



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Kotlařík

**Rotující tenký disk kolem
Schwarzschildovy černé díry: vlastnosti
perturbačního řešení**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Chtěl bych zde poděkovat doc. Semerákovi za vedení práce, věcné připomínky a poskytnutí studijních materiálů. Zvláštní dík patří též mé rodině za její neutu-
chající podporu.

Název práce: Rotující tenký disk kolem Schwarzschildovy černé díry: vlastnosti perturbacího řešení

Autor: Petr Kotlařík

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Již od 70. let je známo Willovo řešení perturbace Schwarzschildovy černé díry pomalu rotujícím, tenkým a lehkým prstencem vyjádřené multipólovým rozvojem perturbacího řady. V připravovaném článku P. Čížka a O. Semeráka je tento postup zobecněn na pomalu rotující tenký konečný disk použitím Greenových funkcí v uzavřeném tvaru místo multipólového rozvoje. Tento postup je v závěru článku demonstrován v prvním perturbacího řádu na příkladu disku s konstantní hustotou. V této práci shrneme a ověříme některé vlastnosti tohoto nejjednoduššího případu a ukážeme, jak se přítomností disku změní geometrie horizontu a poloha významných kruhových orbit.

Klíčová slova: obecná teorie relativity, fyzika černých děr, akreční disk

Title: Rotating thin disc around a Schwarzschild black hole: properties of perturbative solution

Author: Petr Kotlařík

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Institute of Theoretical Physics

Abstract: In 1974, Will presented a solution for the perturbation of a Schwarzschild black hole due to a slowly rotating and light thin disc given in terms of a multipole expansion of the perturbation series. In a recently submitted paper, P. Čížek and O. Semerák generalized this procedure to the perturbation by a slowly rotating finite thin disc, using closed forms of Green functions rather than the multipole expansion. The method is illustrated there, in the first perturbation order, on the constant-density disc. In this thesis, we summarize, check and plot some of the obtained properties, and show how the presence of the disc changes the geometry of a horizon and the position of significant circular orbits.

Keywords: general theory of relativity, black hole physics, accretion discs

OBSAH

Úvod	3
Notace a zkratky	5
1 Stacionární, axiálně symetrické a ortogonálně tranzitivní prostoročasy	6
1.1 Metrika a okrajové podmínky	7
1.2 Einsteinovy rovnice	8
1.3 Podmínky na horizontu	10
1.4 Komarovy integrály	11
2 Rotující tenký disk a perturbační schéma	13
2.1 Kontra-rotující interpretace disku	15
2.2 Významné kruhové orbity	16
2.2.1 Fotonová orbita	16
2.2.2 Mezní stabilní orbita (ISCO)	17
2.2.3 Mezní vázaná orbita	17
2.2.4 Statický případ	17
2.3 Perturbační schéma	18
3 Řešení Einsteinových rovnic metodou Greenových funkcí	21
3.1 Greenova funkce pro potenciál	22
3.2 Greenova funkce pro dragging	22
3.3 Řešení pro disk s konstantní hustotou v lineárním řádu	24
3.3.1 Gravitační potenciál	24
3.3.2 Dragging	25
4 Vlastnosti řešení	27
4.1 Chování metrických funkcí	27
4.2 Tvar horizontu	28
4.3 Asymptotické chování	34
4.4 Komarovy integrály	34
4.5 Významné kruhové orbity	35

5 Závěrečné poznámky	39
Seznam použité literatury	40
Seznam obrázků	41

ÚVOD ANEB NĚCO MÁLO K OBEČNÉ RELATIVITĚ, ČERNÝM DÍRÁM A TENKÝM DISKŮM

Píše se listopad roku 1915. V této neklidné době, více než rok po začátku první světové války, je publikována nová teorie gravitace – obecná teorie relativity. Autorem není nikdo jiný než Albert Einstein, v té době již slavný fyzik díky svým pracem o Brownově pohybu, fotoelektrickém jevu a v neposlední řadě i díky speciální teorii relativity. Na konci roku 1915 se mu však podařil mistrovský kousek – nahradit přes 200 let starou velmi úspěšnou Newtonovu teorii úplně novým pohledem na fenomén gravitace.

Ani ne za měsíc píše z ruské fronty Einsteinovi Karl Schwarzschild, že našel řešení pro bodový zdroj. Řešení překvapilo Einsteina nejen svou jednoduchostí, ale i existencí. Podle machovské představy, kterou byl Einstein při své práci značně ovlivněn, by setrvačnost neměla být vnitřní vlastností tělesa, ale vlastností danou působením všech hmot ve vesmíru. S tím se však zdá být osamocený bodový zdroj ve sporu. Schwarzschild navíc ve svém druhém dopise ze začátku roku 1916 své řešení doplňuje o „vnitřní“ řešení pro sféricky symetrickou „hvězdu“ složenou z nekoherentního prachu s konstantní hustotou. Přitom přichází na zajímavý rys – je-li poloměr takové hvězdy menší, než $r = 2GM/c^2$, nemá hmota jinou možnost, než být vtažena do centra $r = 0$. V roce 1930 navíc Chandrasekhar naznačí, že by velmi hmotná hvězda po vyčerpání svého jaderného zdroje měla skutečně podléhat velmi extrémní kontrakci. Většina tehdejších astrofyziků včetně A. S. Eddingtona žádají „přírodní zákon, který by hvězdě zabránil chovat se tak potěšile“. Tím začíná dlouhá cesta k pojmu *černá díra* zpopularizovaném zejména J. A. Wheelerem v roce 1968.

Obrat od ryze akademických úvah znamenaly až objevy v 60. letech naznačující existenci velmi kompaktních objektů, dnes známých pod pojmy černá díra nebo neutronová hvězda. Z projevů silného gravitačního pole na okolní látku je dnes již prakticky jisté, že se černé díry nacházejí v centrech kvasarů, galaxií popř. velmi aktivních binárních (nebo i více složkových) systémů. Navíc nedávným zachycením gravitačních vln vyzářených splynutím dvou černých děr se ukazuje, že naše představy o chování černých děr jsou skutečně správné a obecná relativita tak symbolicky po 100 letech své existence slavila další triumf.

Černé díry popsané Schwarzschildem (eventuálně Kerrrem v případě rotující černé díry) jsou izolované. Tato vlastnost však není v astrofyzikálním kontextu splněna – naopak je velmi pravděpodobné, že se kolem černých děr bude vyskytovat netriviální množství gravitačně vázané hmoty. Tato hmota potom určitým způsobem změní geometrii prostoročasu. V této práci se budeme zabývat jednou takovou astrofyzikálně relevantní konfigurací – akrečním diskem kolem černé díry. K modelování takového případu se standardně přistupuje s několika zjednodušujícími předpoklady – předpokládá se stacionarita, axiální symetrie a disk složený s negravitujiících testovacích částic. Poslední předpoklad je odůvodněn zvláště tím, že pole černé díry, jakožto objektu s nejsilnějším možným zdrojem gravitace ve vesmíru, bude (alespoň v určitých oblastech) dominovat nad jakýmkoliv jiným zdrojem v jejím okolí. V astrofyzikálně podstatných aplikacích se navíc obvykle předpokládá velmi malá hmotnost disku vůči hmotnosti samotné černé díry. Tyto argumenty však nemusí přesně platit ve složkách pole kolmých na rovinu disku. Ba co více, působení disku může dokonce dominovat v prvních a druhých derivacích metriky (tedy v křivosti). Nadto i kdyby disk geometrii ovlivňoval jen velmi málo, stále může mít vliv na pozorovací data a ovlivňovat dlouhodobou dynamiku dalších obíhajících těles.

Započítat gravitační působení disku se však vzhledem k nelinearitě Einsteino-vých rovnic ukazuje jako obtížný úkol. Přesného analytického řešení jsme schopni jen ve statických a axiálně symetrických případech [1, 2]. Mělo by však rozhodně význam rozšířit řešení i na stacionární případy – jmenovitě takové, které připouštějí rotaci. Předpokládáme-li mimo centrální černou díru slabé gravitační zdroje, můžeme k problému přistoupit jako k malé perturbaci výchozí metriky a výsledné řešení vyjádřit v řeči koeficientů nekonečné řady. Takto v 70. letech postupoval i Will [3] a perturbací Schwarzschildovy metriky získal řešení pro pomalu rotující, osově symetrický a slabě gravitujiící prstenec. Tohoto výsledku se chopili v připravovaném článku P. Čížek a O. Semerák [4] a rozšířili řešení na případ tenkého pomalu rotujícího axiálně symetrického disku v ekvatoriální rovině. Zároveň se jim podařilo vyjádřit řešení ve tvaru Greenových funkcí v uzavřené formě, která má oproti nekonečné řadě mnoho nesporných výhod (zvláště co se týče numerických manipulací).

Úkolem této práce bude prozkoumat a vhodně ilustrovat vlastnosti řešení prezentovaného v [4]. Jmenovitě chování metrických funkcí v různých významných místech, reakci geometrie horizontu na přítomnost disku a posunutí významných kruhových orbit. První kapitola bude věnována obecným vlastnostem stacionárních, axiálně symetrických a ortogonálně tranzitivních prostoročasů. Na to naváže kapitola o fyzikálních předpokladech kladených na disk a představení perturbačního schématu. Po té bude následovat kapitola shrnující řešení Einsteino-vých rovnic metodou Greenových funkcí z článku [4] a práce bude zakončena kapitolou pojednávající o zmiňovaných vlastnostech nalezeného řešení.

NOTACE A ZKRATKY

Metrika $g_{\mu\nu}$ má signaturu $(-+++)$, všude užíváme geometrizovaných jednotek, ve kterých $c = G = 1$. Řecké indexy probíhají hodnoty 0–3, latinské indexy 1–3. Striktně dodržujeme Einsteinovu sumační konvenci (tedy přes dva stejné indexy se automaticky sčítá). Čárkou v indexech značíme parciální derivaci, středníkem kovariantní derivaci. Úplné eliptické integrály značíme standardním způsobem v řeči modulu k

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} , \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi ,$$
$$\Pi(n, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} .$$

KAPITOLA 1

STACIONÁRNÍ, AXIÁLNĚ SYMETRICKÉ A ORTOGONÁLNĚ TRANZITIVNÍ PROSTOROČASY

V této úvodní kapitole představíme třídu stacionárních, axiálně symetrických a asymptoticky plochých prostoročasů. Postupně zavedeme všechny potřebné pojmy, které později využijeme v hlavním tématu této práce. Výklad povedeme ve stejném duchu jako v [5].

V celé práci neuvažujeme kosmologickou konstantu a prostoročas považujeme za **asymptoticky plochý**, tj. ve velkých vzdálenostech od zdroje se geometrie prostoročasu „blíží“ k Minkowského prostoročasu. Díky této vlastnosti můžeme dát dobrý smysl fyzikálním veličinám vůči asymptotické inerciální soustavě („vůči nekonečnu“). Tento předpoklad je přirozený, vezmeme-li v úvahu, že stacionární a osově symetrická řešení polních Einsteinových rovnic budou typicky popisovat pole konečných rotujících zdrojů.

Stacionární prostoročas znamená existenci časupodobného Killingova vektorového pole η^μ . Výhodně můžeme zavést souřadnici t tak, aby $\eta^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$. Souřadnice t má pak význam vlastního času pozorovatele v nekonečnu a metrika je na ní nezávislá, neboli $g_{\mu\nu,t} = 0$.

Řekneme, že prostoročas je navíc **statický**, jestliže je Killingovo pole η^μ ortogonální k nadplochám, neboli jestliže existují taková skalární pole f a Φ , pro které $\eta_\alpha = -f\Phi_{,\alpha}$. V adaptovaných souřadnicích (t, x^i) platí, že $\eta^\mu = \delta_t^\mu$ a $\eta_\alpha = g_{t\alpha}$. Podmínce tedy zřejmě vyhovuje $\Phi = t$, $f = -g_{tt}$. To znamená $g_{ti} = 0$, neboli že prostoročas je navíc symetrický vůči záměně směru toku času.

Axiální symetrie prostoročasu znamená existenci prostorupodobného Killingova pole ξ^μ s uzavřenými integrálními křivkami. Výhodně můžeme zavést další souřadnici ϕ (tentokrát prostorovou) tak, aby $\xi^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi}$. Fyzikálně má tato souřadnice význam azimutálního úhlu a složky metriky na ní nezávisí, tj. $g_{\mu\nu,\phi} = 0$.

Po prostoročasu také požadujeme existenci dvourozměrné časupodobné oblasti, na níž je $\xi^\mu = 0$ - **osy symetrie**. Na takové oblasti je $g_{\phi\phi} = g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = 0$, tedy obvod integrálních křivek $\oint \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi = 0$ na ose též vymizí.

Důležitou symetrií je rovněž **ortogonální tranzitivita**. Znamená, že k rovinám napnutým mezi Killingovými vektory existují lokálně kolmé integrální plochy

$\{t = \text{konst}, \phi = \text{konst}\}$. Fyzikálně se jedná o požadavek, aby se elementy zdroje pohybovaly pouze ve směrech Killingových vektorů, tedy aby metrika byla invariantní vůči transformaci $(t \rightarrow -t, \phi \rightarrow -\phi)$. Tyto plochy můžeme pokrýt zbývajícími dvěma souřadnicemi x^1 a x^2 , pro které bude platit $g_{1\phi} = g_{1t} = g_{2\phi} = g_{2t} = 0$. Navíc vzhledem k tomu, že každá dvourozměrná metrika se signaturou $(++)$ nebo $(--)$ je konformně plochá, můžeme g_{pq} , $(p,q) = (1,2)$ převést na diagonální tvar.

1.1 Metrika a okrajové podmínky

Vzhledem k poznámkám výše můžeme metriku zapsat například ve Weylových souřadnicích ρ, z

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{tt} dt^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi t} d\phi dt + g_{\rho\rho} d\rho^2 + g_{zz} dz^2 = \\ &= -e^{2\nu} dt^2 + B^2 \rho^2 e^{-2\nu} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\zeta - 2\nu} (d\rho^2 + dz^2) . \end{aligned} \quad (1.1)$$

Neurčené složky metriky vyjádřené metrickými funkcemi ν, B, ω, ζ závisí pouze na ρ a z . Kromě Weylových souřadnic můžeme metriku přepsat i do izotropických souřadnic

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + B^2 r^2 e^{-2\nu} \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\zeta - 2\nu} (dr^2 + r^2 d\theta^2) , \quad (1.2)$$

přičemž vztah mezi izotropickými souřadnicemi (r, θ) a Weylovými souřadnicemi (ρ, z) je dán

$$\rho = r \sin \theta , \quad z = r \cos \theta . \quad (1.3)$$

Díky adaptovaným souřadnicím (t, ϕ) jsou metrické koeficienty $g_{tt} = g_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu$, $g_{t\phi} = g_{\mu\nu} \xi^\mu \eta^\nu$ a $g_{\phi\phi} = g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu$ invariantní. Metrická funkce ω má též invariantní význam, neboť

$$\omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} . \quad (1.4)$$

Na ose symetrie požadujeme plochost, tj. pro malá ρ by měl být vlastní obvod kružnic

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi = 2\pi B \rho e^{-\nu} \quad (1.5)$$

$\{t=\text{konst}, \rho=\text{konst}, z=\text{konst}\}$

lineární funkcí vlastního poloměru

$$\int_0^\rho \sqrt{g_{\rho\rho}} d\rho' = \int_0^\rho e^{\zeta - \nu} d\rho' \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} e^{\zeta - \nu} \rho . \quad (1.6)$$

Dle definice je na ose $g_{\phi\phi} = 0$, tedy i vlastní poloměr tam musí vymizet. Poměr obou veličin by se měl zároveň blížit 2π ,

$$\frac{2\pi B \rho e^{-\nu}}{\rho e^{\zeta - \nu}} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 2\pi , \quad (1.7)$$

neboli musí platit, že $B \rightarrow e^\zeta$. Má-li růst $\sqrt{g_{\phi\phi}}$ lineárně s vlastním poloměrem $\left[e^{\zeta-\nu}\right]_{\rho=0} \rho$, pak nutně $g_{\phi\phi} = \mathcal{O}(\rho^2)$. Má-li být ω konečná, potom též $-g_{t\phi} = \omega g_{\phi\phi} = \mathcal{O}(\rho^2)$.

Požadavek asymptotické plochosti v nekonečnu dává na metriku (1.1) podmínky [6]

$$\nu \rightarrow -\frac{M}{R} + \mathcal{O}(R^{-2}) \quad (1.8)$$

$$B\rho \rightarrow R + \mathcal{O}(R^{-1}) \quad (1.9)$$

$$\omega \rightarrow \frac{2J}{R^3} + \mathcal{O}(R^{-4}) \quad (1.10)$$

$$\zeta \rightarrow \mathcal{O}(R^{-2}) \quad , \quad (1.11)$$

přičemž jako R označujeme jakoukoliv souřadnici, která má asymptoticky význam radiální vzdálenosti (neboli $R \rightarrow \sqrt{\rho^2 + z^2}$ pro velká ρ a z). Konstanty M a J mají význam celkové hmotnosti a celkového momentu hybnosti.

Černá díra je oblast časoprostoru, ze které nelze uniknout do nekonečna po časopodobných ani světelných světočarách (viz. [7] a [5]). Hranici takového objektu nazveme **horizontem událostí**. V našem typu prostoročasů je charakterizován tím, že na něm vymizí tzv. lapse-funkce e^ν [8], tedy

$$0 = -g_{\mu\nu} (\eta^\mu + \omega\xi^\mu) (\eta^\nu + \omega\xi^\nu) = -g_{tt} - 2g_{t\phi}\omega - g_{\phi\phi} = e^{2\nu} . \quad (1.12)$$

To znamená též nulovost subdeterminantu (t, ϕ) části metriky

$$g_{tt}g_{\phi\phi} - (g_{t\phi})^2 = g_{\phi\phi}e^{2\nu} = 0 . \quad (1.13)$$

Na stacionárním horizontu nabývá funkce ω konstantní hodnoty ω_H . Díky tomu je horizont zároveň Killingovým horizontem, jelikož $\eta^\mu + \omega_H\xi^\mu$ je Killingovo pole a na horizontu se stává světelným. Můžeme tak vyjádřit další invariantní veličinu - **povrchovou gravitaci**

$$(\kappa_H)^2 = \lim_{\rightarrow H} \left(-\frac{1}{2} (\eta_\mu + \omega_H\xi_\mu)_{;\nu} (\eta^\mu + \omega_H\xi^\mu)^{;\nu} \right) = \lim_{\rightarrow H} (g^{\alpha\beta} (e^\nu)_{;\alpha} (e^\nu)_{;\beta}) \quad (1.14)$$

s jasnou fyzikální interpretací - výraz $(\eta^\mu + \omega_H\xi^\mu)$ má až na normalizaci význam rychlosti, a tedy povrchová gravitace udává kvadrát zrychlení kruhového pohybu (na $\rho = \text{konst}$, $z = \text{konst}$) vztaženého k asymptotickému času.

Jelikož je na horizontu $e^{2\nu} = 0$ a $\omega = \text{konst}$, musí být také $B\rho = 0$, aby byl azimutální obvod horizontu $2\pi \lim_{\rightarrow H} B\rho e^{-\nu}$ konečný. Podobně, aby tam $g_{\rho\rho} = g_{zz} = e^{2\zeta-2\nu}$ byly regulární, je třeba $e^{2\zeta} = 0$.

1.2 Einsteinovy rovnice

Pro metriku (1.1) existuje 6 nenulových Einsteinových rovnic, z čehož je 5 nezávislých (díky zákonům zachování $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ plyne jedna rovnice z ostatních). Můžeme je zapsat například takto

$$\nabla \cdot (\rho \nabla B) = 8\pi \rho B (T_{\rho\rho} + T_{zz}) , \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot (B \nabla \nu) - \frac{B^3 \rho^2}{2e^{4\nu}} (\nabla \omega)^2 = 4\pi B e^{2\zeta - 2\nu} (T_i^i - 2\omega T_\phi^t - T_t^t) , \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot (B^3 \rho^2 e^{-4\nu} \nabla \omega) = -16\pi B e^{2\zeta - 2\nu} T_\phi^t , \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{,\rho\rho} + \zeta_{,zz} + (\nu_{,\rho})^2 + (\nu_{,z})^2 - \frac{3B^2 \rho^2}{4e^{4\nu}} [(\omega_{,\rho})^2 + (\omega_{,z})^2] = \\ = 8\pi e^{2\zeta - 2\nu} (T_\phi^\phi - \omega T_\phi^t) , \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{,\rho} (B\rho)_{,\rho} - \zeta_{,z} (B\rho)_{,z} = B\rho [(\nu_{,\rho})^2 - (\nu_{,z})^2] + \frac{1}{2} [(B\rho)_{,\rho\rho} - (B\rho)_{,zz}] - \\ - \frac{1}{4} B^3 \rho^3 e^{-4\nu} [(\omega_{,\rho})^2 - (\omega_{,z})^2] + 4\pi \rho B (T_{\rho\rho} - T_{zz}) , \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\zeta_{,\rho} (B\rho)_{,z} + \zeta_{,z} (B\rho)_{,\rho} = 2B\rho \nu_{,\rho} \nu_{,z} + (B\rho)_{,\rho z} - \frac{1}{2} B^3 \rho^3 e^{-4\nu} \omega_{,\rho} \omega_{,z} + 8\pi \rho B T_{\rho z} , \quad (1.20)$$

kde ∇ resp. $\nabla \cdot$ značí gradient resp. divergenci v plochem (umělem) třírozměrném prostoru s válcovými souřadnicemi (ρ, ϕ, z) .

Standardně se za předpokladu $T_{\rho\rho} + T_{zz} = 0$, který platí např. pro nekoherentní prach, rovnou vyřeší první rovnice (1.15) volbou $B = 1$. Počet neznámých funkcí se tak redukuje na 3. Nevýhodou Weylových souřadnic je však v takovém případě degenerace horizontu na úsečku v $\rho = 0$. Je tedy lépe pracovat v izotropických souřadnicích a metrikou (1.2). Rovnici (1.15) můžeme vyřešit tím, že se na horizontu bude nulovat B místo ρ , a to tak, aby to nastalo při $r = \text{konst.}$ Zvolíme-li

$$B = 1 - \frac{k^2}{4(\rho^2 + z^2)} = 1 - \frac{k^2}{4r^2} , \quad (1.21)$$

kde k je kladná konstanta rozměru délky (neuvažujeme případ $k = 0$, který by odpovídal extrémnímu horizontu), bude horizont ležet na $r = \frac{k}{2}$. Nebude-li řečeno jinak, budeme B vždy volit jako (1.21).

Dále budeme využívat zvláště izotropických souřadnic. Nicméně tam, kde je to vhodné a názornější, použijeme i Weylových souřadnic. V izotropických souřadnicích má za volby $T_{\rho\rho} + T_{zz} = 0$ první z Einsteinových rovnic tvar

$$r^2 B_{,rr} + 3r B_{,r} + B_{,\theta\theta} + 2B_{,\theta} \cot \theta = 0 . \quad (1.22)$$

Volba B (1.21) tuto rovnici rovnou řeší a v dalších jsou členy s derivací $B_{,\theta}$ nulové. Máme tedy

$$\begin{aligned} B^2 e^{-2\nu} \sin^2 \theta \left[r^2 \omega_{,rr} + 4r \omega_{,r} (1 - r\nu_{,r}) + 3r^2 \omega_{,r} (\ln B)_{,r} + \right. \\ \left. + \omega_{,\theta\theta} + 3\omega_{,\theta} \cot \theta - 4\omega_{,\theta} \nu_{,\theta} \right] = -16\pi e^{2\zeta} T_\phi^t , \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}
& B^2 \left[r^2 \nu_{,rr} + 2r \nu_{,r} + r^2 \nu_{,r} (\ln B)_{,r} + \nu_{,\theta\theta} + \nu_{,\theta} \cot \theta \right] = \\
& = \frac{1}{2} r^2 B^4 e^{-4\nu} \sin^2 \theta \left[r^2 (\omega_{,r})^2 + (\omega_{,\theta})^2 \right] + 4\pi r^2 B^2 e^{2\zeta - 2\nu} \left(T_i^i - 2\omega T_\phi^t - T_t^t \right) ,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned}
& rB(2-B)\zeta_{,r} - B^2\zeta_{,\theta} \cot \theta - r^2 B^2 (\nu_{,r})^2 + B^2 (\nu_{,\theta})^2 + 2B(1-B) = \\
& = -\frac{1}{4} r^2 B^4 e^{-4\nu} \sin^2 \theta \left[r^2 (\omega_{,r})^2 - (\omega_{,\theta})^2 \right] + 4\pi r^2 B^2 e^{2\zeta - 2\nu} (T_r^r - T_\theta^\theta) ,
\end{aligned} \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
& rB\zeta_{,r} \cot \theta + (2-B)\zeta_{,\theta} - 2rB\nu_{,r}\nu_{,\theta} - 2(1-B)\cot \theta = \\
& = -\frac{1}{2} r^3 B^3 e^{-4\nu} \sin^2 \theta \omega_{,r}\omega_{,\theta} + 8\pi r B T_\theta^r ,
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}
& B^2 \left[r^2 \zeta_{,rr} + r\zeta_{,r} + \zeta_{,\theta\theta} + r^2 (\nu_{,r})^2 + (\nu_{,\theta})^2 \right] = \\
& = \frac{3}{4} r^2 B^4 e^{-4\nu} \sin^2 \theta \left[r^2 (\omega_{,r})^2 + (\omega_{,\theta})^2 \right] + 8\pi r^2 B^2 e^{2\zeta - 2\nu} \left(T_\phi^\phi - \omega T_\phi^t \right) .
\end{aligned} \tag{1.27}$$

1.3 Podmínky na horizontu

Základní rozbor chování metrických koeficientů na horizontu jsme již provedli. Nyní trochu podrobněji – na horizontu se nemůže nacházet žádná látka ve stacionárním stavu, tzn. nulové zdrojové členy Einsteinových rovnic. Není-li horizont skutečnou časoprostorovou singularitou, musí na něm vymizet členy s derivacemi podle θ . Z rovnice (1.23) tak zbývá

$$\omega_{,rr} + \frac{4}{r} \omega_{,r} (1 - r\nu_{,r}) + \frac{3B_{,r}}{B} \omega_{,r} = 0 . \tag{1.28}$$

To znamená, že $\frac{\omega_{,r}}{B}$ musí být regulární, neboli $\omega_{,r} = \mathcal{O}(B)$. Do řádu $\mathcal{O}(B)$ tak můžeme v rovnici (1.24) zanedbat i člen $(\omega_{,r})^2$ a dostáváme soustavu

$$r\omega_{,rr} + \frac{2}{B} (3-B)\omega_{,r} - 4r\omega_r\nu_{,r} = 0 \tag{1.29}$$

$$rB^2\nu_{,rr} + 2B\nu_{,r} = 0 \tag{1.30}$$

Řešením rovnice (1.30) při splnění požadavku na nenulovost a konečnost $Be^{-\nu_H}$ je

$$\nu_H = N(\theta) + \ln \frac{1 - \frac{k}{2r}}{1 + \frac{k}{2r}} + \mathcal{O}(B^2) . \tag{1.31}$$

Regulární funkce $N(\theta)$ se liší pro konkrétní prostoročasy a můžeme ji získat porovnáním vedoucích členů rozvoje $\nu(r, \theta)$ v $r = \frac{k}{2}$.

Rovnice (1.25) se do řádu $\mathcal{O}(B)$ redukuje na

$$rB(2-B)\zeta_{,r} = r^2 B^2 (\nu_{,r})^2 - 2B , \tag{1.32}$$

čímž určuje ζ jako funkci r . Dosadíme-li odsud za $\zeta_{,r}$ do (1.26), dostáváme

$$4(2-B)\zeta_{,\theta} = 8rB\nu_{,r}\nu_{,\theta} - r^2 B^2 (2+B) (\nu_{,r})^2 \cot \theta + 4(2-B)\cot \theta . \tag{1.33}$$

Po dosazení za ν_{H} z (1.31) a za B získáme jednoduchý vztah

$$\zeta_{,\theta} = 2(\nu_{\text{H}})_{,\theta} = 2 \frac{dN}{d\theta} , \quad (1.34)$$

který snadno vyřešíme například takto

$$\zeta_{\text{H}}(r, \theta) = 2N(\theta) - 2N(0) + \ln B + \mathcal{O}(B^2) . \quad (1.35)$$

Horizont nyní můžeme zapsat jako 2D plochu $\{t = \text{konst}, r = k/2\}$ s metrikou

$$\begin{aligned} ds_{\text{H}}^2 &= (g_{\theta\theta})_{\text{H}} d\theta^2 + (g_{\phi\phi})_{\text{H}} d\phi^2 \\ &= 4k^2 e^{-2N(\theta)} e^{4N(\theta)-4N(0)} d\theta^2 + 4k^2 e^{-2N(\theta)} \sin^2 \theta d\phi^2 . \end{aligned} \quad (1.36)$$

Představu o geometrii této plochy může dát její **Gaussova křivost** $\mathcal{K} \equiv R/2$, kde R značí dvourozměrnou skalární křivost. Obecně pro metriku (1.2) platí

$$\mathcal{K}(r = \text{konst}) = \frac{1 + \nu_{,\theta\theta} + (\zeta_{,\theta} + \nu_{,\theta}) \cot \theta - \zeta_{,\theta} \nu_{,\theta}}{r^2 e^{2\zeta-2\nu}} . \quad (1.37)$$

Na horizontu $r = k/2$ je $\zeta_{,\theta} = 2N_{,\theta}$ a $e^{2\zeta-2\nu} = 16e^{2N(\theta)-4N(0)}$, tedy Gaussova křivost nabývá na horizontu tvaru

$$\mathcal{K}_{\text{H}} = \frac{1 + N_{,\theta\theta} - 2(N_{,\theta})^2 + 3N_{,\theta} \cot \theta}{4k^2 e^{2N(\theta)-4N(0)}} . \quad (1.38)$$

1.4 Komarovy integrály

Celkovou hmotnost a celkový moment hybnosti jsme schopni vyjádřit ještě jiným způsobem než z asymptotického chování metrických funkcí (1.8) až (1.11). Ve stacionárních a asymptoticky plochých prostoročasech můžeme využít tzv. Komarových integrálů integrující toky antisymetrických gradientů obecných Killingových vektorů ζ^μ přes plochu $\partial\Sigma$ ohraničující prostorupodobnou oblast Σ ,

$$Q^k = -\frac{1}{16\pi} \oint_{\partial\Sigma} \zeta^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu} . \quad (1.39)$$

S využitím Stokesovy věty, identity platné pro Killingovy vektory $\zeta^{\mu;\nu}{}_{\nu} = -R_{\nu}^{\mu} \zeta^{\nu}$ a vyjádření Riemannova tenzoru z Einsteinových rovnic $R_{\nu}^{\mu} = 4\pi(2T_{\nu}^{\mu} - T\delta_{\nu}^{\mu})$, kde T je stopa tenzoru energie a hybnosti, dostaneme

$$Q^k = -\frac{1}{8\pi} \oint_{\Sigma} \zeta^{\mu;\nu}{}_{\nu} d\Sigma_{\mu} = \frac{1}{8\pi} \oint_{\Sigma} R_{\nu}^{\mu} \zeta^{\nu} d\Sigma_{\mu} = \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} (2T_{\nu}^{\mu} \zeta^{\nu} - T\zeta^{\mu}) d\Sigma_{\mu} . \quad (1.40)$$

V uvažovaném stacionárním a axiálně symetrickém prostoročase existují dohromady dvě Killingova vektorová pole – časupodobné ξ^μ a prostorupodobné η^μ . Integrací (1.40) přes objem obsahující veškeré zdroje dostaneme pro případ η^μ po přenásobení -2 hmotnost, pro případ ξ^μ rovnou moment hybnosti. U prostoročasu s černou dírou ještě rozlišíme příspěvek od samotné černé díry (integrálem přes plochu jejího horizontu) a od vnějších zdrojů. Tedy pro hmotnost máme

$$\begin{aligned}
M^k &= \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\Sigma \rightarrow \infty} \eta^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \oint_{\text{H}} \eta^{\mu;\nu} d\Sigma_{\mu\nu} - \oint_{\Sigma > \text{H}} (2T_\nu^\mu \eta^\nu - T\eta^\mu) d\Sigma_\mu = \\
&= M + \oint_{\Sigma > \text{H}} (T_i^i - T_t^t) \sqrt{-g} d^3x = M + \mathcal{M}^k, \quad (1.41)
\end{aligned}$$

kde g je kovariantní determinant metriky a d^3x značí souřadnicový objemový element. Pro moment hybnosti

$$\begin{aligned}
J^k &= -\frac{1}{16\pi} \oint_{\partial\Sigma \rightarrow \infty} \xi^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} \oint_{\text{H}} \xi^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \oint_{\Sigma > \text{H}} (2T_\nu^\mu \xi^\nu - T\xi^\mu) d\Sigma_\mu = \\
&= J + \oint_{\Sigma > \text{H}} T_\phi^t \sqrt{-g} d^3x = J + \mathcal{J}^k. \quad (1.42)
\end{aligned}$$

KAPITOLA 2

ROTUJÍCÍ TENKÝ DISK A PERTURBAČNÍ SCHÉMA

Budeme předpokládat nenabitý infinitesimálně tenký disk v ekvatoriální rovině (tj. $z = 0$) rozprostírající se mezi dvěma konečnými poloměry vně centrální černé díry. Pro tenzor energie a hybnosti to znamená, že je nulový všude kromě oblasti disku, kde je úměrný delta-distribuci $\delta(z)$. Metrické koeficienty jsou v takovém případě všude spojité a mají v první normálové derivaci $g_{\mu\nu,z}$ skok podél disku. Předpokládáme, že prostoročas je zrcadlově symetrický vůči rovině disku. To pro metrické funkce ν , B , ω , ζ znamená, že jsou sudé v z , a naopak pro jejich první normálové derivace, že jsou v z liché.

Aby zůstal prostoročas stacionární, axiálně symetrický a ortogonálně tranzitivní, musí se elementy disku pohybovat pouze ve směru daném Killingovými vektory, neboli musí vykonávat kruhové pohyby rovnoměrnou úhlovou rychlostí

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} , \quad (2.1)$$

což odpovídá čtyř-rychlosti

$$u^\mu = \frac{\eta^\mu + \Omega\xi^\mu}{|\eta^\mu + \Omega\xi^\mu|} = u^t (1, 0, 0, \Omega) , \quad u_\alpha = u^t (-e^{2\nu} - B\rho\nu\omega, 0, 0, B\rho\nu) , \quad (2.2)$$

přičemž

$$(u^t)^2 = \frac{1}{-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi}} = \frac{e^{-2\nu}}{1 - B^2\rho^2 e^{-4\nu} (\Omega - \omega)^2} = \frac{e^{-2\nu}}{1 - v^2} , \quad (2.3)$$

kde jsme zavedli

$$v = B\rho e^{-2\nu} (\Omega - \omega) = \sqrt{g_{\phi\phi}} e^{-\nu} (\Omega - \omega) , \quad (2.4)$$

odpovídající lineární rychlosti vůči ZAMO pozorovateli (*Zero angular momentum observer* - pozorovatel s nulovým momentem hybnosti, tj. $u_\phi = 0$, vzhledem k radiálnímu nekonečnu).

Zavedeme plošný tenzor energie a hybnosti S_ν^μ

$$S_\nu^\mu = \int_{-\infty}^{\infty} T_\nu^\mu g_{zz} dz = \int_{z=0^-}^{z=0^+} T_\nu^\mu e^{2\zeta-2\nu} dz \quad \Leftrightarrow \quad T_\nu^\mu e^{2\zeta-2\nu} = S_\nu^\mu \delta(z) . \quad (2.5)$$

Integrací Einsteinových rovnic přes infinitezimální interval ($z = 0^-$, $z = 0^+$) dostaneme vztah mezi skoky v první derivaci metrických koeficientů $g_{\mu\nu,\kappa}$ a tenzoru energie a hybnosti S_ν^μ . Po integraci zbudou členy úměrné $\delta(z)$, tzn. zdrojové členy, a jelikož (obdobně pro ostatní metrické funkce)

$$\int_{z=0^-}^{z=0^+} \nu_{,zz} dz = 2\nu_{,z}(z = 0^+) , \quad (2.6)$$

zbudou i členy lineární v druhých derivacích $\nu_{,zz}$, $\omega_{,zz}$, $B_{,zz}$ a $\zeta_{,zz}$. Vychází tak

$$S_z^z = 0 \quad (2.7)$$

$$S_z^\rho = 0 \quad (2.8)$$

$$(B\rho)_{,z}(z = 0^+) = 4\pi B\rho S_\rho^\rho , \quad (2.9)$$

$$\nu_{,z}(z = 0^+) = 2\pi(S_\rho^\rho + S_\phi^\phi - 2\omega S_\phi^t - S_t^t) , \quad (2.10)$$

$$\omega_{,z}(z = 0^+) = -\frac{8\pi e^{4\nu} S_\phi^t}{B^2 \rho^2} , \quad (2.11)$$

$$\zeta_{,z}(z = 0^+) = 4\pi(S_\phi^\phi - \omega S_\phi^t) . \quad (2.12)$$

Plošný tenzor energie a hybnosti má tedy za předpokladu tenkého disku bez radiálního tlaku (tj. navíc položíme $S_\rho^\rho = 0$) pouze 3 nenulové složky (S_t^t , S_ϕ^t , S_ϕ^ϕ) reprezentující plošnou hustotu energie, hustotu momentu hybnosti a hustotu azimutálního tlaku. Je-li $(S_\phi^\phi)^2 + 4S_\phi^t S_t^t \geq 0$, můžeme plošný tenzor energie a hybnosti diagonalizovat. Označíme-li σ resp. P vlastní čísla příslušející vlastním ortogonálním vektorům u^μ resp. w^μ , pak

$$S^{\mu\nu} = \sigma u^\mu u^\nu + P w^\mu w^\nu , \quad (2.13)$$

kde u^μ odpovídá již zavedené čtyř-rychlosti (2.2) a w^μ na ni kolmému vektoru ležícímu v rovině (t, ϕ) , tj.

$$w^\mu = \frac{1}{\rho B}(u_\phi, 0, 0, -u_t), \quad w_\alpha = \rho B(-u^\phi, 0, 0, u^t) . \quad (2.14)$$

Látku disku můžeme tedy interpretovat jako ideální tekutinu s plošnou hustotou energie σ a azimutálním tlakem P . Konkrétně pro nenulové složky plošného tenzoru energie hybnosti máme

$$S_t^t = -\sigma - (\sigma + P)u^\phi u_\phi , \quad S_\phi^t = (\sigma + P)u^t u_\phi , \quad S_\phi^\phi = P + (\sigma + P)u^\phi u_\phi . \quad (2.15)$$

Einsteinovy rovnice (1.15) až (1.20) (resp. (1.22) až (1.27)) nyní můžeme vyjádřením plošného tenzoru energie a hybnosti v řeči parametrů disku zapsat do finálního tvaru. Uvažme, že při volbě B (1.21) je první z rovnic triviálně splněná a vynechme závislou rovnici (1.18) (resp. (1.27)), potom

$$(r^2\nu_{,r})_{,r} + r^2\nu_{,r}(\ln B)_{,r} + \nu_{,\theta\theta} + \nu_{,\theta} \cot \theta = \frac{B^2 r^2}{2e^{4\nu}} \sin^2 \theta \left[r^2(\omega_{,r})^2 + (\omega_{,\theta})^2 \right] + 4\pi r^2(\sigma + P) \frac{1+v^2}{1-v^2} \delta(z) , \quad (2.16)$$

$$r^2\omega_{,rr} + 4r\omega_{,r}(1 - r\nu_{,r}) + 3r^2\omega_{,r}(\ln B)_{,r} + \omega_{,\theta\theta} + 3\omega_{,\theta} \cot \theta - 4\omega_{,\theta}\nu_{,\theta} = -\frac{16\pi r e^{2\nu}}{B \sin \theta} (\sigma + P) \frac{v}{1-v^2} \delta(z) , \quad (2.17)$$

$$(2 - B)r\zeta_{,r} - B\zeta_{,\theta} \cot \theta = B \left[r^2(\nu_{,r})^2 - (\nu_{,\theta})^2 \right] + 2B - 2 - \frac{1}{4} B^3 r^2 e^{-4\nu} \sin^2 \theta \left[r^2(\omega_{,r})^2 - (\omega_{,\theta})^2 \right] , \quad (2.18)$$

$$Br\zeta_{,r} \cot \theta + (2 - B)\zeta_{,\theta} = 2Br\nu_{,r}\nu_{,\theta} + 2(1 - B) \cot \theta - \frac{1}{2} B^3 r^3 e^{-4\nu} \omega_{,r}\omega_{,\theta} \sin^2 \theta . \quad (2.19)$$

2.1 Kontra-rotující interpretace disku

Podmínka stacionarity na disk fyzikálně znamená rovnováhu gravitačního, vztlakového a setrvačného působení na elementy disku. Pro ekvatoriální disk je toto působení vždy jen v radiálním směru. Interpretovat protiváhu gravitace můžeme standardně dvěma způsoby - představa disku jako pevného tělesa (soustava tuhých „obručí“) nebo jako nekoherentní směsi azimutálních proudů. Druhý přístup je v astrofyzikálním kontextu obvyklejší.

Budeme uvažovat dva neinteragující proudy pohybující se po kruhových drahách v opačných azimutálních směrech. Jestliže neuvažujeme radiální tlak ($S_\rho^\rho = 0$), jsou tyto orbity geodetikami a plošný tenzor energie hybnosti má tvar

$$S^{\mu\nu} = \sigma_+ u_+^\mu u_+^\nu + \sigma_- u_-^\mu u_-^\nu , \quad (2.20)$$

kde znaménkem $+, -$ značíme kladný resp. záporný směr souřadnice ϕ a pro uvedené čtyřrychlosti platí

$$u_\pm^\mu = u_\pm^t (1, 0, 0, \Omega_\pm) . \quad (2.21)$$

Příslušné čtyřzrychlení je dáno

$$\begin{aligned} a_\mu \equiv u_{\mu;\nu} u^\nu &= -\Gamma_{\alpha\mu\beta} u^\alpha u^\beta = -\frac{1}{2} (g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\beta\alpha,\mu} - g_{\mu\beta,\alpha}) u^\alpha u^\beta = \\ &= -\frac{1}{2} g_{\beta\alpha,\mu} u^\alpha u^\beta = -\frac{1}{2} (u^t)^2 (g_{tt,\mu} + 2g_{t\phi,\mu}\Omega + g_{\phi\phi,\mu}\Omega^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{g_{tt,\mu} + g_{t\phi,\mu}\Omega + g_{\phi\phi,\mu}\Omega^2}{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2} . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Složky zrychlení a_t , a_ϕ jsou patrně nulové vždy, a jelikož jsou složky metriky $g_{\mu\nu}$ sudé v z , je v ekvatoriální rovině nulová i a_z . Kruhové geodetiky jsou tedy

podmíněny rovnicí $a_\rho(z=0) = 0$, neboli

$$\Omega_\pm = -\frac{g_{t\phi,\rho}}{g_{\phi\phi,\rho}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi,\rho}}{g_{\phi\phi,\rho}}\right)^2 - \frac{g_{tt,\rho}}{g_{\phi\phi,\rho}}} . \quad (2.23)$$

Vzhledem k tomu, že platí $g_{t\phi,\rho} = -g_{\phi\phi,\rho}\omega - g_{\phi\phi}\omega_{,\rho}$ a $g_{tt,\rho} = -2\nu_{,\rho}e^{2\nu} + g_{\phi\phi,\rho}\omega^2 + 2B^2\rho^2e^{-2\nu}\omega_{,\rho}\omega$, můžeme (2.23) upravit

$$\Omega_\pm = \omega + \frac{g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi,\rho}}\omega_{,\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi,\rho}}\right)^2\omega_{,\rho}^2 + \frac{2\nu_{,\rho}e^{2\nu}}{g_{\phi\phi,\rho}}} , \quad (2.24)$$

kde

$$g_{\phi\phi} = B^2\rho^2e^{-2\nu} \quad \Rightarrow \quad g_{\phi\phi,\rho} = 2B\rho e^{-2\nu}(\rho B_{,\rho} + B - B\rho\nu_{,\rho}) \quad (2.25)$$

se všemi funkcemi vyčíslenými v $z=0$.

Kontra-rotující interpretace je možná pouze pokud je výraz pod odmocninou v (2.24) nezáporný. V opačném případě neexistuje žádná hodnota Ω , kterou by částice disku mohly volně obíhat. Fyzikálně taková situace nastává, je-li příliš mnoho hmoty koncentrováno na velkých poloměrech – částice jsou pak „odpuzovány ven“.

Vztahy mezi kontra-rotující a jednoproudou interpretací dostaneme porovnáním (2.13) a (2.20), tedy

$$\sigma u^\mu u^\nu + P w^\mu w^\nu = \sigma_+ u_+^\mu u_+^\nu + \sigma_- u_-^\mu u_-^\nu . \quad (2.26)$$

Například ze stopy S_ν^ν dostaneme ihned vztah

$$\sigma - P = \sigma_+ + \sigma_- . \quad (2.27)$$

2.2 Významné kruhové orbity

Nejdůležitějšími kruhovými orbitami jsou – fotonová orbita, mezní stabilní orbita (*innermost stable circular orbit* tzv. ISCO) a mezní vázaná orbita. Z definičních vztahů těchto významných orbit odvodíme rovnice, které musí splňovat a jejich řešením posléze nalezneme poloměr oběhu.

2.2.1 Fotonová orbita

Fotonová orbita je jediná kruhová orbita, po které mohou obíhat nehmotné částice. Zároveň tak definuje nejmenší poloměr jakýchkoliv (stabilních i nestabilních) časupodobných kruhových orbit. Již víme, že se kruhová orbita může nacházet pouze v ekvatoriální rovině $z=0$, pak ale $dz=0$ a pro světlo obíhající na konstantním poloměru, tj. $ds=0$ a $d\rho=0$, platí z metriky (1.1)

$$0 = g_{tt} + g_{\phi\phi}\Omega^2 + 2g_{t\phi}\Omega , \quad (2.28)$$

neboli

$$\Omega_{\pm} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} . \quad (2.29)$$

Tento výraz se po dosazení za metrické funkce $g_{tt} = -e^{2\nu} - g_{\phi\phi}\omega^2$, $g_{\phi\phi} = B^2\rho^2e^{-2\nu}$ a $g_{t\phi} = -g_{\phi\phi}\omega$ dále zjednoduší na

$$\Omega_{\pm} = \omega \pm \frac{e^{2\nu}}{B\rho} , \quad (2.30)$$

přičemž všechny funkce se myslí vyčísleny v $z = 0$.

2.2.2 Mezní stabilní orbita (ISCO)

Mezní stabilní orbita je orbitou s nejmenším možným poloměrem takovým, aby na něm mohly hmotné částice vykonávat stabilní kruhový pohyb. Jakýkoliv kruhový pohyb pod tímto poloměrem je již nutně nestabilní. ISCO je dána podmínkou nulovosti radiální derivace momentu hybnosti vůči nekonečnu, tedy v ekvatoriální rovině $u_{\phi,\rho} = 0$. Jelikož z (2.2) víme

$$u_{\phi} = B\rho v u^t = B\rho \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} e^{-\nu} , \quad (2.31)$$

je ISCO podmíněna rovnicí

$$B\rho \frac{v_{,\rho}}{v} = (v^2 - 1)(\rho B_{,\rho} + B - B\rho v_{,\rho}) . \quad (2.32)$$

2.2.3 Mezní vázaná orbita

Mezní vázaná orbita reprezentuje nejmenší poloměr kruhové orbity takový, aby byla energeticky vázaná v poli černé díry s diskem. Charakterizuje ji podmínka $u_t = -1$. Podle (2.2) máme

$$-1 = u_t = -u^t e^{2\nu} - u^t B\rho\omega v \quad (2.33)$$

a po dosazení za v (2.4) a vyjádření Ω

$$\Omega_{\pm} = \omega - e^{2\nu}\omega + B^2\rho^2\omega^3 - \frac{B^4\rho^4\omega^5}{e^{2\nu} + B^2\rho^2\omega^2} \pm e^{3\nu} \frac{\sqrt{B^2\rho^2\omega^2 - e^{4\nu} + e^{2\nu}}}{B\rho(e^{2\nu} + B^2\rho^2\omega^2)} \quad (2.34)$$

2.2.4 Statický případ

Ve statickém případě (neboli $\omega = 0$) se rovnice (2.24) značně zjednoduší a porovnáním s výsledky výše po pár úpravách máme pro fotonovou orbitu, ISCO a mezní vázanou orbitu postupně

$$0 = 2B\rho\nu_{,\rho} - \rho B_{,\rho} - B \quad (2.35)$$

$$0 = B\rho(B + B_{,\rho\rho})\frac{\nu_{,\rho\rho}}{\nu_{,\rho}} + 3B_{,\rho}^2 + 3B^2 - B\rho B_{,\rho\rho\rho} + 4BB_{,\rho\rho} - 2B\rho\nu_{,\rho}(3B - 2B\rho\nu_{,\rho} + 3B_{,\rho\rho}) \quad (2.36)$$

$$0 = \nu_{,\rho}B\rho - (1 - e^{2\nu})(\rho B_{,\rho} + B - B\rho\nu_{,\rho}) \quad (2.37)$$

Tyto rovnice lze snadno vyřešit například pro Schwarzschildovu metriku. V izotropických souřadnicích máme

$$\nu = \ln \frac{2r - M}{2r + M}, \quad \zeta = \ln \left(1 - \frac{M^2}{4r^2}\right), \quad B = 1 - \frac{M^2}{4r^2}, \quad \omega = 0. \quad (2.38)$$

V ekvatoriální rovině je $r = \rho$ a pod dosazení vychází dobře známé hodnoty¹

$$r_{\text{foton}} = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})M, \quad r_{\text{ISCO}} = \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{6})M, \quad r_{\text{vázaná}} = \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2})M. \quad (2.39)$$

2.3 Perturbační schéma

Budeme hledat řešení polních rovnic ve tvaru nekonečné řady jako v [4, 3]

$$\nu = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j \lambda^j, \quad \omega = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \lambda^j, \quad \zeta = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j \lambda^j, \quad (2.40)$$

přičemž koeficienty ν_j , ω_j , ζ_j jsou funkcemi pouze r a θ (resp. ρ a z) a λ je bezrozměrný parametr související s poměrem mezi hmotností disku a černé díry způsobem

$$(\sigma + P)\delta(z) \equiv \lambda\Sigma(\rho)\delta(z) = \lambda\Sigma(r)\frac{1}{r}\delta(\cos\theta). \quad (2.41)$$

Budeme vycházet ze Schwarzschildovy metriky

$$ds^2 = - \left(\frac{2r - M}{2r + M}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.42)$$

neboli položíme

$$\nu_0 = \ln \frac{2r - M}{2r + M}, \quad \omega_0 = 0, \quad \zeta_0 = \ln \left(1 - \frac{M^2}{4r^2}\right) \quad (2.43)$$

¹Respektive známé jsou tyto hodnoty vyjádřené ve schwarzschildově radiální souřadnici $R = r \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^2$, ve které poloměry (2.38) nabývají

$$R_{\text{foton}} = 3M, \quad R_{\text{ISCO}} = 6M, \quad R_{\text{vázaná}} = 4M.$$

a korespondující rychlosti

$$\Omega_0 = \frac{8\sqrt{Mr^3}}{(2r+M)^3}, \quad v_0 = \frac{2\sqrt{Mr}}{2r-M}. \quad (2.44)$$

Dosazením (2.40) do (2.16), (2.17) a odečtením schwarzschildovských členů dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \nabla \cdot (B \nabla \nu_k) = \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^k \left\{ \frac{(2r+M)^7 \sin^2 \theta}{2^7 r^4 (2r-M)} \sum_{l=0}^{k-2} \left[\exp \left(-4 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \nu_j \right) \right]_l \right. \\ \left. \sum_{m=1}^{k-l-1} \nabla \omega_m \cdot \nabla \omega_{k-l-m} \right\} + 4\pi \frac{B}{r} \Sigma \delta(\cos \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \left[\frac{1+v^2}{1-v^2} \right]_k, \quad (2.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \nabla \cdot \left\{ \frac{(2r+M)^7 \sin^2 \theta}{2^6 r^4 (2r-M)} \nabla \omega_k \right\} = \\ - \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^k \sum_{l=1}^{k-1} \nabla \cdot \left\{ \frac{(2r+M)^7 \sin^2 \theta}{2^6 r^4 (2r-M)} \left[\exp \left(-4 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \nu_j \right) \right]_{k-l} \nabla \omega_l \right\} - \\ - 16\pi \left(1 + \frac{M}{2r} \right)^4 \Sigma \delta(\cos \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \left[\frac{v}{1-v^2} \right]_k, \quad (2.46) \end{aligned}$$

kde $[f]_k$ značí k -tý koeficient Taylorova rozvoje funkce f . Ukazuje se, že vlastními funkcemi v proměnné θ operátoru na levé straně rovnice (2.45) jsou Legendreovy polynomy $P_l(\cos \theta)$ a podobně u rovnice (2.46) to jsou Gegenbauerovy polynomy $C_l^{(3/2)}(\cos \theta)$. Můžeme tak psát

$$\nu_l = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_{lj}(x) P_j(\cos \theta), \quad \omega_l = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{lj}(x) C_j^{(3/2)}(\cos \theta), \quad (2.47)$$

přičemž jsme zavedli bezrozměrnou radiální souřadnici

$$x = \frac{r}{M} + \frac{M}{4r}. \quad (2.48)$$

Dosazením (2.47) do (2.45) a (2.46) máme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dx} \left[(x^2 - 1) \frac{d\nu_{lj}}{dx} \right] - j(j+1)\nu_{lj} \right\} P_j(\cos \theta) = R_l(x, \theta), \quad (2.49)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ (x^2 - 1) \frac{d}{dx} \left[(x+1)^4 \frac{d\omega_{lj}}{dx} \right] - (x+1)^4 j(j+3)\omega_{lj} \right\} C_j^{3/2}(\cos \theta) = S_l(x, \theta), \quad (2.50)$$

kde R_l a S_l značí, až na faktor nezávislý na l , koeficienty rozvoje pravé strany rovnic (2.45) a (2.46). Předpokládáme-li regularitu obou funkcí na ose (tj. v $\theta = 0$ nebo π), můžeme je též rozvést

$$R_l(x, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} R_{lj}(x) P_j(\cos \theta) , \quad S_l(x, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} S_{lj}(x) C_l^{(3/2)}(\cos \theta) . \quad (2.51)$$

Dostáváme tedy systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{d}{dx} \left[(x^2 - 1) \frac{d\nu_{lj}}{dx} \right] - j(j+1)\nu_{lj} = R_{lj} , \quad (2.52)$$

$$(x^2 - 1) \frac{d}{dx} \left[(x+1)^4 \frac{d\omega_{lj}}{dx} \right] - (x+1)^4 j(j+3)\omega_{lj} = S_{lj} \quad (2.53)$$

pro $l \in \mathbb{N}$ a $j \in \mathbb{Z}_0^+$. V následující kapitole popíšeme možné řešení těchto rovnic, jak jej odvodili v [4].

KAPITOLA 3

ŘEŠENÍ EINSTEINOVÝCH ROVNIC METODOU GREENOVÝCH FUNKCÍ

Tato kapitola bude věnována shrnutí hlavních výsledků článku [4] řešení rovnic (2.52) a (2.53).

Již [3] ukázal, že řešení homogenních rovnic (2.52) a (2.53) lze vyjádřit pomocí Greenových funkcí ve tvaru

$$\mathcal{G}^\nu(x, \theta, x', \theta') = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+1}{2} P_j(\min(x, x')) Q_j(\max(x, x')) P_j(\cos \theta) P_j(\cos \theta') , \quad (3.1)$$

$$\mathcal{G}^\omega(x, \theta, x', \theta') = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+3}{2(j+1)(j+2)} F_j(\min(x, x')) G_j(\max(x, x')) C_j^{(3/2)}(\cos \theta) C_j^{(3/2)}(\cos \theta') , \quad (3.2)$$

přičemž P_j , Q_j značí Legendreovy polynomy prvního a druhého druhu a

$$F_j(x) = {}_2F_1 \left(-j, j+3; 4; \frac{x+1}{2} \right) , \quad (3.3)$$

$$G_j(x) = F_j(x) \int_x^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi+1)^4 [F_j(\xi)]^2} , \quad (3.4)$$

kde ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$ je Gaussova hypergeometrická funkce.

Pro poruchu řádu l potom platí

$$\nu_l(x, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_{lj}(x) P_j(\cos \theta) = \int_1^{\infty} \int_{-1}^1 R_l(x', \theta') \mathcal{G}^\nu(x, \theta, x', \theta') dx' d(\cos \theta') , \quad (3.5)$$

$$\omega_l(x, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{lj}(x) C_j^{(3/2)}(\cos \theta) = \int_1^{\infty} \int_{-1}^1 S_l(x', \theta') \mathcal{G}^\omega(x, \theta, x', \theta') dx' d(\cos \theta') . \quad (3.6)$$

Vyjádření Greenových funkcí jako nekonečné sumy má však několik nevýhod spojených s konvergencí. Ukazuje se, že kombinace speciálních funkcí jako v (3.1) a (3.2) sice konverguje exponenciálně ve větších radiálních vzdálenostech než je vnější okraj disku, avšak ve vzdálenostech srovnatelných s polohou disku je konvergence pouze polynomiální (jako j^{-1}). Abychom dostali rozumné chování metrických funkcí bez výrazných oscilací, je třeba sečíst mnoho členů řady a další manipulace s těmito výsledky je tak značně nesnadná. Má tudíž význam vyjádřit Greenovy funkce v uzavřeném tvaru, což je hlavní výtěžek článku [4].

3.1 Greenova funkce pro potenciál

Označíme-li $a = \max(x, x')$, $u = \min(x, x')$, $v = \cos \theta$, $w = \cos \theta'$, ukazuje se, že platí [9, 4]

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) Q_j(a) P_j(u) P_j(v) P_j(w) = \frac{2K \left[\sqrt{\frac{4\sqrt{(a^2-1)(u^2-1)(1-v^2)(1-w^2)}}{(au-vw)^2 - \left(\sqrt{(a^2-1)(u^2-1)} - \sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}\right)^2}} \right]}{\pi \sqrt{(au-vw)^2 - \left(\sqrt{(a^2-1)(u^2-1)} - \sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}\right)^2}}, \quad (3.7)$$

kde $K(k)$ je úplný eliptický integrál 1. druhu (viz. ke konvenci v dodatku). To znamená pro Greenovu funkci potenciálu

$$\mathcal{G}^\nu(x, \theta, x', \theta') = \frac{K \left[\sqrt{\frac{4\sqrt{(x^2-1)(x'^2-1)} \sin \theta \sin \theta'}{(xx' - \cos \theta \cos \theta')^2 - \left(\sqrt{(x^2-1)(x'^2-1)} - \sin \theta \sin \theta'\right)^2}} \right]}{\pi \sqrt{(xx' - \cos \theta \cos \theta')^2 - \left(\sqrt{(x^2-1)(x'^2-1)} - \sin \theta \sin \theta'\right)^2}}. \quad (3.8)$$

Všimněme si nyní, že v Einsteinově rovnici (1.16) vystupuje dragging ω v druhé mocnině a výchozí prostoročas je Schwartzchildův, tedy statický. To znamená, že korekce od členu $(\nabla\omega)^2$ je až druhého řádu $\mathcal{O}(\lambda^2)$ a nepřispívá tudíž k lineární perturbaci potenciálu. Jinak řečeno, do lineárního řádu zůstává rovnice (1.16) resp. (2.16) shodná se statickým případem, pro který je řešení známo. Podotkněme, že díky tomu tak v izotropických souřadnicích zůstává horizont stále na $r = M/2$, tj. $x = 1$.

3.2 Greenova funkce pro dragging

Greenova funkce pro dragging vypadá následovně [4]

$$\mathcal{G}^\omega(x, \theta, x', \theta') = -\frac{2}{(x+1)^3(x'+1)^3} - \sum_{k=0}^5 \mathcal{P}_k(x', \theta') \mathcal{I}_k(x', \theta'), \quad (3.9)$$

kde

$$\mathcal{P}_0(x', \theta') = -\frac{2}{\pi(x+1)^3(x'+1)^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta'}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{P}_1(x', \theta') = -\frac{(x-1)(x'-1)}{\pi(x+1)^3(x'+1)^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta'}, \quad (3.11)$$

$$\mathcal{P}_2(x', \theta') = \frac{2xx' + (x-1)(x'-1)}{\pi(x+1)^3(x'+1)^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta'}, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{P}_3(x', \theta') = -\frac{2}{\pi(x+1)^3(x'+1)^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta'}, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{P}_4(x', \theta') = \frac{(x'-1)(x-1)(x'+x)}{\pi(x+1)^3(x'+1)^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta'}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{P}_5(x', \theta') = \frac{(x-1)(x'-1)}{2\pi(x+1)(x'+1) \sin^2 \theta \sin^2 \theta'}. \quad (3.15)$$

a

$$\mathcal{I}_0(x', \theta') = \frac{\pi}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta', \quad (3.16)$$

$$\mathcal{I}_1(x', \theta') = \pi(1 - |\cos \theta|)(1 - \cos \theta'), \quad (3.17)$$

$$\mathcal{I}_2(x', \theta') = \sqrt{\frac{a_{31}}{a_{42}}} \left[-a_{41}K(k) - a_{42}E(k) + a_{41} \left(1 + \frac{a_{42}}{a_{31}} \right) \Pi \left(-\frac{a_{43}}{a_{31}}, k \right) \right], \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3(x', \theta') = & \frac{a_{41}}{4} \sqrt{\frac{a_{31}}{a_{42}}} \left[-(s_{21} + s_{43} + 2a_{21})K(k) + \frac{a_{42}}{a_{41}}(s_{43} - 3s_{21})E(k) + \right. \\ & \left. + \frac{a_{21}^2 - a_{43}^2 + 2s_{21}^2 - 2s_{21}s_{43}}{a_{31}} \Pi \left(-\frac{a_{43}}{a_{31}}, k \right) \right], \quad (3.19) \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_4(x', \theta') = \frac{2a_{41}}{\sqrt{a_{31}a_{42}}} \left[-\frac{K(k)}{a_1 + 1} + \Pi \left(-\frac{a_{43}}{a_{31}}, k \right) - \frac{a_3 + 1}{a_1 + 1} \Pi \left(-\frac{(a_1 + 1)a_{43}}{(a_4 + 1)a_{31}}, k \right) \right], \quad (3.20)$$

$$\mathcal{I}_5(x', \theta') = \frac{\sqrt{a_{31}a_{42}}}{a_{21}^2} \left[(4 - 2k^2)K(k) - 4E(k) \right], \quad (3.21)$$

přičemž

$$\begin{aligned} a_1 &= xx' + \sqrt{(x^2 - 1)(x'^2 - 1)}, & a_2 &= xx' - \sqrt{(x^2 - 1)(x'^2 - 1)} \\ a_3 &= \cos(\theta - \theta'), & a_4 &= \cos(\theta + \theta'), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$a_{ij} = a_j - a_i, \quad s_{ij} = a_j + a_i, \quad k = \sqrt{\frac{a_{21}a_{43}}{a_{31}a_{42}}}. \quad (3.23)$$

Symbole $K(k)$, $E(k)$ a $\Pi(n, k)$ označují úplné eliptické integrály 1., 2. resp. 3. druhu.

Poznamenejme, že na horizontu (tj. $x = 1$) nabývá Greenova funkce tvaru nezávislém na θ

$$\mathcal{G}^\omega(x = 1, \theta, x', \theta') = -\frac{1}{4(x' + 1)^3}. \quad (3.24)$$

To je přesně ve shodě s tím, že na stacionárním horizontu je $\omega = \text{konst} = \omega_H$.

3.3 Řešení pro disk s konstantní hustotou v lineárním řádu

Nalezené Greenovy funkce nyní můžeme použít k vyřešení konkrétního systému. Budeme předpokládat infinitesimálně tenký stacionární a axiálně symetrický disk v ekvatoriální rovině ($z = 0$) vně centrální černé díry mezi dvěma konečnými poloměry $1 < x_{\text{in}} \leq x \leq x_{\text{out}}$ (připomínáme souvislost s izotropní radiální souřadnicí r dle (2.48)).

Předpokládáme též jen malou odlišnost od počátečního statického případu a v následujícím popíšeme lineární perturbaci potenciálu ν_1 a draggingu ω_1 .

3.3.1 Gravitační potenciál

V případě potenciálu můžeme místo integrace Greenovy funkce využít již známého výsledku z klasické teorie pole. Jak jsme již uváděli v poznámce u Greenovy funkce \mathcal{G}^ν , je potenciál ν v lineárním řádu nezávislý na draggingu ω . Při volbě $B = 1$ tak přechází rovnice (2.45) na Poissonovu rovnici, kterou lze již standardně vyřešit. Řešení odvozené např. v [10] popisující disk od počátku soustavy souřadnic ($x = 0$) do konečné vzdálenosti x' s konstantní newtonovskou hustotou S má tvar

$$\begin{aligned} V(x', x, \theta) = & 2\pi M S x |\cos \theta| H(x'^2 - \cos^2 \theta - x^2 \sin^2 \theta) - \\ & - \frac{2MS}{\sqrt{a_{31}a_{42}}} \left\{ a_{31}a_{42}E(k) + (x'^2 - \cos^2 \theta - x^2 \sin^2 \theta)K(k) + \right. \\ & \left. + \frac{(a_{41}a_{32} - x^2 \cos^2 \theta)x^2 \cos^2 \theta}{x'^2 - \cos^2 \theta - x^2 \sin^2 \theta} \Pi \left[\frac{4\sqrt{(x'^2 - 1)(x^2 - 1)} \sin \theta}{a_{42}a_{31} - x^2 \cos^2 \theta}, k \right] \right\}, \quad (3.25) \end{aligned}$$

přičemž $H(x)$ značí Heavisideovu funkci a $a_{ij}(x')$, $k(x')$ jsou dány (3.22) a (3.23) vyčíslenými v $\theta' = \frac{\pi}{2}$, tedy

$$\begin{aligned} a_1(x') &= xx' + \sqrt{(x^2 - 1)(x'^2 - 1)}, & a_2(x') &= xx' - \sqrt{(x^2 - 1)(x'^2 - 1)}, \\ a_3(x') &= \sin \theta, & a_4(x') &= -\sin \theta, & a_{ij}(x') &= a_j(x') - a_i(x'), \\ k^2(x') &= \frac{2a_{21} \sin \theta}{a_{31}a_{42}} = \frac{4 \sin \theta \sqrt{(x^2 - 1)(x'^2 - 1)}}{x^2 x'^2 - \left[\sqrt{(x^2 - 1)(x'^2 - 1)} - \sin \theta \right]^2}. \quad (3.26) \end{aligned}$$

Potenciál disku ležícím mezi dvěma konečnými poloměry $x_{\text{in}} \leq x \leq x_{\text{out}}$ je potom dán rozdílem

$$\nu_1(x, \theta) = V(x_{\text{out}}, x, \theta) - V(x_{\text{in}}, x, \theta) . \quad (3.27)$$

3.3.2 Dragging

Lineární perturbaci draggingu ω určíme přímou integrací přes oblast disku s konstantní hodnotou „hustoty“ W ,

$$\omega_1(x, \theta) = - \int_{x_{\text{in}}}^{x_{\text{out}}} W \mathcal{G}^\omega(x, \theta, x', \pi/2) dx' . \quad (3.28)$$

Řešení nalezené v [4] má tvar

$$\begin{aligned} \omega_1(x, \theta) = & W \frac{(x_{\text{out}} - x_{\text{in}})(x_{\text{out}} + x_{\text{in}} + 2)}{(x + 1)^3(x_{\text{in}} + 1)^2(x_{\text{out}} + 1)^2} + \\ & + W \sum_{j=0}^7 \left[Q_j(x_{\text{out}}, \theta) I_j(x_{\text{out}}, \theta) - Q_j(x_{\text{in}}, \theta) I_j(x_{\text{in}}, \theta) \right] , \end{aligned} \quad (3.29)$$

kde

$$\begin{aligned} Q_0(x') &= \frac{1}{\pi(x+1)^3(x'+1)^2 \sin^2 \theta} , & Q_1(x') &= \frac{(1-x)(x'-1)^2}{4\pi(x+1)^3(x'+1)^2 \sin^2 \theta} , \\ Q_2(x') &= \frac{x'(1-2x)}{\pi(x+1)^3(x'+1)^2 \sin^2 \theta} , & Q_3(x') &= \frac{1}{\pi(x+1)^3(x'+1)^2 \sin^2 \theta} , \\ Q_4(x') &= \frac{(x+x')(x-1)(x'-1)^2}{4\pi(x+1)^3(x'+1)^2 \sin^2 \theta} , & Q_5(x') &= 0 , \\ Q_6(x') &= \frac{1-x}{4\pi(x+1)^3 \sin^2 \theta} , & Q_7(x') &= \frac{(1-x)(x'-x)}{4\pi(x+1)^3 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (3.30)$$

a

$$\begin{aligned} I_0(x') &= \frac{\pi}{2} \sin^2 \theta , \\ I_1(x') &= \pi(1 - |\cos \theta|) , \\ I_2(x') &= \sqrt{\frac{a_{31}}{a_{42}}} \left[-a_{41} K(k) - a_{42} E(k) + 2xx' \frac{a_{41}}{a_{31}} \Pi \left(-\frac{2 \sin \theta}{a_{31}}, k \right) \right] , \\ I_3(x') &= \frac{a_{41}}{4} \sqrt{\frac{a_{31}}{a_{42}}} \left[(a_2 - 3a_1) K(k) - 6xx' \frac{a_{42}}{a_{41}} E(k) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{a_{21}^2 - a_{43}^2 + 8x^2 x'^2}{a_{31}} \Pi \left(-\frac{2 \sin \theta}{a_{31}}, k \right) \right] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4(x') &= \frac{2a_{41}}{\sqrt{a_{31}a_{42}}} \left\{ -\frac{a_{31}}{a_1 + 1} K(k) + \Pi \left(-\frac{2 \sin \theta}{a_{31}}, k \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1 + \sin \theta}{a_1 + 1} \Pi \left[-\frac{2 \sin \theta (a_1 + 1)}{a_{31}(1 - \sin \theta)}, k \right] \right\}, \\
I_5(x') &= \frac{\sqrt{a_{31}a_{42}}}{4(x^2 - 1)(x'^2 - 1)} [(4 - 2k^2)K(k) - 4E(k)], \\
I_6(x') &= \pi(|\cos \theta| - 1), \\
I_7(x') &= \frac{2a_{41}}{\sqrt{a_{31}a_{42}}} \left\{ -\frac{a_{31}}{a_1 - 1} K(k) + \Pi \left(-\frac{2 \sin \theta}{a_{31}}, k \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 - \sin \theta}{a_1 - 1} \Pi \left[\frac{2 \sin \theta (a_1 - 1)}{a_{31}(1 + \sin \theta)}, k \right] \right\},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

přičemž $a_{ij}(x')$ a $k(x')$ jsou definovány stejně jako v (3.26).

Dodejme, že výše uvedená lineární perturbace ω_1 dává zároveň celkovou hodnotu draggingu ω , jelikož vycházíme ze statického prostoročasu (tedy $\omega_0 = 0$).

KAPITOLA 4

VLASTNOSTI ŘEŠENÍ

V této kapitole podrobněji prozkoumáme vlastnosti nalezeného řešení. Nejprve shrneme a ověříme některé výsledky odvozené již v [4] (jmenovitě chování metrických funkcí a Komarovy integrály). Zároveň se navíc podíváme, jakým způsobem přítomnost disku deformuje horizont a posunuje polohu významných kruhových orbit.

4.1 Chování metrických funkcí

Pro ilustraci vezmeme konkrétní příklad disku mezi poloměry $\rho_{\text{in}} = 5M$ a $\rho_{\text{out}} = 8M$. Na obr. 4.1 je vykreslen průběh gravitačního potenciálu daný součtem schwarzschildovského členu ν_0 podle (2.43) a lineární perturbace ν_1 podle (3.25). Na obr. 4.2 je průběh draggingu ω daný čistě lineární perturbací ω_1 podle (3.29).

Vzhledem k axiální a zrcadlové symetrii existují dva významné směry, ve kterých by se metrické koeficienty mohly zjednodušit – osa ($\theta = 0$) a ekvatoriální rovina ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Na ose je $a_3 = a_4 = k = 0$ a eliptické integrály se redukují na $\frac{\pi}{2}$. Lineární perturbaci potenciálu (3.25) tak můžeme upravit do tvaru

$$\nu_1(x, \theta = 0) = -2\pi MS \left(\sqrt{x^2 + x_{\text{out}}^2 - 1} - \sqrt{x^2 + x_{\text{in}}^2 - 1} \right). \quad (4.1)$$

V ekvatoriální rovině je $a_3 = 1$, $a_4 = -1$ a ze vztahu pro lineární perturbaci potenciálu vypadne člen se třetím eliptickým integrálem, zbude tedy

$$\nu_1 \left(x, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = -2MS \left[\sqrt{(a_1 - 1)(a_2 + 1)} E(k) + \frac{(x'^2 - x^2)}{\sqrt{(a_1 - 1)(a_2 + 1)}} K(k) \right]_{x_{\text{in}}}^{x_{\text{out}}} \quad (4.2)$$

Na horizontu ($x = 1$) je $a_1 = x'$, $a_2 = x'$ a $k = 0$ a eliptické integrály se opět redukují na $\frac{\pi}{2}$. Po úpravách tak dostaneme

$$\nu_1(x = 1, \theta) = 2\pi MS \left(\sqrt{x_{\text{in}}^2 - \sin^2 \theta} - \sqrt{x_{\text{out}}^2 - \sin^2 \theta} \right). \quad (4.3)$$

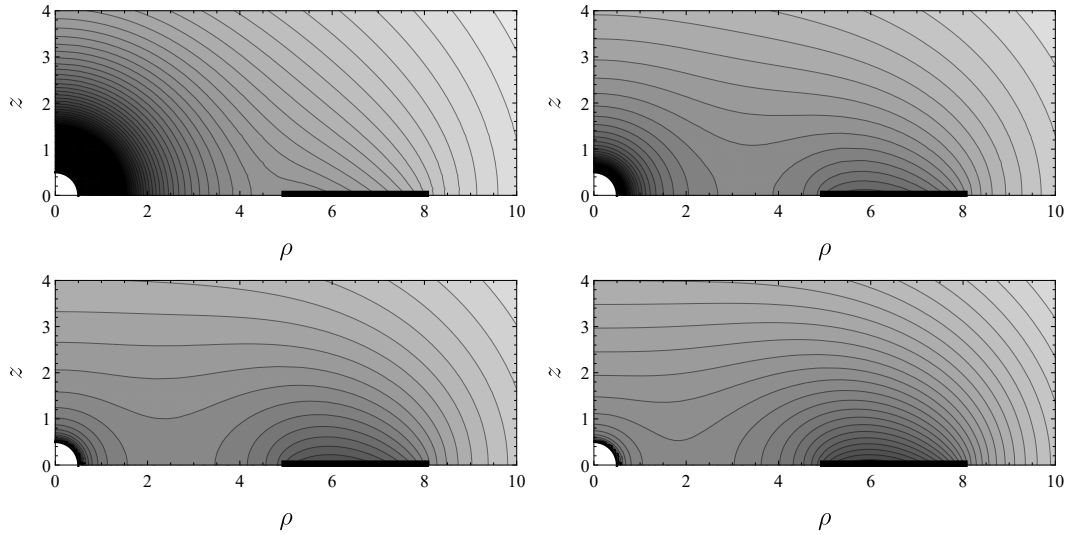
Lineární perturbace draggingu ω_1 se na ose ani v ekvatoriální rovině nezjednoduší tak výrazně jako u potenciálu. Avšak na horizontu by měla nabývat konstantní hodnoty ω_H . Skutečně při $x = 1$ stejně jako u potenciálu vymizí k a a_1, a_2 se redukuje na x' . V sumě (3.29) se tak rovnou nulují členy Q_1I_1, Q_4I_4, Q_5I_5 (tento člen je nulový vždy), Q_6I_6 i Q_7I_7 . Zbylé nenulové členy lze za použití identity

$$\Pi(t, 0) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-t}} \quad (4.4)$$

upravit do tvaru

$$\omega_H = -\frac{W}{8} \frac{x_{\text{in}}^2 - x_{\text{out}}^2 + 2x_{\text{in}} - 2x_{\text{out}}}{(1+x_{\text{in}})^2(1+x_{\text{out}})^2} \quad (4.5)$$

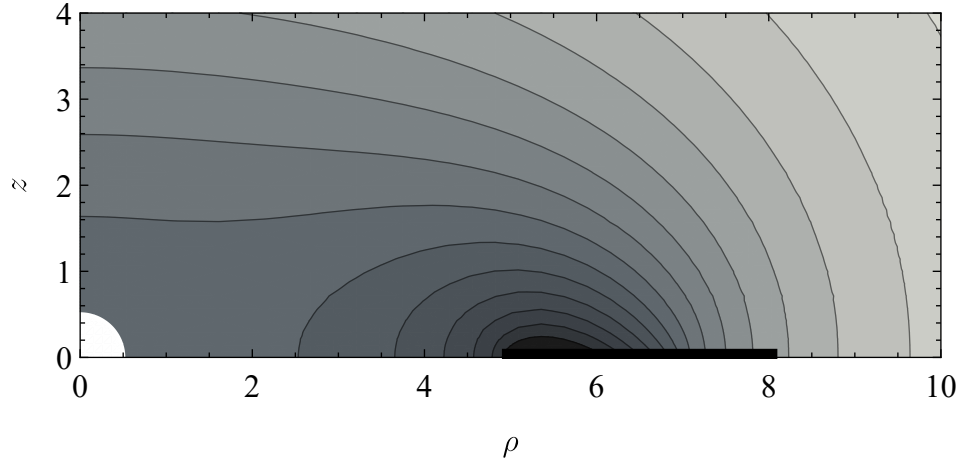
nezávislého na souřadnici θ . Výsledek, jak čekáme, odpovídá přímé integraci (3.24) přes interval $[x_{\text{in}}, x_{\text{out}}]$.



Obr. 4.1: Průběh gravitačního potenciálu $\nu = \nu_0 + \nu_1$ pro disk mezi poloměry $\rho_{\text{in}} = 5M$ a $\rho_{\text{out}} = 8M$ (zvýrazněný jako tlustá černá čára). Hodnoty konstantní plošné hustoty jsou $S = 0.01M^{-1}$ (vlevo nahoře), $S = 0.08M^{-1}$ (vpravo nahoře), $S = 0.25M^{-1}$ (vlevo dole), $S = 0.6M^{-1}$. Bílá kruhová výseč v levém dolním rohu značí vnitřek černé díry s horizontem na $\rho^2 + z^2 = M^2/4$. Potenciál je vždy záporný s nejvyšší hodnotou v pravém horním rohu a divergující do $-\infty$ na horizontu. Čím tmavší je odstín, tím má potenciál nižší hodnotu. Obě osy jsou v jednotkách M .

4.2 Tvar horizontu

Jak již bylo řečeno dříve, při volbě $B = 1 - \frac{k^2}{4r^2}$ leží horizont na konstantním $r = k/2$ (a je tedy sféricky symetrický). Jeho vlastní rozměry se však přítomností vnějšího zdroje změny - v případě disku očekáváme, že dojde ke zploštění v ekvatoriální rovině.



Obr. 4.2: Průběh draggingu $\omega = \omega_1$ pro disk mezi poloměry $\rho_{\text{in}} = 5M$ a $\rho_{\text{out}} = 8M$ (opět zvýrazněný jako tlustá černá čára). V tomto případě je $W = 0.1M^{-1}$, přičemž, jak je patrné z (3.29), je W pouze škálovací faktor - průběhy ω jsou vždy stejné, mění se jen hodnota ω na ekvipotenciálách. Tmavší oblasti znamenají vyšší hodnotu draggingu. Centrální černá díra je jako u obr. 4.1 znázorněna bílou kruhovou výsečí. Obě osy jsou v jednotkách M .

V první kapitole jsme odvodili tvar metriky (1.36) popisující horizont jako 2D plochu $\{t = \text{konst}, r = k/2\}$. V našem případě $k = M$. Metrika (1.36) tak nabývá podoby

$$ds_H^2 = 4M^2 e^{-2\nu_1(x=1,\theta)} \left(e^{4\nu_1(x=1,\theta) - 4\nu_1(x=1,0)} d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) . \quad (4.6)$$

Metriku (4.6) nyní izometricky vnoříme do euklidovského 3D prostoru. Využijeme postupu z [11]. Nejprve ji přepíšeme do tvaru

$$ds^2 = \eta^2 \left[f^{-1}(\mu) d\mu^2 + f(\mu) d\phi^2 \right] , \quad (4.7)$$

kde $\mu = \cos \theta$. V našem případě zřejmě

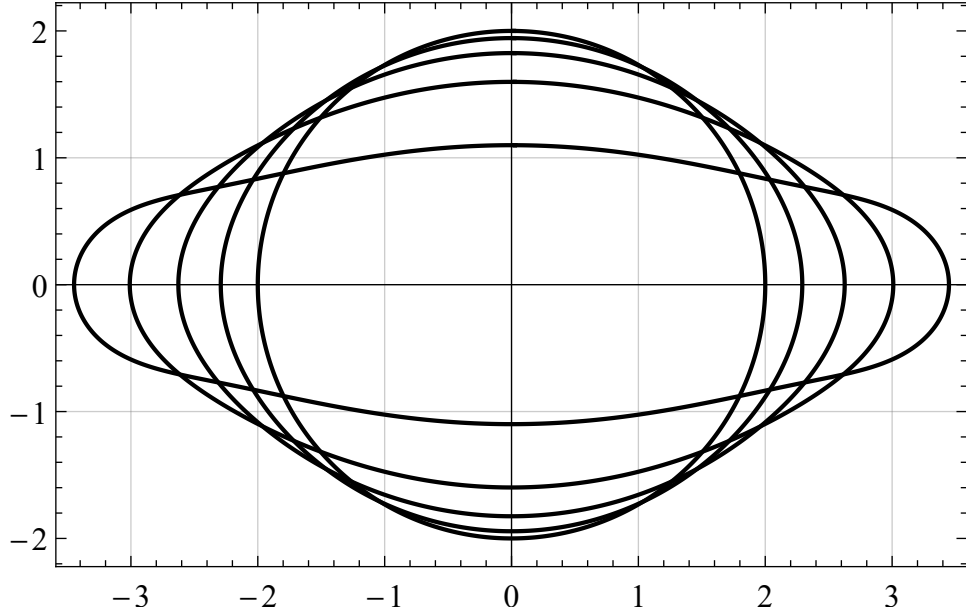
$$\eta = 2M e^{-\nu_1(x=1,\mu=1)} , \quad f(\mu) = (1 - \mu^2) e^{2\nu_1(x=1,\mu=1) - 2\nu_1(x=1,\mu)} . \quad (4.8)$$

Potom je vnoření do euklidovského prostoru s kartézskými souřadnicemi (x, y, z) dáno vztahy

$$x = \eta \sqrt{f} \cos \phi , \quad y = \eta \sqrt{f} \sin \phi , \quad z = \eta \int_0^\mu \sqrt{\frac{1}{f} \left(1 - \frac{1}{4} f_{,\mu}^2 \right)} d\mu . \quad (4.9)$$

Obr. 4.3 ukazuje tvar horizontu daný numerickým řešením rovnic (4.9) pro různé hustoty disku S . Horizont se patrně s rostoucí hustotou více a více zplošťuje – jeho latitudinální obvod roste rychleji, než azimutální, jak uvidíme dále.

Velmi dobrým indikátorem zploštění horizontu vlivem zdroje v ekvatoriální rovině je hodnota Gaussovy křivosti na ose symetrie. Z úvodní kapitoly víme, že



Obr. 4.3: Meridionální řez ($\phi = \text{konst}$) izometrického vnoření horizontu jako 2D plochy do euklidovského prostoru. Disk se nachází mezi $r_{\text{in}} = 0.8333M$ a $r_{\text{out}} = 1M$ s hustotami $S = 0M^{-1}, 0.1M^{-1}, 0.2M^{-1}, 0.3M^{-1}, 0.4M^{-1}$, přičemž kruhový horizont odpovídá $S = 0$ (tedy bez disku) a nejvíce zploštělý $S = 0.4M^{-1}$. Obě osy jsou v jednotkách M .

pro Gaussovu křivost na horizontu platí (1.38), což v tomto konkrétním případě znamená

$$\mathcal{K}_H(\theta) = \frac{1 + \nu_{1,\theta\theta} - 2(\nu_{1,\theta})^2 + 3\nu_{1,\theta} \cot \theta}{4M^2 e^{2\nu_1(x=1,\theta) - 4\nu_1(x=1,\theta=0)}}. \quad (4.10)$$

Po dosazení z (4.3) a vyčíslení v $\theta = 0$ dostáváme

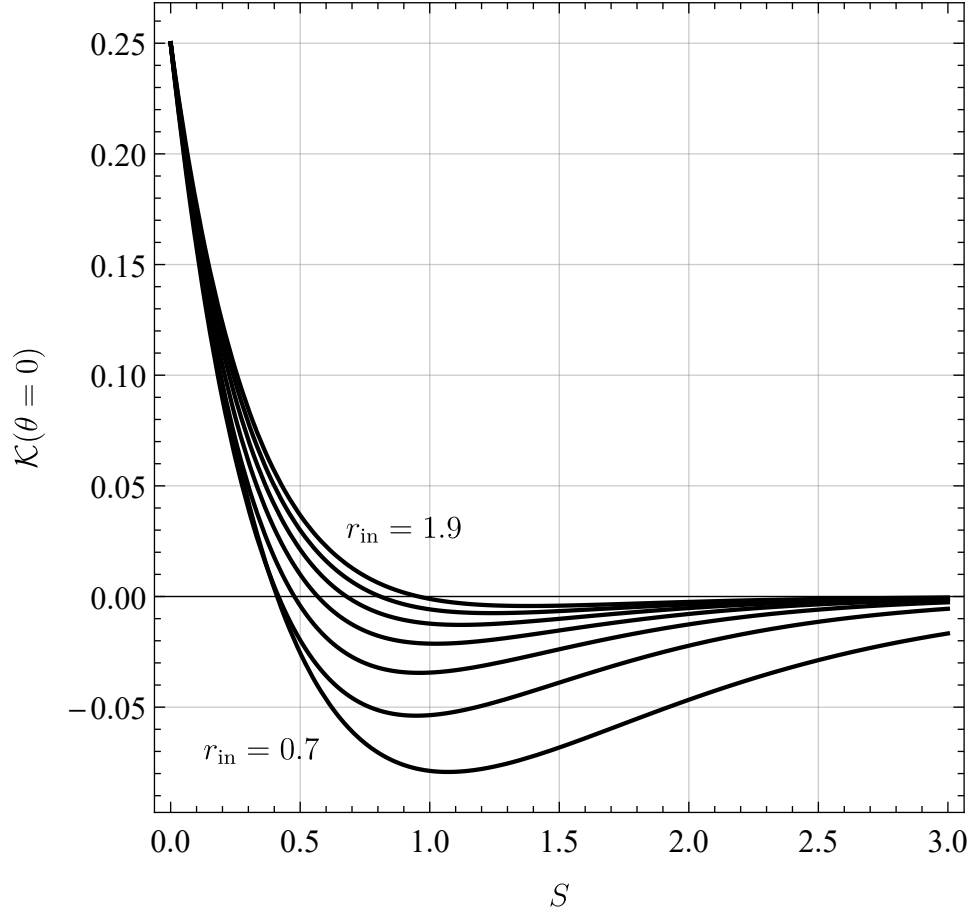
$$\mathcal{K}(\theta = 0) = \frac{e^{4\pi MS(x_{\text{in}} - x_{\text{out}})}}{4M^2} \left[1 + 8\pi MS \left(\frac{1}{x_{\text{out}}} - \frac{1}{x_{\text{in}}} \right) \right]. \quad (4.11)$$

Nyní můžeme Gaussovu křivost (4.11) vykreslit v závislosti na hustotě disku S . Průběh pro stejně široké disky s různými vnitřními poloměry je vykreslen na obr. 4.4. Pro disky blízké horizontu nabývá Gaussova křivost od určité hustoty dokonce záporných hodnot. Horizont v tomto případě není globálně vnořitelný do euklidovského prostoru. Pro vzdálenější disky je průběh Gaussovy křivosti méně strmý a přechod do záporných hodnot nastává až pro vyšší hodnoty S .

Nakonec poznamenejme, že pro $S = 0$ nabývá Gaussova křivost hodnoty 0.25, což odpovídá schwarzschildovskému (sféricky symetrickému) horizontu.

Vlastnosti horizontu můžeme ilustrovat ještě na dalších parametrech – ploše horizontu, povrchové gravitaci a azimutálním a latitudinálním obvodu. Plocha horizontu A je dána

$$A = \oint_{\text{H}} \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} d\theta d\phi \quad (4.12)$$



Obr. 4.4: Průběhy Gaussovy křivosti \mathcal{K} na ose symetrie ($\theta = 0$) v závislosti na hustotě disku S s vnitřními poloměry $r_{\text{in}} = 0.7M, 0.9M, 1.1M, 1.3M, 1.5M, 1.7M, 1.9M$ a konstantní šířkou $\Delta r = 0.2M$. Hustota disku je vynesena v jednotkách M^{-1} , Gaussova křivost v jednotkách $(2M)^{-2}$.

a povrchová gravitace κ , jak víme z první kapitoly,

$$\kappa^2 = \lim_{\rightarrow \text{H}} g^{\alpha\beta} (e^\nu)_{,\alpha} (e^\nu)_{,\beta} . \quad (4.13)$$

Dosazením za metrické funkce a (4.3) máme

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (Br^2 e^{\zeta-2\nu})_{\text{H}} \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 16\pi M^2 e^{-2\nu_1(x=1, \theta=0)} = \\ &= 16\pi M^2 e^{-4\pi MS(x_{\text{in}}-x_{\text{out}})} \end{aligned} \quad (4.14)$$

a

$$\kappa = \left(e^{2\nu-\zeta} \sqrt{(\nu_{,r})^2 + r^{-2}(\nu_{,\theta})^2} \right)_{\text{H}} = \frac{e^{2\nu_1(x=1, \theta=0)}}{4M} = \frac{e^{4\pi MS(x_{\text{in}}-x_{\text{out}})}}{4M} . \quad (4.15)$$

Výsledek zřejmě správně odpovídá stacionárnímu horizontu, na kterém má podle „0. zákona termodynamiky“ být $\kappa = \text{konst.}$

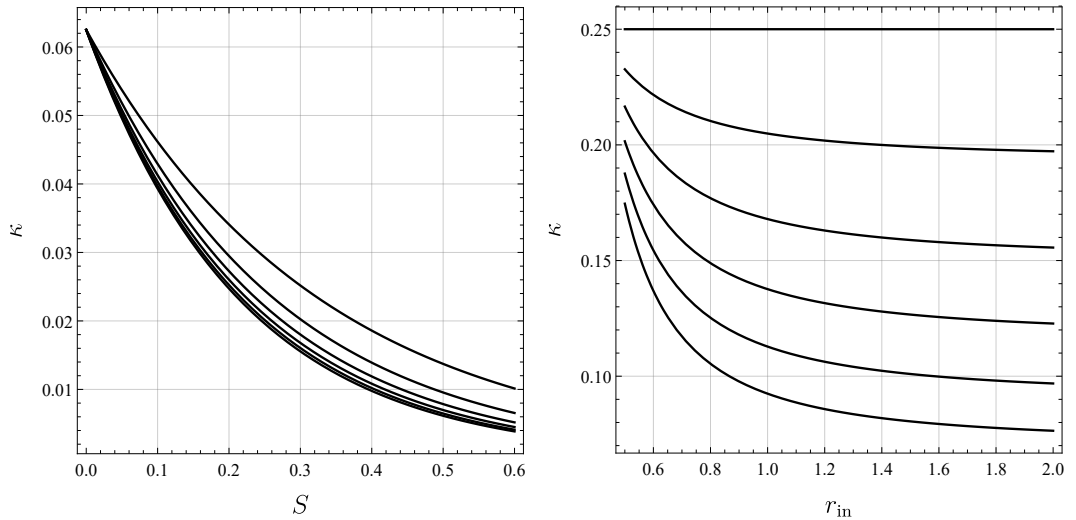
Pro azimutální a latitudinální obvod vychází

$$o_{\text{azi}} = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{g_{\phi\phi}} \right)_{\text{H}} d\phi \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \int_0^{2\pi} 4M e^{-\nu} \sin \theta d\phi \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 4\pi M e^{-\nu_1(x=1, \theta=\pi/2)} , \quad (4.16)$$

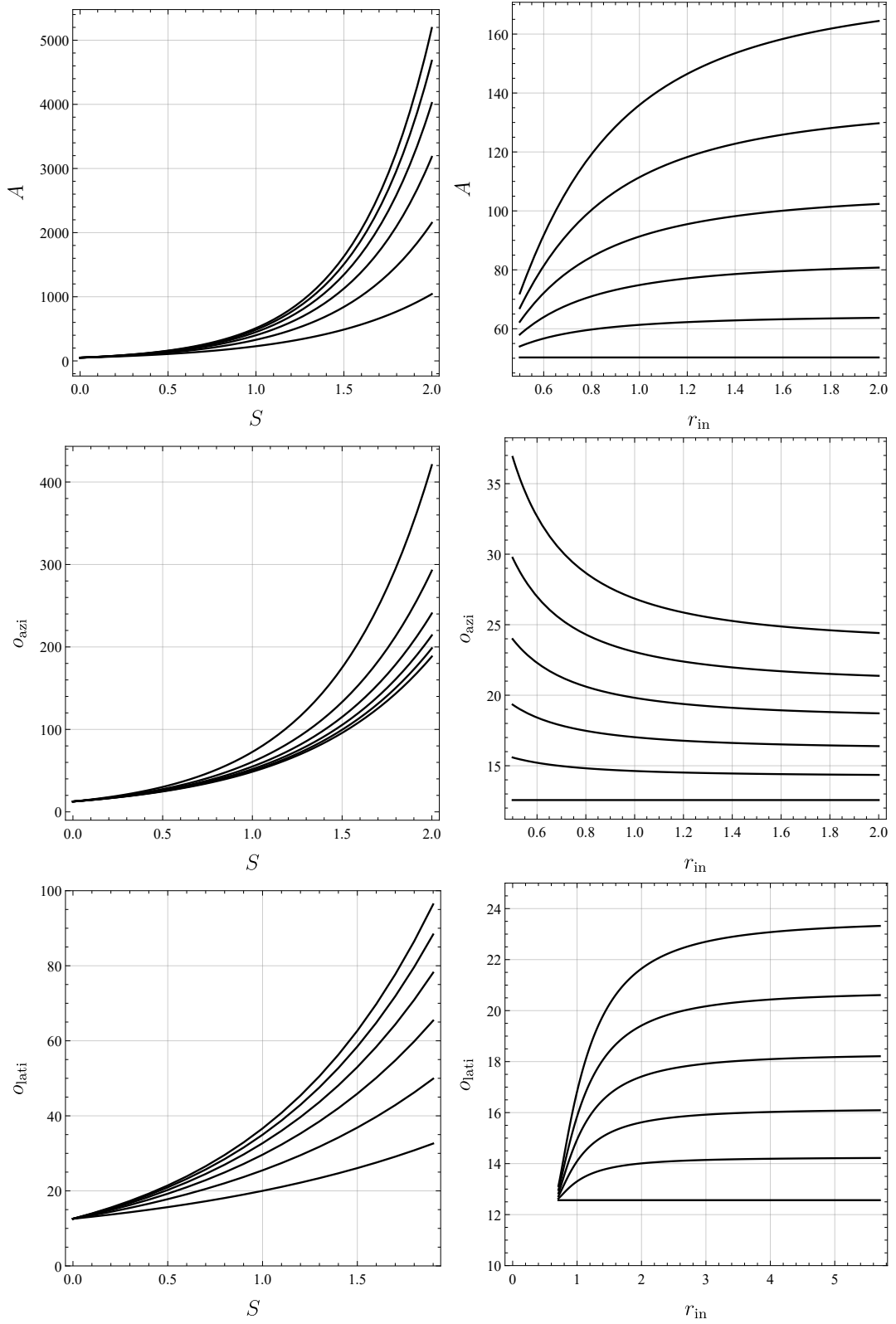
$$o_{\text{lati}} = \int_0^{\pi} \left(\sqrt{g_{\theta\theta}} \right)_{\text{H}} d\theta = 4M e^{-4\pi M S(x_{\text{in}} - x_{\text{out}})} \int_0^{\pi} e^{\nu_1(x=1, \theta)} d\theta . \quad (4.17)$$

Poslední výraz neumíme dořešit, nicméně konkrétní hodnoty můžeme snadno nalézt numericky.

Průběhy všech uvedených parametrů vykreslíme do dvojic grafů na obr. 4.6 a 4.5. Jednou v závislosti na hustotě, podruhé v závislosti na poloze vnitřního poloměru disku. Parametry se chovají dle očekávání. S rostoucí hustotou (a tedy i hmotností) zvětšuje horizont svou plochu, a tedy i svůj azimutální a latitudinální obvod, přičemž azimutální obvod roste rychleji než latitudinální (horizont se zplošťuje, jak jsme ostatně již viděli). Se vzdalujícím se diskem plocha horizontu ze začátku také roste, nicméně při větších vzdálenostech se již mění jen minimálně. Azimutální obvod naopak klesá, latitudinální roste - to přesně odpovídá největšímu zploštění s diskem v těsné blízkosti a naopak nejmenšímu pro vzdálené disky - oba obvody jdou při daném S asymptoticky ke stejným hodnotám.



Obr. 4.5: Povrchová gravitace v závislosti na hustotě disku (levý graf) a vnitřním poloměru (pravý graf). V pravém grafu je postupně odshora $S = 0M^{-1}$, $0.1M^{-1}$, $0.2M^{-1}$, \dots , $0.5M^{-1}$, v levém odshora $r_{\text{in}} = 0.7M$, $0.9M$, \dots , $1.7M$. Šířka disku je všude stejná a činí $\Delta r = 0.2M$. Povrchová gravitace je v jednotkách M^{-1} , radiální souřadnice v jednotkách M a hustota v jednotkách M^{-1} .



Obr. 4.6: Grafy závislostí (odshora) plochy horizontu, jeho latitudinálního a azimutálního obvodu na hustotě disku (levé grafy) a na hodnotě vnitřního poloměru (pravé grafy). V pravých grafech je postupně zezdola $S = 0M^{-1}, 0.1M^{-1}, 0.2M^{-1}, \dots, 0.5M^{-1}$. V levých grafech postupně zezdola $r_{\text{in}} = 0.7M, 0.9M, \dots, 1.7M$. Šířka disku je všude stejná a činí $\Delta r = 0.2M$. Plocha horizontu je v jednotkách M^2 , radiální souřadnice v jednotkách M , hustota v jednotkách M^{-1} , oba obvody v jednotkách M .

4.3 Asymptotické chování

Nyní se podíváme na asymptotické chování metrických funkcí v radiálním nekonečnu. Z rozvoje budeme schopni určit celkovou hmotnost systému černé díry s diskem a celkový moment hybnosti. Rozvoj potenciálu ν v $r \rightarrow \infty$ je

$$\nu \rightarrow \left[-M + \frac{\pi M^4 S}{16} \left(\frac{1}{r_{\text{in}}^2} - \frac{1}{r_{\text{out}}^2} \right) + \pi S (r_{\text{in}}^2 - r_{\text{out}}^2) \right] \frac{1}{r} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (4.18)$$

což srovnáním s (1.8) znamená celkovou hmotnost systému

$$M_{\text{tot}} = M + \mathcal{M}_1, \quad (4.19)$$

kde

$$\mathcal{M}_1 = \pi S \left[r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2 + \frac{M^4}{16} \left(\frac{1}{r_{\text{out}}^2} - \frac{1}{r_{\text{in}}^2} \right) \right] \quad (4.20)$$

je hmotnost samotného disku.

Obdobně můžeme rozvést dragging ω v $r \rightarrow \infty$,

$$\omega \rightarrow W \frac{(r_{\text{in}} - r_{\text{out}})(M^2 - 4r_{\text{in}}r_{\text{out}})}{16Mr_{\text{in}}r_{\text{out}}} \frac{1}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \quad (4.21)$$

a z něj srovnáním s (1.10) určit celkový moment hybnosti

$$J = \frac{WM^2}{16} \left[r_{\text{out}} - r_{\text{in}} + \frac{M^2}{4} \left(\frac{1}{r_{\text{out}}} - \frac{1}{r_{\text{in}}} \right) \right]. \quad (4.22)$$

4.4 Komarovy integrály

Jak jsme zmínili v 1. kapitole, hmotnost a moment hybnosti lze najít také pomocí Komarových integrálů. Odvodili jsme vztahy (1.41) a (1.42), které pro případ disku s centrální černou dírou dávají jeho hmotnost a moment hybnosti disku

$$\mathcal{M}^k = \int_{\text{disk}} (T_\phi^\phi - T_t^t) \sqrt{-g} d^3x, \quad \mathcal{J}^k = \int_{\text{disk}} T_\phi^t \sqrt{-g} d^3x. \quad (4.23)$$

Odmocnina z determinantu metriky (1.1) je $\sqrt{-g} = Be^{2\zeta-2\nu}\rho$ a srovnáním definičního vztahu plošného tenzoru energie hybnosti pro tenký disk v ekvatoriální rovině (2.5) máme $T_\nu^\mu \sqrt{-g} = S_\nu^\mu \delta(z) B\rho$. Tenzor S_ν^μ je nezávislý na úhlové souřadnici, která se tak vyintegruje na 2π , integrace přes $\delta(z)$ jej vyčíslí v bodě $z = 0^+$, a tedy

$$\mathcal{M}^k = 2\pi \int_{\rho_{\text{in}}}^{\rho_{\text{out}}} (S_\phi^\phi - S_t^t) B\rho d\rho, \quad \mathcal{J}^k = 2\pi \int_{\rho_{\text{in}}}^{\rho_{\text{out}}} S_\phi^t B\rho d\rho. \quad (4.24)$$

Složky tenzoru S_ν^μ můžeme ze vztahů (2.10) a (2.11) vyjádřit pomocí skoků v prvních derivacích metrických funkcí $\nu_{,z}$ a $\omega_{,z}$. Dostáváme tak

$$S_\phi^\phi - S_t^t = \frac{\nu_{,z}}{2\pi} - \frac{1}{4\pi} B^2 \rho^2 e^{-4\nu} \omega \omega_{,z}, \quad S_\phi^t = -\frac{1}{8\pi} B^2 \rho^2 e^{-4\nu} \omega_{,z}, \quad (4.25)$$

přičemž všechny veličiny uvažujeme vyčísleny v bodě $z = 0^+$. Uvážíme-li, že v (4.25) jsou členy $\omega\omega_{,z}$ a $e^{-4\nu_1}\omega_{,z}$ až druhého řádu $\mathcal{O}(\lambda^2)$, Komarovy integrály se dále zjednoduší na

$$\mathcal{M}^k = \int_{\rho_{\text{in}}}^{\rho_{\text{out}}} \nu_{,z}(z = 0^+) B \rho \, d\rho, \quad \mathcal{J}^k = -\frac{1}{4} \int_{\rho_{\text{in}}}^{\rho_{\text{out}}} B^3 \rho^3 e^{-4\nu_0} \omega_{,z}(z = 0^+) \, d\rho. \quad (4.26)$$

Pro první derivace metrických funkcí platí [4]

$$\nu_{1,z}(z = 0^+) = 2\pi S \left(1 + \frac{M^2}{4r^2} \right), \quad (4.27)$$

$$\omega_{,z}(z = 0^+) = -8WM^2 r \frac{(2r - M)^2}{(2r + M)^6}. \quad (4.28)$$

a vzhledem k tomu, že při $z = 0$ je $\rho = r$, $B = 1 - \frac{M^2}{4r^2}$, máme po integraci

$$\mathcal{M}^k = \pi S \left[r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2 + \frac{M^4}{16} \left(\frac{1}{r_{\text{out}}^2} - \frac{1}{r_{\text{in}}^2} \right) \right] \quad (4.29)$$

a

$$\mathcal{J}^k = \frac{WM^2}{16} \left[r_{\text{out}} - r_{\text{in}} + \frac{M^2}{4} \left(\frac{1}{r_{\text{out}}} - \frac{1}{r_{\text{in}}} \right) \right]. \quad (4.30)$$

což je stejný výsledek jako z asymptotického rozvoje.

4.5 Významné kruhové orbity

Dosazením do výsledků v sekci 2.2 s podmínkou (2.24) dostaneme rovnice, které musí uvažované kruhové orbity splňovat. Všimněme si, že první člen pod odmocninou (2.24) je až druhého řádu $\mathcal{O}(\lambda^2)$ a můžeme jej tedy zanedbat. Konkrétně tak do první řádu máme pro **fotonovou orbitu** po úpravách

$$\frac{B^2 \rho^2 \omega_{,\rho} e^{-2\nu}}{2(\rho B_{,\rho} + B - B\rho\nu_{,\rho})} \pm \sqrt{\frac{B\rho\nu_{,\rho}}{\rho B_{,\rho} + B - B\rho\nu_{,\rho}}} \mp 1 = 0. \quad (4.31)$$

Pro **ISCO**

$$B\rho \frac{\nu_{,\rho}}{v} - (v^2 - 1)(\rho B_{,\rho} + B - B\rho\nu_{,\rho}) = 0, \quad (4.32)$$

kde

$$v = B\rho e^{-2\nu} \left(\frac{g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi,\rho}} \omega_{,\rho} \pm \sqrt{\frac{2\nu_{,\rho} e^{2\nu}}{g_{\phi\phi,\rho}}} \right), \quad g_{\phi\phi} = B^2 \rho^2 e^{-2\nu}$$

a pro **mezní vázanou orbitu**

$$\frac{B\rho\omega_{,\rho} e^{-2\nu}}{2(\rho B_{,\rho} + B - B\rho\nu_{,\rho})} \pm \sqrt{\frac{\nu_{,\rho}}{B\rho(\rho B_{,\rho} + B - B\rho\nu_{,\rho})}} \mp \frac{\sqrt{1 - e^{2\nu}}}{B\rho} = 0 \quad (4.33)$$

Tyto významné orbity definují hranice oblastí, ve kterých je libovolná kruhová geodetika

- (i) časupodobná – nad fotonovou orbitou, tedy tam, kde je levá strana rovnice (4.31) kladná
- (ii) horizontálně stabilní – nad mezní stabilní orbitou, tedy tam, kde je levá strana rovnice (4.32) kladná
- (iii) vázaná – nad mezní vázanou orbitou, tedy tam, kde je levá strana rovnice (4.33) kladná.

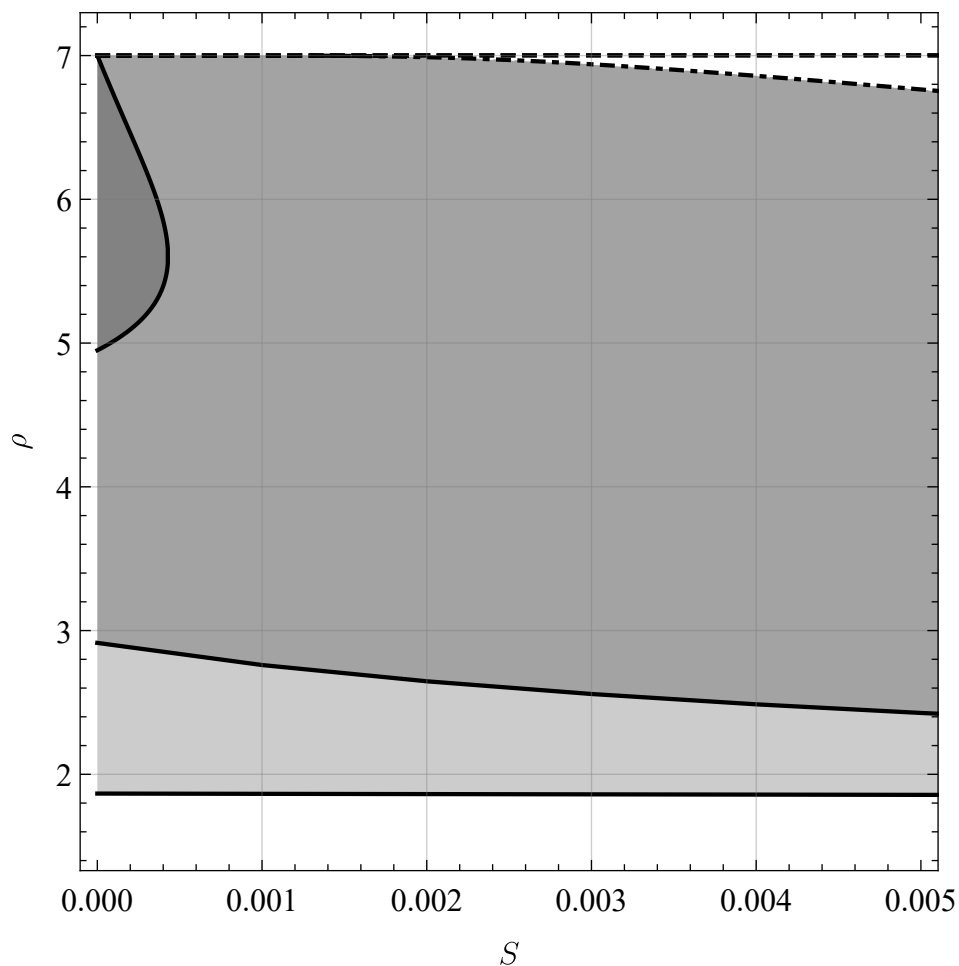
Pro jakýkoliv kruhový pohyb musí být navíc splněna podmínka, že výraz pod odmocninou v (2.24) je nezáporný. Zanedbáním druhé mocniny v draggingu tak máme

$$\nu_{,\rho} \geq 0 . \quad (4.34)$$

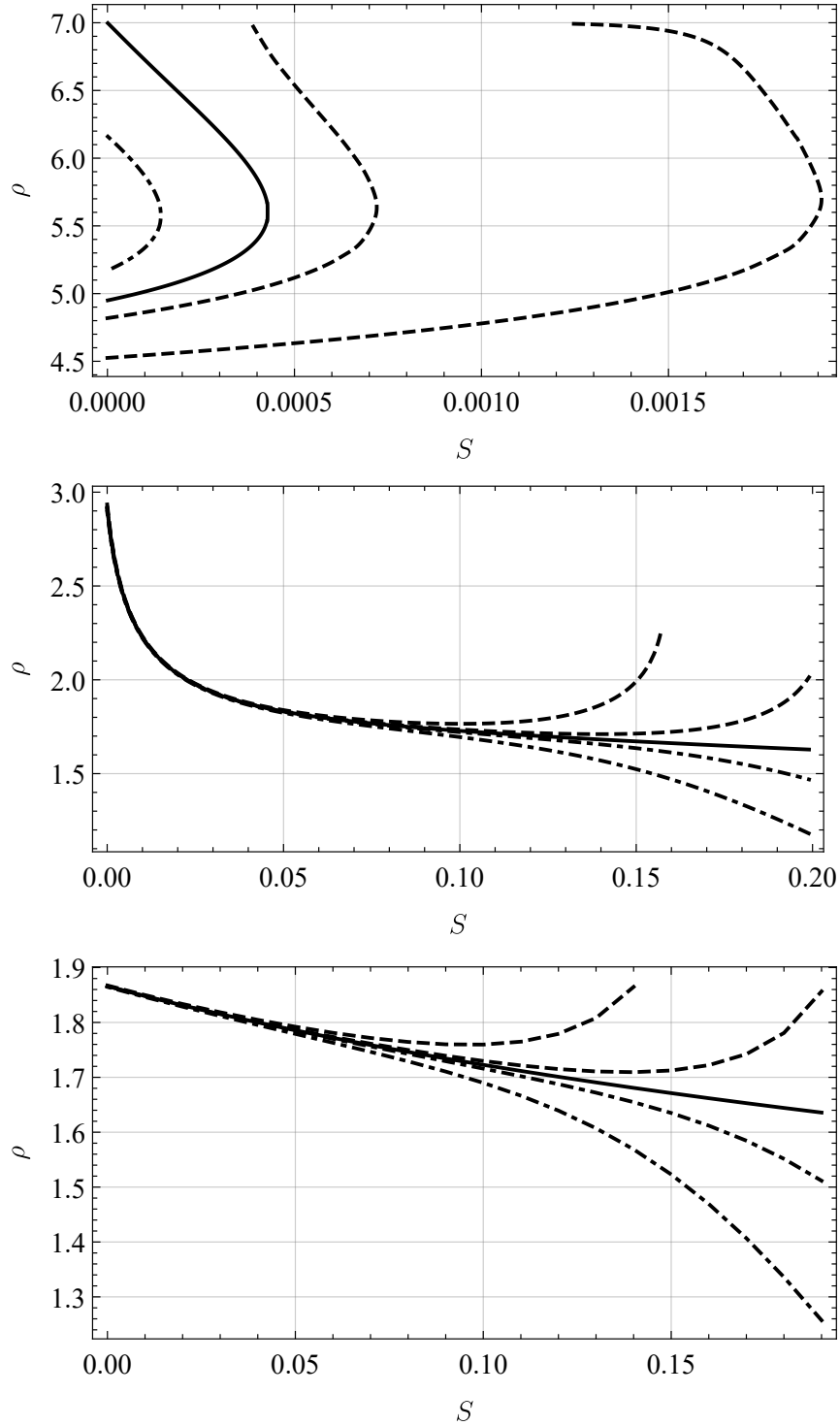
Rovnice výše můžeme numericky řešit a ilustrovat posun významných kruhových orbit vyvolaný přítomností disku. Budeme uvažovat disk v ekvatoriální rovině mezi poloměry $\rho_{\text{in}} = 7M$ a $\rho_{\text{out}} = 10M$.

Na grafu na obr. 4.7 vidíme, že ve statickém případě ($W = 0M^{-1}$) se fotonová a mezní vázaná orbita s rostoucí hustotou disku přibližují k horizontu černé díry. Mezní stabilní orbity existují pod vnitřním poloměrem disku pro malé hustoty dvě, jedna začíná těsně pod vnitřním poloměrem disku, druhá na schwarzschildovské hodnotě.

Grafy na obr. 4.8 ukazují detailnější pohled na všechny tři významné kruhové orbity. Kromě detailu na průběh statického případu z obr. 4.7 obsahují též dva příklady průběhu po přidání rotace. U rotujícího disku záleží na směru pohybu pozorovatele na kruhové orbitě (výběru znaménka v rovnicích (4.31) až (4.33)). V případě přímého směru dochází ke zvětšení oblasti stabilních kruhových geodetik a pomalejšímu přibližování mezní vázané a fotonové orbity k horizontu. Extrémně těžký disk ($S = 0.1M^{-1}$ odpovídá dle (4.20) disku o hmotnosti přibližně $\mathcal{M} = 16M$, tedy 16 násobku hmotnosti samotné černé díry) dokonce způsobí opětovné vzdalování od horizontu. V retrográdním směru je tomu naopak – oblast stabilních kruhových orbit se zmenšuje a mezní vázaná a fotonová orbita se k horizontu přibližují rychleji.



Obr. 4.7: Závislost polohy všech tří významných kruhových orbit na hustotě disku. Uvažujeme statický případ ($W = 0M^{-1}$) a oblast mezi černou dírou a diskem. Postupně odshora máme tučnou čarou ISCO, mezní vázanou a fotonovou orbitu. Disk leží v ekvatoriální rovině mezi poloměry $\rho_{\text{in}} = 7M$ a $\rho_{\text{out}} = 10M$. Nejtmavší barva odpovídá oblasti existence horizontálně stabilních, vázaných a časupodobných kruhových orbit, světlejší oblasti vázaných a časupodobných orbit a nejsvětlejší pouze časupodobných orbit. Přerušovaná čára značí vnitřní okraj disku, čerchovaná hranici existence jakékoliv kruhové orbity danou rovností (4.34). Poloměry jsou vyneseny v jednotkách M , hustoty v jednotkách M^{-1} .



Obr. 4.8: Závislost poloměru ISCO (horní graf), mezní vázané orbity (prostřední graf) a fotonové orbity (spodní graf) na hustotě disku. Disk leží v ekvatoriální rovině mezi poloměry $\rho_{\text{in}} = 7M$ a $\rho_{\text{out}} = 10M$. V obou grafech je závislost vykreslena pro hodnoty $W = 0M^{-1}$ (plná čára), $W = 1M^{-1}$ (dvojice vnitřních čar) a $W = 5M^{-1}$ (dvojice postranních čar). Přerušovaná čára odpovídá rotaci v přímém směru, čerchovaná v retrográdním. Ve statickém případě ($W = 0M^{-1}$) orbity v obou směrech splývají. Poloměry jsou vyneseny v jednotkách M , hustoty v jednotkách M^{-1} .

KAPITOLA 5

ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Hlavním cílem této práce bylo prozkoumat některé relevantní vlastnosti prvního řádu perturbačního řešení pro černou díru s tenkým a pomalu rotujícím diskem. Nejprve jsme na několika grafech ilustrovali průběhy gravitačního potenciálu a draggingu a ve shodě s článkem [4] ověřili chování metrických funkcí ve významných místech – jmenovitě na ose rotace, v ekvatoriální rovině, na horizontu a v radiálním nekonečnu. Z posledního jmenovaného bylo možno určit hmotnost a moment hybnosti disku. Stejně výsledky jsme dostali i za použití Komarových integrálů.

Ukázali jsme, že přítomností disku dojde ke zploštění původně sférického horizontu černé díry – toho jsme snadno nahlédli po izometrickém vnoření do euklidovského prostoru, z hodnot Gaussovy křivosti na ose a chování vlastních obvodů. Zároveň s hmotností disku rostla i plocha horizontu a klesala povrchová gravitace.

Nakonec jsme ukázali, že ve statickém případě způsobí disk posun významných kruhových orbit (jmenovitě fotonové, mezní vázané a mezní stabilní) směrem k horizontu. Po připuštění rotace záleželo na směru oběhu po kruhové orbitě – v přímém směru se s rotací mezní vázaná a fotonová orbita posunuje směrem od horizontu a zvětšuje se oblast horizontálně stabilních kruhových orbit, v retrográdním je tomu naopak.

Dalším rozšířením práce by mohlo být studium geometrie pomocí křivostních invariantů – zejména Kretschmannova invariantu. Dále např. chování statické meze nebo vertikální stability kruhových orbit. Nicméně toto jsou jevy typicky až druhého řádu. Možností by taktéž bylo zvolit disk s jinou (nekonstantní) hustotou – zejména takovou, která vychází z konkrétních astrofyzikálních modelů.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Morgan T., Morgan L. The gravitational field of a disk. *Physical Review D*, 183:1097–1101, 1969.
- [2] José P. S., Patricio S. L. Exact general relativistic thin disks around black holes. *Physical Review. D*, 49:5135–5143, 1994.
- [3] Will C. M. Perturbation of a Slowly Rotating Black Hole by a Stationary Axisymmetric Ring of Matter. I. Equilibrium Configurations. *The Astrophysical Journal*, 191:521–532, 1974.
- [4] Čížek P., Semerák O. Perturbation of a Schwarzschild black hole due to a rotating thin disc. *submitted*, 2017.
- [5] Semerák O. *K některým vlastnostem polí černých děr, disertační práce*. MFF UK, Praha, 2009.
- [6] Wald R. M. *General relativity*. Chicago Univ. Press, Chicago, 1984.
- [7] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [8] Carter B. The general theory of the mechanical, electromagnetic and thermodynamic properties of black holes. In Hawking S., Israel W., editor, *General Relativity: An Einstein centenary survey*, pages 294–369. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.
- [9] Baranov A. S. On series containing products of Legendre polynomials. *Mathematical Notes*, 80(1):167–174, 2006.
- [10] Lass H., Blitzer L. The gravitational potential due to uniform disks and rings. *Celestial Mechanics*, 30:225–228, July 1983.
- [11] Smarr L. Surface geometry of charged rotating black holes. *Physical Review D*, 7:289–295, 1973.

SEZNAM OBRÁZKŮ

- 4.1 Průběh gravitačního potenciálu $\nu = \nu_0 + \nu_1$ pro disk mezi poloměry $\rho_{\text{in}} = 5M$ a $\rho_{\text{out}} = 8M$ (zvýrazněný jako tlustá černá čára). Hodnoty konstantní plošné hustoty jsou $S = 0.01M^{-1}$ (vlevo nahoře), $S = 0.08M^{-1}$ (vpravo nahoře), $S = 0.25M^{-1}$ (vlevo dole), $S = 0.6M^{-1}$. Bílá kruhová výseč v levém dolním rohu značí vnitřek černé díry s horizontem na $\rho^2 + z^2 = M^2/4$. Potenciál je vždy záporný s nejvyšší hodnotou v pravém horním rohu a divergující do $-\infty$ na horizontu. Čím tmavší je odstín, tím má potenciál nižší hodnotu. Obě osy jsou v jednotkách M 28
- 4.2 Průběh draggingu $\omega = \omega_1$ pro disk mezi poloměry $\rho_{\text{in}} = 5M$ a $\rho_{\text{out}} = 8M$ (opět zvýrazněný jako tlustá černá čára). V tomto případě je $W = 0.1M^{-1}$, přičemž, jak je patrné z (3.29), je W pouze škálovací faktor - průběhy ω jsou vždy stejné, mění se jen hodnota ω na ekvipotenciálách. Tmavší oblasti znamenají vyšší hodnotu draggingu. Centrální černá díra je jako u obr. 4.1 znázorněna bílou kruhovou výsečí. Obě osy jsou v jednotkách M 29
- 4.3 Meridionální řez ($\phi = \text{konst}$) izometrického vnoření horizontu jako 2D plochy do euklidovského prostoru. Disk se nachází mezi $r_{\text{in}} = 0.8333M$ a $r_{\text{out}} = 1M$ s hustotami $S = 0M^{-1}, 0.1M^{-1}, 0.2M^{-1}, 0.3M^{-1}, 0.4M^{-1}$, přičemž kruhový horizont odpovídá $S = 0$ (tedy bez disku) a nejvíce zploštělý $S = 0.4M^{-1}$. Obě osy jsou v jednotkách M 30
- 4.4 Průběhy Gaussovy křivosti \mathcal{K} na ose symetrie ($\theta = 0$) v závislosti na hustotě disku S s vnitřními poloměry $r_{\text{in}} = 0.7M, 0.9M, 1.1M, 1.3M, 1.5M, 1.7M, 1.9M$ a konstantní šířkou $\Delta r = 0.2M$. Hustota disku je vynesena v jednotkách M^{-1} , Gaussova křivost v jednotkách $(2M)^{-2}$ 31
- 4.5 Povrchová gravitace v závislosti na hustotě disku (levý graf) a vnitřním poloměru (pravý graf). V pravém grafu je postupně odshora $S = 0M^{-1}, 0.1M^{-1}, 0.2M^{-1}, \dots, 0.5M^{-1}$, v levém odshora $r_{\text{in}} = 0.7M, 0.9M, \dots, 1.7M$. Šířka disku je všude stejná a činí $\Delta r = 0.2M$. Povrchová gravitace je v jednotkách M^{-1} , radiální souřadnice v jednotkách M a hustota v jednotkách M^{-1} 32

- 4.6 Grafy závislostí (odshora) plochy horizontu, jeho latitudinálního a azimutálního obvodu na hustotě disku (levé grafy) a na hodnotě vnitřního poloměru (pravé grafy). V pravých grafech je postupně zezdola $S = 0M^{-1}, 0.1M^{-1}, 0.2M^{-1}, \dots, 0.5M^{-1}$. V levých grafech postupně zezdola $r_{\text{in}} = 0.7M, 0.9M, \dots, 1.7M$. Šířka disku je všude stejná a činí $\Delta r = 0.2M$. Plocha horizontu je v jednotkách M^2 , radiální souřadnice v jednotkách M , hustota v jednotkách M^{-1} , oba obvody v jednotkách M 33
- 4.7 Závislost polohy všech tří významných kruhových orbit na hustotě disku. Uvažujeme statický případ ($W = 0M^{-1}$) a oblast mezi černou dírou a diskem. Postupně odshora máme tučnou čarou ISCO, mezní vázanou a fotonovou orbitu. Disk leží v ekvatoriální rovině mezi poloměry $\rho_{\text{in}} = 7M$ a $\rho_{\text{out}} = 10M$. Nejtmavší barva odpovídá oblasti existence horizontálně stabilních, vázaných a časupodobných kruhových orbit, světlejší oblasti vázaných a časupodobných orbit a nejsvětlejší pouze časupodobných orbit. Přerušovaná čára značí vnitřní okraj disku, čerchovaná hranici existence jakékoliv kruhové orbity danou rovností (4.34). Poloměry jsou vyneseny v jednotkách M , hustoty v jednotkách M^{-1} 37
- 4.8 Závislost poloměru ISCO (horní graf), mezní vázané orbity (prostřední graf) a fotonové orbity (spodní graf) na hustotě disku. Disk leží v ekvatoriální rovině mezi poloměry $\rho_{\text{in}} = 7M$ a $\rho_{\text{out}} = 10M$. V obou grafech je závislost vykreslena pro hodnoty $W = 0M^{-1}$ (plná čára), $W = 1M^{-1}$ (dvojice vnitřních čar) a $W = 5M^{-1}$ (dvojice postranních čar). Přerušovaná čára odpovídá rotaci v přímém směru, čerchovaná v retrográdním. Ve statickém případě ($W = 0M^{-1}$) orbity v obou směrech splývají. Poloměry jsou vyneseny v jednotkách M , hustoty v jednotkách M^{-1} 38