrázek 14.3). Kružnice opsaná trojúhelníku ABD má střed v bodě K a prochází Fermatovým bodem X, protože čtyřúhelník $ABDX$ je tětivový ($|\angle ADB| + |\angle AXB| = 60° + 120° = 180°$). Pro vzdálenosti od středu K kružnice opsané platí $|KA| = |KX| = |KB|$. Analogicky z trojúhelníku ACF se středem kružnice opsané M získáváme rovnosti $|MA| = |MX| = |MC|$ a z trojúhelníku BCE rovnosti $|LB| = |LX| = |LC|$. Čtyřúhelník $AKXM$ je deltoid, protože má dvě a dvě

[2]Wikipedia: The Free Encyclopedia: *Napolein points* [online].[citováno 16. 06. 2017]. Dostupný z: https://en.wikipedia.org/wiki/Napoleon_ points.

sousední strany stejně dlouhé. Deltoid je vždy osově souměrný podle jedné ze svých úhlopříček, proto platí $|\angle XKM| = |\angle AKM|$. Analogicky dostaneme rovnost úhlů $|\angle XKL| = |\angle BKL|$ z deltoidu $BKXL$.

Z věty o obvodovém a středovém úhlu je $|\angle AKB| = 120°$. Tento úhel lze vyjádřit pomocí součtu úhlů

$$\begin{aligned} 120° &= |\angle AKB| = 2|\angle MKX| + 2|\angle XKL| \quad : 2 \\ 60° &= |\angle MKX| + |\angle XKL| = |\angle MKL| \end{aligned}$$

Obdobně dokážeme, že $|\angle KLM| = |\angle LMK| = 60°$ a tedy trojúhelník KLM je rovnostranný. □

Seznam zkratek

A, B, C	vrcholy trojúhelníku
a, b, c	délky stran v trojúhelníku
$\lvert AB \rvert$	vzdálenost bodů A, B
α, β, γ	velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku
T_a, T_b, T_c	středy stran
o_a, o_b, o_c	osy stran
t_a, t_b, t_c	těžnice
T	těžiště
s_a, s_b, s_c	symediány
L_a, L_b, L_c	průsečíky symedián se stranami trojúhelníka
L	Lemoinův bod
v_a, v_b, v_c	výšky v trojúhelníku
A_0, B_0, C_0	paty výšek
O	ortocentrum
S	střed kružnice opsané trojúhelníku
r	poloměr kružnice opsané
F	střed Feuerbachovy kružnice
e	Eulerova přímka
V	střed kružnice vepsané
ρ	poloměr kružnice vepsané
$o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$	osy vnitřních úhlů trojúhelníku
$o'_\alpha, o'_\beta, o'_\gamma$	osy vnějších úhlů v trojúhelníku

H	Longchampův bod
S_a, S_b, S_c	středy kružnic připsaných trojúhelníku
ρ_a, ρ_b, ρ_c	poloměry kružnic připsaných
τ_{AB}	Thaletova kružnice nad průměrem $d = \|AB\|$
X	Fermatův bod
G_a, G_b, G_c	body dotyku kružnice vepsané se stranami trojúhelníku
G	Gergonnův bod
N_a, N_b, N_c	body dotyku kružnic připsaných se stranami trojúhelníku
N	Nagelův bod
R	Švrčkův bod

Závěr

Celá práce se zabývá významnými body v trojúhelníku o to nejenom těmi, které jsou vyučovány na základní a střední škole, ale i těmi, které jsou součástí spíše rozšiřujícího učiva či matematických olympiád. Snažili jsme se vysvětlit vznik těchto bodů, případně jejich konstrukci. Vybrali jsme některé zajímavé vlastnosti spojené s těmito body, u nichž jsme vždy dokázali jejich pravdivost. Cílem práce je podat ucelený text o části geometrie trojúhelníku, kterou jsou její významné body.

Významných bodů v trojúhelníku je celá řada a naše práce by tak mohla být obohacena o další body a jejich vlastnosti. Například střed Taylorovy kružnice, první a druhá Lemoinova kružnice, Gaussova přímka. Dále by se naše práci mohla rozšířit o příklady využívající vlastnosti významných bodů v trojúhelníku a o konstrukční úlohy s těmito body.

Použitá literatura

KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7.

ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1.

BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF.*Planimetrie.* 2., rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.*4. upr. vydání. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4.

EUKLEIDÉS. *Eukleidovy základy: (elementa).* Praha: Jednota českých mathematiků, 1907.

KUCHAŘÍK, Jan. *Některé netradiční vhledy do geometrie.* Jihlava, 2011/2012. SOČ z matematiky. Gymnázium Jihlava.

COXETER, Harold Scott MacDonald a Samuel L. GREITZER. *Geometry revisited.* Washington: Mathematical Association of America, c1967. New mathematical library, 19. ISBN 0-88385-619-0.

Wikipedie: Otevřená encyklopedie.