MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eva Vernerová

Rizikově senzitivní řízení v markovských řetězcích

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 17. 7. 2017 Podpis autora

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu práce, Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D., za ochotu, obětavost, trpělivost a čas strávený konzultacemi.

Název práce: Rizikově senzitivní řízení
v markovských řetězcích

Autor: Eva Vernerová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, MFF UK

Abstrakt: Tématem této bakalářské práce jsou markovské procesy s diskrétním časem, s konečnou množinou stavů a s oceněním přechodů. Dále uvažujeme konečnou množinu řízení řetězce a zabýváme se hledáním optimálního řízení s ohledem na exponenciální užitkovou funkci. Je uveden iterační algoritmus a následně je dokázáno, že po konečně mnoha krocích nalezne optimální řízení. Dále je ukázáno, že toto řízení je optimální, i kdybychom připustili nehomogenní řízení řetězce. Součástí práce jsou i vybraná tvrzení z Perron-Frobeniovy teorie, která se využijí k důkazům zásadních tvrzení.

Klíčová slova: Markovský řetězec, Optimální řízení, Howardův algoritmus, exponenciální užitková funkce

Title: Risk sensitive management in Markov chains

Author: Eva Vernerová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics, MFF UK

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics, MFF UK

Abstract: The main topic of this bachelor thesis is Markov reward chains with finite state set. We consider a markov decision chain with a finite action space and we are concerned on finding an optimal control with respect to exponential utility function. An iterative algorithm is given. Then we prove that after finite number of steps we end up with optimal control. Afterwards we show that optimality of this cotrol is fulfilled, even if we consider an adaptive chain control strategy. In the last part of the work, there is a selection of propositions from Perron-Frobenius theory, which are essential in proofs of theorems.

Keywords: Markov chains, Optimal control, Howard´s algorithm, exponential utility function

Obsah

Úvod

V této práci se budeme zabývat homogenními markovskými řetězci s konečnou množinou stavů a s oceněním přechodů. Následně budeme pracovat s množinou řízení řetězce a budeme hledat optimální řízení. Zadefinujeme iterační algoritmus, pomocí něhož získáme řízení, o kterém pak ukážeme, že je optimální.

Hlavním zdrojem, ze kterého jsem čerpala je diplomová práce (Stanek, 2012). Podobně, jako on, chceme zavést definici optimálního homogenního řízení, uvést iterační algoritmus a ukázat, že ten po konečně mnoha krocích dojde k hledanému optimu. Navíc však ukážeme, že takto získané řízení je optimální i z hlediska adaptivní strategie. Dalším přínosem je shrnutí a dokázání používaných vět a definic Perron-Frobeniovy teorie.

První kapitola obsahuje především zavedení základních pojmů homogenního markovského řetězce s konečnou množinou stavů a s maticí pravděpodobností přechodů a s maticí ocenění přechodů. Na základě toho získáme náhodnou posloupnost výnosů. V poslední části kapitoly 1 zavedeme exponenciální užitkovou funkci, ukážeme některé její vlastnosti a na začátku kapitoly 2 zavedeme užitek z reálné náhodné veličiny. Poté se seznámíme s pojmem jistotního ekvivalentu, který bude hrát zásadní roli při volbě optimální strategie řízení v části 2.2. Hlavním zdrojem pro první kapitolu mi byl (Lachout a Prášková, 2012), především kapitoly 1, 2.8 a 2.9.

Později, ve druhé kapitole budeme uvažovat možnost volby prvku z neprázdné množiny řízení, který určí chování řetězce. Zavedeme pojem optimálního řízení a dále se budeme věnovat jeho hledání.

Jádro práce pak spočívá v části 2.2, kde je uveden iterační algoritmus. Ukážeme, že tento algoritmus pro libovolné počáteční řízení zkonstruuje posloupnost z množiny řízení, která je konstantní až na konečně mnoho členů a její limita je optimální řízení.

Tento výsledek potom rozšíříme v kapitole 3, kde ukážeme, že takto získané řízení je optimální nejen z hlediska homogenní volby, ale i v případě, že bychom připustili adaptivní strategii, tedy bychom uvažovali, že volba řízení v každém časovém okamžiku závisí na dosud projité trajektorii.

Poslední část věnujeme teorii nezáporných nerozložitelných matic, kterou používáme v důkazech stěžejních tvrzení. Především jde o Perron-Frobeniovu větu a tvrzení, která se používají k jejímu důkazu. Perron-Frobeniova teorie je rozsáhleji zpracována v (Seneta, 1981) a (Lancaster a Tismenetsky, 1985), ze kterých jsem čerpala.

1. Markovské řetězce s oceněním přechodů

V následující kapitole zavedeme základní pojmy markovského řetězce s oceněním přechodů. Z něho pak odvodíme náhodnou posloupnost výnosů, zavedeme klíčový pojem užitkové funkce, a pomocí nich náhodnou posloupnost užitků.

1.1 Definice markovského řetězce

Definice 1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $T \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdná indexová množina, taková, že pro každé $t \in T$ je dána reálná náhodná veličina X_t na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Potom $X = (X_t)_{t \in T}$ nazveme *reálným náhodným procesem.*

V této práci se budeme zabývat pouze případem $T = \mathbb{N}_0$, a náhodný proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ budeme nazývat *náhodnou posloupností.* Kromě obecné reálné náhodné posloupnosti budeme využívat pojem (reálného) náhodného procesu s hodnotami v následující konečné množině

$$S = \{1, \ldots, N\}, \qquad N \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

tj. pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ je $X_n : \Omega \to S$ a $[X_n = s] \in \mathcal{A}$, kdykoliv $s \in S$.

Definice 2. Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. *Filtrací* na $(\Omega, \mathcal{A})$ rozumíme neklesající posloupnost $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ pod σ-algeber systému $\mathcal{A}$, tj. posloupnost σ-algeber na Ω, pro kterou platí $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

O reálném náhodném procesu $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ řekneme, že je $\mathcal{F}$*-adaptovaný*, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je náhodná veličina X_n měřitelná vůči σ-algebře $\mathcal{F}_n$ a pojmem *kanonická filtrace* posloupnosti X rozumíme posloupnost σ-algeber $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ takových, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\mathcal{X}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

Definice 3. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor a $\mathcal{F} = (\mathcal{F})_{n=0}^{\infty}$ filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$. Náhodnou posloupnost $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ s hodnotami v množině S, která je $\mathcal{F}$-adaptovaná nazveme $\mathcal{F}$*-markovskou*, pokud platí

$$\mathsf{P}(X_n = j | \mathcal{F}_k) \overset{\text{sj}}{=} \mathsf{P}(X_n = j | X_k), \qquad k \leq n, \quad n, k \in \mathbb{N}_0, \quad j \in S. \tag{1.2}$$

Poznámka. Podmínku (1.2) charakterizující $\mathcal{F}$-markovské řetězce nazýváme markovskou vlastností,

Definice 4. Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{P} \in [0, 1]^{N \times N}$ je *stochastická*, pokud platí

$$\mathbf{P}\mathbf{1} = \mathbf{1},$$

to jest, pokud všechny řádkové součty jsou rovny jedné.

Definice 5. Nechť je dána množina S, jako v (1.1) a stochastická matice $\mathbf{P}$, jejíž prvky budeme značit p_{ij}, nebo $p(i,j)$, pro $i, j \in S$. O náhodném $\mathcal{F}$-markovském procesu $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ s množinou stavů S řekneme, že je *homogenní s maticí pravděpodobností přechodu* $\mathbf{P}$, pokud

$$\mathsf{P}(X_{n+1} = j | X_n) \overset{\text{sj}}{=} \mathbf{1}_{\{X_n\}}^{\mathsf{T}} \mathbf{P} \mathbf{1}_{\{j\}} = p(X_n, j), \qquad j \in S, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.3}$$

Definice 6. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ je filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$. Buď dále $S = \{1, \ldots, N\}$ množina definovaná, jako v (1.1). Nechť $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ je $\mathcal{F}$-adaptovaná náhodná posloupnost s hodnotami v S. Nechť je dána stochastická matice $\mathbf{P} \in [0,1]^{N \times N}$ a posloupnost pravděpodobnostních měr $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_i)_{i=1}^{N}$ na prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$, pro které platí tzv. iniciační podmínka

$$\mathbb{P}_i(X_0 = i) = 1, \qquad i \in S. \tag{1.4}$$

Řekneme, že náhodný proces X je *homogenní $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodu* $\mathbf{P}$, je-li homogenní $\mathcal{F}$-markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_i)$ pro všechna $i \in S$.

Značení. Nechť je dán homogenní $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-markovský řetězec s konečnou množinou stavů S, jako v (1.1). Nechť $A \in \mathcal{A}$ je libovolný jev a Y je libovolná $\mathcal{A}$-měřitelná náhodná veličina, která je integrovatelná vůči všem mírám z $\mathbb{P}$. Potom zavedeme vektor pravděpodobností jevu A

$$\mathbb{P}(A) = (\mathbb{P}_i(A))_{i=1}^{N} \quad \in [0,1]^N,$$

a vektor středních hodnot náhodné veličiny $Y \in \cap_{i=1}^{N} \mathbb{L}_1(\mathbb{P}_i)$,

$$\mathbb{E}[Y] = (\mathbb{E}_i[Y])_{i=1}^{N} \quad \in \mathbb{R}^N,$$

kde $\mathbb{E}_i[Y]$ je střední hodnota náhodné veličiny Y na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_i)$.

Tvrzení 7. *Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ pravděpodobnostní prostor, na něm filtrace $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ a $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ buď $\mathcal{F}$-markovský řetězec. Nechť $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ je kanonická filtrace procesu X a $\mathcal{G}$ je filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$, taková, že*

$$\mathcal{X}_n \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Pak X je také $\mathcal{G}$-markovský řetězec.
(i) Pokud je X navíc homogenní $\mathcal{F}$-markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$, pak je také X homogenní $\mathcal{G}$-markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

Důkaz. Podle předpokladu je splněna markovská podmínka (1.2). Protože platí $\mathsf{P}(X_n = j | X_k) \in \mathbb{L}(\sigma(X_k)) \subseteq \mathbb{L}(\mathcal{G}_k)$ dle definice, a protože $\mathcal{G}_k \subseteq \mathcal{F}_k$, dostaneme iterováním podmíněných středních hodnot pro libovolný stav $j \in S$ a $k \leq n$.

$$\mathsf{P}(X_n = j | \mathcal{G}_k) \overset{\text{sj}}{=} \mathsf{E}[\mathsf{P}(X_n = j | \mathcal{F}_k) | \mathcal{G}_k] \overset{\text{sj}}{=} \mathsf{E}[\mathsf{P}(X_n = j | X_k) | \mathcal{G}_k] = \mathsf{P}(X_n = j | X_k).$$

(i) Tato část tvrzení plyne přímo z definice, neboť předpoklad i závěr mají stejný tvar daný vzorcem (1.3). $\square$

Důsledek 8. *Pokud je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ $\mathcal{F}$-markovský řetězec pro nějakou filtraci $\mathcal{F}$, potom je také $\mathcal{X}$-markovský, kde $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ je kanonická filtrace X.*

Definice 9. O náhodném procesu $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ řekneme, že je *markovský* (respektive $\mathbb{P}$-*markovský*), jestliže je $\mathcal{F}$-markovský (respektive $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-markovský) pro nějakou filtraci $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$, což je, dle důsledku 8, ekvivalentní tomu, že je markovský vzhledem ke své kanonické filtraci $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ (respektive, že je $(\mathcal{X}, \mathbb{P})$-markovský).

Analogicky bychom definovali pojem *homogenního markovského řetězce* (respektive *homogenního* $\mathbb{P}$-*markovského řetězce*) s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

Definice 10. Řekneme, že homogenní $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-markovský řetězec je *nerozložitelný a aperiodický*, pokud jeho matice pravděpodobností přechodu je nerozložitelná a aperiodická (viz. definice 49 a 50 v Appendixu A zabývající se teorií nezáporných matic).

1.2 Markovovy řetězce s oceněním přechodů

Definice 11. Nechť $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ je homogenní $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-markovský řetězec s množinou stavů $S = \{1, \ldots, N\}$, jako v (1.1), se stochastickou maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P} \in [0,1]^{N \times N}$ a nechť je navíc dána matice $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, jejíž prvky budeme značit z_{ij}, nebo také $z(i,j)$ a budeme je nazývat *oceněním přechodu ze stavu i do j* a matici $\mathbf{Z}$ budeme říkat *matice ocenění přechodu*. Definujme také *výnos* za n období jako

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} z(X_{k-1}, X_k), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.5}$$

Značení. Nechť je $S = \{1, \ldots, N\}$ množina, jako v (1.1), a nechť je dána reálná funkce $f : S \to \mathbb{R}$. Potom funkci f lze jednoznačně přiřadit vektor $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^N$ takový, že pro všechna $i \in S$ platí $\boldsymbol{f}_i = f(i)$. Také libovolnému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ lze jednoznačně přiřadit funkci $\boldsymbol{x} : S \to \mathbb{R}$, která každému $i \in S$ přiřadí i-tou složku vektoru $\boldsymbol{x}$.

Pokud je tedy $i \in S$, budeme pro libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$, respektive pro libovolnou funkci $f : S \to \mathbb{R}$ používat vektorový i funkční zápis, tj. $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}(i)$, respektive $f_i = f(i)$, a libovolnou funkci f ztotožňujeme s tímto jednoznačně určeným vektorem f.

Tvrzení 12. *Nechť $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ je homogenní $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-markovský řetězec s množinou stavů S, jako v (1.1), s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ a nechť je dána libovolná funkce $f : S \to \mathbb{R}$. Potom platí*

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbf{P}^n f, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Nejprve poznamenejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $i \in S$ existuje konečná střední hodnota $\mathbb{E}_i[f(X_n)]$, neboť $f(X_n)$ nabývá jen konečně mnoha reálných hodnot. To znamená, že obě strany rovnosti jsou dobře definované.

Ukážeme rovnost pro libovolnou funkci $f : S \to \mathbb{R}$ a postupovat budeme indukcí podle $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ dostaneme $\mathbb{E}[V_1] = \mathbf{P} f$ následujícím způsobem

$$\mathbb{E}_i[f(X_1)] = \sum_{j=1}^{N} f(j) \mathbb{P}_i(X_1 = j) = \sum_{j=1}^{N} f(j) p_{ij} = f^{\mathsf{T}} \boldsymbol{p}_i = (\mathbf{P} f)_i, \qquad i \in S.$$

a tedy vektorově

$$\mathbb{E}[f(X_1)] = \mathbf{P}f.$$

Nyní budeme předpokládat, že platí tvrzení pro $n-1 \in \mathbb{N}$, tj. předpokládáme, že pro libovolnou funkci $g : S \to \mathbb{R}^N$ platí $\mathbb{E}[g(X_{n-1})] = \mathbf{P}^{n-1}g$, a chceme ukázat, že pro funkci f platí $\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbf{P}^n f$. Pro libovolné $i \in S$ platí

$$\mathbb{E}_i[f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] \stackrel{\text{sj}}{=} \sum_{j=1}^{N} f(j)\mathbb{P}_i(X_n = j|\mathcal{F}_{n-1}).$$

Protože je proces $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ homogenním $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-markovským řetězcem s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$, dostaneme, že

$$\sum_{j=1}^{N} f(j)\mathbb{P}_i(X_n = j|X_{n-1}) \stackrel{\text{sj}}{=} \sum_{j=1}^{N} f(j)p(X_{n-1},j) = f^{\mathsf{T}}\boldsymbol{p}_{X_{n-1}} = \boldsymbol{p}_{X_{n-1}}^{\mathsf{T}} f.$$

Tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro vektorovou podmíněnou střední hodnotu platí

$$\mathbb{E}_i[f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] \stackrel{\text{sj}}{=} (\mathbf{P}f)(X_{n-1}).$$

A pro nepodmíněnou střední hodnotu dostaneme

$$\mathbb{E}_i[f(X_n)] = \mathbb{E}_i[\mathbb{E}_i[f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}_i[(\mathbf{P}f)(X_{n-1})]. \tag{1.6}$$

Použijeme indukční předpoklad na funkci $g(i) = \mathbf{1}_{\{i\}}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}f = (\mathbf{P}f)(i)$, $i \in S$ a dostaneme $\mathbb{E}[(\mathbf{P}f)(X_{n-1})] = \mathbf{P}^{n-1}\cdot(\mathbf{P}f) = \mathbf{P}^n f$. Pomocí vzorce (1.6) dále získáme

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[(\mathbf{P}f)(X_{n-1})] = \mathbf{P}^n f,$$

čímž je důkaz hotov. □

1.3 Exponenciální užitková funkce

Definice 13. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. O reálné funkci $u : I \to \mathbb{R}$ řekneme, že je *užitkovou funkcí*, pokud je rostoucí a konkávní na I.

Poznámka. Pro naše účely je tato definice dostačující, i když obecněji je možné definovat užitkové funkce i na uzavřených intervalech. V této práci se omezíme na speciální případ užitkové funkce, která je definovaná na celém $\mathbb{R}$, z toho důvodu pro jednoduchost nezavádíme obecnější definici.

Definice 14. Nechť je dána reálná náhodná veličina $V : \Omega \to \mathbb{R}$ a nechť u je užitková funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Potom definujeme *užitek z V při užitkové funkci u*, jako

$$U \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(V).$$

Definice 15. Nechť u je užitková funkce definovaná na $\mathbb{R}$ a nechť V je reálná náhodná veličina a U je užitek z V. Nechť existuje střední hodnota užitku $\mathsf{E}U \in \mathbb{R}$ (tj., pokud $u(V) \in \mathbb{L}_1$). Potom definujeme *jistotní ekvivalent náhodné veličiny V při užitkové funkci u* jako číslo $c = \mathsf{CE}(V) \in \mathbb{R}$, pro které je splněno

$$\mathsf{E}[u(V)] = u(c).$$

Pozorování 16. *Ke každé užitkové funkci u existuje inverzní funkce u^{-1} a jistotní ekvivalent se dá vyjádřit jako*

$$\mathsf{CE}_u(V) = u^{-1}\mathsf{E}[u(V)].$$

Důkaz. Z toho, že u je užitková funkce, platí, že je (ryze) rostoucí, a tedy je prostá, proto existuje inverzní funkce u^{-1}. Z toho, že u je díky konkávitě spojitá a navíc je rostoucí na otevřeném intervalu plyne, že i množina $\mathsf{range}(u) = \mathsf{dom}(u^{-1})$ je otevřený interval. Zbývá ukázat, že pro libovolnou reálnou náhodnou veličinu V je střední užitek $\mathsf{E}u(V) \in \mathsf{range}(u)$.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje V reálná náhodná veličina taková, že $\mathsf{E}u(V) \notin \mathsf{range}(u)$. Tedy jsou jen dvě možnosti. Buď pro všechna $v \in \mathsf{dom}(u) = \mathbb{R}$ platí $u(v) > \mathsf{E}u(V)$, a potom platí $U = u(V) > \mathsf{E}u(V) = \mathsf{E}U$, což je spor; nebo platí opačná nerovnost, $u(v) < \mathsf{E}u(V)$, $v \in \mathbb{R}$, a zcela analogicky dojdeme ke sporu. □

Definice 17. Pro užitkovou funkci $u(x)$, $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathbb{L}_1^u \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{V \in \mathbb{L} : u(V) \in \mathbb{L}_1\},$$

množinu náhodných veličin, které mají integrovatelný užitek.

Poznámka. Pro užitkovou funkci $u(x)$, $x \in \mathbb{R}$ a reálnou náhodnou veličinu $V \in \mathbb{L}_1^u$ platí

$$\mathsf{CE}(V) \leq \mathsf{E}(V).$$

Pokud je navíc $u(x)$ striktně konkávní na $\mathbb{R}$, pak se nabývá rovnosti, právě tehdy, když platí $V \stackrel{\text{sj}}{=} \mathsf{E}V$.

Definice 18. Nechť u, w jsou užitkové funkce definované na $\mathbb{R}$. Řekneme, že jsou *ekvivalentní*, pokud

$$\mathbb{L}_1^u = \mathbb{L}_1^w,$$

a pro všechny reálné náhodné veličiny $V \in \mathbb{L}_1^u$ platí

$$\mathsf{CE}_u(V) = \mathsf{CE}_w(V). \tag{1.7}$$

Poznámka. Takto definovaná ekvivalence mezi užitkovými funkcemi je relace ekvivalence triviálně z toho, že rovnost reálných čísel i rovnost množin jsou reflexivní, symetrické i tranzitivní.

Poznámka. Podmínka $\mathbb{L}_1^u = \mathbb{L}_1^w$ v definici 18 zajišťuje, že obě strany rovnosti (1.7) jsou definované zároveň.

Pozorování 19 (Ekvivalentní formulace maximalizační úlohy)**.** *Pro libovolnou užitkovou funkci u definovanou na $\mathbb{R}$ je $\mathsf{CE}_u(V)$ definované pro všechny V z $\mathbb{L}_1^u$ a pro libovolnou množinu náhodných veličin $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{L}_1^u$ platí*

$$\left(\mathsf{E}[u(V)] = \max_{W\in\mathcal{V}} \mathsf{E}[u(W)]\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\mathsf{CE}_u(V) = \max_{W\in\mathcal{V}} \mathsf{CE}_u(W)\right),$$

z toho, že funkce $u(x)$ je rostoucí na $\mathbb{R}$ a z definice jistotního ekvivalentu.

Důsledek 20. *Pro ekvivalentní užitkové funkce u, w, definované na $\mathbb{R}$ a libovolnou množinu $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{L}_1^u$ platí*

$$\left(\mathsf{E}u(V) = \max_{W\in\mathcal{V}}\{\mathsf{E}u(W)\} \in \mathbb{R}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\mathsf{E}w(V) = \max_{W\in\mathcal{V}}\{\mathsf{E}w(W)\} \in \mathbb{R}\right),$$

neboť z ekvivalence u a w plyne $\mathsf{CE}_u(V) = \mathsf{CE}_w(V)$, a obě strany jsou ekvivalentní

$$\mathsf{CE}_u(V) = \max_{W\in\mathcal{V}}\{\mathsf{CE}_u(W)\}.$$

Definice 21. Řekneme, že užitková funkce je *exponenciální s parametrem* $\gamma < 0$, pokud je tvaru

$$u_\gamma(x) = a - be^{\gamma x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

pro nějaké konstanty $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

Poznámka. Nechť u_γ je libovolná exponenciální užitková funkce s parametrem γ definovaná na $\mathbb{R}$ a nechť V je reálná náhodná veličina s pravděpodobnostním rozdělením P_V. Potom střední užitek z V při u_γ,

$$\mathsf{E}U_\gamma = \mathsf{E}(u_\gamma(V)) = \int_\Omega u_\gamma(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_V(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

je dobře definovaný, protože u_γ je shora omezená na celém $\mathbb{R}$.

Tvrzení 22. *Nechť je dáno $\gamma < 0$. Potom libovolné dvě exponenciální užitkové funkce s parametrem γ jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Zvolme $\gamma < 0$ pevné, parametry $a \in \mathbb{R}$ a $b < 0$ libovolné a označme $\tilde{u}(x) = a - be^{\gamma x}$, $x \in \mathbb{R}$. Dále označme $u(x) = -e^{\gamma x}$, $x \in \mathbb{R}$. Z toho, že ekvivalence užitkových funkcí je skutečně ekvivalencí plyne, že k důkazu tvrzení nám stačí ukázat ekvivalenci $u \sim \tilde{u}$.

Nechť V je reálná náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A})$ s pravděpodobnostním rozdělením P_V. Označíme $\tilde{U} = \tilde{u}(V)$, užitek z V při užitkové funkci, $\tilde{u}$ a $U = u(V)$, užitek při u. Potom

$$\mathsf{E}\tilde{U} = \int_\Omega a - be^{\gamma x}\,\mathrm{d}\mathsf{P}_V(x) = a - b\int_\Omega e^{\gamma x}\,\mathrm{d}\mathsf{P}_V(x) = a - b\mathsf{E}U.$$

Tedy $V \in \mathbb{L}_1^{\tilde{u}}$ právě tehdy, když $V \in \mathbb{L}_1^u$, neboť a i b jsou konečná reálná čísla. Nyní zbývá ukázat, že $\mathsf{CE}_{\tilde{u}}(V) = \mathsf{CE}_u(V)$. Použijeme-li u^{-1} a $\tilde{u}^{-1}$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathsf{CE}_{\tilde{u}}(V) = \tilde{u}^{-1}\mathsf{E}\tilde{U} &= \frac{1}{\gamma}\log\left(-\frac{a - \mathsf{E}\tilde{U}}{b}\right) \\
&= \frac{1}{\gamma}\log\frac{-a + \int_\Omega (a - be^{\gamma x})\,\mathrm{d}\mathsf{P}_V(x)}{b} \\
&= \frac{1}{\gamma}\log\left(-\int_\Omega e^{\gamma x}\,\mathrm{d}\mathsf{P}_V(x)\right) = u^{-1}\mathsf{E}U = \mathsf{CE}_u(V).
\end{aligned}$$

□

Poznámka. Vidíme, že jistotní ekvivalent pro exponencíální užitkovou funkci nezávisí na parametrech a a b z definice 21, ale pouze na parametru γ. Pokud neřekneme jinak, budeme uvažovat exponenciální užitkovou funkci ve tvaru

$$u_\gamma(x) = -e^{x\gamma}, \qquad \gamma < 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Definice 23. Nechť u je užitková funkce, která je dvakrát diferencovatelná na $\mathbb{R}$. Definujeme *míru absolutní averze vůči riziku užitkové funkce* u, jako funkci

$$\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Míra absolutní averze vůči riziku je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ nezáporná a dobře definovaná pro všechny užitkové funkce, které jsou dvakrát diferencovatelné na $\mathbb{R}$, neboť u je rostoucí a konkávní na $\mathbb{R}$.

Pozorování 24. *Užitková funkce exponenciálního tvaru s parametrem γ má konstantní míru absolutní averze vůči riziku a to $\alpha(x) = -\gamma$, $x \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Postupným derivováním užitkové funkce získáme

$$u_\gamma(x) = a - be^{\gamma x}, \qquad u'_\gamma(x) = -\gamma b e^{\gamma x}, \qquad u''_\gamma(x) = -\gamma^2 b e^{\gamma x}.$$

Míru absolutní averze vůči riziku spočítáme z definice jako podíl derivací

$$\alpha(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\gamma, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

□

Poznámka (Limitní chování exponenciální užitkové funkce). Uvažujme užitkovou funkci v exponenciálním tvaru s parametry $a = -\frac{1}{\gamma}$ a $b = \frac{1}{\gamma}$, to jest

$$w_\gamma(x) = \frac{1}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1), x \in \mathbb{R}.$$

Potom funkce $w_\gamma(x)$ konverguje bodově k identické užitkové funkci pro $\gamma \to 0^-$.

Poznámka. Pro užitkovou funkci $u(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ a pro integrovatelnou náhodnou veličinu V je jistotní ekvivalent z V při u, $\mathsf{CE}_u(V)$, roven střední hodnotě $\mathsf{E}[V]$.

2. Posloupnost užitků náhodného procesu s oceněním přechodů

V následující kapitole se zaměříme na posloupnost užitků, získanou z posloupnosti výnosů, spojených s přechody mezi stavy náhodného procesu. V průběhu celé kapitoly budeme používat následující značení.

Značení. Označme $S = \{1, \ldots, N\}$ množinu, jako v (1.1). Dále budeme uvažovat měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$, na němž je definován náhodný proces $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ s hodnotami v S.

Nechť $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=0}^{N} \in [0,1)^{N\times N}$ je nerozložitelná aperiodická stochastická matice a $\mathbf{Z} = (z_{ij})_{i,j=0}^{N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ reálná matice ocenění přechodu. Označme posloupnost výnosů $(V_n)_{n=0}^{\infty}$, jako byla definována v (1.5).

Dále bude vždy platit jeden z následujících předpokladů. Nechť je dána pravděpodobnostní míra P na $(\Omega,\mathcal{A})$, taková, že X je homogenní markovský řetězec se stavy v S a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$, a nebo je dána posloupnost pravděpodobnostních měr $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_i)_{i=1}^{N}$ a filtrace $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, taková, že X je homogenní $(\mathcal{F},\mathbb{P})$-markovský řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. V konkrétním případě bude vždy uvedeno, který z předpokladů budeme používat.

Navíc budeme v celé kapitole pracovat s exponenciální užitkovou funkcí u, definovanou v (1.8).

2.1 Základní vlastnosti posloupnosti užitků

Pozorování 25. *Označme $(U_{\gamma,n})_{n=0}^{\infty}$ posloupnost užitků, definovanou předpisem $U_{\gamma,n} = u_\gamma(V_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Potom platí $U_{\gamma,0} = -1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$U_{\gamma,n} = -e^{\gamma \sum_{k=1}^{n} z(X_{k-1},\, X_k)} = -\prod_{k=1}^{n} e^{\gamma z(X_{k-1},\, X_k)} = U_{\gamma,n-1} e^{\gamma z(X_{n-1},\, X_n)}.$$

Poznámka. Pokud není řečeno jinak uvažujeme γ pevné a budeme používat značení $U_{\gamma,n} = U_n$ a rekurentní vzorec

$$U_n = U_{n-1} e^{\gamma z(X_{n-1},\, X_n)}, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

bude základem dalších výpočtů.

Věta 26. *Nechť X je homogenní markovský řetězec na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Potom užitkový proces $U = (U_n)_{n=0}^{\infty}$ má následující podmíněné střední hodnoty*

$$\mathsf{E}[U_n|\mathcal{F}_0] \overset{sj}{=} \boldsymbol{u}^{(n)}(X_0), \qquad kde \qquad \boldsymbol{u}^{(n)} \overset{\text{def}}{=\!=} -\mathbf{B}^n \cdot \mathbf{1} \tag{2.2}$$

a kde je matice $\mathbf{B} \overset{\text{def}}{=\!=} (b_{ij})_{i,j=1}^{N}$ sestavená z následujících prvků

$$b_{ij} \overset{\text{def}}{=\!=} p_{ij} e^{\gamma z_{ij}}, \qquad i,j \in S. \tag{2.3}$$

Důkaz. Ukážeme silnější tvrzení, a to, že

$$\mathsf{E}[U_n|\mathcal{F}_k] \overset{\text{sj}}{=} \boldsymbol{u}^{(n-k)}(X_n) \cdot |U_k|, \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Postupovat přitom budeme indukcí podle $l := n - k$. Je-li $l = 0$, to znamená $n = k$, pak rovnost (2.4) plyne z toho, že $\boldsymbol{u}^{(0)} = -1$ a z toho, že U_n je vždy záporné, a tedy $|U_n| = -U_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Nyní budeme předpokládat (2.4) pro $k = n, n-1, \ldots, n-l+1$ a ukážeme, že (2.4) platí také pro $k = n - l$, čímž rovnost dokážeme indukcí podle l. Z indukčního předpokladu tedy plyne první rovnost v

$$\mathsf{E}[U_n|\mathcal{F}_{n-l+1}] \overset{\text{sj}}{=} \boldsymbol{u}^{(l-1)}(X_{n-l+1}) \cdot |U_{n-l+1}| = -U_{n-l}e^{\gamma z(X_{n-l},\, X_{n-l+1})} \cdot \boldsymbol{u}^{(l-1)}(X_{n-l+1}),$$

zatímco druhou rovnost získáme aplikováním rekurentního vztahu (2.1), a z toho, že proces U nabývá jen záporných hodnot dle definice. Pak ovšem

$$\mathsf{E}[U_n|\mathcal{F}_{n-l}] \overset{\text{sj}}{=} \mathsf{E}[\mathsf{E}[U_n|\mathcal{F}_{n-l+1}]|\mathcal{F}_{n-l}] \overset{\text{sj}}{=} |U_{n-l}|\, \mathsf{E}[e^{\gamma z(X_{n-l},\, X_{n-l+1})}\boldsymbol{u}^{(l-1)}(X_{n-l+1})|\mathcal{F}_{n-l}].$$

Nyní již zbývá ukázat, že platí následující rovnost

$$\mathsf{E}[e^{\gamma z(X_{n-l},\, X_{n-l+1})}\boldsymbol{u}^{(l-1)}(X_{n-l+1})|\mathcal{F}_{n-l}] \overset{\text{sj}}{=} \boldsymbol{u}^{(l)}(X_{n-l}). \tag{2.5}$$

Pomocí následující rovnosti a markovské vlastnosti

$$e^{\gamma z(X_{n-l},\, X_{n-l+1})}\boldsymbol{u}^{(l-1)}(X_{n-l+1}) = \sum_{j \in S} \boldsymbol{u}^{(l-1)}(j)e^{\gamma z(X_{n-l},\, j)}\mathbf{1}_{[X_{n-l+1}=j]}, \tag{2.6}$$

dostaneme, že je až na množinu míry nula levá strana (2.5) rovna

$$\begin{aligned}\sum_{j\in S} \boldsymbol{u}_j^{(l-1)} e^{\gamma z(X_{n-l},\, j)} \mathsf{P}(X_{n-l} = j|X_{n-l+1}) &= \sum_{j\in S} \boldsymbol{u}_j^{(l-1)} e^{\gamma z(X_{n-l},\, j)} p(X_{n-l}, j) \\ &= \sum_{j\in S} \boldsymbol{u}_j^{(l-1)} b(X_{n-l}, j) = \mathbf{1}^{\intercal}_{\{X_{n-l}\}}\mathbf{B}\boldsymbol{u}^{(l-1)} = \boldsymbol{u}^{(l)}(X_{n-l}),\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{u}_j^{(n)} \overset{\text{def}}{=\!=} \boldsymbol{u}^{(n)}(j)$ značí j-tou složku vektoru $\boldsymbol{u}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. □

Poznámka. V následující větě budeme používat pojmy spektrálního poloměru a geometrické násobnosti vlastního čísla, které jsou definovány v definici 52 v Appendixu A.

Věta 27. *Označme* $\mathbf{B}$ *matici z věty 26. Potom* $\mathbf{B}$ *je nezáporná nerozložitelná a aperiodická. Označme* λ *její vlastní číslo takové, že* $\mu_{\mathbf{B}} = |\lambda|$. *Potom* $\lambda > 0$ *a jeho geometrická násobnost je rovna jedné. Dále existuje kladný pravý vlastní vektor* $\boldsymbol{x}$ *matice* $\mathbf{B}$ *příslušný* λ.

Důkaz. Matice $\mathbf{P}$ je nezáporná, nerozložitelná a aperiodická podle předpokladů věty. Číslo $e^{\gamma z}$ je kladné pro všechna $z \in \mathbb{R}$, a proto prvek b_{ij} matice $\mathbf{B}$ je nulový, právě tehdy, když prvek p_{ij} matice $\mathbf{P}$ je roven nule.

Podle poznámky na straně 23 z kapitoly A závisí nerozložitelnost a aperiodicita nezáporné matice výhradně na postavení kladných prvků. Z toho plyne, že matice $\mathbf{B}$ je nerozložitelná a aperiodická, neboť je matice $\mathbf{P}$ dle předpokladu nerozložitelná a aperiodická. Ostatní závěry plynou aplikováním Perron-Frobeniovy věty 61 na matici $\mathbf{B}$. □

Značení. Nadále budeme značit $\mathbf{B}$, příslušnou matici, definovanou v (2.3). Označme λ, její vlastní číslo, pro které platí $\mu_{\mathbf{B}} = \lambda$, kde $\mu_{\mathbf{B}}$ je spektrální poloměr matice $\mathbf{B}$ a $\boldsymbol{x}$ příslušný pravý vlastní vektor, který má všechny složky kladné a pro určitost navíc požadujeme, aby $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = 1$.

Poznámka. Následující věta bude zobecněním věty 26, a její důkaz bude analogický.

Věta 28. *Pro homogenní* $(\mathcal{F},\mathbb{P})$ *markovský řetězec* X*, příslušnou posloupnost užitků* U_n *a libovolný* N*-rozměrný vektor* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$ *platí*

$$\mathbb{E}_i[U_n \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_n\}}\boldsymbol{a}|\mathcal{F}_k] \overset{sj}{=} U_k \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_k\}}\mathbf{B}^{n-k}\boldsymbol{a}, \qquad k \le n, \quad n,k \in \mathbb{N}, \quad i \in S. \tag{2.7}$$

Důkaz. Dokážeme indukcí podle $m = n - k$. Označme pro každé $m \in \{0,\ldots,n\}$ výrok $\Psi(m)$, který zní

$$\mathbb{E}_i[U_n \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_n\}}\boldsymbol{a}|\mathcal{F}_{n-m}] \overset{sj}{=} U_{n-m} \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_{n-m}\}}\mathbf{B}^{m}\boldsymbol{a}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad i \in S. \tag{2.8}$$

Ukážeme, že $\Psi(m)$ platí pro všechna $m = 0, \ldots, n$. Nejprve uvažujme $m = 0$ a vidíme, že $\Psi(0)$, platí triviálně.

Při indukčním kroku budeme předpokládat, že platí $\Psi(m-1)$ a budeme se snažit ukázat, že platí $\Psi(m)$. Tedy předpokládáme, že platí vlastnost (2.7), pro $k = n - m + 1$, a naším cílem je ukázat (2.7) pro $k = \kappa := n - m$. Předpokládáme tedy, že

$$\mathbb{E}_i[U_n \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_n\}}\boldsymbol{a}|\mathcal{F}_{\kappa+1}] \overset{sj}{=} U_{\kappa+1} \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_{\kappa+1}\}}\mathbf{B}^{n-(\kappa+1)}\boldsymbol{a}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad i \in S.$$

Použijeme iterování podmíněné střední hodnoty vnořenost σ-algeber $\mathcal{F}_\kappa \subseteq \mathcal{F}_{\kappa+1}$ a z získáme

$$\mathbb{E}_i[U_n \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_n\}}\boldsymbol{a}|\mathcal{F}_\kappa] \overset{sj}{=} \mathbb{E}_i[\mathbb{E}_i[U_n \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_n\}}\boldsymbol{a}|\mathcal{F}_{\kappa+1}]|\mathcal{F}_\kappa] \overset{sj}{=} \mathbb{E}_i[U_{\kappa+1} \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_{\kappa+1}\}}\mathbf{B}^{n-\kappa-1}\boldsymbol{a}|\mathcal{F}_\kappa].$$

Dále využijeme rekurentní vzorec (2.1), tj. $U_{\kappa+1} = U_\kappa e^{\gamma z(X_\kappa,\, X_{\kappa+1})}$, a dostaneme tak

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i[U_n \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_n\}}\boldsymbol{a}|\mathcal{F}_\kappa] &\overset{sj}{=} \mathbb{E}_i[U_\kappa e^{\gamma z(X_\kappa,\, X_{\kappa+1})} \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_{\kappa+1}\}}\boldsymbol{a}|\mathcal{F}_\kappa] \\ &\overset{sj}{=} U_\kappa \mathbb{E}_i\left[\sum_{j\in S} \mathbf{1}_{[X_{\kappa+1}=j]} e^{\gamma z(X_\kappa,\, j)} \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{j\}}\boldsymbol{a}|\mathcal{F}_\kappa\right].\end{aligned}$$

Dále použijeme markovskou vlastnost a homogenitu řetězce X, což nám dává $\mathbb{P}_i[X_{\kappa+1} = j|\mathcal{F}_\kappa] \overset{sj}{=} \mathbb{P}_i[X_{\kappa+1} = j|X_\kappa] \overset{sj}{=} p(X_\kappa, j)$, a následně využijeme definici matice $\mathbf{B}$ z (2.3). Konkrétně tedy platí $e^{\gamma z(X_\kappa, j)}p(X_\kappa, j) = b(X_\kappa, j) = \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_\kappa\}}\mathbf{B}\mathbf{1}_{\{j\}}$, pro všechna $j \in S$, a tedy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i[U_n \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_n\}}\boldsymbol{a}|\mathcal{F}_\kappa] &\overset{sj}{=} U_\kappa \sum_{j\in S} e^{\gamma z(X_\kappa,\, j)} \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{j\}}\mathbf{B}^{n-\kappa-1}\boldsymbol{a}\mathbb{P}_i[X_{\kappa+1} = j|\mathcal{F}_\kappa] \\ &\overset{sj}{=} U_\kappa \sum_{j\in S} b(X_\kappa, j)\mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{j\}}\mathbf{B}^{n-\kappa-1}\boldsymbol{a} = U_\kappa \mathbf{1}^{\mathsf{T}}_{\{X_\kappa\}}\mathbf{B}^{n-\kappa}\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

A tímto jest dokázáno $\Psi(m)$ pro všechna $m = 0, \ldots, n$, a tedy platí (2.7). $\square$

Věta 29 (Limití chování středního užitku)**.** *Pro posloupnost* $(\boldsymbol{u}^{(n)})_{n=0}^{\infty}$*, definovanou pomocí matice* $\mathbf{B}$*, jako v (2.2), platí*

$$\boldsymbol{u}^{(n)} = -\lambda^n(k\boldsymbol{x} + o(\mathbf{1})), \qquad n \to \infty,$$

pro konstantu $k > 0$*, která je tvaru* $\frac{\boldsymbol{y}^T\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}}$*, kde* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{y}$ *jsou pravý a levý vlastní vektor* $\mathbf{B}$ *příslušný* λ*.*

Důkaz. Podle tvrzení 26 platí pro střední výnosy

$$\boldsymbol{u}^{(n)} = -\mathbf{B}^n\mathbf{1}.$$

A pomocí věty 65 z Appendixu A o Perron-Frobeniově teorii je

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}\mathbf{B}^n\mathbf{1} = k\boldsymbol{x}, \qquad \text{kde} \qquad k = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} > 0.$$

Proto

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}\boldsymbol{u}^{(n)} = -k\boldsymbol{x}.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{u}^{(n)} + \lambda^n k\boldsymbol{x}}{\lambda^n} = 0,$$

což je ekvivalentní rovnosti ve větě. □

Poznámka. Připomeňme, že v kontextu věty 26 je

$$\boldsymbol{u}^{(n)}(X_0) \overset{\text{sj}}{=} \mathsf{E}[U_n|\mathcal{F}_0],$$

a tedy platí

$$\mathsf{E}[U_n|\mathcal{F}_0] \overset{\text{sj}}{=} -\lambda^n(k\boldsymbol{x}(X_0) + o(1)), \quad n \to \infty.$$

Značení. Nechť je dán $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-markovský řetězec X a V_n je náhodná veličina výnosů za n období taková, že $u(V_n) \in \cap_{i=1}^N \mathbb{L}_1(\mathbb{P}_i)$. Potom je jistotní ekvivalent $\mathsf{CE}(V_n)$ dobře definován při libovolné pravděpodobnostní míře $\mathsf{P} \in \mathbb{P}$, a vektor jistotních ekvivalentů výnosu za n období budeme značit

$$\mathbb{CE}^{(n)} = (\mathbb{CE}_i^{(n)})_{i\in S}, \qquad \text{kde} \quad \mathbb{CE}_i^{(n)} = u^{-1}(\mathbb{E}_i[u(V_n)]).$$

Věta 30. *Pro vektor jistotních ekvivalentů výnosů z homogenního* $(\mathcal{F},\mathbb{P})$*-markovského řetězce* X *platí následující vztah*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{CE}^{(n)} = \frac{1}{\gamma}\log\lambda \cdot \mathbf{1}. \tag{2.9}$$

Důkaz. Počítáme užitek a jistotní ekvivalent vzhledem k exponenciální užitkové funkci $u(x) = -e^{\gamma x}$. K ní inverzní je funkce $u^{-1}(y) = \frac{1}{\gamma}\log(-y)$. Pokud tedy dosadíme $\boldsymbol{u}_i^{(n)} = \mathbb{E}_i[u(V_n)]$ do u^{-1}, dostaneme pro libovolné $i \in S$

$$\mathbb{CE}_i^{(n)} = \frac{1}{\gamma}\log(-\boldsymbol{u}_i^{(n)}).$$

A pokud použijeme rovnost $\boldsymbol{u}_i^{(n)} = -\lambda^n(k\boldsymbol{x}_i + o(1)), n \to \infty$, která platí podle věty 29, potom dostaneme

$$\mathbb{CE}_i^{(n)} = \frac{1}{\gamma}\log[\lambda^n(k\boldsymbol{x}_i + o(1))] = \frac{n}{\gamma}\log\lambda + \frac{1}{\gamma}\log k\boldsymbol{x}_i + o(1), \qquad n \to \infty.$$

A z toho plyne věta limitním přechodem pro $n \to \infty$. □

2.2 Množina řízení a iterační algoritmus k hledání optimálního řízení

Definice 31. Nechť je dána množina $S = \{1, \ldots, N\}$, jako v (1.1). Nechť pro všechna $i \in S$ existuje neprázdná, konečná množina R_i, taková, že pro každé $r \in R_i$ je dán vektor $\boldsymbol{p}_i(r) \in [0,1]^N$, pro který platí $\boldsymbol{p}_i(r)^\intercal \mathbf{1} = 1$. Potom množinu R_i nazveme *množinou rozhodnutí ve stavu* i a vektor $\boldsymbol{p}_i(r)$ *vektorem pravděpodobností přechodu ze stavu* i. Dále množinu

$$\mathcal{R} = \prod_{i \in S} R_i$$

budeme nazývat *množinou řízení* a pro každé $\varrho \in \mathcal{R}$ definujeme stochastickou matici ${}_\varrho\mathbf{P} = (\boldsymbol{p}_i^\intercal(\varrho_i))_{i=1}^N$, kterou nazveme *maticí pravděpodobností přechodu při řízení* ϱ.

Předpoklad 32. Pro libovolné řízení $\varrho \in \mathcal{R}$ a příslušnou matici pravděpodobností přechodu ${}_\varrho\mathbf{P}$, budeme předpokládat, že tato matice je nerozložitelná a aperiodická.

Definice 33. Nechť S je množina, jako v (1.1) a $\mathcal{R}$ je množina řízení z definice 31. Nechť pro každé $i \in S$ a $r \in R_i$ existuje kromě vektoru $\boldsymbol{p}_i(r) = (\boldsymbol{p}_{ij}(r))_{j=1}^N$ také vektor $\boldsymbol{z}_i(r) = (\boldsymbol{z}_{ij}(r))_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$, který budeme nazývat *vektorem ocenění přechodů.* Podobně, jako ${}_\varrho\mathbf{P}$ v definici 31 zavedeme matici ${}_\varrho\mathbf{Z} = (\boldsymbol{z}_i^\intercal(\varrho_i))_{i=1}^N$, nazvanou *matice ocenění přechodů.* Dále pro každé $i \in S$ a $r \in R_i$ zavedeme vektor

$$\boldsymbol{b}_i(r) = (\boldsymbol{b}_{ij}(r))_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N, \qquad \text{kde} \qquad \boldsymbol{b}_{ij}(r) = \boldsymbol{p}_{ij}(r) \cdot e^{\gamma \boldsymbol{z}_{ij}(r)}, \qquad i, j \in S,$$

a pro každé $\varrho \in \mathcal{R}$ zavedeme matici ${}_\varrho\mathbf{B} = (\boldsymbol{b}_i^\intercal(\varrho_i))_{i=1}^N$.

Poznámka. Nechť je dáno řízení $\varrho \in \mathcal{R}$ a příslušné matice ${}_\varrho\mathbf{P}$ a ${}_\varrho\mathbf{Z}$. Označme matici $\mathbf{B}$, definovanou, jako v (2.3) pomocí matic $\mathbf{P} = {}_\varrho\mathbf{P}$ a $\mathbf{Z} = {}_\varrho\mathbf{Z}$. Potom platí rovnost $\mathbf{B} = {}_\varrho\mathbf{B}$, kde ${}_\varrho\mathbf{B}$ je matice z definice 33.

Značení. Pro množinu řízení $\mathcal{R}$ na S, pro kterou platí předpoklad 32 a pro libovolné řízení $\varrho \in \mathcal{R}$ označme ${}_\varrho\mathbf{P} = (\boldsymbol{p}_i^\intercal(\varrho_i))_{i=1}^N = (\boldsymbol{p}_{ij}(\varrho_i))_{i,j=1}^N$, matici pravděpodobností přechodu při ϱ, ${}_\varrho\mathbf{Z} = (\boldsymbol{z}_i^\intercal(\varrho_i))_{i=1}^N = (\boldsymbol{z}_{ij}(\varrho_i))_{i,j=1}^N$, matici ocenění při ϱ, a matici ${}_\varrho\mathbf{B} = (\boldsymbol{b}_i^\intercal(\varrho_i))_{i=1}^N = (\boldsymbol{b}_{ij}(\varrho_i))_{i,j=1}^N$.

Podle věty 27, pro matici ${}_\varrho\mathbf{B}$ dostaneme existenci ${}_\varrho\lambda$, vlastního čísla matice ${}_\varrho\mathbf{B}$, takového, že ${}_\varrho\lambda = \mu_{{}_\varrho\mathbf{B}}$ a příslušného vlastního vektoru ${}_\varrho\boldsymbol{x}$, který má všechny složky kladné a pro který platí ${}_\varrho\boldsymbol{x}^\intercal_\varrho\boldsymbol{x} = 1$.

Definice 34. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a na něm náhodná posloupnost $X = (X_n)_{n=0}^\infty$ s množinou stavů S, jako v (1.1). Nechť na $(\Omega, \mathcal{A})$ je definována posloupnost pravděpodobnostních měr $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_i)_{i=1}^N$, pro které platí iniciační podmínka (1.4). Nechť $\mathcal{R}$ je množina řízení na S a $\varrho \in \mathcal{R}$.

Řekneme, že X *se řídí řízením* $\varrho \in \mathcal{R}$, pokud X je homogenní $\mathbb{P}$-markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodů ${}_\varrho\mathbf{P}$.

Pokud je navíc dána matice ocenění přechodu při ${}_\varrho\mathbf{Z}$, potom pro X definujeme *posloupnost výnosů při* ϱ, ${}_\varrho V = ({}_\varrho V_n)_{n=0}^\infty$ předpisem

$$ {}_\varrho V_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}^\intercal_{\{X_{k-1}\}} \cdot {}_\varrho\mathbf{Z} \cdot \mathbf{1}_{\{X_k\}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.10}$$

Dále definujeme ${}_\varrho U = ({}_\varrho U_n)_{n=0}^\infty$, náhodnou posloupnost *užitků při* ϱ předpisem

$$ {}_\varrho U_n = u({}_\varrho V_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.11} $$

Pro libovolné $\varrho \in \mathcal{R}$ a pro $n \in \mathbb{N}_0$ také definujeme ${}_\varrho\mathbb{CE}_i^{(n)}$, jako vektor jistotního ekvivalentu náhodné veličiny ${}_\varrho V_n$, při užitkové funkci u.

Definice 35. Buď S, množina, jako v (1.1), $\mathcal{R}$ množina řízení s oceněním na S a $X = (X_n)_{n=0}^\infty$. O řízení $\hat{\varrho} \in \mathcal{R}$ řekneme, že je *optimální*, pokud platí

$$ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} {}_{\hat{\varrho}}\mathbb{CE}_i^{(n)} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} {}_\varrho\mathbb{CE}_i^{(n)}, \qquad \varrho \in \mathcal{R}, \quad i \in S. $$

Značení. Pro libovolnou reálnou funkci f a množinu $D \subseteq \mathsf{dom}(f)$ označíme množinu $\operatorname{Argmax}_{x\in D} f(x) \subseteq D$, definovanou následujícím předpisem

$$ \operatorname*{Argmax}_{x\in D} f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \{y \in D \,:\, f(y) = \sup_{x\in D} f(x)\}. $$

Analogicky bychom definovali množinu $\operatorname{Argmin}_{x\in D} f(x) \subseteq D$.

Poznámka. Z konečnosti množiny řízení je možné definovat optimální řízení $\hat{\varrho}$ při užitkové funkci $u_\gamma(x)$ z (1.8) předpisem

$$ \hat{\varrho} \in \operatorname*{Argmax}_{\varrho\in\mathcal{R}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} {}_\varrho\mathbb{CE}_i^{(n)} = \operatorname*{Argmax}_{\varrho\in\mathcal{R}} \frac{1}{\gamma} \log {}_\varrho\lambda = \operatorname*{Argmin}_{\varrho\in\mathcal{R}} {}_\varrho\lambda, \qquad i \in S, $$

zřejmě z definice, podle vzorce (2.9) z věty 30, a nakonec použijeme $\gamma < 0$ a to, že logaritmus je rostoucí funkce.

Věta 36 (Kritérium optimality)**.** *Buď $\hat{\varrho} \in \mathcal{R}$ řízení takové, že pro každé $\varrho \in \mathcal{R}$ platí*

$$ {}_\varrho\mathbf{B}_{\hat{\varrho}}\boldsymbol{x} \geq {}_{\hat{\varrho}}\lambda_{\hat{\varrho}}\boldsymbol{x}, \tag{2.12} $$

potom je $\hat{\varrho}$ optimální řízení ve smyslu definice 35.

Důkaz. Nechť $\hat{\varrho}$, $\varrho \in \mathcal{R}$ jsou řízení splňující nerovnost (2.12), ukážeme, že potom platí ${}_{\hat{\varrho}}\lambda \leq {}_\varrho\lambda$, což nám stačí k tomu, abychom měli optimalitu $\hat{\varrho}$. Označme

$$ \begin{aligned} \hat{\mathbf{B}} &:= {}_{\hat{\varrho}}\mathbf{B}, \quad \mathbf{B} := {}_\varrho\mathbf{B}, \\ \hat{\lambda} &:= {}_{\hat{\varrho}}\lambda, \quad \lambda := {}_\varrho\lambda, \\ \hat{\boldsymbol{x}} &:= {}_{\hat{\varrho}}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} := {}_\varrho\boldsymbol{x}. \end{aligned} $$

Zřejmě platí $\hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\lambda}\hat{\boldsymbol{x}}$ a vektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ má všechny prvky kladné a lze jimi dělit. Navíc podle předpokladu (2.12) je $\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{x}} \geq \hat{\lambda}\hat{\boldsymbol{x}}$ a tedy pro všechna $i \in S$ platí:

$$ \hat{\lambda} \leq \frac{(\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{x}})_i}{\hat{\boldsymbol{x}}_i}, \qquad \text{a tedy i} \qquad \hat{\lambda} \leq \min_{j\in S} \frac{(\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{x}})_j}{\hat{\boldsymbol{x}}_j}, $$

kde existence minima plyne z konečnosti množiny S. Použijeme větu 67 z kapitoly A pro matici $\mathbf{B}$, příslušné vlastní číslo λ a kladný vektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ a dostaneme

$$ \lambda \geq \min_{j\in S} \frac{(\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{x}})_j}{\hat{\boldsymbol{x}}_j}. $$

Tedy zřejmě platí požadovaná nerovnost

$$ \hat{\lambda} \leq \min_{j\in S} \frac{(\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{x}})_j}{\hat{\boldsymbol{x}}_j} \leq \lambda, $$

čímž je důkaz hotov a ϱ je skutečně optimální řízení ve smyslu definice 35. □

Definice 37 (Iterační algoritmus)**.** Nechť je dáno řízení $\varrho(0) \in \mathcal{R}$. Zkonstruujeme posloupnost $(\varrho(n))_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}_0}$ splňující

(1) $\varrho_i(n+1) \in \operatorname*{Argmin}_{r \in R_i} \boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(r)\,{}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}$,

(2) $\varrho_i(n+1) = \varrho_i(n)$, pokud $\varrho_i(n) \in \operatorname*{Argmin}_{r \in R_i} \boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(r)\,{}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}$.

Popsaný algoritmus nazýváme *iteračním*, a $(\varrho(n))_{n=0}^{\infty}$ nazveme posloupností řízení získanou *iteračním algoritmem.*

Poznámka. Z podmínky (1) v definici 37 plyne, že pro každé $i \in S$ a pro všechna $r \in R_i$ platí

$$\boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(r)\,{}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(\varrho_i(n+1))\,{}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.13}$$

a tedy i pro $r = \varrho_i(n)$ platí nerovnost (2.13) a pokud pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(n+1) \neq \varrho(n)$, potom existuje $i \in S$, pro které platí ostrá nerovnost

$$\boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(\varrho_i(n+1))\,{}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(\varrho_i(n))\,{}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x},$$

jinak bychom došli ke sporu s podmínkou (2) v definici 37, neboť minima by se nabývalo také v $\varrho(n)$.

Tvrzení 38. *Nechť $(\varrho(n))_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}_0}$ je posloupnost řízení získaná iteračním algoritmem. Pokud pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\varrho(n) = \varrho(n+1)$, potom také pro libovolné $m > n$ platí $\varrho(m) = \varrho(n)$.*

Důkaz. Ukážeme tvrzení, ze kterého plyne věta, a to, že platí následující

$$\varrho(n) = \varrho(n+1) = \cdots = \varrho(n+k), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Postupovat budeme indukcí podle $k \in \mathbb{N}$. Nejprve uvažujme $k = 1$, potom (2.14) je ekvivalentní předpokladu věty a platí triviálně. Pro $k > 1$ předpokládáme, že platí rovnosti $\varrho(n) = \varrho(n+1) = \cdots = \varrho(n+k-1)$, tj. speciálně, že platí $\varrho(n+k-2) = \varrho(n+k-1)$. Z toho plyne pro příslušné vektory ${}_{\varrho(n+k-2)}\boldsymbol{x} = {}_{\varrho(n+k-1)}\boldsymbol{x}$. a tedy z podmínky (1) v definici 37 máme pro libovolné $i \in S$ rovnost

$$\varrho_i(n+k-1) \in \operatorname*{Argmin}_{r \in R_i} \boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(r)\,{}_{\varrho(n+k-2)}\boldsymbol{x} = \operatorname*{Argmin}_{r \in R_i} \boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(r)\,{}_{\varrho(n+k-1)}\boldsymbol{x},$$

a podle (2) z definice 37 máme, že $\varrho_i(n+k) = \varrho_i(n+k-1)$. $\square$

Tvrzení 39. *Buď $(\varrho(n))_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}_0}$ posloupnost řízení získaná iteračním algoritmem 37. Potom existuje index $n_0 \in \mathbb{N}_0$, takový, že pro všechna $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(n) = \varrho(n_0)$.*

Důkaz. Z předchozího tvrzení 38 víme, že pokud existuje $k \in \mathbb{N}$, takové, že platí $\varrho(k+1) = \varrho(k)$, potom věta platí, neboť pro všechna $m > k$ platí $\varrho(m) = \varrho(k)$. Ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že platí $\varrho(n+1) \neq \varrho(n)$, platí také ${}_{\varrho(n+1)}\lambda < {}_{\varrho(n)}\lambda$. Z předpokladu konečnosti množiny $\mathcal{R}$, a tedy i množiny $\{{}_{\varrho}\lambda\}_{\varrho \in \mathcal{R}}$ bude plynout, že ${}_{\varrho(n+1)}\lambda < {}_{\varrho(n)}\lambda$, a tedy $\varrho(n+1) \neq \varrho(n)$, může nastat jen pro konečně mnoho indexů n.

V následující části důkazu budeme fixovat $n \in \mathbb{N}_0$ pevné, libovolné, a budeme předpokládat, že $\varrho(n+1) \neq \varrho(n)$. Ukážeme, že potom ${}_{\varrho(n+1)}\lambda < {}_{\varrho(n)}\lambda$. Z definice 37 víme, že pro všechna $i \in S$ a $r \in R_i$ platí

$$\boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(\varrho_i(n+1))_{\varrho(n)}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(r)_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}.$$

Víme, že vektor $\boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(r)$ je řádkem matice ${}_{\rho}\mathbf{B} = ({}_{\rho}b_{ij})_{i,j=1}^{N}$, kdykoliv je $\rho \in \mathcal{R}$ takové, že $\rho_i = r$. A proto je vektor $\boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(\varrho_i(n+1))$ řádkem matice ${}_{\varrho(n+1)}\mathbf{B}$. Celkem tak dostáváme, že

$$\sum_{j \in S} {}_{\varrho(n+1)}b_{ij} \cdot {}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}_j \leq \sum_{j \in S} {}_{\rho}b_{ij} \cdot {}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}_j.$$

A tedy pro všechna $i \in S$, $n \in \mathbb{N}$ a $\rho \in \mathcal{R}$ platí

$$\big({}_{\varrho(n+1)}\mathbf{B} \cdot {}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}\big)_i \leq \big({}_{\rho}\mathbf{B} \cdot {}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}\big)_i,$$

Speciálně volbou $\rho = \varrho(n)$ pak získáme nerovnost

$$\big({}_{\varrho(n+1)}\mathbf{B} \cdot {}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}\big)_i \leq \big({}_{\varrho(n)}\mathbf{B} \cdot {}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}\big)_i, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.15}$$

Připomeňme, že pracujeme s $n \in \mathbb{N}_0$ libovolným, pevně zvoleným, pro které platí $\varrho(n+1) \neq \varrho(n)$. Označíme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}} &:= {}_{\varrho(n+1)}\mathbf{B}, & \mathbf{B} &:= {}_{\varrho(n)}\mathbf{B}, \\ \hat{\lambda} &:= {}_{\varrho(n+1)}\lambda, & \lambda &:= {}_{\varrho(n)}\lambda, \\ \hat{\boldsymbol{x}} &:= {}_{\varrho(n+1)}\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} &:= {}_{\varrho(n)}\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Chceme ukázat, že $\hat{\lambda} < \lambda$. Z nerovnosti (2.15) a z toho, že λ je vlastní číslo matice $\mathbf{B}$ a $\boldsymbol{x}$ je příslušný vlastní vektor máme pro všechna $i \in S$

$$\left(\hat{\mathbf{B}}\boldsymbol{x}\right)_i \leq \left(\mathbf{B}\boldsymbol{x}\right)_i = \lambda \boldsymbol{x}_i. \tag{2.16}$$

Rozebereme dvě možnosti, z nichž právě jedna musí platit.
(i) Předpokládejme, že vektor $\boldsymbol{x}$ je vlastním vektorem matice $\hat{\mathbf{B}}$ příslušným vlastnímu číslu $\hat{\lambda}$, tedy pro všechna $i \in S$ platí $\hat{\lambda}\boldsymbol{x}_i = \left(\hat{\mathbf{B}}\boldsymbol{x}\right)_i$. Připomeňme, že předpokládáme $\varrho(n+1) \neq \varrho(n)$. V souladu s konzervativní volbou $\varrho(n+1)$ existuje $i \in S$ takové, že (2.16) platí s ostrou nerovností (jinak bychom volili $\varrho(n+1) = \varrho(n)$), to znamená, že pro nějaké $i \in S$ platí

$$\left(\hat{\mathbf{B}}\boldsymbol{x}\right)_i < \lambda \boldsymbol{x}_i.$$

Použijeme-li $\hat{\mathbf{B}}\boldsymbol{x} = \hat{\lambda}\boldsymbol{x}$ z toho, že $\boldsymbol{x}$ je vlastním vektorem matice $\hat{\mathbf{B}}$ příslušným $\hat{\lambda}$, pro toto $i \in S$ pak dostaneme

$$\hat{\lambda}\boldsymbol{x}_i = \left(\hat{\mathbf{B}}\boldsymbol{x}\right)_i < \lambda \boldsymbol{x}_i, \qquad \text{a tedy} \qquad \hat{\lambda} < \lambda,$$

protože $\boldsymbol{x}$ má všechny složky kladné.
(ii) Druhou možností je, že vektor $\boldsymbol{x}$ není vlastním vektorem matice $\hat{\mathbf{B}}$ příslušným vlastnímu číslu $\hat{\lambda}$. Použijeme větu 67 pro matici $\hat{\mathbf{B}}$, její vlastní číslo $\hat{\lambda}$ a kladný vektor $\boldsymbol{x}$, a dostaneme tak

$$\hat{\lambda} < \max_{i \in S} \frac{\left(\hat{\mathbf{B}}\boldsymbol{x}\right)_i}{\boldsymbol{x}_i}.$$

Z toho, že má vektor $\boldsymbol{x}$ pouze kladné složky, a z nerovnosti (2.16) dostáváme, že

$$\hat{\lambda} < \max_{i \in S} \frac{\left(\hat{\mathbf{B}}\boldsymbol{x}\right)_i}{\boldsymbol{x}_i} \leq \lambda.$$

Posloupnost $({}_{\varrho(n)}\lambda)_{n=1}^{\infty}$ je tedy nerostoucí a platí ${}_{\varrho(n)}\lambda = {}_{\varrho(n+1)}\lambda$, právě tehdy, když $\varrho(n) = \varrho(n+1)$. Ze začátku důkazu víme, že potom platí požadované tvrzení. $\square$

Věta 40. *Nechť $(\varrho(n))_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost řízení z $\mathcal{R}$ daná iteračním algoritmem. Označme $\varrho = \lim_{n\to\infty} \varrho(n)$. Potom pro toto řízení ϱ je splněno kritérium optimality (2.12) a je tedy optimální ve smyslu definice 35.*

Důkaz. Z předchozí věty 39 víme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, takové, že $\varrho(n_0) = \varrho(n_0+1)$, a z věty 38 víme, že potom je posloupnost $(\varrho(n))_{n=0}^{\infty}$ konstantní od indexu n_0. Z definice 37 iteračního algoritmu víme, že

$$\varrho_i(n_0+1) \in \operatorname*{Argmin}_{r \in R_i} \boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(r)\, {}_{\varrho(n_0)}\boldsymbol{x}, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{b}_i(\varrho(n_0+1))^{\mathsf{T}}\, {}_{\varrho(n_0)}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i(r)^{\mathsf{T}}\, {}_{\varrho(n_0)}\boldsymbol{x},$$

pro všechna $r \in R_i$, $i \in S$. Nakonec z rovnosti $\varrho(n_0) = \varrho(n_0+1)$ získáme

$${}_{\varrho(n_0+1)}\mathbf{B}_{\varrho(n_0+1)}\boldsymbol{x} \leq {}_{\rho}\mathbf{B}_{\varrho(n_0+1)}\boldsymbol{x}, \qquad \rho \in \mathcal{R}.$$

A tedy $\varrho(n_0+1)$ je optimální řízení podle věty 36. $\square$

3. Adaptivní strategie řízení posloupnosi

V předchozí kapitole jsme měli množinu řízení $\mathcal{R}$ na množině S a náhodnou posloupnost $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$, s hodnotami v S, pro kterou jsme hledali optimální řízení. I nadále budeme pracovat množinou řízení $\mathcal{R}$, nyní však budeme připouštět volbu řízení v každém čase na základě znalosti historie posloupnosti.

Značení. Jako dosud označíme množinu stavů S, měřitelný prostor $(\Omega,\mathcal{A})$ a náhodnou posloupnost $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ na $(\Omega,\mathcal{A})$, s hodnotami v S, jejíž kanonickou filtraci budeme značit $\mathcal{X}$.

Podobně, jako v minulé kapitole, budeme pro libovolné $\varrho \in \mathcal{R}$ používat značení ${}_{\varrho}\mathbf{P} = (\boldsymbol{p}_i^{\mathsf{T}}(\varrho_i))_{i=1}^{N} = (\boldsymbol{p}_{ij}(\varrho_i))_{i,j=1}^{N}$, ${}_{\varrho}\mathbf{Z} = (\boldsymbol{z}_i^{\mathsf{T}}(\varrho_i))_{i=1}^{N} = (\boldsymbol{z}_{ij}(\varrho_i))_{i,j=1}^{N}$, a ${}_{\varrho}\mathbf{B} = (\boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}}(\varrho_i))_{i=1}^{N} = (\boldsymbol{b}_{ij}(\varrho_i))_{i,j=1}^{N}$.

Navíc budeme značit ${}_{\varrho}\lambda$ vlastní číslo matice ${}_{\varrho}\mathbf{B}$, takové, že ${}_{\varrho}\lambda = \mu_{{}_{\varrho}\mathbf{B}}$ a příslušný kladný vlastní vektor ${}_{\varrho}\boldsymbol{x}$.

Zvláštní pozornost budeme věnovat řízení získanému iteračním algoritmem, které budeme značit ϱ^*, a pro tento speciální případ budeme používat značení ${}_{\varrho^*}\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$, ${}_{\varrho^*}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*$, ${}_{\varrho^*}\mathbf{B} = \mathbf{B}^*$, ${}_{\varrho^*}\lambda = \lambda^*$ a ${}_{\varrho^*}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$.

Definice 41. Řekneme, že náhodná posloupnost $\mathcal{S} = (\varrho(n))_{n=0}^{\infty}$ s hodnotami v $\mathcal{R}$ je X-*adaptivní strategie*, pokud ϱ_n je $\mathcal{Y}_n$-měřitelná náhodná veličina na prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$, pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, kde $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_n)_{n=0}^{\infty}$ je filtrace na $(\Omega,\mathcal{A})$ taková, že $\mathcal{Y}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ a $\mathcal{Y}_n = \mathcal{X}_{n-1}$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Definice 42. Nechť je dána X-adaptivní strategie $\mathcal{S} = (\varrho(n))_{n=0}^{\infty}$ na $\mathcal{R}$ a nechť je dána posloupnost pravděpodobnostních měr $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_i)_{i=1}^{N}$ na $(\Omega,\mathcal{A})$, pro kterou platí iniciační podmínka (1.4). Řekneme, že X je řízeno strategií $\mathcal{S}$, pokud platí

$$\mathbb{P}_i(X_{n+1} = j|\mathcal{X}_n) \overset{\text{sj}}{=} \boldsymbol{p}_{X_n j}(\varrho(n)_{X_n}), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad i \in S \tag{3.1}$$

kde $\varrho(n)_{X_n}$ odpovídá rozhodnutí zvoleném pro časový interval $(n,n+1)$, které vznikne z náhodného ($\mathcal{Y}_n$-měřitelného) řízení $\varrho(n)$ tím, že z něj vybereme X_n-tou složku.

Pro náhodnou posloupnost X, řízenou strategií $\mathcal{S}$ dále definujeme náhodnou posloupnost výnosů při strategii $\mathcal{S}$, ${}_{\mathcal{S}}V = ({}_{\mathcal{S}}V_n)_{n=0}^{\infty}$, předpisem

$${}_{\mathcal{S}}V_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_{k-1}\}}^{\mathsf{T}} \cdot {}_{\varrho(k)}\mathbf{Z} \cdot \mathbf{1}_{\{X_k\}} = \sum_{k=1}^{n} {}_{\varrho(k)}z(X_{k-1},X_k), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.2}$$

a pro exponenciální užitkovou funkci $u(x) = u_\gamma(x)$, z (1.8), zavedeme náhodnou posloupnost užitků ${}_{\mathcal{S}}U$, předpisem

$${}_{\mathcal{S}}U = ({}_{\mathcal{S}}U_n)_{n=0}^{\infty}, \qquad \text{kde} \qquad {}_{\mathcal{S}}U_n = u({}_{\mathcal{S}}V_n). \tag{3.3}$$

Definice 43. Pro každou X-adaptivní strategii $\mathcal{S} = (\varrho(n))_{n=0}^{\infty}$ definujeme posloupnost vektorů jistotního ekvivalentu předpisem

$${}_{\mathcal{S}}\mathbb{CE}^{(n)} = ({}_{\mathcal{S}}\mathbb{CE}_i^{(n)})_{i=1}^{N}, \qquad \text{kde} \qquad {}_{\mathcal{S}}\mathbb{CE}_i^{(n)} = u^{-1}(\mathbb{E}_i[u({}_{\mathcal{S}}V_n)]),$$

a kde ${}_{\mathcal{S}}V = ({}_{\mathcal{S}}V_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost výnosů z X, při strategii $\mathcal{S}$.

Věta 44. *Nechť posloupnost X je řízena řízením ϱ^* získaným z iteračního algoritmu. Dále označme náhodnou posloupnost užitků ${}^*_{\varrho}U$, jako v (3.3). Nechť $\mathbf{B}^*, \lambda^*$ a $\boldsymbol{x}^*$ jsou jako ve značení na začátku kapitoly. Potom následující náhodná posloupnost*

$$M_n = (\lambda^*)^{-n} \cdot {}_{\varrho^*}U_n \cdot \boldsymbol{x}^*(X_n), \tag{3.4}$$

definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_i)$ je $\mathcal{X}_n$-martingal, pro libovolné $i \in S$, neboli $\mathbb{E}_i[M_n|\mathcal{X}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} M_{n-1}$, $i \in S$.

Důkaz. Chceme ukázat, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, a pro všechna $i \in S$, platí $\mathbb{E}_i[M_n|\mathcal{X}_{n-1}] - M_{n-1} \overset{\text{sj}}{=} 0$. Vyjádříme M_n podle definice a tedy chceme ukázat, že

$$(\lambda^*)^{-n}\mathbb{E}_i[{}_{\varrho^*}U_n\boldsymbol{x}^*(X_n)|\mathcal{X}_{n-1}] - \lambda^{-n+1}{}_{\varrho^*}U_{n-1}\boldsymbol{x}^*(X_{n-1}) \overset{\text{sj}}{=} 0.$$

Použijeme-li větu 28, dostaneme pro matici $\mathbf{B}^*$ a její vlastní číslo λ^*, takové, že $\mu_{\mathbf{B}^*} = \lambda^*$, a pro vektor $\boldsymbol{x}^*$ rovnost $\mathbb{E}_i[{}_{\varrho^*}U_n\boldsymbol{x}^*(X_n)|\mathcal{X}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} {}_{\varrho^*}U_{n-1}(\mathbf{B}^*\boldsymbol{x}^*)(X_{n-1})$. Stačí tedy ukázat

$$\lambda^{*-n}{}_{\varrho^*}U_{n-1}[(\mathbf{B}^*\boldsymbol{x}^*)(X_{n-1}) - (\lambda^*\boldsymbol{x}^*)(X_{n-1})] \overset{\text{sj}}{=} 0,$$

což platí, neboť $\boldsymbol{x}^*$ je vlastním vektorem $\mathbf{B}^*$ příslušným λ^*. □

Věta 45. *Nechť X je řízeno řízením ϱ^*, získaným iteračním algoritmem, označme ${}_{\varrho^*}U = ({}_{\varrho^*}U_n)_{n=0}^{\infty}$ příslušnou posloupnost užitků. Potom platí*

$$\frac{\boldsymbol{x}^*}{\max_{j\in S}\boldsymbol{x}^*_j} \leq \frac{\mathbb{E}[|{}_{\varrho^*}U_n|]}{(\lambda^*)^n} \leq \frac{\boldsymbol{x}^*}{\min_{j\in S}\boldsymbol{x}^*_j}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Důkaz. Víme, že $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ je kanonická filtrace posloupnosti X. Z věty 44 víme, že M_n, a tedy i $|M_n| = -M_n$ je $\mathcal{X}_n$-martingal a použijeme iniciační podmínku $\mathbb{P}_i[X_0 = i] = 1$. Z toho dostaneme

$$\mathbb{E}_i[(\lambda^*)^n M_n|\mathcal{X}_0] \overset{\text{sj}}{=} (\lambda^*)^n\mathbb{E}_i[M_n|\mathcal{X}_0] \overset{\text{sj}}{=} (\lambda^*)^n M_0 = (\lambda^*)^n{}_{\varrho^*}U_0 \cdot \boldsymbol{x}^*(X_0) \overset{\text{sj}}{=} -(\lambda^*)^n\boldsymbol{x}^*_i.$$

Iterováním střední hodnoty získáme

$$\mathbb{E}_i[\lambda^n M_n] = \mathbb{E}_i[\mathbb{E}_i[(\lambda^*)^n M_n|\mathcal{X}_0]] = -(\lambda^*)^n\boldsymbol{x}^*_i.$$

Náhodná veličina ${}_{\varrho^*}U_n$ je záporná, proto platí

$$\mathbb{E}[|{}_{\varrho^*}U_n|\,\boldsymbol{x}^*(X_n)] = \mathbb{E}[(\lambda^*)^n\,|M_n|] = (\lambda^*)^n\boldsymbol{x}^*. \tag{3.5}$$

Protože množina stavů S je konečná, a tedy vektor $\boldsymbol{x}^*$ má konečnou dimenzi N, číslo $\boldsymbol{x}^*(X_n)$ můžeme shora (respektive zdola) odhadnout číslem $\max_{j\in S}\boldsymbol{x}^*_j$ (resp. $\min_{j\in S}\boldsymbol{x}^*_j$) a pro všechna $i \in S$ tedy platí nerovnosti

$$\max_{j\in S}\boldsymbol{x}^*_j \cdot \mathbb{E}_i[|{}_{\varrho^*}U_n|] \geq \mathbb{E}_i[|{}_{\varrho^*}U_n|\,\boldsymbol{x}^*(X_n)] \geq \min_{j\in S}\boldsymbol{x}^*_j \cdot \mathbb{E}_i[|{}_{\varrho^*}U_n|].$$

Použijeme rovnost (3.5) ze začátku důkazu, a skutečnost, že všechny prvky vektoru $\boldsymbol{x}^*$ jsou kladné a lze jimi dělit a dostaneme

$$\mathbb{E}[|{}_{\varrho^*}U_n|] \geq \frac{1}{\max_{1\leq j\leq N}\boldsymbol{x}^*_j} \cdot \mathbb{E}[|{}_{\varrho^*}U_n|\boldsymbol{x}^*(X_n)] = \frac{1}{\max_{1\leq j\leq N}\boldsymbol{x}^*_j} \cdot (\lambda^*)^n\boldsymbol{x}^*,$$

$$\mathbb{E}[|{}_{\varrho^*}U_n|] \leq \frac{1}{\min_{1\leq j\leq N}\boldsymbol{x}^*_j} \cdot \mathbb{E}[|{}_{\varrho^*}U_n|\boldsymbol{x}^*(X_n)] = \frac{1}{\min_{1\leq j\leq N}\boldsymbol{x}^*_j} \cdot (\lambda^*)^n\boldsymbol{x}^*.$$

□

Věta 46. *Nechť $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ je náhodná posloupnost řízená X-adaptivní strategií $\mathcal{S} = (\varrho(n))_{n=0}^{\infty}$ a ${}_{\mathcal{S}}U_n$ je příslušná posloupnost užitků. Potom proces*

$$S_n = {}_{\mathcal{S}}U_n \boldsymbol{x}^*(X_n) e^{-\gamma n c^*}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_i)$ je $\mathcal{X}_n$-supermartingal, neboli

$$\mathbb{E}_i[S_n|\mathcal{F}_k] \overset{sj}{\leq} S_k, \qquad k \leq n, \quad n, k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.7}$$

Důkaz. Platí, že náhodná posloupnost S_n je $\mathcal{X}$-adaptovaná, neboť je odvozena z posloupnosti ${}_{\mathcal{S}}U_n = u({}_{\mathcal{S}}V_n)$. Ta je založena na náhodné posloupnosti matic $\mathbf{Z}_n$, která je $\mathcal{X}$-adaptovaná z definice X-adaptivní strategie. Z toho, že $\mathbf{Z}_n$ nabývá jen konečně mnoha hodnot je náhodná posloupnost ${}_{\mathcal{S}}V_n$ a tedy i ${}_{\mathcal{S}}U_n$ integrovatelná.

Pro každý čas $n \in \mathbb{N}_0$ je voleno řízení $\varrho(n)$. Označme matice $\mathbf{P}_n = {}_{\varrho(n)}\mathbf{P}$ a $\mathbf{Z}_n = {}_{\varrho(n)}\mathbf{Z}$, a pro každé n označme matici $\mathbf{B}_n = {}_{\varrho(n)}\mathbf{B}$. Podle věty 40 pro řízení ϱ^* získané iteračním algoritmem, příslušnou matici $\mathbf{B}^*$, vlastní číslo λ^* a vlastní vektor $\boldsymbol{x}^*$ a pro libovolné řízení ϱ a jemu příslušnou matici $\mathbf{B}$ platí $\mathbf{B}\boldsymbol{x}^* \geq \lambda^* \boldsymbol{x}^*$. Tedy i pro matice $\mathbf{B}_n, n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\mathbf{B}_n \boldsymbol{x}^* \geq \lambda^* \boldsymbol{x}^*. \tag{3.8}$$

Chceme ukázat $\mathbb{E}_i[S_{n+1}|\mathcal{X}_n] \overset{sj}{\leq} S_n$, tj. podle definice S_n chceme ukázat

$$\mathbb{E}_i[{}_{\mathcal{S}}U_{n+1}\boldsymbol{x}^*(X_{n+1})|\mathcal{X}_n] \overset{sj}{\leq} {}_{\mathcal{S}}U_n \boldsymbol{x}^*(X_n) e^{\gamma c^*}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ a $i, j \in S$ označme

$$p_n(i,j) = \mathbf{1}_{\{i\}}^{\mathsf{T}} \mathbf{P}_n \mathbf{1}_{\{j\}}, \qquad z_n(i,j) = \mathbf{1}_{\{i\}}^{\mathsf{T}} \mathbf{Z}_n \mathbf{1}_{\{j\}} \qquad \text{a} \qquad b_n(i,j) = \mathbf{1}_{\{i\}}^{\mathsf{T}} \mathbf{B}_n \mathbf{1}_{\{j\}}.$$

Z definice c^* okamžitě plyne $e^{\gamma c^*} = \lambda^*$. Použijeme rekurentní vzorec (2.1) a dostaneme levou stranu nerovnosti (3.9) ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i[{}_{\mathcal{S}}U_{n+1}\boldsymbol{x}^*(X_{n+1})|\mathcal{X}_n] &\overset{sj}{=} \mathbb{E}_i[{}_{\mathcal{S}}U_n e^{\gamma z_n(X_n, X_{n+1})} \boldsymbol{x}^*(X_{n+1})|\mathcal{X}_n] \\ &\overset{sj}{=} {}_{\mathcal{S}}U_n \sum_{j \in S} \mathbb{P}_i[X_{n+1} = j|\mathcal{X}_n] e^{\gamma z_n(X_n, j)} \boldsymbol{x}^*(j),\end{aligned} \tag{3.10}$$

kde používáme rovnost $e^{\gamma z_n(X_n, X_{n+1})} \boldsymbol{x}^*(X_{n+1}) = \sum_{j \in S} \mathbf{1}_{[X_{n+1}=j]} e^{\gamma z_n(X_n, j)} \boldsymbol{x}_j^*$. Protože posloupnost X se řídí strategií $\mathcal{S}$, víme, že pro libovolné $i, j \in S$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\mathbb{P}_i[X_{n+1} = j|X_n] \overset{sj}{=} \boldsymbol{p}_{X_n j}(\varrho(n)) = p_n(X_n, j). \tag{3.11}$$

Protože $p_n(X_n, j) e^{\gamma z_n(X_n, j)} = b_n(X_n, j)$, platí

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i[X_{n+1} = j|\mathcal{X}_n] e^{\gamma z_n(X_n, j)} \mathbf{1}_{\{j\}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}^* &\overset{sj}{=} p_n(X_n, j) e^{\gamma z_n(X_n, j)} \mathbf{1}_{\{j\}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}^* \\ &= \mathbf{1}_{\{X_n\}}^{\mathsf{T}} \mathbf{B}_n \mathbf{1}_{\{j\}} \mathbf{1}_{\{j\}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}^* = \mathbf{1}_{\{X_n\}}^{\mathsf{T}} \mathbf{B}_n \boldsymbol{x}^*.\end{aligned} \tag{3.12}$$

A když aplikujeme výsledky (3.10), (3.11) a (3.12), potom získáme

$$\mathbb{E}_i[{}_{\mathcal{S}}U_n e^{\gamma z_n(X_n, X_{n+1})} \boldsymbol{x}^*(X_{n+1})|\mathcal{X}_n] \overset{sj}{=} {}_{\mathcal{S}}U_n (\mathbf{B}_n \boldsymbol{x}^*)(X_n) = {}_{\mathcal{S}}U_n \mathbf{1}_{\{X_n\}}^{\mathsf{T}} \mathbf{B}_n \boldsymbol{x}^*.$$

Použijeme (3.8), (3.12) a zápornost náhodné posloupnosti ${}_{\mathcal{S}}U_n$ a dostaneme

$$\mathbb{E}_i[{}_{\mathcal{S}}U_{n+1}\boldsymbol{x}^*(X_{n+1})|\mathcal{X}_n] \overset{sj}{=} {}_{\mathcal{S}}U_n \mathbf{1}_{\{X_n\}}{}^{\mathsf{T}} \mathbf{B}_n \boldsymbol{x}^* \leq {}_{\mathcal{S}}U_n \mathbf{1}_{\{X_n\}}^{\mathsf{T}} \lambda \boldsymbol{x}^* = {}_{\mathcal{S}}U_n \cdot \lambda \boldsymbol{x}^*(X_n),$$

to platí pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a tedy platí (3.7) pro $n \in \mathbb{N}$ a $k = n - 1$, což je postačující podmínka pro platnost vlastnosti (3.7). $\square$

Věta 47. *Nechť $\mathcal{S} = (\varrho(n))_{n=0}^{\infty}$ je X-adaptivní strategie. Označme $c^* = \frac{1}{\gamma}\log\lambda^*$. Potom*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} {}_{\mathcal{S}}\mathbb{CE}_i^{(n)} \le c^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} {}_{\varrho^*}\mathbb{CE}_i^{(n)}, \qquad i \in S.$$

Důkaz. Připomeňme proces $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ definovaný v (3.6), o kterém z věty 46 víme, že je $\mathcal{X}_n$-supermartingal na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_i)$. Potom platí pro všechna $i \in S$ následující

$$\boldsymbol{x}^*(X_0) = -{}_{\mathcal{S}}U_0\, \boldsymbol{x}^*(X_0) = -S_0 \overset{\text{sj}}{\le} \mathbb{E}_i[-S_n|\mathcal{X}_0].$$

Jednoduchým odhadem $\boldsymbol{x}^*(X_n) \le \max_{1\le j\le N} \boldsymbol{x}_j^*$ dostaneme, že platí

$$\mathbb{E}_i[-S_n|\mathcal{X}_0] \overset{\text{sj}}{=} \mathbb{E}_i[|{}_{\mathcal{S}}U_n|\boldsymbol{x}^*(X_n)e^{-\gamma n c^*}|\mathcal{X}_0] \overset{\text{sj}}{\le} e^{-\gamma n c^*} \max_{1\le j\le N} \boldsymbol{x}_j^* \cdot \mathbb{E}_i[|{}_{\mathcal{S}}U_n||\mathcal{X}_0],$$

tedy snadno dostaneme nerovnost

$$\mathbb{E}_i[|{}_{\mathcal{S}}U_n||\mathcal{X}_0] \overset{\text{sj}}{\ge} \frac{e^{\gamma n c^*}}{\max_{1\le i\le N} \boldsymbol{x}_i^*} \boldsymbol{x}^*(X_0).$$

Z definice posloupnosti pravděpodobnostních rozdělení $\mathbb{P}$ máme pro každé i rovnost $\mathbb{P}_i[X_0 = i] = 1$ a tedy i $\mathbb{E}_i[\boldsymbol{x}^*(X_0)] = \boldsymbol{x}_i^*$. A proto platí

$$\mathbb{E}_i[|{}_{\mathcal{S}}U_n|] = \mathbb{E}_i[\mathbb{E}_i[|{}_{\mathcal{S}}U_n||\mathcal{X}_0]] \ge \frac{e^{\gamma n c^*}}{\max_{1\le i\le N} \boldsymbol{x}_i^*} \boldsymbol{x}_i^*.$$

Dále postupujeme logaritmováním a násobením konstantou $\frac{1}{\gamma} < 0$ a získáme tak nerovnost

$${}_{\mathcal{S}}\mathbb{CE}_i^{(n)} = \frac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}_i[-{}_{\mathcal{S}}U_n] \le nc^* + \frac{1}{\gamma}\log\boldsymbol{x}_i^* - \frac{1}{\gamma}\log\max_{1\le i\le N}\boldsymbol{x}_i^*.$$

Limitním přechodem pak dostaneme požadovanou vlastnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} {}_{\mathcal{S}}\mathbb{CE}_i^{(n)} \le \lim_{n\to\infty} c^* + \frac{1}{n\gamma}\log\boldsymbol{x}_i^* - \frac{1}{n\gamma}\log\max_{1\le i\le N}\boldsymbol{x}_i^* = c^*.$$

a tedy platí, že

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} {}_{\mathcal{S}}\mathbb{CE}_i^{(n)} \le c^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} {}_{\varrho^*}\mathbb{CE}_i^{(n)},$$

kde rovnost máme z věty 30. □

A. Teorie nerozložitelných matic

A.1 Základní pojmy

Definice 48. Nechť je dána matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Řekneme, že $\mathbf{A}$ je *nezáporná*, resp. *kladná*, pokud má všechny prvky nezáporné, resp. kladné, tj. pro všechny indexy $i \in \{1,\ldots,n\}$,$j \in \{1,\ldots,m\}$ platí $a_{ij} \geq 0$, resp. $a_{ij} > 0$.

Poznámka. Speciálně pro $m = 1$ máme nezáporné, respektive kladné vektory.

Značení. Nechť jsou dány libovolné matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, takové, že platí $a_{ij} \geq b_{ij}$, respektive $a_{ij} > b_{ij}$, pro $i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$. Potom budeme používat značení $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$, respektive $\mathbf{A} > \mathbf{B}$.
Speciálně pro nezápornou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ budeme značit $\mathbf{A} \geq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, a pro $\mathbf{A}$ kladnou píšeme $\mathbf{A} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Definice 49. Řekneme, že nezáporná čtvercová matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je *nerozložitelná*, pokud neexistuje permutační matice $\mathbf{P}$ taková, že $\mathbf{PAP}^{\mathsf{T}}$ je tvaru

$$\mathbf{PAP}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k\times k} \quad a \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$$

pro nějaké $k \in \{1,\ldots,n-1\}$. O matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ řekneme, že je *nerozložitelná*, pokud není nulová.

Definice 50. Řekneme, že nezáporná, nerozložitelná matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *aperiodická*, pokud pro všechna $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$NSD\{m \in \mathbb{N} : (A^m)_{jj} > 0\} = 1.$$

Poznámka. Nerozložitelnost a aperiodicita matice nezávisí na velikosti prvků matice, nýbrž pouze na postavení nulových a nenulových prvků.

Definice 51. Máme dánu čtvercovou matici $\mathbf{A}$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je její *vlastní číslo*, pokud existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}^n$ takový, že $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Každý vektor $\boldsymbol{x}$ takový, že $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ nazveme *vlastním vektorem* matice $\mathbf{A}$ příslušným vlastnímu číslu λ.

Definice 52. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a λ její vlastní číslo. Potom definujeme *geometrickou násobnost* vlastního čísla λ, jako dimenzi prostoru $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

Poznámka. Geometrická násobnost vlastního čísla λ matice $\mathbf{A}$ je rovna dimenzi prostoru příslušných vlastních vektorů.

Definice 53. Množinu $\sigma_{\mathbf{A}}$ všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ budeme nazývat jejím *spektrem.* Hodnotu $\mu_{\mathbf{A}} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathbf{A}}\}$ pak nazýváme *spektrálním poloměrem* matice $\mathbf{A}$.

A.2 Tvrzení pro důkaz Perron-Frobeniovy věty

Tvrzení 54. *Nechť* $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$ *je nerozložitelná matice, kde* $n \in \mathbb{N}$. *Pak matice* $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}$ *je kladná.*

Důkaz. Položme $\mathcal{X} \stackrel{\text{def}}{=\!=} [0,\infty)^n \setminus \{0\}^n = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \gneqq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n\}$ a pro $\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}$ označme

$$k_0(\boldsymbol{y}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathsf{card}\{i \le n; \boldsymbol{y}_i = 0\} < n \quad \text{a} \quad k_1(\boldsymbol{y}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} n - k_0(\boldsymbol{y}).$$

Je vidět, že pro každé $\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}$ platí, že $k_0(\boldsymbol{y}) = k_0(\mathbf{P}\boldsymbol{y})$, pro každou permutační matici $\mathbf{P} \in \{0,\, 1\}^{n\times n}$.

Jádrem důkazu bude ukázat, že zobrazení $\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definované předpisem $\alpha(\boldsymbol{y}) = (\mathbf{I}+\mathbf{A})\boldsymbol{y}$ splňuje, že

$$k_0(\alpha(\boldsymbol{y})) \le \max\{0, k_0(\boldsymbol{y}) - 1\}, \qquad \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}. \tag{A.1}$$

Nejprve si uvědomíme, že $\alpha(\boldsymbol{y}) \in D$, kdykoli $\boldsymbol{y} \in D$, neboť

$$\alpha(\boldsymbol{y}) = (\mathbf{I}+\mathbf{A})\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{y} \gneqq \mathbf{0} \tag{A.2}$$

platí díky předpokladu, že $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$ a tomu, že $D \subseteq [0,\infty)^n$. Dále ze vztahu (A.1) dostaneme okamžitě matematickou indukcí, že pro každé $m \in \mathbb{N}$, platí

$$k_0\Big((\mathbf{I}+\mathbf{A})^m\boldsymbol{y}\Big) \le \max\{0, k_0(\boldsymbol{y}) - m\},$$

a speciálně pro $m = n-1 \ge k_0(\boldsymbol{y})$ dostaneme

$$k_0((\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\boldsymbol{y}) \le \max\{0, k_0(\boldsymbol{y} - n + 1)\} = 0$$

a to pro každý vektor $\boldsymbol{y} \in D$, neboť $k_0(\boldsymbol{y}) < n$.

Máme tedy, že pro každé $\boldsymbol{y} \in D = [0,\infty)^n \setminus \{0\}^n$ je $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\boldsymbol{y} \in (0,\infty)^n$. Speciální volbou $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}_{\{i\}}, i \in \{1,\dots,n\}$ pak dostaneme, že $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1} \in (0,\infty)^{n\times n}$. Zbývá tak ukázat vlastnost (A.1).

Z nerovnosti (A.2) ihned dostaneme, že $k_0(\alpha(\boldsymbol{y})) \le k_0(\boldsymbol{y})$. Chceme-li ukázat nerovnost (A.1), můžeme předpokládat, že $k_0(\boldsymbol{y}) \ge 1$, v opačném případě totiž (A.1) zřejmě platí.

Buď $\boldsymbol{y} \in D$. Najdeme permutační matici $\mathbf{P}$ takovou, že $\mathbf{P}\boldsymbol{y} = (\mathbf{0}^{\mathsf{T}}, \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$, kde $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k_0(\boldsymbol{y})}$ je nulový vektor a kde $\tilde{\boldsymbol{y}} \in (0,\infty)^{k_1(\boldsymbol{y})}$. Protože je matice $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$ nerozložitelná dle předpokladu, je matice $\mathbf{PAP}^{\mathsf{T}}$ následujícího tvaru

$$\mathbf{PAP}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{01} \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{01} \ne \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k_0(\boldsymbol{y})\times k_1(\boldsymbol{y})}, \tag{A.3}$$

kde $\mathbf{A}_{ij} \in [0,\infty)^{k_i(\boldsymbol{y})\times k_j(\boldsymbol{y})}, i = 0, 1$. Protože je matice $\mathbf{P}$ permutační, splňuje $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{P} = \mathbf{I}$, a my tak dostáváme, že

$$\mathbf{P}\alpha(\boldsymbol{y}) = \mathbf{P}(\mathbf{I}+\mathbf{A})\boldsymbol{y} = \mathbf{P}\boldsymbol{y} + \mathbf{PA}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix} + \mathbf{PAP}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{u} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{(0)} \\ \boldsymbol{u}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

pro nějaké $\boldsymbol{u}^{(i)} \in \mathbb{R}^{k_i(\boldsymbol{y})}$, $i = 0,\, 1$. Protože $\mathbf{A}_{11}$ má nezáporné prvky a protože dále $\tilde{\boldsymbol{y}} \in (0,\infty)^{k_1(\boldsymbol{y})}$, dostaneme, že

$$\boldsymbol{u}^{(1)} = \tilde{\boldsymbol{y}} + \mathbf{A}_{11}\tilde{\boldsymbol{y}} \ge \tilde{\boldsymbol{y}} > \mathbf{0}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k_1(\boldsymbol{y})} \quad \text{je nulový vektor.} \tag{A.4}$$

Protože $\tilde{\boldsymbol{y}} \in (0,\infty)^{k_1(\boldsymbol{y})}$, pak platí

$$\boldsymbol{u}^{(0)} = \mathbf{A}_{01} \cdot \tilde{\boldsymbol{y}} \gneqq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k_0(\boldsymbol{y})}.$$

Využitím této vlastnosti a nerovnosti (A.4) dostaneme, že

$$k_0(\alpha(\boldsymbol{y})) = k_0(\mathbf{P}\alpha(\boldsymbol{y})) = k_0(\boldsymbol{u}) = k_0(\boldsymbol{y}) - \mathsf{card}\{i \leq k_1(\boldsymbol{y}); \boldsymbol{u}_i^{(1)} \neq \mathbf{0}\} \leq k_0(\boldsymbol{y}) - 1.$$

Ukázali jsme tedy rovnost (A.1) a tím je důkaz tvrzení hotov. □

Definice 55. Nechť $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$ je nerozložitelná matice. Označíme množinu $\mathcal{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ všech nezáporných nenulových vektorů $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Potom definujeme reálnou funkci $\Lambda_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\Lambda_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \min_{1\leq i\leq n, x_i\neq 0} \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{x})_i}{\boldsymbol{x}_i}, \tag{A.5}$$

definujeme číslo

$$\lambda_{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \Lambda_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}), \tag{A.6}$$

a každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, ve kterém se nabývá suprema nazveme *maximálním vektorem matice* $\mathbf{A}$.

Poznámka. Analogicky, jako $\Lambda_{\mathbf{A}}$, $\lambda_{\mathbf{A}}$, definujeme pro matici $\mathbf{A}$ také funkci a hodnotu

$$\Delta_{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \max_{1\leq i\leq n, x_i\neq 0} \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{x})_i}{\boldsymbol{x}_i}, \qquad \delta_{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \inf_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \Delta_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}). \tag{A.7}$$

Tvrzení 56. *Nechť $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$ je nerozložitelná matice, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ takové, že $\lambda_{\mathbf{A}} = \Lambda_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x})$.*

Důkaz. Označme kompaktní množinu $\widetilde{\mathcal{X}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\boldsymbol{x} \in [0,\infty)^n; \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = 1\} \subseteq \mathcal{X}$, a na ní zobrazení β, definované předpisem $\beta(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\boldsymbol{x}$. Protože je toto zobrazení spojité, je jeho obor hodnot také kompaktní.

$$\Im \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\beta(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}\} \subseteq \mathcal{X}.$$

Protože funkce $\Lambda := \Lambda_{\mathbf{A}}$ definovaná v (A.5) je spojitá na množině $\Im$, existuje $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}}$, takové, že $\Lambda(\beta(\tilde{\boldsymbol{x}})) \geq \Lambda(\boldsymbol{y})$, kdykoliv $\boldsymbol{y} \in \Im$. Naším cílem bude ukázat

$$\Lambda(\beta(\tilde{\boldsymbol{x}})) \geq \Lambda(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X},$$

čímž zřejmě dosáhneme rovnosti $\lambda = \Lambda(\beta\tilde{\boldsymbol{x}})$, kde $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X} = [0,\infty)^n \setminus \{0\}^n$. Je-li $\boldsymbol{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}$, pak z definice zobrazení Λ v (A.5) dosáhneme, že $\Lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \leq \mathbf{A}\boldsymbol{x}$ a pro $\boldsymbol{y} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \beta(\boldsymbol{x}) \in \Im$, pak obdržíme vynásobením zleva této nerovnosti nezápornou maticí $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}$, že

$$\Lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \Lambda(\boldsymbol{x})(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\boldsymbol{x} \leq (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{y}, \tag{A.8}$$

neboť matice $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}$ komutuje s maticí $\mathbf{A}$. Z definice funkce Λ v (A.5) a z (A.8) pak dostaneme, že

$$\Lambda(\beta(\boldsymbol{x})) = \Lambda(\boldsymbol{y}) = \max\{l \in [0,\infty); l\boldsymbol{y} \leq \mathbf{A}\boldsymbol{y}\} \geq \Lambda(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \tilde{\mathcal{X}}. \tag{A.9}$$

Speciálně dostaneme pro $\tilde{\boldsymbol{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \beta(\tilde{x}) \in \Im \subseteq \mathcal{X}$, že platí

$$\Lambda(\tilde{\boldsymbol{y}}) = \Lambda(\beta(\tilde{\boldsymbol{x}})) \geq \Lambda(\beta(\boldsymbol{x})) \geq \Lambda(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \widetilde{\mathcal{X}},$$

kde první nerovnost plyne z definice vektoru $\tilde{\boldsymbol{x}}$. Je-li ovšem $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, pak platí $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \in (0,\infty)$ a $\bar{\boldsymbol{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}}} \in \widetilde{\mathcal{X}}$ a $\Lambda(\boldsymbol{x}) = \Lambda(\bar{\boldsymbol{x}}) \leq \Lambda(\tilde{\boldsymbol{y}})$, neboť dle definice (A.5) splňuje funkce Λ následující podmínku $\Lambda(\kappa\boldsymbol{x}) = \Lambda(\boldsymbol{x})$ pro $\kappa \in (0,\infty)$. $\square$

Pozorování 57. *Platí podobné tvrzení, a to že existuje vektor $\boldsymbol{z} \in \mathcal{X}$, takový, že $\Delta_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{z}) = \delta_{\mathbf{A}}$. Důkaz by probíhal zcela analogicky, pouze bychom zaměnili nerovnosti za opačné a v (A.9) bychom místo maxima uvažovali minimum.*

Tvrzení 58. *Nechť $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$ je nerozložitelná matice, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak hodnota $\lambda_{\mathbf{A}} > 0$.*

Důkaz. Z definice hodnoty $\lambda := \lambda_{\mathbf{A}}$ ve vzorcích (A.5) a (A.6) ihned plyne, že $\lambda \geq 0$. Pro spor předpokládejme, že $\lambda = 0$. Pak ovšem musí $\Lambda(\boldsymbol{x}) = 0$ platit pro všechny vektory $\boldsymbol{x} \in [0,\infty)^n \setminus \{0\}^n$. Speciálně tedy $0 = \Lambda(\mathbf{1}) = \min_i(\mathbf{A1})_i$. Tedy existuje $i \leq n$ takové, že $0 = (\mathbf{A1})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, což vzhledem k předpokladu $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$ znamená, že $a_{ij} = 0$, kdykoli $j = 1,\dots,n$. Tedy i-tý řádek matice $\mathbf{A}$ je nulový, což je ve sporu s nerozložitelností matice $\mathbf{A}$. $\square$

Tvrzení 59. *Nechť je dána matice $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$, která je nerozložitelná, pro $n \in \mathbb{N}$. Buď $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ takové, že $\lambda_{\mathbf{A}} = \Lambda_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x})$, pak $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda_{\mathbf{A}}\boldsymbol{x}$. V takovém případě je tedy $\boldsymbol{x}$ vlastním vektorem odpovídajícím vlastnímu číslu $\lambda_{\mathbf{A}}$. Navíc má tento vlastní vektor všechny složky kladné, tj. $\boldsymbol{x} \in (0,\infty)^n$.*

Důkaz. Z definice hodnoty $\Lambda(\boldsymbol{x}) := \Lambda_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x})$ ve vzorci (A.5) okamžitě dostaneme nerovnost $\lambda\boldsymbol{x} \leq \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, kde $\lambda := \lambda_{\mathbf{A}}$. Naším úkolem je ukázat, že v této nerovnosti nastává rovnost, a také, že $\boldsymbol{x} \in (0,\infty)^n$. První vlastnost ukážeme sporem. Nechť $\lambda\boldsymbol{x} \lneqq \mathbf{A}\boldsymbol{x}$. Podle tvrzení 54 je $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1} \in (0,\infty)^{n\times n}$. Označíme kladný vektor $\boldsymbol{w} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\boldsymbol{x} \in (0,\infty)^n$ a dostáváme následující nerovnost

$$\lambda\boldsymbol{w} = \lambda(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\boldsymbol{x} = (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\lambda\boldsymbol{x} \lneqq (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{w}.$$

Tedy $\lambda\boldsymbol{w} \leq \mathbf{A}\boldsymbol{w}$ a současně $\lambda\boldsymbol{w} \neq \mathbf{A}\boldsymbol{w}$. Proto existuje $j \in \{1,\dots,n\}$, takové, že $\lambda\boldsymbol{w}_j < (\mathbf{A}\boldsymbol{w})_j$, tj. $\lambda < \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{w})_j}{\boldsymbol{w}_j}$. Pak zvolme $i \in S$ takové, že platí následující

$$\lambda < \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{w})_i}{\boldsymbol{w}_i} = \min_{k\in\{1,\dots,n\};\boldsymbol{y}_k\neq 0} \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{w})_k}{\boldsymbol{w}_k} = \Lambda(\boldsymbol{w}) \leq \lambda, \tag{A.10}$$

což je spor a my tak máme rovnost $\lambda\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$.

Nyní s pomocí této rovnosti ukážeme, že $\boldsymbol{x} \in (0,\infty)^n$. Podobně, jako v předchozím kroku uvažujeme kladný vektor $\boldsymbol{w} = (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n-1}\boldsymbol{x} \in (0,\infty)^n$, nyní ovšem, díky nově dokázané rovnosti, lze psát ekvivalentně $\boldsymbol{w} = (1+\lambda)^{n-1}\boldsymbol{x}$. Pak ovšem platí také, že $\boldsymbol{x} = (1+\lambda)^{1-n}\boldsymbol{w} \in (0,\infty)$, neboť $\boldsymbol{w} \in (0,\infty)^n$ a $(1+\lambda)^{1-n} \in (0,\infty)$. Zde jsme využili vlastnosti $\lambda \in [0,\infty)$, která plyne přímo z definice hodnoty λ ve vzorci (A.6). $\square$

Pozorování 60. *Pro hodnotu $\delta_{\mathbf{A}}$ definovanou v (A.7) rovněž platí, že $\delta_{\mathbf{A}}$ je vlastním číslem matice $\mathbf{A}$ a existuje příslušný vlastní vektor, který je kladný.*

Důkaz by probíhal zcela analogicky, pouze bychom nahradili nerovnosti opačnými a namísto minima ve vzorci (A.10) a v odstavci před ním bychom uvažovali maximum.

A.3 Perron Frobeniova věta

Nyní máme formulována tvrzení, jichž budeme využívat při důkazu Perron-Frobeniovy věty.

Věta 61 (Perron Frobeniova)**.** *Nechť* $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$ *je nezáporná a nerozložitelná matice. Potom existuje vlastní číslo* λ *matice* $\mathbf{A}$*, takové, že* $\lambda = \mu_{\mathbf{A}}$ *a platí, že geometrická násobnost* λ *je rovna jedné. Navíc existuje* $\boldsymbol{x} \in (0,\infty)^n$*, vlastní vektor matice* $\mathbf{A}$ *příslušný vlastnímu číslu* λ*.*

Poznámka. Obvykle se uvádí ještě další závěr věty, a to, že i algebraická násobnost vlastního čísla $\lambda_{\mathbf{A}}$ je jedna, to znamená, že $\lambda_{\mathbf{A}}$ je kořenem charakteristického polynomu $p(l) = \det(l\mathbf{I} - \mathbf{A})$ násobnosti 1.

Důkaz. Z tvrzení 59 máme existenci kladného vlastního čísla λ, které je rovno číslu $\lambda_{\mathbf{A}}$, definovanému v (A.6) a existenci k němu příslušného kladného vlastního vektoru $\boldsymbol{x} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Stačí nám tedy ukázat rovnost $\lambda = \mu_{\mathbf{A}}$, a že násobnost λ je jedna.

Ukážeme, že pro libovolné vlastní číslo $\hat{\lambda} \in \sigma_{\mathbf{A}}$ platí $|\hat{\lambda}| \leq \lambda$. Z toho, že $\hat{\lambda}$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ dostáváme exitenci vektoru $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, pro který platí $\hat{\lambda}\boldsymbol{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{y}$. A z toho, že $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$ dostaneme následující nerovnost

$$\left|\hat{\lambda}\right| \cdot |\boldsymbol{y}| = |\mathbf{A}\boldsymbol{y}| \leq \mathbf{A}|\boldsymbol{y}|. \tag{A.11}$$

Tedy pro všechna $i = 1,\ldots,n$, taková, že $|\boldsymbol{y}|_i \neq 0$, platí

$$|\hat{\lambda}| \leq \frac{(\mathbf{A}|\boldsymbol{y}|)_i}{|\boldsymbol{y}|_i}, \quad \text{a tedy} \quad |\hat{\lambda}| \leq \min_{1\leq i\leq n, \boldsymbol{y}_i \neq 0} \frac{(\mathbf{A}|\boldsymbol{y}|)_i}{|\boldsymbol{y}|_i} = \Lambda(|\boldsymbol{y}|) \leq \lambda,$$

kde $\Lambda(\boldsymbol{x}) = \Lambda_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, je funkce definovaná v (A.5). Z toho máme, že skutečně pro všechna $\hat{\lambda} \in \sigma_{\mathbf{A}}$ platí $|\hat{\lambda}| \leq \lambda$, a tedy $\lambda > 0$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ s maximální absolutní hodnotou.

Nyní ukážeme, že geometrická násobnost λ je jedna, neboli, že prostor vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$ příslušných λ má dimenzi 1. Stačí nám ukázat ekvivalentní tvrzení, že každé dva nenulové vlastní vektory $\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé, tedy, že existují reálná čísla $\alpha \neq 0$ a $\beta \neq 0$ taková, že $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\tilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$.

Označme tedy $\boldsymbol{x}$ a $\tilde{\boldsymbol{x}}$ libovolné dva nenulové vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ. Pak platí nerovnost (A.11), kde místo $\left|\hat{\lambda}\right|$ budeme psát λ a místo $\boldsymbol{y}$ budeme psát $\boldsymbol{x}$, respektive $\tilde{\boldsymbol{x}}$. Potom $\lambda|\boldsymbol{x}| \leq \mathbf{A}|\boldsymbol{x}|$, a zároveň $\lambda\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, což nám dohromady s definicí (A.6) a podobně, jako na začátku důkazu dostáváme $\mathbf{A}|\boldsymbol{x}| = \lambda|\boldsymbol{x}|$, neboť

$$\lambda \leq \frac{(\mathbf{A}\,|\boldsymbol{x}|)_j}{|\boldsymbol{x}_j|}, \quad \text{a tedy} \quad \lambda \leq \min_{1\leq i\leq n, \boldsymbol{x}_i \neq 0} \frac{(\mathbf{A}\,|\boldsymbol{x}|)_i}{|\boldsymbol{x}_i|} = \Lambda(|\boldsymbol{x}|) \leq \lambda, \tag{A.12}$$

a proto se ve všech nerovnostech nabývá rovnosti. Stejným postupem lze ukázat i $\mathbf{A}\,|\tilde{\boldsymbol{x}}| = \lambda\,|\tilde{\boldsymbol{x}}|$ a tedy platí, že $|\boldsymbol{x}|, |\tilde{\boldsymbol{x}}|$ jsou vlastními vektory matice $\mathbf{A}$ příslušnými λ.

Platí, že každý vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda = \mu_{\mathbf{A}}$ je zároveň maximálním vektorem matice $\mathbf{A}$, neboť v takovém případě platí

$$\lambda\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \qquad \text{a tedy} \quad \lambda = \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{x})_i}{\boldsymbol{x}_i}, \quad i \in S.$$

Z nezápornoti matice $\mathbf{A}$ a z $\lambda > 0$ dostáváme, že platí také

$$\lambda = \frac{(\mathbf{A}\,|\boldsymbol{x}|)_i}{|\boldsymbol{x}_i|},$$

tedy i $|\boldsymbol{x}|$ a $|\tilde{\boldsymbol{x}}|$ jsou maximálními vektory matice $\mathbf{A}$.

V důkazu tvrzení 59 jsme uvažovali nezáporný maximální vektor a ukázali jsme, že musí být automaticky kladný. Potom také nezáporné vektory $|\boldsymbol{x}|, |\tilde{\boldsymbol{x}}|$ nemají nulové prvky a tedy i $\boldsymbol{x}_1 \neq 0, \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \neq 0$ a lze pro ně nelézt taková α, β, že $(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\tilde{\boldsymbol{x}})_1 = 0$. Uvidíme, že i vektor $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\tilde{\boldsymbol{x}}$ je vlastním vektorem, neboť platí

$$\lambda(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\tilde{\boldsymbol{x}}) = \alpha\lambda\boldsymbol{x} + \beta\lambda\tilde{\boldsymbol{x}} = \alpha\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \beta\mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\tilde{\boldsymbol{x}})$$

a stejnou úvahou, jako pro $\boldsymbol{x}$ a $\tilde{\boldsymbol{x}}$ dostaneme, že celý vektor $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\tilde{\boldsymbol{x}}$ musí být nulový, jinak bychom došli ke sporu. A tedy platí, že $\boldsymbol{x}$ a $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jsou lineárně závislé, dimenze prostoru vlastních vektorů je 1 a geometrická násobnost vlastního čísla λ je také rovna jedné. □

A.4 Další používané věty

Věta 62. *Nechť je dána nezáporná, nerozložitelná matice $\mathbf{A} \in [0,\infty)^{n\times n}$. Předpokládejme, že její různá vlastní čísla $\lambda, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$, splňují $\lambda > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_t|$. Dále označme m_2 násobnost vlastního čísla λ_2. Nechť $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ jsou pravý a levý vlastní vektor příslušící vlastnímu číslu λ, takové, že $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 1$.*

(i) Pokud $\lambda_2 \neq 0$, potom pro $k \to \infty$ platí

$$\mathbf{A}^k = \lambda^k\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T + O(k^s\,|\lambda_2|^k), \quad kde \quad s = m_2 - 1.$$

(ii) Pokud $\lambda_2 = 0$, potom pro $k \geq n - 1$

$$\mathbf{A}^k = \lambda^k\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T.$$

Důkaz. Viz (Seneta, 1981, věta 1.2 na straně 9). Z důvodu rozsahu práce nebudeme uvádět. □

Pozorování 63. *Nechť je matice $\mathbf{A}$ nezáporná a nerozložitelná. Potom i matice $\mathbf{A}^T$ je nezáporná a nerozložitelná. Navíc platí $\sigma_{\mathbf{A}} = \sigma_{\mathbf{A}^T}$, tedy podle Perron-Frobeniovy věty 61 existuje $\lambda = \mu_{\mathbf{A}} = \mu_{\mathbf{A}^T}$, jejich společné vlastní číslo s maximální absolutní hodnotou. Navíc aplikováním věty 61 na matici $\mathbf{A}^T$ dostaneme existenci kladného vlastního vektoru $\boldsymbol{y}$ matice $\mathbf{A}^T$, tedy levého vlastního vektoru matice $\mathbf{A}$. Navíc víme, že geometrická násobnost λ, vlastního čísla $\mathbf{A}$, je rovna jedné.*

Tvrzení 64. *Nechť $\mathbf{A}$ je nezáporná čtvercová nerozložitelná matice. Nechť λ je její vlastní číslo, pro které platí $\lambda = \mu_{\mathbf{A}}$. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou všechna její vlastí čísla. Pokud existuje právě k vlastních čísel $\lambda_1 = \lambda_{\mathbf{A}}, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ s absolutní hodnotou $\lambda = \mu_{\mathbf{A}}$, Potom platí*

$$\lambda_j = \omega_j \cdot \lambda, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_k$ jsou kořeny polynomu $z^k = 1$. Navíc, pokud $k > 1$, potom existuje permutační matice $\mathbf{P}$, taková, že matice $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ je tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{23} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{k-1,k} \\ \mathbf{A}_{k1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

kde nulové matice na diagonále jsou čtvercové.

Důkaz. Viz věta 2 a její důkaz na straně 540 v (Lancaster a Tismenetsky, 1985). □

Důsledek 65. *Buď $\mathbf{A}$ nezáporná, nerozložitelná a aperiodická matice, dále buď $\lambda = \mu_{\mathbf{A}}$ její vlastní číslo a $\boldsymbol{x}$ příslušný kladný pravý vlastní vektor a $\boldsymbol{y}$ libovolný levý vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ. Potom platí*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{-k}\mathbf{A}^k\mathbf{1} = \kappa(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{x},$$

kde $\kappa(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{y}^T\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}}$ je kladná konstanta.

Důkaz. Abychom mohli použít větu 62, ukážeme, že je splněn předoklad $\lambda > |\lambda_2|$, kde λ_2 je jako ve znění věty 62. Ukážeme sporem, že počet vlastních čísel s absolutní hodnotou λ je roven jedné, kdyby tomu tak nebylo, potom podle tvrzení 64 by musela existovat permutační matice $\mathbf{P}$ taková, že $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ je ve tvaru (A.13).

Potom matice $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ je periodická a tedy také matice $\mathbf{A}$ je periodická, což je ve sporu s předpokladem.

Nyní pomocí věty 62 ukážeme, že platí

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{-k}\mathbf{A}^k = \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}}, \tag{A.14}$$

což stačí k důkazu věty, neboť z (A.14) potom platí

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{-k}\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{1} = \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{x} \cdot \frac{|\boldsymbol{y}|^T\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^T|\boldsymbol{y}|}.$$

Navíc podle pozorování 63 víme, že $\boldsymbol{y}$ lze volit kladné, a že dimenze prostoru pravých i levých vektorů je jedna, a proto je $|\boldsymbol{y}|$ rovněž levým vlastním vektorem, a platí $\kappa = \frac{\boldsymbol{y}^T\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}} > 0$.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 1$, neboť $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \neq 0$ a vektor $\tilde{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}$ je rovněž levým vlastním vektorem $\mathbf{A}$ příslušným λ. Pokud by tedy $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \neq 1$, vynásobíme vektor $\boldsymbol{y}$ nenulovou konstantou a převedeme tak problém na tento případ. Dále ukážeme pomocí věty 62 platnost (A.14) pro $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 1$, tedy

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{-k}\mathbf{A}^k = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T. \tag{A.15}$$

V případě, že $\lambda_2 = 0$ platí (A.15) triviálně z věty 62. V případě $\lambda_2 \neq 0$ máme

$$\mathbf{A}^k = \lambda^k\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T + O(k^s\,|\lambda_2|^k),$$

a tedy vynásobením obou stran konstantou λ^{-k} získáme

$$\lambda^{-k}\mathbf{A}^k = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} + \frac{O(k^s\,|\lambda_2|^k)}{\lambda^k} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} + \frac{O(k^s\,|\lambda_2|^k)}{k^s\,|\lambda_2|^k}\cdot\frac{k^s\,|\lambda_2|^k}{\lambda^k}.$$

a limitním přechodem pro $k \to \infty$ je důkaz hotov, neboť $\lambda > |\lambda_2|$. □

Věta 66. *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})^{n\times n} \in [0,\infty)^{n\times n}$ *je nerozložitelná matice,* λ *její vlastní číslo, pro které platí* $\lambda = \mu_{\mathbf{A}}$. *Nechť* $\boldsymbol{x}$ *je libovolný kladný vektor. Potom platí*

$$\min_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} a_{ij} \le \lambda \le \max_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} a_{ij}, \tag{A.16}$$

přičemž jedné z rovností se nabývá právě tehdy, když se nabývá i druhé rovnosti, což nastává právě tehdy, když $\mathbf{1}$ *je vlastním vektorem matice* $\mathbf{A}$.

Důsledek 67. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je nezáporná, nerozložitelná čtvercová matice. Nechť* $\lambda > 0$ *je její vlastní číslo takové, že* $\mu_{\mathbf{A}} = \lambda$ *a* $\boldsymbol{x}$ *je libovolný kladný vektor. Potom*

$$\min_{1\le i\le n}\frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{x})_i}{\boldsymbol{x}_i} \le \lambda \le \max_{1\le i\le n}\frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{x})_i}{\boldsymbol{x}_i},$$

přičemž každé z rovností se dosahuje právě tehdy, když $\boldsymbol{x}$ *je vlastní vektor matice* $\mathbf{A}$ *příslušící vlastnímu číslu* λ.

Důkaz. Nejprve ukážeme první nerovnost. Víme, že λ je rovno číslu $\lambda_{\mathbf{A}}$ ze vzorce (A.6). Zřejmě platí

$$\min_{1\le i\le n}\frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{x})_i}{\boldsymbol{x}_i} = \Lambda_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}) \le \sup_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{X}}\Lambda_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{y}) = \lambda.$$

Navíc víme, že rovnosti se nabývá právě tehdy, když je $\boldsymbol{x}$ maximálním vektorem matice $\mathbf{A}$ a to nastává právě tehdy, když $\boldsymbol{x}$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$.

Dále vidíme analogicky, že pro hodnotu $\delta := \delta_{\mathbf{A}}$, definovanou v (A.7), platí

$$\max_{1\le i\le n}\frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{x})_i}{\boldsymbol{x}_i} = \Delta_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}) \ge \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{X}}\Delta_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{y}) = \delta$$

a rovnosti se nabývá právě tehdy, když $\boldsymbol{x}$ je maximálním a tedy i vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$, podobně, jako předchozí nerovnost, přičemž využíváme pozorování 57 a 60.

Nakonec ukážeme, že platí $\lambda = \delta$. Označme $\boldsymbol{y} \in (0,\infty)^n$ nějaký levý vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný λ a označme $\boldsymbol{z} \in (0,\infty)^n$ pravý vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu δ. Potom platí $\lambda\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ a $\delta\boldsymbol{z} = \mathbf{A}\boldsymbol{z}$, a tedy

$$\lambda\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\delta\boldsymbol{z} = \delta\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{z}. \qquad \text{a proto} \qquad (\lambda-\delta)\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{z} = 0.$$

Protože $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ jsou kladné, platí, že $\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} > 0$ a proto nutně $\delta = \lambda$. □

Závěr

Nejprve jsme uvedli pojem markovského řetězce s oceněním přechodů a posloupnost užitků. Uvedli jsme některé základní vlastnosti užitku a jistoního ekvivalentu náhodné posloupnosti, které posléze používáme.

V části 2.2 jsme definovali iterační algoritmus, který vede k nalezení optimálního řízení markovského řetězce. Navíc jsme ukázali v kapitole 3, že toto řízení je optimální i v případě, že bychom připouštěli i možnost řízení adaptivní strategií, to znamená, že bychom volili rozhodnutí na základě dosud získaných informací o náhodném procesu.

Možná aplikace výsledků práce spočívá v hledání optimální obchodní strategie. Navíc pomocí uvedené teorie hledání optimálního řízení markovského řetězce s diskrétním časem lze odvodit výsledky i pro čas spojitý, jako je to například v (Stanek, 2012). Ani jednomu se však v práci nevěnujeme, jsou to pouze možnosti, jak případně práci rozšířit.

Seznam použité literatury

LACHOUT, P. a PRÁŠKOVÁ, Z. (2012). *Základy náhodných procesů I.* druhé vydání. matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-210-8.

LANCASTER, P. a TISMENETSKY, M. (1985). *The Theory of Matrices; with applications*. Druhé vydání. Academic Press, Orlando. ISBN 0-12-435560-9.

SENETA, E. (1981). *Non-negative Matrices and Markov Chains*. Druhé vydání. Springer, New York. ISBN 978-0-387-32792-1.

STANEK, P. (2012). *Exponenciální řízení homogenních markovských procesů*. MFF UK, Praha.