UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Tereza Pastuchová

MATEMATIKA VE SPORTU

(Sbírka řešených příkladů z matematiky se sportovní tématikou)

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Studijní program: Učitelství pro střední školy (matematika – tělesná výchova)

Ráda bych poděkovala Doc. RNDr. Emilu Caldovi, CSc. za vstřícný přístup po celou dobu vedení mé diplomové práce, za spoustu cenných rad, připomínek a námětů k obsahu práce. Děkuji své rodině za spoustu lásky, podpory a porozumění (nejen) v průběhu studia.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 20.12.2006 Tereza Pastuchová

Tereza Pastuchová

Obsah

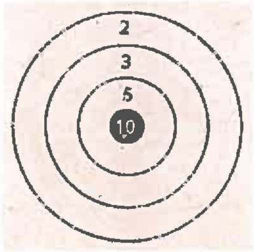
Název práce: **Matematika ve sportu (Sbírka řešených příkladů z matematiky se sportovní tématikou)**
Autor: **Tereza Pastuchová**
Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
e-mail vedoucího: Emil.Calda@mff.cuni.cz
Abstrakt:
Diplomová práce je koncipována jako sbírka řešených slovních úloh se sportovní tématikou. Je členěna do osmi kapitol, v každé jsou příklady řazeny od nejlehčích. V první části nazvané „Rozcvička" jsou nejjednodušší příklady (většina na úrovni základní školy), určené k „zahřátí" mozkových buněk. Následují kapitoly „Rovnice, nerovnice a jejich soustavy", „Goniometrie a trigonometrie", „Planimetrie a stereometrie", „Posloupnosti" a „Kombinatorika a pravděpodobnost". Na závěr je zařazena kapitola „Různé", obsahující např. fyzikální příklady, příklady na logiku apod., a část „Pro náročné" s těžšími příklady. V úvodu každého příkladu je napsáno pár slov ke sportovnímu tématu (historie, aktuality, pravidla,...), k němuž se vztahuje úkol. Studenti se tak současně mohou dozvědět i něco zajímavého ze světa sportu. Řešení slovních úloh by nemělo být ve vyučování opomíjeno. Studentům většinou nedělá problém počítat, upravovat výrazy a postupovat podle určitého algoritmu. To, co často nezvládají, je umění porozumět zadání slovní úlohy, matematizovat reálnou situaci, vidět pod daným problémem čísla a rovnice. Myslím, že tato práce by mohla přispět k zefektivnění a zpestření výuky matematiky na středních školách, zejména na školách zaměřených na tělesnou výchovu a sport.
Klíčová slova: slovní úloha, středoškolská matematika, sport

Title: **Mathematics in sport (The collection of the solved mathematical problems based on sport's theme)**
Author: **Tereza Pastuchová**
Department: Department of didactics of mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Supervisor's e-mail address: Emil.Calda@mff.cuni.cz
Abstract:
The graduate work is design as a collection of written problems based on a sport theme with solution. It is organized into eight chapters, each chapter starts with easier questions, which are gradually getting harder. The first chapter called „The warm up" includes the easiest questions (most of them is on the basic schools level) and it is meant for „warming up" the brain cells. The following chapters are „Equations, simultaneous equation and inequalities", „Goniometry and trigonometry", „The plane geometry and stereometry", „Sequences", „Combinatorics and probability". At the end of my work is a chapter called „Various" with different questions from physics, logic, etc. and chapter called „For the advanced" with more difficult questions. At the beginning of each question is introduction of the sport which is mentioned later in the question (the history, rules etc.), so the students can get know something interesting about the sports. The solving of the written problems shouldn't be missed in the teaching process. Most of the students are quite skilled in working with algebraic expressions and following the algorithm's method. On the other hand, they often struggle with understanding of the text and extracting the necessary information from it. They have a problem to see the real situation behind the numbers and equations. I hope this graduate work will contribute to more effective and more interesting teaching of math, especially on schools focused on sports.
Keywords: written problem, secondary school mathematics, sport

1

Rozcvička

1.1 Střelec amatér



Úkol:
Pěti zásahy do terče na obrázku získal střelec 28 bodů. Zjistěte, které kruhy zasáhl a kolikrát.

Odpověď: Buď zasáhl dvakrát „10“, dvakrát „3“ a jednou „2“ nebo jednou „10“, třikrát „5“ a jednou „3“.

1.2 Zamotaný „finiš“

Úkol:
Na závodech doběhli závodníci do cíle takto: Jan daleko před Tomášem, Karel před Václavem, Jan za Petrem. Toník dvě místa před Igorem, Ludvík za Toníkem, Igor před Tomášem, Karel dvě místa za Petrem. Jaké bylo jejich pořadí v cíli?

Odpověď: Pořadí v cíli bylo následující: Petr, Jan, Karel, Václav, Toník, Ludvík, Igor, Tomáš.

1.3 Lyže

Úkol:
Cena lyží byla nejdříve snížena o 15 %, potom byla zvýšena o jednu osminu z nové ceny, a tak činila 7 650 Kč. Jaká byla původní cena lyží?

Řešení:

původní cena x
cena po slevě .... $x - 0{,}15x = 0{,}85x$
cena po navýšení ...... $0{,}85x + \frac{1}{8} \cdot 0{,}85x = 7\,650\ Kč$

$$0{,}85x \cdot \frac{9}{8} = 7\,650\ Kč$$
$$0{,}85x = 6\,800\ Kč$$
$$\underline{\underline{x = 8\,000\ Kč}}$$

Odpověď: Původní cena lyží byla 8 000 Kč.

1.4 Bazén I.

Úkol:

Bazén tvaru kvádru má hloubku 2 m a obdélníkové dno o straně 8 m a úhlopříčce 17 m. Určete, za jakou dobu se naplní prázdný bazén do výšky 75 % své hloubky, přitéká-li do něj 12 litrů vody za sekundu.

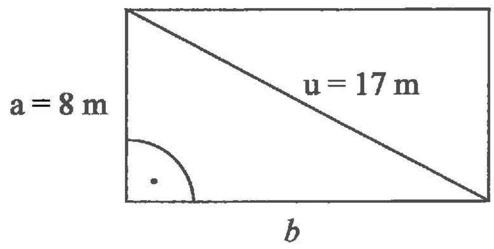
Řešení:

Označme *c* hloubku bazénu (c = 2 m), ostatní dle obrázku:

Objem bazénu (kvádru)... $V = a \cdot b \cdot c$

Objem vody .... $V = a \cdot b \cdot 0{,}75 \cdot c$

dno:



Délku druhé strany dna *b* spočteme pomocí Pythagorovy věty:

$$u^2 = a^2 + b^2$$
$$b = \sqrt{u^2 - a^2}$$

Objem vody je tedy

$$V = a \cdot \sqrt{u^2 - a^2} \cdot 0{,}75 \cdot c = 180\ m^3.$$

Jestliže do bazénu přitéká 12 litrů za sekundu, 180 m^3, tzn. 180 000 litrů přiteče za $\dfrac{180\,000}{12} = 15\,000$ sekund, což je 250 minut neboli 4 hodiny 10 minut.

Odpověď: Bazén se do výšky 75 % své hloubky naplní za 4 hodiny 10 minut.

1.5 Závod

Úkol:

Dva běžci proběhli trať závodu. První běžel průměrnou rychlostí 20 km/h a dorazil do cíle o 5 minut dříve než druhý, který běžel průměrnou rychlostí 18 km/h. Jak dlouhá byla trať závodu?

Řešení:

Označme si: $v_1 = 20\ km/h$, $v_2 = 18\ km/h$, $\Delta t = 5 \min = \frac{1}{12} h$.

Ze zadání plyne, že $t_1 = t_2 - \Delta t$.

Vycházíme z toho, že trať závodu je pro oba běžce stejná, tudíž

$$s_1 = s_2 .$$

Ze známého fyzikálního vzorce plyne

$$v_1 t_1 = v_2 t_2 ,$$

čili

$$v_1 (t_2 - \Delta t) = v_2 t_2 .$$

Postupnými úpravami vyjádříme t_2 a dosadíme:

$$v_1 t_2 - v_1 \Delta t = v_2 t_2$$

$$t_2 (v_1 - v_2) = v_1 \Delta t$$

$$t_2 = \frac{v_1 \Delta t}{v_1 - v_2} = \frac{20 \cdot \frac{1}{12}}{20 - 18} h = \frac{5}{6} h$$

Délka tratě je tedy

$$\underline{\underline{s_2}} = v_2 t_2 = \left(18 \cdot \frac{5}{6}\right) km = \underline{\underline{15\ km}} .$$

(Lze počítat i podle s_1; $s_1 = v_1 t_1 = 20 \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right) km = 15\ km$)

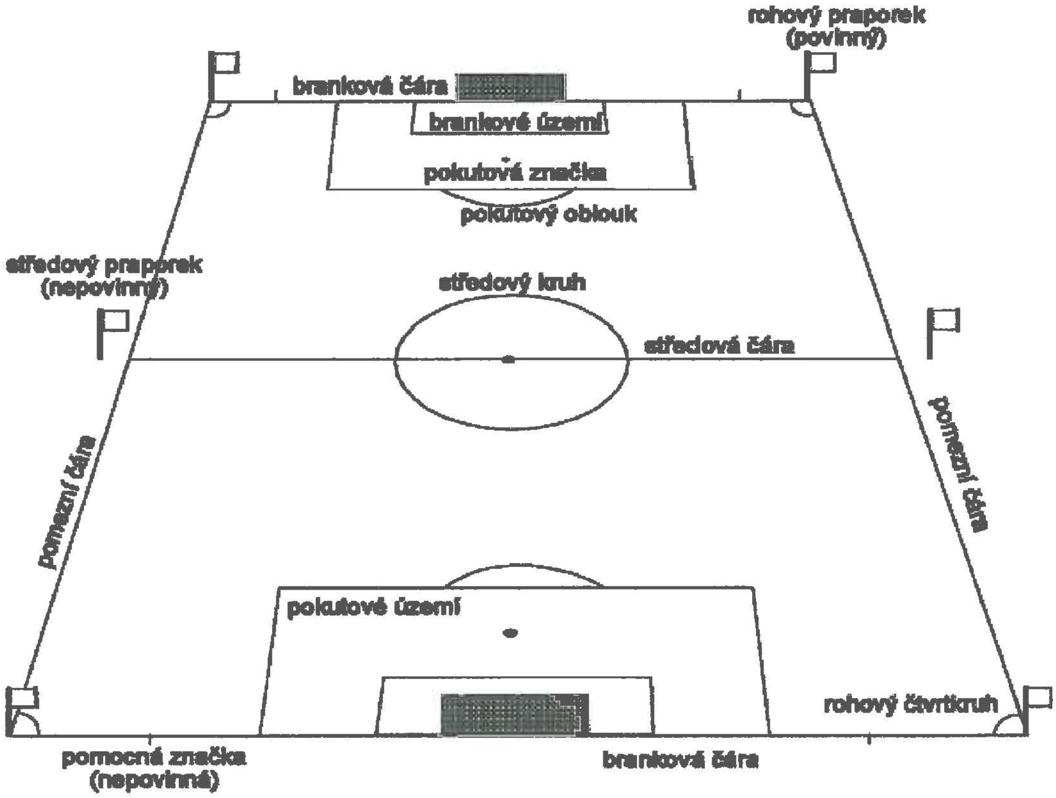
Odpověď: Trať závodu byla dlouhá 15 kilometrů.

1.6 Fotbalové hřiště

Úkol:

Spočtěte, kolik vápna se spotřebuje na „lajnování“ fotbalového hřiště za jednu sezónu. Lajnování probíhá před každým z 24 soutěžních utkání. Lajnovačka má spotřebu 20 g vápna na 1 m jízdy. Vyznačují se všechny čáry, značky, kruhy a oblouky nakreslené na obrázku. Na nalajnování středové a pokutových značek počítejte, že ujede celkem 3 m.

Rozměry: hřiště 67 x 98 m, pokutové území 16,5 x 40,32 m, brankové území 5,5 x 18,32 m, poloměr středového kruhu je 9,15 m, poloměr rohových čtvrtkruhů je 1 m. Pokutový oblouk je část kružnice se středem v pokutové značce a poloměrem 9,15 m vyznačená mimo pokutové území. Vzdálenost pokutové značky od brankové čáry je 11 m [1*].



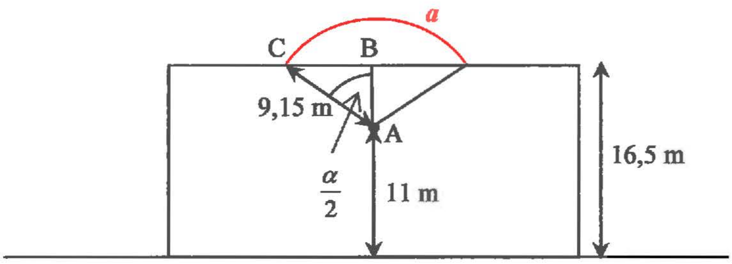
[1*]

Řešení:

Nejdříve spočteme, kolik metrů se ujede při lajnování všech čar na jeden zápas:

- 2x postranní čára — $2 \cdot 98\ m = \underline{196\ m}$
- 2x branková čára + středová čára — $3 \cdot 67\ m = \underline{201\ m}$
- 2x pokutové území — $2 \cdot (2 \cdot 16{,}5\ m + 40{,}32\ m) = \underline{146{,}64\ m}$
- 2x brankové území — $2 \cdot (2 \cdot 5{,}5\ m + 18{,}32\ m) = \underline{58{,}64\ m}$
- středový kruh — $2 \cdot \pi \cdot 9{,}15\ m = \underline{57{,}5\ m}$
- 4 rohové čtvrtkruhy (=1 kruh) — $2 \cdot \pi \cdot 1\ m = \underline{6{,}28\ m}$
- značky — $\underline{3\ m}$

- pokutový oblouk



- pro výpočet délky oblouku a, musíme znát úhel α
- ten spočítáme z trojúhelníka ABC:

$$|AB| = 16{,}5\ m - 11\ m = 5{,}5\ m$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{|AB|}{9{,}15\ m} = \frac{5{,}5\ m}{9{,}15\ m} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 53°3' \rightarrow \alpha = 106°6'$$

- délka oblouku je pak $a = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 9{,}15\ m}{360°} \cdot 106°6' = 16{,}94\ m$
- 2x pokutový oblouk … $\underline{33{,}88\ m}$

Při lajnování jednoho hřiště se ujede
$196\ m + 201\ m + 146{,}64\ m + 58{,}64\ m + 57{,}5\ m + 6{,}28\ m + 3\ m + 33{,}88\ m = 702{,}94\ m$.

Na nalajnování 24 hřišť se ujede $24 \cdot 702{,}94\ m = 16\,870{,}56\ m$.

Spotřebuje se tedy $20\ \frac{g}{m} \cdot 16\,870{,}56\ m = 337\,411{,}2\ g = \underline{\underline{337{,}4\ kg}}$ vápna.

Odpověď: Na „lajnování" fotbalového hřiště za jednu sezónu se spotřebuje přibližně 337,4 kg vápna.

1.7 Tenisový turnaj

Úkol:

Na tenisovém turnaji, kde hráči hráli každý s každým jednou, bylo odehráno ve dvouhrách 91 zápasů. Kolik se zúčastnilo hráčů?

Řešení:

Označme si počet hráčů x. Počet zápasů je počet všech možných dvojic (v nichž nezáleží na pořadí) utvořených z x hráčů, tzn. kombinace druhé třídy z x prvků. Počet zápasů je 91, tudíž platí

$$\binom{x}{2} = 91 .$$

Postupnou úpravou dostáváme:

$$\frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} = 91$$

$$x(x-1) = 182$$

$$x^2 - x - 182 = 0$$

Jediným kladným řešením této rovnice je $\underline{\underline{x = 14}}$.

Odpověď: Tenisového turnaje se zúčastnilo 14 hráčů.

1.8 Volejbalová družstva

Úkol:

Kolika způsoby lze čtyři dívky a osm chlapců rozdělit na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu byla dvě děvčata a čtyři chlapci?

Řešení:

Výběr dvou děvčat ze čtyř lze provést $\binom{4}{2}$ způsoby, výběr čtyř chlapců z osmi $\binom{8}{4}$ způsoby. Vytvořit družstvo lze tedy (dle kombinatorického pravidla součinu) $\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{4} = \frac{4! \cdot 8!}{2 \cdot 2 \cdot 4! \cdot 4!} = \underline{\underline{420}}$ způsoby.

Do druhého družstva nemusíme vybírat, sestává z těch, které jsme nevybrali do prvního družstva.

Odpověď: Požadovaná družstva lze utvořit 420 způsoby.

1.9 „Lajny“

Úkol:

Hokejové mužstvo má dva brankáře, pět obránců a dvanáct útočníků. Kolika způsoby může trenér vytvořit sestavu na ledě (tzv. „lajnu“)? („Lajnu“ tvoří brankář, dva obránci a tři útočníci)

Řešení:

Obdoba předchozího příkladu. Způsobů jak vybrat jednoho ze dvou brankářů, dva z pěti obránců a tři z dvanácti útočníků je $\binom{2}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{12}{3}=\underline{\underline{4\,400}}$.

Odpověď: Lajnu může trenér vytvořit 4 400 způsoby.

2

Rovnice, nerovnice a jejich soustavy

2.1 Orientační běh

Úvod: *Z historie orientačního běhu*

Orientační běh je vytrvalostní sport spojující terénní běh s orientací v neznámém terénu. První závody se uskutečnily v roce 1897 v norském Bergenu. Na přelomu 19. a 20. století se nový sport rozšířil do dalších zemí Skandinávie, v roce 1930 byl orientační běh dokonce vyhlášen ve Švédsku národním sportem [1]. U nás se začalo v turistickém duchu závodit v roce 1950. Soutěžily hlídky, povinná byla zátěž v batohu a běh byl vysloveně zakázán. Roku 1966 se uskutečnilo první MS ve Finsku a od té doby se koná každé dva roky [2]. Více o orientačním běhu v příkladu 3.5.

Úkol:

Při orientačním závodě se u kontroly C setkávají dva závodníci (jeden druhého doběhl). Ve stejném okamžiku vybíhají oba ke kontrole D. Jeden běží po polní cestě a je na stanovišti D o 10 sekund dříve než druhý, který běží terénem přímo do D průměrnou rychlostí o 1 m/s menší, než je průměrná rychlost prvního závodníka. Polní cesta z C do D je dlouhá 600 m, přímá vzdálenost míst C, D v terénu je 480 m. Určete průměrnou rychlost obou závodníků.

Řešení:

Vše co známe si vhodně označíme:

1.závodník.... $s_1 = 600\ m$	2. závodník.... $s_2 = 480\,m$	
$t_1 = x - \Delta t$	$t_2 = x$	$\Delta t = 10\ s$
$v_1 = y$	$v_2 = y - \Delta v$	$\Delta v = 1\ m/s$

Ze vzorce známého z fyziky $s = v \cdot t$ vytvoříme dvě rovnice o dvou neznámých:

$$s_1 = y \cdot (x - \Delta t)$$
$$s_2 = (y - \Delta v) \cdot x$$

Vyjádřením x z druhé rovnice $x = \dfrac{s_2}{y - \Delta v}$ a dosazením do první dostáváme:

$$s_1 = y \cdot \left(\frac{s_2}{y - \Delta v} - \Delta t \right)$$

Rovnici upravíme a dosadíme:

$$\Delta t \cdot y^2 + (s_1 - s_2 - \Delta t \Delta v) \cdot y - s_1 \cdot \Delta v = 0$$
$$y^2 + 11y - 60 = 0$$

Jediným kladným kořenem této rovnice je $y = 4$; pro rychlosti závodníků tedy platí $\underline{\underline{v_1 = 4\ m/s}}$, $\underline{\underline{v_2}} = v_1 - \Delta v = \underline{\underline{3\ m/s}}$.

Odpověď: Průměrná rychlost prvního závodníka je 4 m/s, druhého 3 m/s.

2.2 Nebezpečný trénink

Úvod: *Masarykův okruh*

Automotodrom Brno - Masarykův okruh, s více jak sedmdesátiletou tradicí, zajišťuje Brnu významnou pozici ve světě motoristického sportu. V roce 1965 se název Masarykův okruh poprvé zapsal do kalendáře mistrovství světa silničních motocyklů a od té doby se objevuje v tomto kalendáři již s železnou pravidelností, především díky vysoké úrovni a profesionalitě závodů. Přitažlivost závodů mistrovství světa silničních motocyklů stále roste a díky přímým televizním přenosům a záznamům mohou vzrušující klání sledovat diváci na celé zeměkouli. Silné kouzlo atmosféry světové závodní dráhy ovšem láká na Masarykův okruh nejen diváky, ale především pořadatele četných zahraničních klubových motocyklových a automobilových akcí. Střetávají se tu piloti mnoha významných automobilových seriálů s oficiální pečetí Mezinárodní automobilové federace FIA [2*].

Okruh má 14 zatáček (6 levých a 8 pravých), je široký 15 m a jeho celková délka (měřená v ose vozovky) je 5 403,19 m [3*].

Úkol:

Na Masarykově okruhu trénují dva motocyklisté. Když jezdí proti sobě, potkávají se každých 72 sekund, jezdí-li týmž směrem, dohánějí se každých deset minut. Určete jejich rychlosti. Délku okruhu zaokrouhlete na celé kilometry.

Řešení:

Označme s délku celého okruhu, platí $s = 5\ km$. Využijeme vzorec $s = v \cdot t$.

Jezdí-li motocyklisté proti sobě, je za čas $t_1 = 72\ s = 0{,}02\ h$ součet jejich drah roven délce celého okruhu s:

$$s_1 + s_2 = s$$
$$v_1 t_1 + v_2 t_1 = s$$
$$\underline{v_1 + v_2 = \frac{s}{t_1}}$$

Jezdí-li týmž směrem a má li jeden dohonit druhého, musí ten rychlejší za čas $t_2 = 10 \min = \frac{1}{6}\ h$ ujet o jeden okruh víc než ten pomalejší, platí tedy:

$$s_2 = s_1 + s$$
$$v_2 t_2 = v_1 t_2 + s$$
$$\underline{v_2 - v_1 = \frac{s}{t_2}}$$

Vytvořili jsme dvě rovnice o dvou neznámých, jejichž odečtením získáváme $v_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_2}\right)$.

Po dosazení je $\underline{\underline{v_1 = 110\ km/h}}$. Pro v_2 pak platí $\underline{\underline{v_2}} = \frac{s}{t_1} - v_1 = \underline{\underline{140\ km/h}}$.

Odpověď: Rychlosti motocyklistů jsou 110 km/h a 140 km/h.

2.3 Bazén II.

Úvod: *Historie bazénů I.*

Plavecká výkonnost vždy do značné míry souvisela s výstavbou plaveckých zařízení. Z římské epochy se zachovaly zbytky přepychových lázní s bazény. Například Caracallovy lázně měly bazén o rozměrech 55 x 20 m s ohřívanou vodou. První závody u nás se konaly převážně na tekoucích vodách, a proto výkony byly těžko srovnatelné. První pětadvacetimetrový krytý bazén na našem tehdejším území byl postaven v Bratislavě roku 1895. V dalších letech však výstavba bazénů zaostávala za sousedními státy. Pražští plavci trénovali do roku 1914 v malém kruhovém bazénku v Koruně a po první světové válce na Klárově (kratší než 25 m) [3]. (*Pokračování viz. příklad 4.4*)

Úkol:

Naplnění bazénu vodou první rourou trvá o 2 hodiny déle než druhou rourou a o 3 h 36 min déle, než kdyby bazén natékal oběma rourami najednou. Kolik hodin trvá naplnění bazénu jen první rourou? Za jak dlouho by se bazén naplnil jen druhou rourou?

Řešení: (vše v minutách)

Hodiny převedeme na minuty a zvolíme následující označení:

čas naplnění bazénu první rourou .... $x+120 = y+216$ (1)

čas naplnění bazénu druhou rourou x

čas naplnění bazénu oběma rourami najednou...y

---

1. rourou...za 1 h... $\frac{1}{x+120}$ bazénu

   ...za y h... $\frac{y}{x+120}$ bazénu

2. rourou...za 1 h... $\frac{1}{x}$ bazénu

   ...za y h... $\frac{y}{x}$ bazénu

Oběma rourami se bazén naplní za y hodin. Spočetli jsme, že první rourou se za tuto dobu naplní $\frac{y}{x+120}$ bazénu, druhou rourou se naplní $\frac{y}{x}$ bazénu. Součet těchto výrazů dává celek, tzn. 1 (naplní se celý bazén), dostáváme tedy rovnici $\frac{y}{x+120}+\frac{y}{x}=1$. (2)

Rovnice (1) a (2) tvoří soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Druhou rovnici si upravíme na tvar $y(2x+120)=x^2+120x$.

Vyjádřením y z (1) ($y=x-96$) a jeho dosazením do (2) dostáváme

$$(x-96)\cdot(2x+120)=x^2+120x,$$

po úpravě

$$x^2-192x-11520=0.$$

Jediným kladným řešením této rovnice je x = 240. Jen druhou rourou se tedy bazén naplní za 240 minut, jen první rourou za x + 120 min = 360 minut.

Odpověď: Naplnění bazénu jen první rourou trvá 6 hodin, jen druhou rourou 4 hodiny.

2.4 Snowboarding

Úvod:

Snowboarding zaznamenal v poslední době obrovský rozmach. Zajímavým tématem je otázka početního zastoupení snowboardistů vzhledem k lyžařům ve světovém a českém měřítku. V devadesátých letech se objevila řada prognóz a názorů, které předpovídaly nárůst počtu snowboardistů dokonce až k zatlačení lyžařů do menšinového zastoupení. Tyto odvážné prognózy ve většině případů také datovaly vyrovnání kvantitativního zastoupení obou skupin přibližně kolem roku 2001. Tento předpovídaný vývoj však zatím vůbec neodpovídá skutečnosti. Ohromující prudký nárůst v devadesátých letech se na konci tohoto desetiletí velmi zmírnil. Zřejmě k tomu přispěla vlna carvingových lyží. Pravdivost konečného výsledku uvedené prognózy sice nelze naprosto striktně vyvrátit, ale současné statistiky tomu příliš nenasvědčují. Další výraznější zvyšování počtu vyznavačů sněžného prkna v areálech zimních sportů je velmi diskutabilní. Procento mladých začínajících snowboardistů je sice vysoké, starší lyžaři by teoreticky měli odcházet do „důchodu“ a tím uvolňovat místo mladým snowboardistům, je však otázkou, kolik zapálených snowboardistů se ve vyšším věku v případě exlyžařů vrátí nebo se přeučí k přece jen z rekreačního pohledu klidnějšímu a pohodlnějšímu lyžování.

Hrubý odhad dvou skupin vyznavačů zasněžených svahů činí **8 miliónů snowboardistů** ku 50 miliónům lyžařů. Počet snowboardistů a lyžařů pomáhá určovat statistika prodaného materiálu, který však není zdaleka určující [4]. Pro orientaci uvádím několik čísel:

Počty snowboardistů ve světě:

Amerika	3,7 milionu
Evropa	?
Německo	?
Francie	500 000
Itálie	250 000
Rakousko	225 000
Švýcarsko	?
Japonsko	?
Zbytek světa	0,3 milionu

[4]

V tabulce jsou uvedeny jen vybrané údaje, neznamená to tedy, že by například v Čechách nebo v Číně nebyl snowboardista žádný (Češi jsou zahrnuti v Evropě, Číňani ve „Zbytku světa“).

Celkový počet snowboardistů ve světě je součtem údajů za Ameriku, Evropu, Japonsko a „Zbytek světa“.

Otazníky v tabulce neznamenají, že by tyto údaje nebyly známy, jejich výpočet bude předmětem vašeho dalšího úkolu.

Úkol:

Na základě informací z úvodu a následujících tvrzení spočtěte chybějící údaje z tabulky.

1) Součet snowboardistů Německa a Švýcarska tvoří 32 % z počtu evropských snowboardistů.
2) V Japonsku je 2,5krát více snowboardistů než v Německu.
3) V Americe je o dva miliony snowboardistů více než ve Švýcarsku a Japonsku dohromady.

Řešení: (vše v milionech)

Označme si: w...počet snowboardistů Evropy
x...počet snowboardistů Německa
y...počet snowboardistů Švýcarska
z...počet snowboardistů Japonska

Z prvního tvrzení plyne: $x + y = 0{,}32 \cdot w$. (1)

Z druhého tvrzení plyne: $z = 2{,}5 \cdot x$. (2)

Z třetího tvrzení plyne: $3{,}7 = y + z + 2$,
po úpravě: $1{,}7 = y + z$. (3)

Abychom vytvořili potřebnou čtvrtou rovnici, využijeme informaci o celkovém počtu snowboardistů (viz. úvod).
Dostáváme tedy

$$8 = 3{,}7 + w + z + 0{,}3$$

a po úpravě

$$w + z = 4. \tag{4}$$

Máme tedy soustavu čtyř rovnic (1), (2), (3) a (4) o čtyřech neznámých, kterou vyřešíme dosazovací metodou.

Dosazením $z = 2{,}5 \cdot x$ do ostatních rovnic dostáváme tři rovnice o třech neznámých:

$$x + y = 0{,}32 \cdot w \tag{5}$$
$$1{,}7 = y + 2{,}5 \cdot x \tag{6}$$
$$w + 2{,}5 \cdot x = 4 \tag{7}$$

Dále vyjádříme y z (5), dosadíme do (6), upravíme a dostáváme soustavu:

$$1{,}7 = 0{,}32 \cdot w + 1{,}5 \cdot x \tag{8}$$
$$w + 2{,}5 \cdot x = 4 \tag{9}$$

Vyjádřením w z (9) a dosazením do (8) dostáváme

$$1{,}7 = 0{,}32 \cdot (4 - 2{,}5x) + 1{,}5 \cdot x$$
$$0{,}42 = 0{,}7x$$
$$\underline{\underline{x = 0{,}6}}.$$

Dopočítáme ostatní neznámé:

$$\underline{\underline{w}} = 4 - 2{,}5x = \underline{\underline{2{,}5}},$$
$$\underline{\underline{y}} = 1{,}7 - 2{,}5x = \underline{\underline{0{,}2}},$$
$$\underline{\underline{z}} = 4 - w = \underline{\underline{1{,}5}}.$$

Odpověď: V Evropě se odhaduje na 2,5 milionu snowboardistů, z toho je 600 000 Němců a 200 000 Švýcarů. Japonských snowboardistů je asi 1,5 milionu.

2.5 Plavání

Úvod: *Pár zajímavostí z historie plavání*

Největšího rozmachu dosáhlo plavání ve starém Řecku. Plavání bylo považováno za jeden z nejdůležitějších vyučovacích předmětů na gymnáziích. Každý, kdo neuměl číst a plavat, byl považován za nevzdělance. Plavání mělo též značný podíl v tělesné přípravě řeckého vojska. Významnou roli v námořních bitvách měla skupina speciálně vycvičených plavců, jejichž úkolem bylo přiblížit se pod vodou k nepřátelským lodím a způsobit paniku ještě před zahájením boje. Z řecké mytologie je známa pověst o Leandrovi, který každý večer plaval přes Dardanelskou úžinu (asi 1 400 m) za svou milenkou Hérou. Řecký způsob výchovy vojáka se později přenesl i do Říma. Na Martově poli na březích Tibery se učili vojáci plavat v šatech i zbroji. Obzvláště bylo oblíbeno potápění. Nejlepší plavci byli najímáni, aby se spouštěli do potopených lodí, odkud vynášeli drahocenné předměty. Poslední část římské epochy je charakterizována úpadkem tělesné výchovy. Roku 394 n.l. zakázal císař Theodosius Velký olympijské hry. Místo zdravého soutěžení nastoupila éra zápasů gladiátorů, které končily obvykle smrtí jednoho z nich. Obdobou gladiátorských zápasů ve vodě byly tzv. naumachie, při kterých se snažil jeden zápasník utopit druhého.

Počátky sportovního plavání byly těsně spjaty s vytrvalostními výkony. Popud k těmto výkonům dal anglický básník lord G. G. Byron. Aby si ověřil pravdivost řecké báje o Leandrovi, přeplaval roku 1810 Dardanelovu úžinu. O šedesát let později, v roce 1875, zdolal kapitán M. Webb kanál La Mance. Na prvních olympijských hrách byla vypsána pouze disciplína „plavání“ a délka tratě, která se měla překonat. Každý plaval, jak uměl. Program olympijských her se postupem času měnil. Některé disciplíny se nám jeví z dnešního hlediska jako kuriózní. Například roce 1900 bylo zařazeno plavání pod vodou na vzdálenost. Výkon vítěze byl 60 metrů. Zvláštností následujících her v roce 1904 byla disciplína „startovní skok se splýváním“. Držitel zlaté medaile dosplýval asi 19,05 m [3].

Úkol:

V poslední části tréninku má plavec za úkol uplavat 1 400 m po proudu a 400 m proti proudu v řece, jejíž proud má rychlost 0,6 m/s. V jakých mezích musí být vlastní rychlost plavce, aby plaval více než 20, ale méně než 22,5 minut? Rychlost plavce vyjádřete v počtu sekund, které potřebuje k uplavání 100 m (to je pro plavce názornější než vyjádření rychlosti v m/s).

Řešení: (čas v *s*, vzdálenost v *m*, rychlost v *m/s*)

Označme si vlastní rychlost plavce v. Čas, za který uplave obě vzdálenosti, je roven

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{1\,400}{v + 0{,}6} + \frac{400}{v - 0{,}6}$$

(při plavání po proudu je jeho rychlost zvětšená o rychlost proudu, při plavání proti proudu je o danou hodnotu zmenšená).

Tento čas musí být v rozmezí 20 až 22,5 minut (tj. 1 200 až 1 350 s), platí tedy

$$1\,200 < \frac{1\,400}{v + 0{,}6} + \frac{400}{v - 0{,}6} < 1\,350 .$$

Celou nerovnici vynásobíme výrazem $(v+0,6)(v-0,6)$. Podmínka pro použití této úpravy $v \neq \pm 0,6$ je splněna, jelikož musí platit $v > 0,6$ (aby mohl plavec plavat proti proudu, musí být jeho vlastní rychlost nutně větší než rychlost proudu). Znaménka zůstávají stejná, jelikož výraz je kladný.

Po úpravě dostáváme

$$1\,200v^2 - 432 < 1\,800v - 600 < 1\,350v^2 - 486.$$

Musí být tedy zároveň splněny tyto dvě nerovnosti

$$1\,200v^2 - 1\,800v + 168 < 0$$
$$1\,350v^2 - 1\,800v + 114 > 0.$$

První nerovnost je splněna pro $v \in (0,1; 1,4)$, druhá pro $v \in (-\infty; 0,07) \cup (1,27; \infty)$, obě zároveň pro $v \in (1,27; 1,4)$ m/s.

Rychlosti 1,27 m/s odpovídá čas 78,9 s (1:18,9) na 100 m, rychlosti 1,4 m/s čas 71,4 s (1:11,4) na 100 m.

Odpověď: Vlastní rychlost plavce musí být větší než 1,27 m/s a menší než 1,4 m/s. Jeho nasazení by mělo odpovídat času 1:11,4 až 1:19 na 100 m.

3

Goniometrie a trigonometrie

3.1 Turisti a rozhledna

Úvod: *Klub českých turistů a rozhledny v ČR*

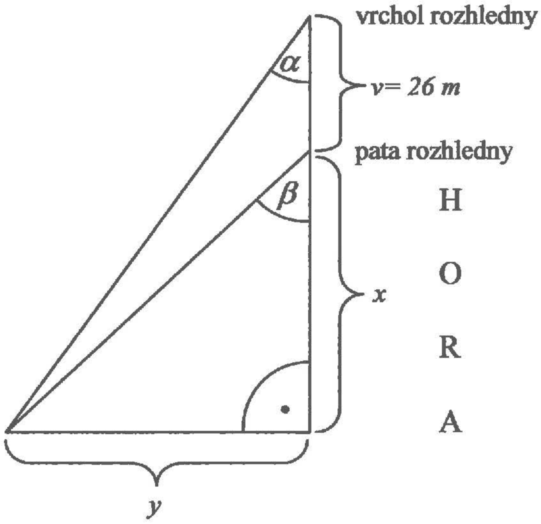
Historie Klubu českých turistů (KČT) sahá do roku 1888, kdy byl Klub založen skupinou vlastenců okolo Vojty Náprstka. Dnes má zhruba 40 tisíc členů, z toho téměř čtvrtinu mládeže. Členové KČT organizují každoročně přes tisíc akcí určených pro členy klubu i neorganizované zájemce o všechny druhy turistiky - pěší, cyklo, lyžařskou a vodní turistiku, mototuristiku, speleoturistiku, vysokohorskou turistiku, turistiku zdravotně postižených a nejnověji i hipoturistiku. Turistické oddíly mládeže jsou sdruženy do Asociace TOM [4*]. Klub českých turistů již déle než sto let přivádí lidi do přírody za účelem jejího poznání, usměrňuje je po značených turistických cestách a tím zároveň významně přispívá k ochraně přírody a životního prostředí.

Historie rozhleden a vyhlídkových věží v českých zemích se píše již dlouhých 200 let. Za tu dobu bylo na území Čech, Moravy a Slezska postaveno téměř 400 těchto staveb. Samozřejmě ne všechny se dochovaly až do dnešních dní. Především ty dřevěné nepřežily obvykle více než několik desítek let. Přesto v současnosti najdeme na našich kopcích více než 200 rozhleden a jejich počet neustále roste [5*]. Od roku 1999, kdy Česká televize poprvé vysílala dokumentární seriál „Rozhlédni se, člověče“, a kdy vyšla kniha „Rozhledny Čech, Moravy a Slezska“, se rozhledny staly jedním z nejatraktivnějších turistických cílů. (V některých regionech mají dokonce vyšší návštěvnost než hrady a zámky.) Uvedený rok znamenal začátek nové epochy ve výstavbě rozhleden. Během několika posledních let se jejich počet zvýšil o více než 80 [6*].

Úkol:

Turisti KČT se jednoho dne vydali na výšlap hory, na jejímž vrcholu se nacházela rozhledna. Když přišli na vrchol a v údolí viděli autobus, kterým přijeli, začali se dohadovat, jaký výškový rozdíl překonali. Jeden turista si všiml informační cedule, kde bylo napsáno, že rozhledna je vysoká 26 m. Z vrcholu rozhledny a od její paty změřil hloubkové úhly pod kterými je vidět autobus, a pak už snadno výškový rozdíl spočítal. Určete také výškový rozdíl autobus – vrchol hory, když víte, že naměřené hloubkové úhly jsou 29° a 31,5°.

Řešení:



Ze zadání plyne: $\alpha = 29°$, $\beta = 31{,}5°$

Dle obrázku platí: $tg\beta = \dfrac{y}{x}$

$$tg\alpha = \frac{y}{x+v}$$

Vyjádříme y z obou rovnic a porovnáme:

$$x \cdot tg\beta = (x+v)\cdot tg\alpha$$

Po úpravě výrazu vyjádříme x a dosadíme:

$$\underline{\underline{x}} = \frac{v \cdot tg\alpha}{tg\beta - tg\alpha} = \frac{(26\ m)\cdot tg\ 29°}{tg\ 31{,}5° - tg\ 29°} = \underline{\underline{246{,}4\ m}}$$

Odpověď: Výška hory je přibližně 246,4 m.

3.2 Padák

Úvod: *Parašutismus*

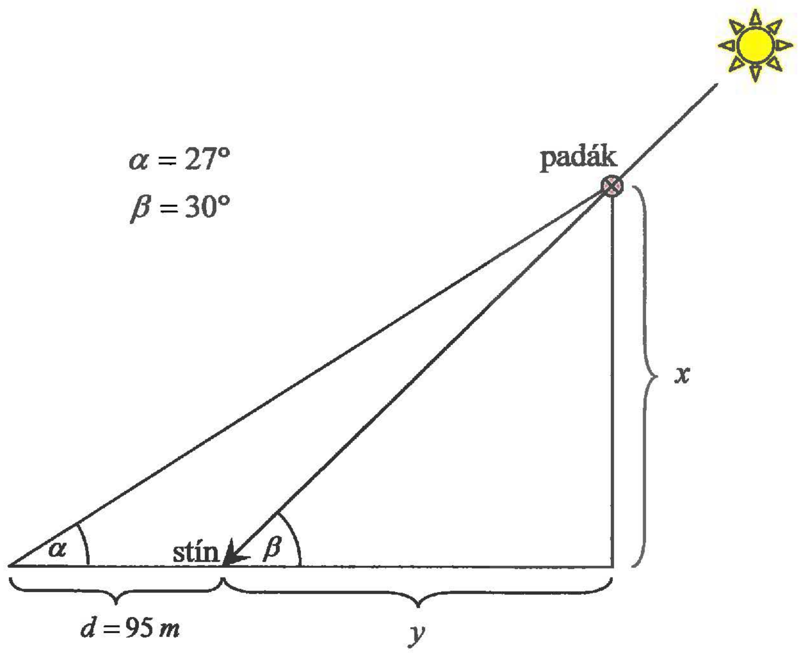
Již v roce 1485 zobrazil první padák Leonardo da Vinci. Jako první parašutistický seskok je považován skok z výšky 700 metrů, který v roce 1797 uskutečnil Francouz J. Garnerin. Na začátku 20. století se proslavil Paulus Kätchen skoky z balonu. Vývoj padáků byl koncem šedesátých let minulého století tak daleko, že bylo možno pravidelně přistávat na doskokovou plochu o průměru 10 cm. A zde také začíná svoji historii sportovní odvětví parašutismus. Dnes parašutismus zahrnuje několik disciplín. Při *CRW (Canopy Relative Work)* tvoří parašutisté různé formace na otevřených padácích. V mladé disciplíně *Freefly* se hodnotí elegance a množství předvedených figur a jejich ztvárnění při letu volným pádem. Minimální výška seskoku pro tuto disciplínu je 4 000 metrů a doba volného pádu je jedna minuta. Každé družstvo se skládá ze dvou parašutistů a jednoho parašutisty kameramana. Disciplína *Freestyle* je hodně podobná disciplíně Freefly. Zde se také hodnotí předepsané figury, ty jsou ale více gymnastického rázu, takže je to spíše disciplína ženská. Tým tvoří jen jeden parašutista a jeden kameraman. Velmi důležitá je jejich spolupráce, neboť z videonahrávky kameramana je závodník hodnocen. Hodnotí se kreativita, choreografie a preciznost provedení. Jednou z nejstarších disciplín parašutismu je *přistání na přesnost*. Vyskakuje se ve výšce 1 000 m nad zemí a okamžitě se otevírá padák. Parašutista přistává na matraci, přičemž se snaží trefit tzv. nulu, což je terč o průměru 5 cm. V disciplíně RW (Relative Work) se ve skupinách po 4, 8 nebo 16 osobách vyskakuje ve výšce do 4 000 m, parašutisté musí během dané doby zvládnout předepsané figury a formace. Kdo v daném čase splní nejvíce předepsaných figur, obdrží nejvíce bodů a vítězí. V posledních letech je velice oblíbený *Skysurf*. Parašutista (skysurfer) stojí na speciálním prknu, podobném prknu snowboardovému, dělá salta, točí vývrtky nebo prostě jen tak surfuje po nebi. Takzvaný skysurf-team je složen ze dvou parašutistů - skysurfer a kameraman. Hodnotí se spolupráce, preciznost provedení a zároveň i filmařská práce. Divácky nejatraktivnější disciplínou je pilotáž extra výkonného padáku v těsné blízkosti země - tzv. *Swoop*. Je to poměrně mladá, radikální disciplína parašutismu, která přišla na svět s vývojem velmi výkonných malých padáků. Ty mají velikost necelých 9 m^2, což je méně než 1/3 rozměru padáku, který používají parašutisté při prvních seskocích. Jde o to překonat co největší vzdálenost v těsné blízkosti vodní hladiny (nebo země), tedy po doteku s vodní hladinou přivést padák co nejdále od prvního doteku s vodou. Hodnotí se nejen vzdálenost, ale i dodržení předepsané výseče pro přistání. Tato disciplína je velmi nebezpečná z důvodu dosahování velmi vysoké sestupní rychlosti těsně nad zemí - při prvním doteku s vodou je rychlost padáku 100 km/h a překonaná vzdálenost bude jistě větší než 120 metrů. Proto se jí mohou věnovat jen opravdoví profesionálové. Piloti musí mít padák naprosto pod kontrolou po celou dobu seskoku a hlavně při finálním manévru. Jakákoliv chyba – třeba špatný odhad výšky při narychlení padáku – může stát pilota těžká zranění, někdy dokonce i život [7*, 8*, 9*, 10*].

Úkol:

V jaké výši je v určitém okamžiku padák, který vidíme ve výškovém úhlu 27°, je-li výška Slunce nad horizontem 30° a stín padáku je od nás vzdálen 95 m směrem k patě výšky padáku?

Řešení:

Nakreslíme si obrázek a doplníme známé údaje:



Z obrázku plyne

$$tg\alpha = \frac{x}{d+y}$$

$$tg\beta = \frac{x}{y}.$$

Z obou rovnic vyjádříme y a porovnáme

$$\frac{x}{tg\alpha} - d = \frac{x}{tg\beta}.$$

Vyjádříme x, upravíme a dosadíme

$$\underline{\underline{x}} = \frac{d \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\beta - tg\alpha} = \frac{(95\ m) \cdot tg\ 27° \cdot tg\ 30°}{tg\ 30° - tg\ 27°} = \underline{\underline{412\ m}}.$$

Odpověď: V daném okamžiku je padák ve výšce 412 m.

3.3 Zvědaví rozhodčí

Úvod: *Sportovní létání*

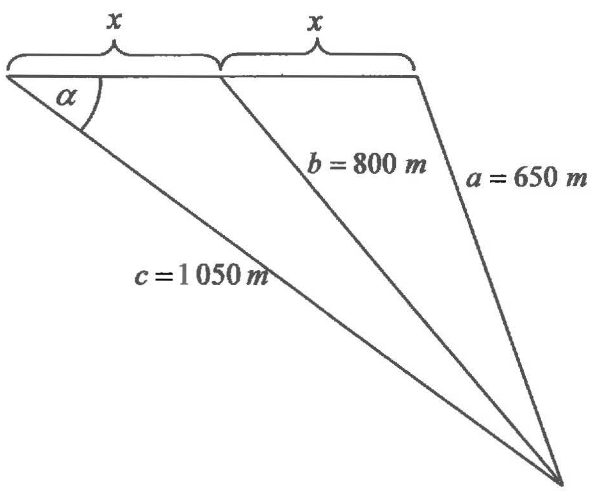
Sportovnímu létání se v České republice věnuje na patnáct tisíc pilotů v několika kategoriích. Tradice létání je u nás bezmála stejně stará jako ve světě a koncem roku 2003 jsme spolu s celým leteckým světem slavili sto let od prvního úspěšného vzletu motorového letadla. V letecké navigaci je Česko světovou velmocí. Konkurencí jsou v posledních letech pro české ultralehké piloty jen Britové, Španělé a Francouzi [11*]. (Více o sportovním létání v příkladech 3.4 a 4.3)

Úkol:

Při soutěži v přesné navigaci seděli u tajné kontrolní brány dva nezkušení rozhodčí. Jednoho z nich zajímalo, jak rychle asi letadla nad nimi létají. Druhý vzal „dálkoměr" a vždy po deseti vteřinách změřil vzdálenost letadla, chvíli počítal a nakonec rychlost určil. Spočtěte také rychlost letadla, jestliže naměřené vzdálenosti byly 650, 800 a 1 050 m. Uvažujte, že letadlo letí přímočaře, stále stejnou rychlostí a ve stejné výšce.

Řešení:

Nakreslíme si obrázek a vhodně označíme:



Abychom zjistili rychlost letadla v, musíme nejdříve vypočítat vzdálenost x, kterou letadlo uletí za čas $t = 10\ s$.

Dle kosinové věty platí

$$b^2 = x^2 + c^2 - 2xc\cos\alpha$$
$$a^2 = (2x)^2 + c^2 - 4xc\cos\alpha .$$

Z obou rovnic vyjádříme $\cos\alpha$ a porovnáme

$$\frac{x^2 + c^2 - b^2}{2xc} = \frac{4x^2 + c^2 - a^2}{4xc} .$$

Po úpravě dostáváme

$$a^2 - 2b^2 + c^2 = 2x^2 ,$$

odkud již snadno vyjádříme x a dosadíme

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2 + c^2}{2}} = \sqrt{\frac{(650\ m)^2 - 2\cdot(800\ m)^2 + (1050\ m)^2}{2}} = 350\ m .$$

Pro rychlost letadla v pak platí

$$\underline{\underline{v}} = \frac{x}{t} = \frac{350\ m}{10\ s} = \underline{\underline{35\ m/s}} .$$

Odpověď: Rychlost letadla je 35 m/s (126 km/h).

3.4 Přesná navigace

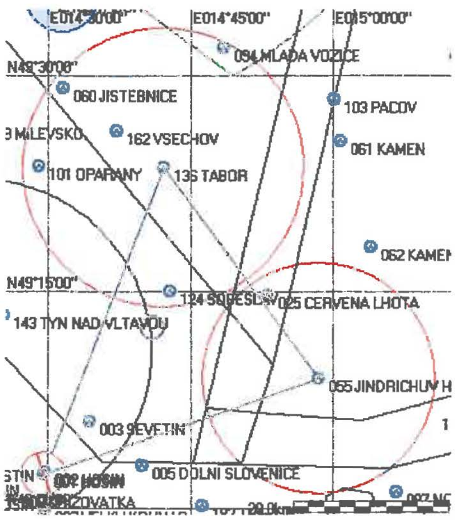
Úvod: *Disciplíny sportovního létání*

Jednou z hlavních disciplín sportovního letectví je soutěž v přesné navigaci. Pilot musí proletět danou trať podle zadání, cestou hledá fotografie a znaky a za letu je zakresluje do mapy. Současně musí dodržet přesný čas, protože kdekoliv na trati mohou být rozmístěny tajné brány, na kterých se měří čas. Za každou vteřinu, o kterou piloti proletí časovou kontrolu dřív nebo později, rozhodčí strhávají body. Další disciplínou je přesné přistání do tzv. decku, který má rozměr 25 x 100 metrů a je rozdělen na bodovaná pásma, kde musí pilot s vypnutým motorem přistát a zároveň zastavit, aniž by z označeného prostoru vyjel. Při tzv. spotřebových disciplínách dostanou piloti přesné množství paliva a soutěží, kdo vydrží ve vzduchu nejdéle [12*].

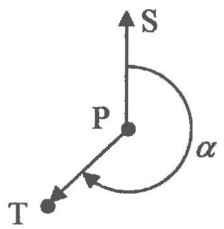
Úkol:

Při soutěži v přesné navigaci dostal pilot následující soutěžní úlohu:

Otočný bod	Vzdálenost	Kurs	Pozorovací sektor
001 HOSIN	3,0km		K následujícímu OB, Páska 6,0km
055 JINDRICHUV HRADEC	37,1km	70°	Cylindr R=15,0km
136 TABOR	33,5km	324°	Cylindr R=18,0km
001 HOSIN			Cylindr R=3,0km



[13*]



azimut α

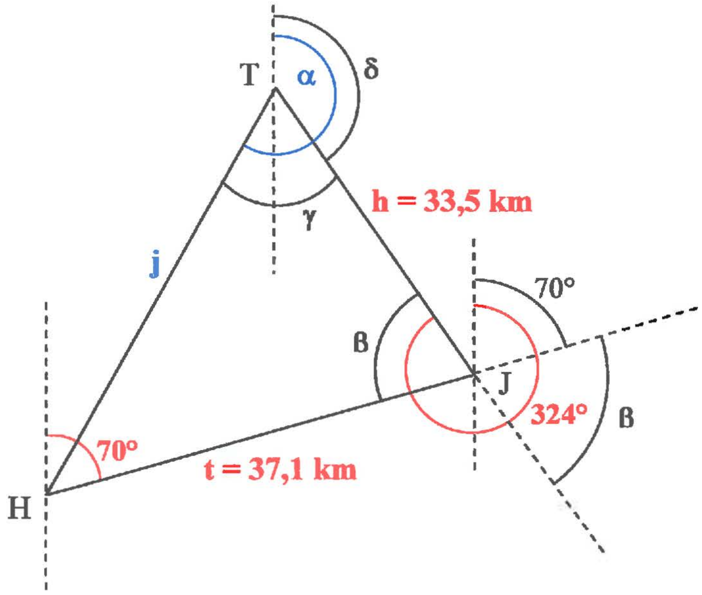
Má tedy letět z letiště Hosín v kursu 70° na otočný bod Jindřichův Hradec, odtud v kursu 324° na otočný bod Tábor. Vzdálenost Hosín-Jindřichův Hradec je 37,1 km, vzdálenost Jindřichův Hradec-Tábor 33,5 km. V zadání úlohy však údaje o kursu a vzdálenosti zpět do Hosína chybí. Vypočítejte je.

Nápověda:

Kurs (též *azimut*) je velikost úhlu, jehož vrcholem je místo P pozorovatele, počátečním ramenem polopřímka PS, kde S je severní pól a koncovým ramenem je polopřímka PT, kde T je zaměřovaný bod (ve smyslu pohybu hodinových ručiček), viz. obrázek výše.

Řešení:

Nejprve si načrtneme obrázek a vyznačíme známé údaje a neznámé (j a α).



Vzdálenost j vypočteme pomocí *kosinové věty*, musíme však nejdříve dopočítat úhel β :

$$\beta = 324° - 70° - 180° = 74° \qquad \text{(patrné z obrázku)}$$

Pak platí

$$j^2 = h^2 + t^2 - 2 \cdot h \cdot t \cdot \cos\beta \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{j = 42{,}6\ km}}.$$

Možností výpočtu úhlu α je více, uvádím jednu z mnoha:
Abychom spočítali úhel α, musíme nejprve zjistit velikosti úhlů γ a δ:
Úhel γ spočítáme pomocí *sinové věty*:

$$\frac{t}{\sin\gamma} = \frac{j}{\sin\beta} \quad \rightarrow \quad \sin\gamma = \frac{t \cdot \sin\beta}{j} \quad \rightarrow \quad \gamma = 56°50'$$

Pro úhel δ platí:

$$\delta = 70° + \beta = 70° + 74° = 144°$$

(patrné z obrázku – využití znalostí o střídavých a souhlasných úhlech)

Pak $\underline{\underline{\alpha}} = \gamma + \delta = \underline{\underline{200°50'}}$

Odpověď: Pilot poletí z Tábora v kursu $200°50'$, vzdálenost Tábor-Hosín je 42,6 km.

3.5 Orientační běh II.

Úvod:

Podstatou orientačního běhu je spojení běhu s orientací v neznámém terénu. Závodníci při něm s pomocí mapy (kterou dostanou až těsně před startem) a busoly absolvují trať v převážně zalesněném terénu. Trať je určena startem, kontrolami a cílem. Jsou vypisovány jak závody s pevným pořadím kontrol (pořadí průchodu kontrolami je dáno pořadatelem), tak s volným pořadím kontrol (závodník si volí pořadí sám), ale i závody kombinované. Start je intervalový. Cílem je absolvování závodní tratě v minimálním čase. V terénu je kontrola označena železným stojanem ve tvaru písmena T, na kterém je zavěšen plátěný, trojboký, oranžovobílý „lampion“. Závodník označí průchod kontrolou zasunutím čipu, který má upevněný na prstu, do záznamového zařízení. Elektronické zařízení, které zaznamenává průchod závodníka danou kontrolou, lze v tréninku a při nácviku nahradit různými razítky, kleštičkami s bodci nebo jen opisováním písmen a kódů [2].

Úkol:

Pro cvičný orientační běh musí učitelé rozmístit na kontrolní stanoviště A, B, C, D čtyři „lampiony“. Na stanoviště C přišli oba společně po polní cestě, poté jeden učitel odbočil z cesty vlevo na pěšinu, která svírá s cestou úhel 60°, a za 4 minuty došel na stanoviště B. Druhý učitel pokračoval v chůzi po polní cestě a po 250 m (v místě D, kde umístil lampion) odbočil vpravo na turistickou stezku, která svírá s cestou úhel $21°47'$. Po této stezce dorazil za 2 minuty na stanoviště A. Předpokládejte, že všechny cesty jsou přímé a že se učitelé pohybují stálou rychlostí 6 km/h. Určete vzdálenosti mezi jednotlivými stanovišti (s přesností na metry).

Řešení:

Nejprve si nakreslíme obrázek a zvolíme vhodné označení:

Ze zadání plyne:

$\delta = 60°$

$\varepsilon = 21°47'$

$f = 0{,}25\ \text{km}$

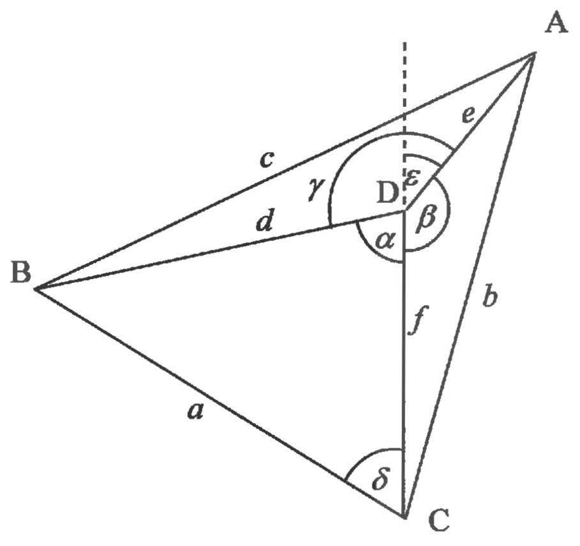
$v = 6\ \text{km/h}$

$t_a = 4\ \text{min} = \dfrac{1}{15}\,h$

$t_e = 2\ \text{min} = \dfrac{1}{30}\,h$

(t_a…čas, za který učitel ujde vzdálenost a,

t_e…čas, za který učitel ujde vzdálenost e)



Vzdálenost a vypočteme pomocí vzorečku $s = v \cdot t$ (resp. $a = v \cdot t_a$):

$$\underline{\underline{a}} = v \cdot t_a = \underline{\underline{0{,}4\ km}}.$$

Podobně vypočteme vzdálenost e:

$$\underline{\underline{e}} = v \cdot t_e = \underline{\underline{0{,}2\ km}}.$$

Vzdálenost d vypočteme pomocí kosinové věty:

$$d^2 = a^2 + f^2 - 2 \cdot a \cdot f \cdot \cos\delta \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{d = 0{,}35\ km}}.$$

Abychom obdobně mohli vypočítat vzdálenost b, musíme nejprve dopočítat úhel β:

$$\beta = 180° - \varepsilon = 158°13'.$$

Potom

$$b^2 = e^2 + f^2 - 2 \cdot e \cdot f \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{b = 0{,}442\ km}}.$$

Pro výpočet vzdálenosti c musíme nejprve vypočítat úhel α a úhel γ.
Úhel α spočteme dle sinové věty:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\delta} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\delta}{d} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 81°47'.$$

Pak pro úhel γ platí:

$$\gamma = 360° - (\alpha + \beta) = 120°.$$

Nyní již můžeme (opět dle kosinové věty) dopočítat vzdálenost c:

$$c^2 = d^2 + e^2 - 2 \cdot d \cdot e \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c = 0{,}482\ km}}.$$

Odpověď: Vzdálenosti mezi stanovišti jsou následující: a = 400 m, b = 442 m, c = 482 m, d = 350 m, e = 200 m.

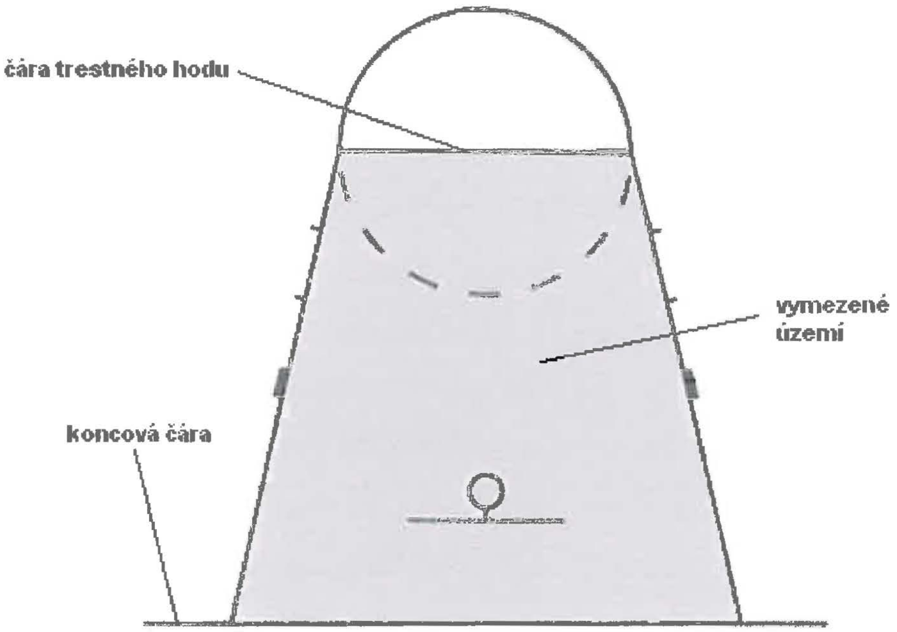
4

Planimetrie a stereometrie

4.1 Území trestného hodu

Úvod:

Jedním z hlavních znaků basketbalového hřiště je vyznačení vymezeného území a území trestného hodu. Vymezené území je vyznačeno na obrázku. *Hráč nesmí zůstat déle než tři vteřiny v soupeřově vymezeném území, má-li jeho družstvo živý míč pod kontrolou na hřišti a čas běží.* Území trestného hodu je vymezené území rozšířené do hřiště o půlkruh o poloměru 1,8 m, jehož střed je ve středu čáry trestného hodu [14*].



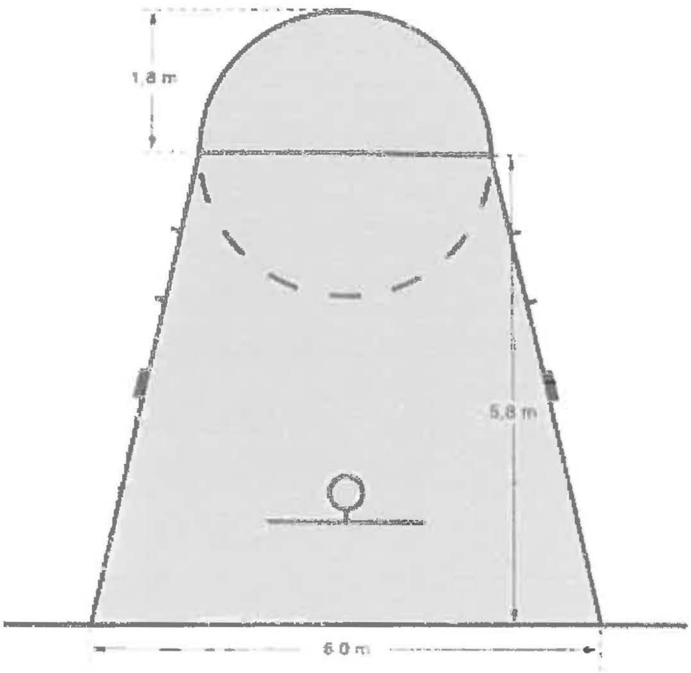
[14*, upraveno]

Úkol:

Spočtěte obsah území trestného hodu, když víte:

- vzdálenost čáry trestného hodu od koncové čáry je 5,8 m
- úsek koncové čáry ve vymezeném území je dlouhý 6 m
- poloměr půlkruhu je 1,8 m

Řešení:
Načrtneme si obrázek a doplníme do něj údaje, které známe:



[14*, upraveno]

Počítáme tedy obsah vybarvené plochy. Ten si rozdělíme na dvě části:

- obsah lichoběžníku (S_1)
- obsah půlkruhu (S_2)

Označme si a = 6 m, r = 1,8 m, c = 2r = 3,6 m, v = 5,8 m.

Pro dané obsahy platí:

$$S_1 = \frac{(a+c)\cdot v}{2} = 27{,}84\ m^2,$$

$$S_2 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = 5{,}09\ m^2.$$

Celkový obsah je tedy roven: $\underline{\underline{S}} = S_1 + S_2 = \underline{\underline{32{,}93\ m^2}}$.

Odpověď: Obsah území trestného hodu je 32,93 m^2.

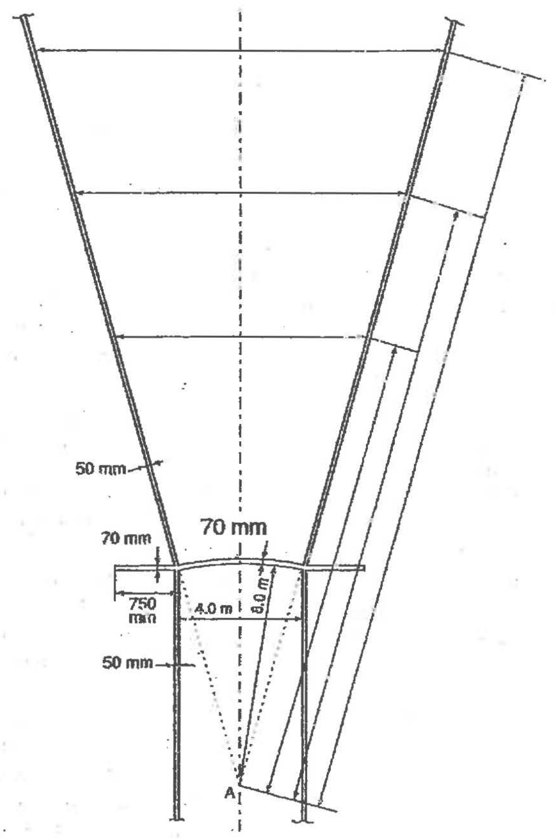
4.2 Hod oštěpem

Úvod:

Hod oštěpem je závodní disciplínou pro všechny věkové kategorie kromě kategorie mladšího žactva. Hmotnost oštěpu pro muže a starší dorostence je 800 g, pro ostatní kategorie 600 g. Hází se z rozběhové dráhy široké 4 m a dlouhé 30 až 36,5 m ukončené obloukovitým břevnem (nebo jen čárou) o poloměru 8 m (viz. obrázek). Po celou dobu hodu musí závodník držet oštěp za vinutí. Oštěp musí být hozen nad ramenem nebo přes horní část házející paže, nesmí být mrštěn napjatou paží stranou. Závodník se nesmí v průběhu pokusu otočit zády k břevnu. Úhel odhodu při hodu oštěpem se pohybuje v rozmezí 33-38°. Hod je zdařený pouze tehdy, když se hrot kovové hlavice oštěpu dotkne země dřív, než jakákoliv jiná část náčiní [5].

Nejvýraznější postavou českého, ale i světového oštěpu je bezesporu trojnásobný olympijský vítěz Jan Železný. Na olympijských hrách v roce 1988 získal ještě medaili stříbrnou, pak už ale následovaly zlaté olympijské roky (1992, 1996 a 2000). Dosud je jediným oštěpařem v dějinách, který dosáhl vítězství na třech po sobě jdoucích hrách. Mimo jiné je Jan Železný dvojnásobným mistrem světa v této disciplíně (MS 1993, 1995) a držitelem světového rekordu (98,48 m). V anketě pořádané Mezinárodní atletickou federací IAAF byl pro rok 2000 vyhlášen nejlepším atletem světa [1].

Úkol:



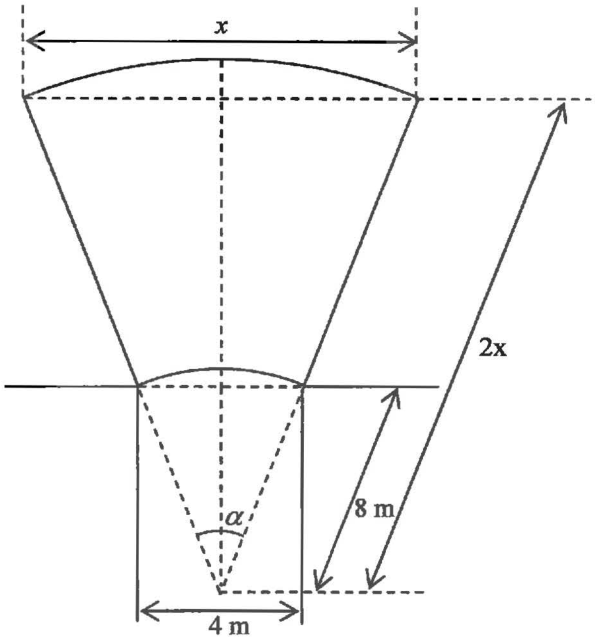
ROZBĚHOVÁ DRÁHA PRO HOD OŠTĚPEM
A VÝSEČ PRO DOPAD NÁČINÍ
(není kresleno v měřítku)

[15*, některé údaje vymazány]

Ve školní tělesné výchově se hod oštěpem vyskytuje jen zřídka, možná už vůbec. Jedna škola však pro zpestření prosadila hod oštěpem do školních závodů a potřebuje na školním hřišti vyznačit výseč pro dopad. Pro orientační měření výkonů chce také vyznačit oblouky vyjadřující určité vzdálenosti. Výseč chce mít přesně podle oficiálních pravidel (viz. obrázek).

1. Jakou maximální délku (musí to být násobek pěti) mohou vyznačit obloukem, má-li hřiště rozměry 30 x 56 m a hází-li se v jeho podélné ose? (Na hřišti se má vyznačit pouze výseč, rozběhová dráha je na multifunkční ploše, na kterou hřiště přímo navazuje).
2. Kolik pásky budou potřebovat na vyznačení výseče a jednotlivých oblouků (včetně toho, co ukončuje rozběhovou dráhu), chtějí-li vyznačit vzdálenosti po deseti metrech, a to od 10 m do maxima (viz. úkol 1). Za posledním obloukem už čáry výseče neuvažujte. (Počítejte s přesností na *cm*)

Řešení:
Nejdříve si nakresleme přehlednější obrázek a vyznačme si do něj potřebné údaje:



1.
Vzhledem k délce hřiště, můžeme vyznačit i oblouk pro vzdálenost 55 m. Šířka hřiště nám to však nedovolí. Z obrázku je patrné, že poloměr oblouku, kterým je ukončena rozběhová dráha (je roven 8 m) je dvojnásobkem šířky oblouku (4 m). Tento vztah musí platit pro všechny oblouky výseče (jsou podobné). Nejdelší oblouk, který lze na hřišti vyznačit je široký 30 m, jeho poloměr je tedy 60 m a vyznačuje vzdálenost 60 m – 8 m = 52 m. Vzhledem k požadavku násobku pěti je to oblouk pro vzdálenost 50 m.

Odpověď: Na hřišti lze vyznačit obloukem maximálně vzdálenost 50 m.

2.
Pro výpočet délek oblouků je třeba znát úhel α. Z obrázku plyne, že

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\,m}{8\,m},$$

tedy $\alpha = 28°57'$.

Pro délku prvního oblouku l_0 platí

$$l_0 = \frac{2\cdot\pi\cdot(8\,m)}{360°}\cdot\alpha = 4{,}04\,m.$$

Délka oblouku vyznačující vzdálenost d je

$$l_d = \frac{2\pi(8+d)}{360°}\cdot\alpha.$$

Konkrétně tedy $l_{10} = 9{,}10$ m, $l_{20} = 14{,}15$ m, $l_{30} = 19{,}20$ m, $l_{40} = 24{,}25$ m, $l_{50} = 29{,}31$ m.

Úsečka tvořící výseč je dlouhá 50 m, celkem je tedy potřeba 4,04 m + 9,10 m + 14,15 m + + 19,20 m + 24,25 m + 29,31 m + $2\cdot 50$ m = 200,05 m = 20 005 cm pásky.

Odpověď: Na vyznačení výseče a jednotlivých oblouků je třeba 20 005 cm pásky.

4.3 Fotografie

Úvod: *Pár slov u ultralightech*

Ultralighty jsou letadla, která je možno na rozdíl od "velkých" letadel postavit vlastníma rukama. Vlastní létání se liší od létání na "dospělých" letadlech hlavně výrazně nižší cenou. Ultraligty mají ze všech sportovních létajících zařízení nejvyšší výkony a umožňují turistické cestování na tisícikilometrové vzdálenosti.

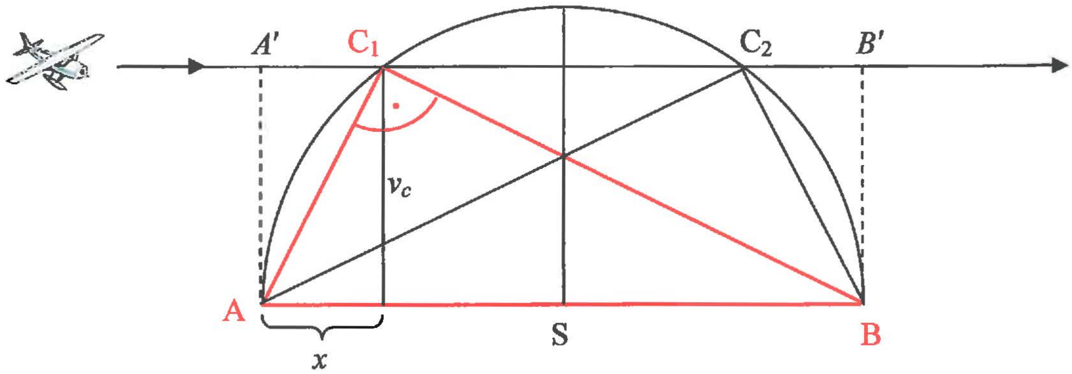
Nejkrásnější vyhlídkové stroje jsou motorové závěsné kluzáky, ze kterých je prakticky neomezený výhled. Při dobrém počasí nabídne motorový závěsný kluzák požitek z létání jako žádné jiné letadlo. Motorové závěsné létání patří k nejdostupnějším i nejbezpečnějším leteckým sportům a zážitkově jistě k těm nejcennějším.

Úkol:

Při soutěži v přesném létání měla posádka dvoumístného ultralightu za úkol vyfotografovat úsek silnice dlouhý 1 km, označený na mapě úsečkou AB (fotografie slouží jako důkaz toho, že posádka letěla po určené trase). Letadlo letělo ve výšce 400 m a piloti měli k dispozici jen zastaralý fotoaparát s objektivem typu Dagor, kterým lze fotografovat maximálně pod zorným úhlem 90°. Letadlo letělo přesně nad silnicí stálou rychlostí 25 m/s a neměnilo výšku. Určete úsek, na kterém lze daným fotoaparátem úsek AB vyfotografovat a vypočtěte čas, který měl pilot na zhotovení snímku, od okamžiku přeletu nad místem A do okamžiku minutí místa B. Uvažujte přímou silnici bez jakéhokoliv převýšení.

Řešení:

Úsek lze vyfotografovat jen když ho piloti vidí pod sebou v zorném úhlu 90° a menším. Přesně pod úhlem 90° vidí úsek z bodů C_1 a C_2 (Thaletova kružnice) – viz. obrázek. Snímek mohou pořídit v celé trase (samozřejmě v blízkosti úseku, aby byl vůbec vidět) kromě úseku C_1C_2, ve kterém vidí úsek pod úhlem větším než 90° a daným fotoaparátem ho tedy nelze zabrat celý.



Dále nás zajímá čas, který má pilot na zhotovení snímku mezi místy A', B'. První možnost má v úseku $A'C_1$, musíme tedy spočítat jeho velikost (označíme x). Víme, že $|AB| = 1\,000\ m$ a $v_c = 400\ m$.

Podle Euklidovy věty o výšce v trojúhelníku ABC_1 platí

$$v_c^{\,2} = x \cdot (|AB| - x).$$

Postupnými úpravami vyjádříme x:

$$x^2 - |AB| \cdot x + v_c^{\ 2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{|AB| \pm \sqrt{|AB|^2 - 4v_c^{\ 2}}}{2}.$$

Po dosazení dospějeme k výsledku $x_1 = 800\ m$, $x_2 = 200\ m$. První řešení platí pro trojúhelník ABC_2, hledaná vzdálenost úseku $A'C_1$ je tedy 200 m.

Jestliže letadlo letí rychlostí $v = 25\ m/s$, vypočtenou vzdálenost $s = 200\,m$ proletí za čas

$$t = \frac{s}{v} = \frac{200}{25}\ s = 8\ s.$$

Další možnost fotografování má v úseku C_2B'. Ten je však stejně dlouhý jako úsek $A'C_1$, proletí ho tedy také za čas $t = 8\,s$. Celkem má tedy na fotografování čas $2 \cdot 8\ s = \underline{\underline{16\ s}}$.

Odpověď: Na zhotovení snímku od okamžiku přeletu nad místem A do okamžiku minutí místa B má pilot právě 16 sekund (8 s hned po přeletu nad místem A a 8 s těsně před minutím místa B).

4.4 Bazén III.

Úvod: *Historie bazénů II.*

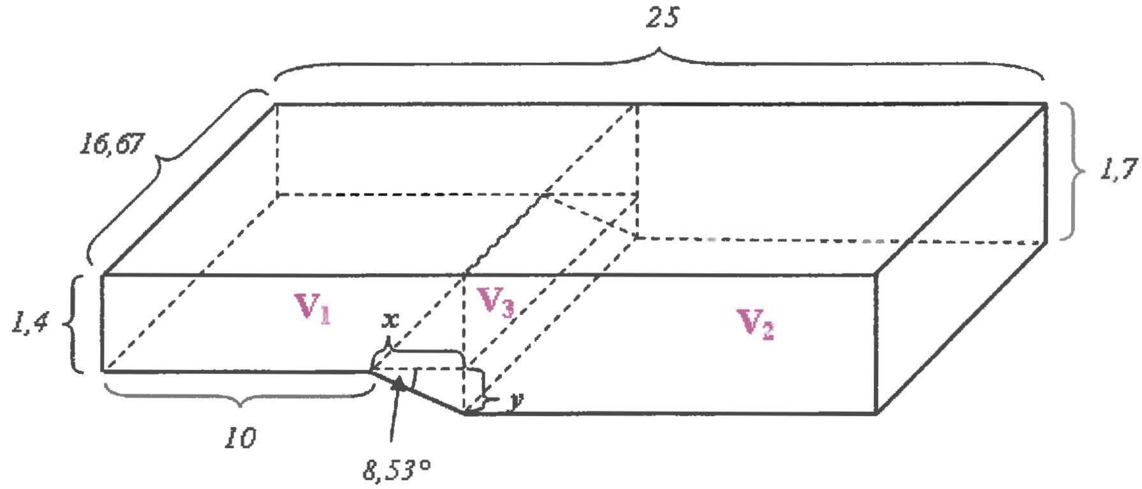
(Začátek viz. příklad 2.3) Mezníkem při výstavbě plaveckých zařízení byl rok 1927. V tomto roce byl v Praze v Klimentské ulici otevřen moderní, krytý pětadvacetimetrový bazén. Protože však jeho provoz nebyl rentabilní, byl bazén po deseti letech užívání zrušen a přeměněn v archiv. Další bazény vyrůstaly pomalým tempem. V roce 1938 bylo na našem území pouze osm krytých bazénů s délkou 25 m. K podstatným změnám ve výstavbě bazénů došlo až v šedesátých letech. Jen v roce 1965 bylo postaveno více krytých plováren než za celé období první republiky. V roce 1963 byl v Žilině otevřen první krytý padesátimetrový bazén. V roce 1983 bylo v ČSSR více než 140 zimních plováren s drahou 25 a 50 metrů [3].

Úkol:

Vypočítejte, kolik vody je potřeba k naplnění bazénu o rozměrech 25 x 16,67 m. Do 2/5 délky bazénu je hloubka 1,4 m, poté následuje šikmá plocha (se sklonem 8,53°) a zbytek bazénu (opět s rovným dnem) je hluboký 1,7 m. Počítejte s naplněním vodou až po okraj.

Řešení: (délky v *m*, objemy v m^3)

Všechny známé údaje zaneseme do obrázku, vyznačíme neznámé *x* a *y*:



Objem celého bazénu budeme počítat jako součet tří dílčích objemů V_1, V_2 a V_3.

Objem V_3 budeme počítat jako objem trojbokého hranolu. Dopočítáme x a y:

$$y = 1{,}7 - 1{,}4 = 0{,}3$$

$$tg\ 8{,}53° = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{0{,}3}{tg\ 8{,}53°} = 2.$$

Potom $V_3 = S_p \cdot v = \frac{x \cdot y}{2} \cdot 16{,}67 = \frac{2 \cdot 0{,}3}{2} \cdot 16{,}67 = 5$.

Zbývající objemy jsou objemy kvádrů: $V_1 = 16{,}67 \cdot (10 + 2) \cdot 1{,}4 = 280$

$$V_2 = 16{,}67 \cdot (25 - 12) \cdot 1{,}7 = 368{,}4$$

Celý objem bazénu V je tedy: $\underline{\underline{V}} = V_1 + V_2 + V_3 = 280\ m^3 + 368{,}4\ m^3 + 5\ m^3 = \underline{\underline{653{,}4\ m^3}}$.

Odpověď: K naplnění tohoto bazénu je potřeba 653,4 m^3, tj. 653 400 litrů vody.

4.5 Činka

Úvod: *Kulturistika*

Kulturistika se stala sportem sice až koncem 19. století, ale tvarování těla pomocí zdvíhání závaží se provozovalo již v antice. V první polovině 20. století byla rozšířena především v USA, v Evropě se stala populární po druhé světové válce. International Federation of Body Building (IFBB) byla založena v roce 1946. Zasloužili se o to Ben a Joe Weiderovi. Jako oficiální sport byla kulturistika uznána Mezinárodním olympijským výborem až v roce 1998 [16*]. Kulturistika je sport zaměřený na vzhled, hodnotí se svalová vyrovnanost, mohutnost svalstva, prorýsovanost svalů a svalová hmota. Je sice uznávaná u více než sto dvaceti národních olympijských výborů, ale dosud nebyla do olympijského programu zařazena. Profesionálové i amatéři se připravují na soutěže, které jsou spíše přehlídkami, intenzivním trénováním v posilovnách. Kulturistika vyžaduje odhodlání, houževnatost, motivaci a disciplínu [17*].

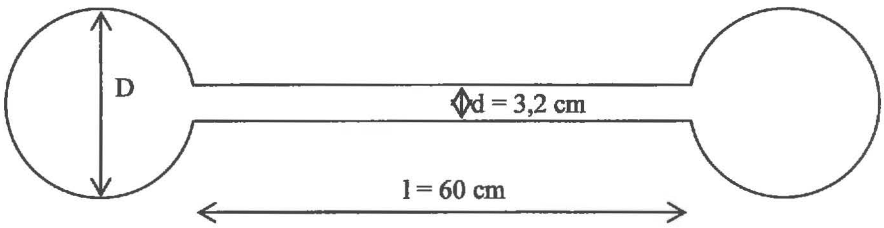
Česká republika patří v tomto sportu k absolutní světové špičce. Např. na MS ve fitness a v kulturistice žen v roce 2006 ve španělské Santa Suzaně, kde startovalo 50 států všech kontinentů, vybojovala ČR fantastické druhé místo v pořadí národů.

Úkol:

Představte si zjednodušený tvar činky, sestávající ze dvou koulí spojených tyčí. Vypočtěte, jaký průměr má koule u padesátikilové činky, vyrobené z materiálu o hustotě 7,8 g/cm^3, je-li poloměr 60 cm dlouhé spojovací tyče roven 32 mm.

Řešení:

Nakresleme si obrázek:



Protože známe hmotnost a hustotu činky, je zřejmé, že průměr koule D budeme počítat pomocí objemu. Pro objem celé činky V platí

$$V = V_t + 2V_k, \tag{1}$$

kde V_t je objem spojovací tyče a V_k objem koule.

Nyní vyjádříme vztahy pro jednotlivé objemy.
Objem celé činky V je dán vztahem

$$V = \frac{m}{\rho}, \tag{2}$$

kde m je hmotnost činky a ρ její hustota.

Objem V_t je objem válce výšky l, s poloměrem podstavy $d/2$, čili

$$V_t = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l = \frac{\pi d^2 l}{4} \tag{3}$$

Pro objem koule V_k platí

$$V_k = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^3}{6}. \tag{4}$$

Dosazením (2), (3) a (4) do (1) dostáváme

$$\frac{m}{\rho} = \frac{\pi d^2 l}{4} + \frac{\pi D^3}{3}. \tag{5}$$

Po úpravě (5) vyjádříme D a dosadíme ($m = 50\,000$ g, $\rho = 7{,}8$ g/cm^3, $d = 3{,}2$ cm, $l = 60$ cm):

$$\underline{\underline{D}} = \sqrt[3]{\frac{12m - 3\pi d^2 l \rho}{4\pi\rho}} = \underline{\underline{17{,}82\ \mathrm{cm}}}$$

Odpověď: Průměr koule padesátikilové činky je 17,82 cm.

4.6 Florbalový míček

Úvod:

Florbalový míček v dnešní podobě paradoxně nevyvinuli florbalisté, ale baseballisté v USA. Plastový děrovaný míček podobných rozměrů totiž sloužil k tréninku amerických baseballových nadhazovačů. Míček je vyroben ze syntetického materiálu a váží 23 gramů. Je bílé barvy, kulatý, s průměrem 72 mm, má 26 otvorů, každý o průměru 10 mm.

Přestože první krůčky zaznamenala hra podobná dnešnímu florbalu v zámoří, počátky organizovaného florbalu jsou spojeny zejména se skandinávskými zeměmi. Ve Švédsku se počátky hry zvané innebandy datují na začátek sedmdesátých let, finské salibandy o několik let později. Již od počátku také tyto dvě země, ale především Švédsko, udávaly florbalu směr vývoje a stejně jako je ve fotbale považována za kolébku tohoto sportu Anglie, ve florbale přísluší stejná pocta Švédsku [6] .

Úkol:

Na základě údajů z úvodu spočtěte povrch florbalového míčku (s přesností na mm^2).

Nápověda:

1) povrch kulové úseče o výšce v a poloměru podstavy ρ (z koule o poloměru r):

$$P = 2\pi rv + \pi\rho^2$$

2) závislost poloměru podstavy kulové úseče na výšce úseče a poloměru koule:

$$\rho = \sqrt{v(2r - v)}$$

Řešení:

Geometricky vytvoříme florbalový míček tak, že z koule o poloměru r = 36 mm „odřízneme" 26 kulových úsečí s poloměrem podstavy ρ = 5 mm.

Povrch míčku P bude tedy

$$P = P_k - 26 \cdot P_v,$$

kde P_k ... povrch koule (o poloměru r)

P_v ... plášť kulové úseče o poloměru podstavy ρ (obsah kulového vrchlíku)

Povrch koule spočteme dle vzorce $P_k = 4\pi r^2$.

Z 1. nápovědy víme, že obsah kulového vrchlíku (= povrch kulové úseče bez podstavy) je $P_v = 2\pi rv$. Neznámou výšku v spočteme podle vzorce z 2. nápovědy (známe r i ρ):

$$\rho = \sqrt{v(2r - v)} \quad \rightarrow \quad \rho^2 = 2rv - v^2 \quad \rightarrow \quad v^2 - 2rv + \rho^2 = 0 \quad \rightarrow \quad v_{1,2} = r \pm \sqrt{r^2 - \rho^2}$$

V našem případě lze brát v úvahu jen řešení $v = r - \sqrt{r^2 - \rho^2}$ (musí platit $r > v$).

Obsah kulového vrchlíku je tedy $P_v = 2\pi r(r - \sqrt{r^2 - \rho^2})$.

Nyní již můžeme spočítat povrch míčku:

$\underline{P} = P_k - 26 \cdot P_v = 4\pi r^2 - 26 \cdot [\, 2\pi r(r - \sqrt{r^2 - \rho^2})\,] = \underline{14\ 234\ mm^2}$

Odpověď: Povrch florbalového míčku je 14 234 mm^2.

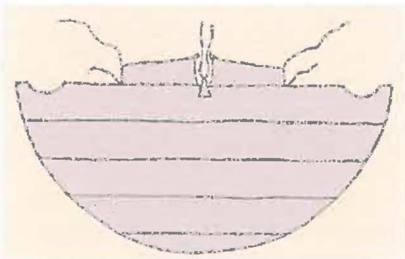
4.7 Týpí

Úvod:

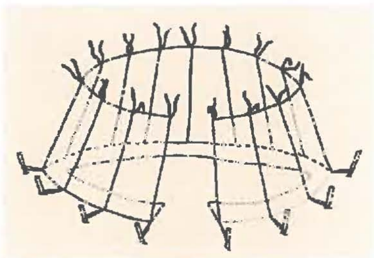
Velký kuželovitý stan prérijních Indiánů je bezesporu nejdokonalejším obydlím pro život v přírodě. Pojí se v něm Indiánův smysl pro praktičnost a účelnost s hlubokým estetickým cítěním. Proto se týpí nejen dobře staví, je prostorné, dobře větratelné a odolávající prudkým dešťům a vichřicím, ale je to jediný stan, který vytváří dokonalou harmonii s okolní přírodou a neruší svou přítomností. Plápolající oheň uvnitř dává teplo, sucho, ale i nezapomenutelné zážitky z večerů v týpí při letním i zimním táboření [18*].

Týpí sestává z pláště sešitého z plátna (původně z bizoních kůží) obepínajícího kostru z tenkých tyčí poskládaných do tvaru kužele, z vnitřního pláště (liningu) a případně i ozanu. Vzniklý kužel je nepravidelný, mírně nakloněný dozadu. Půdorysem týpí proto není kruh, ale elipsa, případně ovál. Každé týpí má vepředu nad vchodem dvě chlopně, které slouží k regulaci odvodu kouře. Chlopně jsou podepřeny dvěma dalšími tyčemi, pomocí kterých lze chlopněmi pohybovat, a tak regulovat odvod kouře v závislosti na směru větru.

Plášť je plachta půlkruhovitého tvaru s výběžky kouřových chlopní, s dveřním otvorem (není nutné), s dírami na jehlice a s poutky na kolíky.



Plášť



Lining

Lining je pás látky (nebo kůže) sešitý z lichoběžníkových kusů. Na horní hraně by měl být vybaven řadou poutek, další řada poutek by měla být našitá asi 20 cm od spodní hrany. Lining sahá od země do výšky asi 1,8 m a kopíruje ve spodní části plášť týpí s tím rozdílem, že plášť leží vně týpiových tyčí a lining pod nimi. U země je lining zahnutý dovnitř a připevněn kolíky k zemi, v horní části je pomocí šňůrek přivázán ke šňůře napnuté mezi tyčemi, nebo přímo k tyčím. Hlavní funkcí liningu je ochrana proti větru, regulace odvodu kouře, tepelná izolace a ochrana proti vodě stékající po tyčích při dešti. I když není lining nutnou součástí týpí, je samotný plášť bez liningu z větší míry nefunkční [text i obrázky z 19*].

Úkol:

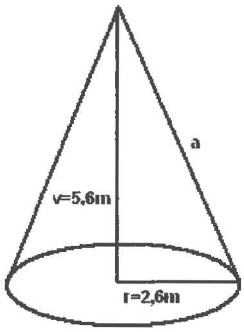
Spočtěte, kolik m^2 látky a plátna je zapotřebí k výrobě 16 týpí daných rozměrů:

- průměr podstavy: 5,2 m
- výška týpí: 5,6 m
- lining sahá od země do výšky 1,8 m, zahnutí liningu u země je široké 0,2 m

Pozn.: Uvažujte zjednodušený tvar týpí, tzn. kolmý kužel, kruhový půdorys. Každé týpí sestává z pláště i z liningu. Při výpočtu množství látky potřebné na lining vycházejte z obrázku (14 lichoběžníků + zahnutí u země). Na výrobu chlopní pláště je třeba navíc 18 % z plátna potřebného na plášť. Kruhový otvor v plášti při výpočtu jeho povrchu neberte v úvahu. Mezivýpočty zaokrouhlujte na 2 desetinná místa.

Řešení:

1) *Plášť:*



Nakresleme si obrázek a zvolme vhodné označení:
Povrch pláště kužele (S_1) je roven obsahu půlkruhu o poloměru rovném straně kužele a:

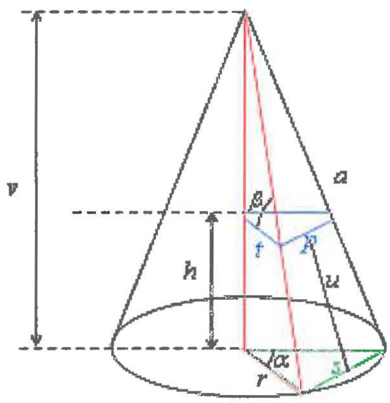
$$S_1 = \frac{\pi \cdot a^2}{2},$$

přičemž $a = \sqrt{v^2 + r^2}$.

Obsah 16 plášťů je $S_{16} = 16 \cdot S_1$, obsah 16 plášťů včetně chlopní je $S = 1{,}18 \cdot S_{16}$. Po dosazení je

$$\underline{S} = 1{,}18 \cdot 16 \cdot \frac{\pi \cdot \left(v^2 + r^2\right)}{2} = \underline{1\ 131\ \mathrm{m}^2}.$$

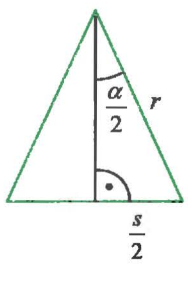
2) *Lining:*

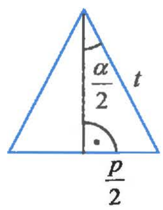


Obsah jednoho lichoběžníku (P_1), ze kterých sestává lining spočteme (viz. obrázek Lining) z pravidelného patnáctibokého jehlanu, o kterém víme:

$$v = 5{,}6\ \mathrm{m}$$
$$r = 2{,}6\ \mathrm{m}$$
$$a = \sqrt{v^2 + r^2} = 6{,}17\ \mathrm{m}$$
$$h = 1{,}8\ \mathrm{m}$$
$$\alpha = \frac{360°}{15} = 24°$$

Dle značení na obrázku platí : $P_1 = \frac{p+s}{2} \cdot u$.

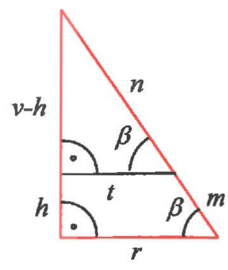




- s spočteme ze „zeleného“ trojúhelníka:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r} \rightarrow \underline{s} = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \underline{1{,}08\ \mathrm{m}}$$

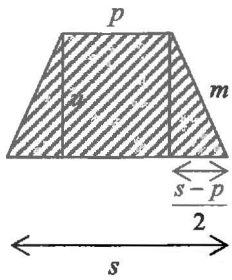
- p spočteme z „červeného“ a „modrého“ trojúhelníka:



$$tg\beta = \frac{v}{r},\ tg\beta = \frac{v-h}{t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{(v-h) \cdot r}{v}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{p}{2}}{t} \rightarrow \underline{p} = 2 \cdot t \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{(v-h) \cdot r}{v} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \underline{0{,}73\ \mathrm{m}}$$

- dále spočteme **u**:



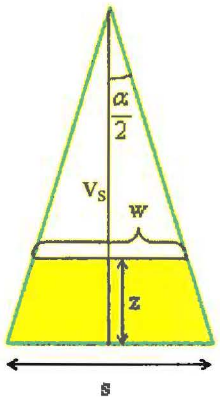
$$\sin\beta = \frac{v}{a},\ \sin\beta = \frac{h}{m}\ \text{(viz. „červený“ trojúhelník)} \rightarrow\ m = \frac{a\cdot h}{v}$$

$$m^2 = u^2 + \left(\frac{s-p}{2}\right)^2 \ \rightarrow\ \underline{u} = \sqrt{\left(\frac{a\cdot h}{v}\right)^2 - \left(\frac{s-p}{2}\right)^2} = \underline{1{,}98\ \text{m}}$$

Pro obsah jednoho lichoběžníku tedy platí:

$$\underline{P_1} = \frac{s+p}{2}\cdot u = \frac{1{,}08\ m + 0{,}73\ m}{2}\cdot 1{,}98\ m = \underline{1{,}79\ m^2}$$

Dále musíme spočítat, kolik látky je potřeba na zahnutí liningu u země. Šířka zahnutí z je 0,2 m. Zahnutí se skládá ze 14 lichoběžníků, které na sebe navazují. Daný lichoběžník (žlutě vybarvený) je součástí „zeleného“ trojúhelníku:



Výpočet bude následující (známe s = 1,08 m, z = 0,2 m, α = 24°):

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{v_s}\ \rightarrow\ v_s = \frac{s}{2tg\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{w}{2}}{v_s - z}\ \rightarrow$$

$$\underline{w} = 2(v_s - z)tg\frac{\alpha}{2} = 2\left(\frac{s}{2tg\frac{\alpha}{2}} - z\right)tg\frac{\alpha}{2} = s - 2ztg\frac{\alpha}{2} = \underline{1\ m}$$

Pro jeho obsah (S_z) platí $\underline{S_z} = \frac{s+w}{2}\cdot z = \frac{1{,}08\ m + 1\ m}{2}\cdot 0{,}2\ m = \underline{0{,}21\ m^2}$.

Celková plocha látky potřebná pro 16 liningů (každý sestává ze 14 lichoběžníků o obsahu P_1 a 14 lichoběžníků o obsahu S_z) je pak

$$\underline{\underline{P}} = 16\cdot 14\cdot (P_1 + S_z) = \underline{\underline{448\ m^2}}$$

Odpověď: K výrobě 16 týpí daných rozměrů je potřeba 1 131 m^2 plátna (na plášť) a 448 m^2 látky (na lining).

5

Kombinatorika a pravděpodobnost

5.1 Fotbalový turnaj

Úvod: *AŠSK ČR*

Asociace školních sportovních klubů České republiky (AŠSK ČR) je sportovním a tělovýchovným občanským sdružením, které bylo založeno na podzim roku 1992. V současné době působí již ve všech okresech České republiky a sdružuje více než 250 000 žáků základních a studentů středních škol. Program činnosti, uskutečňovaný ve školním sportovním klubu většinou učiteli a profesory tělesné výchovy, je od samého počátku zaměřen na podněcování a podporu pohybových aktivit v době mimo vyučování. Posláním AŠSK je připravovat pro žáky a studenty přitažlivý program a vytvářet u nich kladný vztah k pravidelné pohybové činnosti. AŠSK podporuje také pohybové aktivity zaměřené na zdokonalování specifických sportovních dovedností, uplatňované v mezitřídních a meziškolních soutěžích. Sportovní soutěže AŠSK ČR jsou přístupné všem žákům a studentům, bez ohledu na to, zda jsou či nejsou jejími členy. AŠSK ČR je od roku 1994 řádným členem International School Sport Federation (ISF). Tato mezinárodní federace sdružuje přes 80 národních organizací školního sportu. Každým rokem pořádá ve 3-5 vybraných sportech Světové středoškolské soutěže. AŠSK ČR na některé z nich vysílá vítěze školních postupových soutěží. Do činnosti ISF se zapojuje také pořadatelsky [20*].

Úkol:

Školní sportovní klub uspořádal pro 2. a 3. ročníky ke konci roku turnaj v kopané, ve kterém měl hrát každý s každým. Utkání mezi 3.B a 3.D se však neuskutečnilo, a tak se stalo, že počet utkání sehraných vzájemně mezi druhými ročníky a sehraných vzájemně mezi třetími ročníky se rovnal třem čtvrtinám počtu utkání sehraných mezi druhými a třetími ročníky. Přitom počet mužstev ze druhých ročníků byl o jeden větší než počet mužstev ze třetích ročníků. Určete počty mužstev z jednotlivých ročníků, jestliže každá třída vyslala do turnaje právě jedno mužstvo.

Řešení:

Označme x počet mužstev ze třetích ročníků, počet mužstev ze druhých ročníků je pak $x+1$.

Utkání sehraných vzájemně mezi druhými ročníky je $\binom{x+1}{2}$, utkání sehraných vzájemně mezi třetími ročníky je $\binom{x}{2}-1$, utkání sehraných mezi druhými a třetími ročníky je $x\cdot(x+1)$.

Dle druhé věty zadání platí

$$\binom{x+1}{2}+\binom{x}{2}-1=\frac{3}{4}x(x+1).$$

Postupnými úpravami dostáváme

$$\frac{(x+1)x}{2}+\frac{x(x-1)}{2}-1=\frac{3}{4}x(x+1)$$
$$x^2-3x-4=0\,.$$

Jediným možným (kladným) řešením této rovnice je $\underline{\underline{x=4}}$.

Odpověď: Turnaje se zúčastnila 4 družstva ze třetích a 5 družstev ze druhých ročníků.

5.2 Skoky na lyžích

Úvod:

Nejvýraznější postavou českého, ale i světového skoku na lyžích v sezóně 2005/2006 byl bezesporu Jakub Janda. Janda se stal po 36 letech po Jiřím Raškovi druhým Čechem, který dokázal zvítězit na Turné čtyř můstků. Jandův výsledný počet bodů činil 1 081,5 stejně tak jako výsledný počet bodů Janne Ahonena. A tak se český skokan musel o výhru kuriozně podělit s Finem. Oba dva předvedli drama až do konce. Oba ze sebe vydávali to nejlepší, a to i přesto, že pro ně byl závod opravdu psychicky náročný.

Pravděpodobnost takového výsledku je hodně malá a přece se tak stalo. Počítání různých pravděpodobností se v reálném světě nevyzpytatelného sportu zdá zbytečné, zkusme si ale, čistě teoreticky, pár takových čísel spočítat.

Úkol:

Do druhého kola závodů ve skocích na lyžích postoupilo 40 závodníků, z toho dva z České republiky. Předpokládejme jednoznačné pořadí na prvních třech místech. Ponechte stranou reálnou výkonnost a určete:

a) Kolik je různých možností obsazení stupňů vítězů, bez rozlišení pořadí?
b) Kolik je možností obsazení stupňů vítězů v závislosti na pořadí?
c) Jaká je pravděpodobnost, že na stupních vítězů bude alespoň jeden závodník z ČR?
d) Jaká je pravděpodobnost, že na stupních vítězů budou dva závodníci z ČR?
e) Jaká je pravděpodobnost, že na stupních vítězů nebude žádný závodník z ČR?
f) Jaká je pravděpodobnost, že na stupních vítězů bude právě jeden závodník z ČR?
g) Jaká je pravděpodobnost, že závody vyhraje závodník z ČR?

Řešení:

a) Vybíráme trojice ze 40 závodníků a v dané trojici nezáleží na pořadí. Jedná se tedy o kombinace třetí třídy ze 40 prvků $C_3(40)$:

$$C_3(40)=\binom{40}{3}=\frac{40!}{37!\cdot 3!}=\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37!}{37!\cdot 6}=\underline{\underline{9\,880}}$$

Odpověď: Všech možností obsazení stupňů vítězů, bez rozlišení pořadí je 9 880.

b) Zde naopak na pořadí záleží, budeme tedy počítat všechny možné variace třetí třídy ze 40 prvků $V_3(40)$:

$$V_3(40)=\frac{40!}{37!}=40\cdot 39\cdot 38=\underline{\underline{59\,280}}$$

Odpověď: Všech možností obsazení stupňů vítězů v závislosti na pořadí je 59 280.

c) Pravděpodobnost je podíl počtu „příznivých" možností (v našem případě těch, kdy na stupních vítězů bude alespoň jeden závodník z ČR) a všech možností.
Všech možností je 9 880 (viz. a)) – nezáleží na pořadí, zajímá nás jen to, zda někdo bude nebo nebude na stupních vítězů (v hledané trojici), nezajímá nás přesné pořadí.

Počet všech „příznivých" možností rozdělíme na dvě části:

1) na stupních vítězů je právě **jeden** závodník z ČR.

Počet všech možných dvojic, které s ním mohou být na stupních vítězů je $\binom{38}{2}$ (nesmí tam být ani jeden Čech). Celkový počet možností je však $2\cdot\binom{38}{2}=1\,406$ (přičtena varianta, kdy je na stupních vítězů druhý z dvojice Čechů)

2) na stupních vítězů jsou právě **dva** závodníci z ČR

Zbylé místo na stupních lze obsadit 38 závodníky, tedy možností je 38.

Počet všech příznivých možností je tedy $1\,406+38=1\,444$ a pro hledanou pravděpodobnost platí:

$$P=\frac{1\,444}{9\,880}=0{,}15=\underline{\underline{15\,\%}}.$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že na stupních vítězů bude aspoň jeden závodník z ČR je 15 %.

d) Lehčí varianta předchozího úkolu: $P=\dfrac{38}{9\,880}=0{,}003\,85=\underline{\underline{0{,}4\,\%}}$.

Odpověď: Dva závodníci z ČR budou na stupních vítězů s pravděpodobností 0,4 %.

e) Lze řešit dvěma způsoby:

1) Počet všech „příznivých" možností je $\binom{38}{3}=8\,436$, hledaná pravděpodobnost je tedy $P=\dfrac{8\,436}{9\,880}=0{,}85=\underline{\underline{85\,\%}}$.

2) Hledaná pravděpodobnost je doplňkem k pravděpodobnosti počítané v příkladu c): $P=100\,\%-15\,\%=\underline{\underline{85\,\%}}$.

Odpověď: Pravděpodobnost, že na stupních vítězů nebude žádný závodník z ČR je 85 %.

f) Lehčí varianta úkolu c): $P=\dfrac{1\,406}{9\,880}=0{,}14=\underline{\underline{14\,\%}}$.

Odpověď: Právě jeden závodník z ČR bude na stupních vítězů s pravděpodobností 14 %.

g) Počet všech „příznivých" možností je $2\cdot V_2(39)=2\cdot 39\cdot 38=2\,964$
(Závisí na pořadí, vybíráme dvojici na druhé a třetí místo, ze zbylých 39 závodníků. Dvojnásobek opět pro případ, že vyhraje druhý závodník z ČR)
Počet všech možností obsazení stupňů vítězů je $V_3(40)=59\,280$ (viz. úkol b))

Hledaná pravděpodobnost je pak $P=\dfrac{2\,964}{59\,280}=0{,}05=\underline{\underline{5\,\%}}$

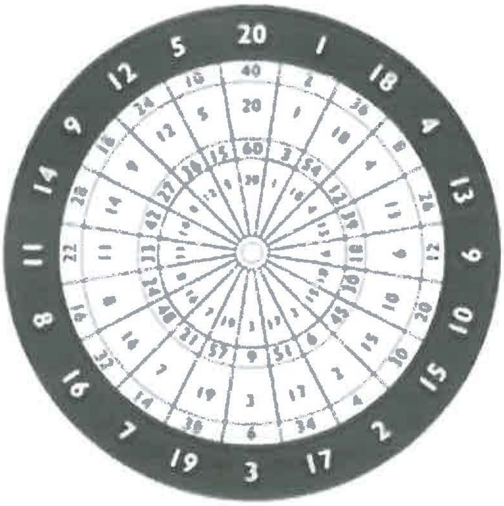
Odpověď: Pravděpodobnost, že závody vyhraje závodník z ČR je 5 %.

5.3 Šipky

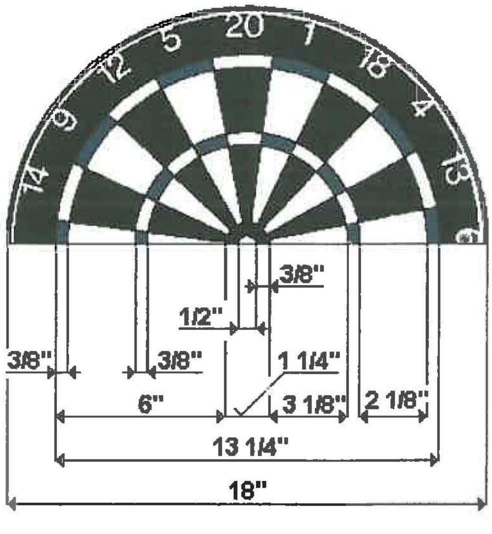
Úvod:

Historie šipek sahá až do doby pravěku. Pravěcí lidé už tehdy používali k lovu oštěp, jež je považován za předchůdce šipek. Největší rozvoj šipek nastal ve středověku v Anglii. Angličtí lučištníci vyráběli ze svých klasických šípů takové šípy, jež sloužily především k obraně. Daly se vrhat jako nože či sekery. Toto házení šípů se pak uchytilo jako zábava po hospodách a díky kolonizaci se dále šířilo do celého světa. V roce 1896 vynalezl tesař Gamlin terč, jež byl od 70. let uznán jako oficiální norma.V průběhu 19. století se hra víceméně standardizuje. Hází se asi deseticentimetrovým válečkem ze dřeva, zakončeným ostrým, kovovým hrotem a na straně druhé jsou připevněny letky z ptačího peří. V průběhu 20. století vznikají první turnaje a pravidla šipkového sportu [21*]. Šipky patří mezi sporty, které jsou zaměřeny na přesnost. Náplní hry je trefit pomocí šipek co nejpřesněji terč. Vítězem se stává hráč, který ostatní předčí v přesnosti a jako první „nahází" požadovaný počet bodů. Nejrozšířenější formou šipek jsou šipky elektronické [22*].

Co se týče rozměrů, používá se několik druhů terčů. Pravidla většiny soutěží ale uznávají nejrozšířenější terč o průměru 18" (palců), s aktivní částí o průměru 13 1/4", který je rozdělen na 20 výsečí. Tento typ terče má dvojitý střed (bull a outer bull) s hodnotou 50 a 25 bodů. Po obvodu a asi uprostřed jsou umístěny úzké pásy s dvojnásobnými a trojnásobnými bodovými hodnotami (takzvaný triple nebo trebl a double) [23*]. Na následujících obrázcích je bodové ohodnocení jednotlivých polí terče a jeho rozměry (1" = 1 palec = 25,4 mm):



[23*]



Úkol: S využitím informací z úvodu spočtěte:

1) Jaká je pravděpodobnost, že jedním hodem dosáhneme právě 12 bodů?

2) Jaká je pravděpodobnost, že jedním hodem zasáhneme maximální hodnotu na terči?

(Pro jednoduchost uvažujme, že pravděpodobnost zásahu terče (alespoň nějaké hodnoty) je 100 % a zásahy jednotlivých polí jsou stejně pravděpodobné)

Mezivýpočty zaokrouhlujte na desetiny milimetru.

Nápověda:

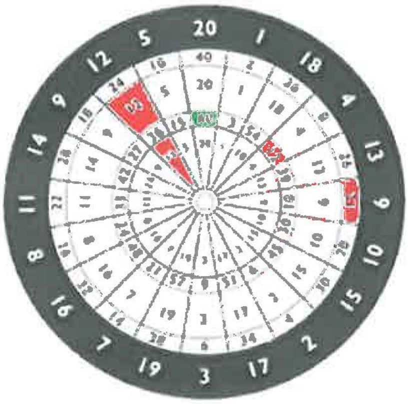
1. Dosáhnout 12 bodů můžeme buď hodem do jednonásobné hodnoty č. 12 nebo do dvojnásobné hodnoty č. 6 nebo do trojnásobné hodnoty č. 4.
2. Maximální hodnota na terči je 60 bodů, což je zásah do trojnásobné hodnoty č. 20.
3. K výpočtu užijte tzv. geometrickou pravděpodobnost (= podíl velikosti „příznivé" plochy a „celé" plochy)

Řešení:

1) Hledaná pravděpodobnost je dána poměrem obsahu plochy, jejímž zasažením docílíme 12 bodů (S_{12}) ku obsahu plochy celého terče (S). S_{12} je velikost červeně vyznačené oblasti na obrázku vpravo dole. Jednotlivé červené části „poskládáme" k sobě a z obrázku v úvodu určíme poloměry kružnic, které daný „poskládaný" útvar ohraničují. Kružnic, které ohraničují jednotlivá pásma, je šest, číslujme je od středu. My potřebujeme znát r_2 a r_6, z obrázku v úvodu je vidět, že:

$$r_2 = \frac{1\frac{1}{4}''}{2} = 0{,}625'' = 15{,}9\,\text{mm}$$

$$r_6 = \frac{13\frac{1}{4}''}{2} = 6{,}625'' = 168{,}3\,\text{mm}$$



[23*, upraveno]

Pak platí $S_{12} = \dfrac{\pi r_6^2 - \pi r_2^2}{20}$

$$S = \pi r_6^2$$

$$\underline{\underline{P}} = \frac{S_{12}}{S} = \frac{r_6^2 - r_2^2}{20 r_6^2} = 0{,}049\,6 = \underline{\underline{4{,}96\,\%}}$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že jedním hodem dosáhneme právě 12 bodů je 4,96 %.

2) Hledaná pravděpodobnost je dána poměrem obsahu plochy, jejímž zasažením docílíme 60 bodů (S_{60}), ku obsahu plochy celého terče (S). S_{60} je velikost zeleně vyznačené oblasti na obrázku vpravo nahoře. Z obrázku v úvodu zjistíme, že

$r_3 = r_2 + 3\frac{1}{8}'' = 95{,}3\,\text{mm}$ $\qquad$ $r_4 = r_3 + \frac{3}{8}'' = 104{,}8\,\text{mm}$

Pak platí $S_{60} = \dfrac{\pi r_4^2 - \pi r_3^2}{20}$

$$\underline{\underline{P}} = \frac{S_{60}}{S} = \frac{r_4^2 - r_3^2}{20 r_6^2} = 0{,}003\,4 = \underline{\underline{0{,}34\,\%}}.$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že jedním hodem zasáhneme maximální hodnotu na terči je 0,34 %.

5.4 Trestné hody

Úvod:

Trestný hod je příležitost daná hráči k dosažení jednoho bodu nerušeným hodem na koš z místa za čarou trestného hodu a uvnitř půlkruhu. Je-li faulován hráč, který právě hází na koš a hod je úspěšný, koš platí a je přiznán jeden trestný hod. Pokud koš nepadne, jsou přiznány dva trestné hody (popř. tři při pokusu z tříbodového území). Faulovanému hráči, který nehází na koš jsou přiznány dva trestné hody v případě, že družstvo faulujícího hráče již v daném období hry nasbíralo pět a více faulů. Trestné hody se provádí také při udělení technické chyby, a to kterýmkoli hráčem soupeřova družstva.

Týmy si budují herní plány týkající se házení trestných hodů, jež jsou nedílnou součástí basketbalové koncovky. Pokud jedno družstvo vede v závěru utkání malým rozdílem, snaží se většinou hrát na čas, nikam se nežene, jde mu jen o to, aby se k míči nedostal soupeř. Taktika soupeře je pak většinou následující. Snaží se soupeři sebrat míč, pokud to nejde čistě, tak i za cenu faulu. Existuje totiž možnost, že hráč trestné hody nepromění a družstvo může doskočit a ještě s výsledkem něco udělat. Je známo, že týmy neúspěšné v trestných hodech kvůli tomu ztrácejí v posledních minutách utkání vedení.

Nejúspěšnějším střelcům trestných hodů se daří proměnit kolem 90 % trestných hodů. Střelci slabší v trestných hodech (mimochodem i taková hvězda jako Shaquille O'Neal) mají úspěšnost kolem 50 %.

Úkol:

1. Chybělo pár vteřin do konce utkání a naše družstvo prohrávalo o 3 body. Nezbývalo nic jiného než se pokusit o střelu za tři body, srovnat stav a vynutit si prodloužení. Při střele v poslední vteřině z tříbodového území jsem byla faulována a nařízeny byly tři trestné hody. Určete jaká byla pravděpodobnost, že proměním všechny tři hody, když moje průměrná úspěšnost z trestných hodů v zápasech je 75 %?
2. Spočtěte, jaká je pravděpodobnost, že z 10 trestných hodů na tréninku proměním aspoň 8, když je moje úspěšnost trestných hodů na tréninku 80 %?

Řešení:

1.

K řešení použijeme vzorec binomického rozdělení

$$P(A_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

který určuje pravděpodobnost jevu A_k, že právě k pokusů (z n nezávislých pokusů, z nichž každý skončí buď zdarem s pravděpodobností p, nebo nezdarem s pravděpodobností q) bude zdařilých.

V našem případě, kde $k = n = 3$, $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$ tedy platí

$$\underline{\underline{P(A_3)}} = \binom{3}{3} \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^0 = 0{,}42 = \underline{\underline{42\ \%}}.$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že proměním všechny tři trestné hody byla pouze 42 %.

Pozn.: Nakonec jsem proměnila všechny tři trestné hody. Nikdy nic nevzdávejte, je to „jenom" pravděpodobnost, dá se nad ní zvítězit!!!

2.

V tomto případě je $n = 10$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Pravděpodobnost, že jich proměním aspoň 8 z 10, je pravděpodobnost sjednocení jevů A_8, A_9 a A_{10} (dám jich buď osm nebo devět nebo deset), takže platí:

$$P(A_8 \cup A_9 \cup A_{10}) = P(A_8) + P(A_9) + P(A_{10}) =$$
$$= \binom{10}{8} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}8^{10} \cdot 0{,}2^0 = 0{,}678 = \underline{\underline{67{,}8\ \%}}$$

Jevy A_8, A_9 a A_{10} se navzájem vylučují (jejich průnikem je prázdná množina), proto je pravděpodobnost jejich sjednocení rovna součtu jejich pravděpodobností.

Odpověď: Alespoň 8 z 10 trestných hodů proměním na tréninku s pravděpodobností 67,8 %.

5.5 Velká pardubická

Úvod: *Steeplechase*

Steeplechase jsou překážkové dostihy s těžkými překážkami, zpravidla terénními, s vodními příkopy apod. Trať je většinou delší než 3 200 m. K nejznámějším a nejtěžším steeplechase v Evropě patří Velká liverpoolská a Velká pardubická.

Velká liverpoolská (Velká národní steeplechase) je světově proslulý překážkový dostih a bezesporu nejnáročnější test skokanských a vytrvalostních dispozic koní v britském dostihovém sportu. Trať musejí koně absolvovat dvakrát, celkem je třeba překonat 31 překážek na trati dlouhé 7 210 m. Nejtěžším skokem je Becher's Brook, sestávající z mohutného živého plotu (150 cm vysokého a 1 m širokého), za nímž teče potok. Závod se koná každoročně na konci března či začátkem dubna na závodišti v Aintree (nedaleko Liverpoolu) již od roku 1839.

Velká pardubická steeplechase je jeden z nejstarších a nejtěžších překážkových dostihů na evropském kontinentu, jehož první ročník se uskutečnil roku 1874. Dnešní trať měří 6 900 m, je příznačná přírodním charakterem 31 překážek (nejtěžší z nich je Taxisův příkop) a rozmanitostí povrchu dráhy – část se běží na travnaté dráze, část oranicí [1].

Jediným koněm, který ve Velké pardubické zvítězil čtyřikrát, je fenomenální ryzák Železník. Jako první proběhl cílem v letech 1987, 1988, 1989 a 1991, vždy v sedle s žokejem Josefem Váňou. Celkem stál na startu Velké pardubické sedmkrát. Byl také prvním koněm, který potřeboval k překonání 6 900 metrů dlouhé trati méně než deset minut. V roce 1987 zvítězil v čase 9:56,13 minut.

Jedinou ženou, která zvítězila ve Velké pardubické, byla Lata Brandisová. Úspěchu dosáhla v posledním předválečném ročníku v roce 1937 s klisnou Normou.

Rekord tratě překonal v roce 2005 Maskul časem 9:11,26 minut s žokejem Dirkem Fuhrmannem v sedle.

Dostihové sázky poskytují v porovnání s jinými druhy sázek a loterií tu nejvyšší pravděpodobnost výhry. Sázejícím se vrací zpět až 80 % ze vsazených sázek a zisk sázkové kanceláře slouží k podpoře chovu dostihových koní [24*].

Úkol:

Hlavními favority (již stošestnácté) Velké pardubické v roce 2006 jsou koně Maskul, Decent Fellow a Hastaven. Podle mínění znalců zvítězí v závodě Maskul s pravděpodobností 0,4, Decent Fellow s pravděpodobností 0,3, Hastaven s pravděpodobností 0,2. Pokud by se stalo, že se Maskul při startu zraní a ze závodu odstoupí, jaké by pak byly pravděpodobnosti vítězství Decent Fellow a Hastavena?

Řešení:

Označme si: jev A....zvítězí Maskul, jev B...zvítězí Decent Fellow, jev C...zvítězí Hastaven.

Nejprve máme určit pravděpodobnost jevu B, za podmínky A' (Maskul nezvítězí), jedná se tedy o podmíněnou pravděpodobnost, pro kterou platí:

$$P(B/A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')}.$$

Víme, že $P(A) = 0,4$, čili $P(A') = 1 - 0,4 = 0,6$ (pravděpodobnost před odstoupením ze závodu). Dále víme, že $P(B) = 0,3$. Pravděpodobnost průniku jevů B a A' je rovna součinu jejich pravděpodobností. Před startem to byly ještě jevy závislé, po odstoupení Maskula ze závodu, už nemá Maskul přímý vliv na vítězství/prohru Decent Fellow, jsou to tedy jevy nezávislé a platí:

$$P(B \cap A') = P(B) \cdot P(A') = 0,3 \cdot 1 = 0,3$$

Maskul ze závodu odstoupil, pravděpodobnost jevu A' se tedy po startu změnila a je rovna jedné (je jasné, že nevyhraje).
Hledaná podmíněná pravděpodobnost je tedy

$$\underline{\underline{P(B / A')}} = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{0,3}{0,6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Pravděpodobnost vítězství Hastavena po odstoupení Maskula ze závodu spočítáme analogicky:

$$P(C / A') = \frac{P(C \cap A')}{P(A')}.$$

Pravděpodobnost průniku jevů C a A' je opět rovna pravděpodobnosti jevu C, protože jev A' je po startu jevem jistým ($P(A') = 1$) a oba jevy jsou nezávislé. Dále víme, že $P(C) = 0,2$.
Platí tedy

$$\underline{\underline{P(C / A')}} = \frac{P(C \cap A')}{P(A')} = \frac{P(C)}{P(A')} = \frac{0,2}{0,6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

Odpověď: Pokud by se Maskul zranil a ze závodu odstoupil, pravděpodobnosti vítězství Decent Fellow a Hastavena by byly 0,5 a 0,33.

Pozn.: A jak to nakonec dopadlo? Maskul sice na startu neodstoupil, ale skončil na Taxisově příkopu, a tak po dlouhých pěti letech vyhrál Velkou pardubickou opět český jezdec - pětadvacetiletý Josef Bartoš, zvaný Big Joe, s koněm Decent Fellow. Zvítězili v čase 9:20,6 minuty, o devět vteřin zaostali za loňským Maskulovým rekordem trati.

6

Posloupnosti

6.1 Sazka Arena

Úvod:

Sazka Arena se nachází v severovýchodní části Prahy, vzdálené zhruba 10 km od centra města a 20 km od mezinárodního letiště, v bezprostřední blízkosti stanice metra Českomoravská. Je nejmodernějším víceúčelovým stánkem pro sport, kulturu, zábavu, výstavy, veletrhy a další události v Evropě. Arénu charakterizují nejmodernější technologie, univerzálnost využití, sofistikovaný marketing, komfort a všestranné služby pro diváky a návštěvníky [25*]. Její prostor umožňuje více než čtyřicet prostorových, funkčních nebo technických proměn plochy a hlediště. Při velkém rockovém koncertu může maximální kapacita Sazky Areny dosáhnout až 18 000 diváků. Technologie zahrnují například obří videokostku, vnitřní televizní okruh, displejové fasády, vlastní televizní studio, posuvné tribuny, špičkovou akustiku, světelný park i vyspělé telekomunikační vybavení. Vedle standardních diváckých prostor nabízí Sazka Arena uzavřená patra pro majitele skyboxů, klubových a komfortních sedadel. Samozřejmostí jsou obchodní plochy s všestranným zázemím, řada salónků, restaurací a barů, stejně jako důstojné prostory pro tiskové konference, semináře nebo kongresy [26*]. Vnitřní uspořádání umožňuje, aby v Sazka Areně probíhaly soutěže ve všech halových sportech od ledního hokeje, přes míčové hry, plavání a lehkou atletiku až po motokros, jezdectví či gymnastiku. Aréna přitom splňuje všechny požadavky mezinárodních sportovních federací na pořádání světových a evropských šampionátů. Divákům poskytuje Sazka Arena veškerý komfort a pohodlí, včetně kontaktu s hrací plochou, projekce na videopanelech a cateringových služeb; sportovcům nabízí zázemí v moderních šatnách, fitcentrech a prostorech pro relaxaci. Sazka Arena skrývá kromě hlavní arény i univerzální halu, která při velkých mezinárodních událostech slouží jako tréninková, technická a doplňková plocha. Prostory univerzální haly mohou využívat sportovní odvětví s menšími nároky na prostor a diváckou kapacitu jako například box, kulturistika, aerobic, sportovní tanec, šerm nebo squash [27*].

[39*]

Úkol:

Místa k sezení pro diváky ve sportovní hale jsou v jednom sektoru uspořádána tak, že v každé vyšší řadě je o jedno místo více než v řadě předchozí. Kolik míst je v sektoru o 20 řadách, jestliže je v první řadě 9 míst? (Údaje se netýkají Sazka Areny)

Řešení:

Počty míst v jednotlivých řadách tvoří aritmetickou posloupnost, pro kterou platí: $d=1$, $a_1=9$, $n=20$.

Nejdříve podle vzorce $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ spočteme, kolik je míst v poslední dvacáté řadě:

$$a_{20} = 9 + (20-1)\cdot 1 = 28.$$

Nyní již můžeme dosadit do vzorce pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\underline{\underline{s_{20}}} = \frac{20}{2}(9+28) = \underline{\underline{370}}.$$

Odpověď: V sektoru je 370 míst k sezení.

6.2 Vysokohorský trénink

Úvod:

Trénink ve vyšší nadmořské výšce je poslední dobou považován za jeden ze základních metodických faktorů rozvoje sportovní výkonnosti. Vysokohorský trénink se stává součástí přípravy sportovců na soutěže ve vyšší i běžné nadmořské výšce. Sám o sobě nepřináší automaticky zlepšení výkonnosti, vytváří však předpoklady pro její zvýšení. Nejvhodnější nadmořskou výškou pro přípravu sportovců je oblast okolo 2 000 m (1800 – 2400). Doporučuje se přitom postupné zvyšování výšky. Nadmořské výšky nad 3 000 m nemají pro sportovní přípravu praktický význam. Za vhodnou délku vysokohorského pobytu se všeobecně považuje období 21 – 28 dnů. Po třech týdnech už efekt vysoké polohy prakticky neroste. Hlavním rysem dlouhodobého pobytu ve vyšší nadmořské výšce je nárůst transportní kapacity krve pro kyslík. Snížení tlaku kyslíku v tepenné krvi vede k nárůstu absolutního množství červených krvinek. Proces je stimulován zvýšenou tvorbou hormonu erytropoetin, který se vytváří převážně v ledvinách a játrech. K projevům adaptace na vyšší nadmořskou výšku patří postupný pokles klidové tepové frekvence, snížení klidového minutového objemu srdečního, zvýšení vitální kapacity plic, pokles tepenného krevního tlaku (tlak v plícnici se ale zvyšuje) a adaptace srdečního svalu. Celková doba trvání adaptace na vyšší nadmořskou výšku je kolem 20 dnů, po této době již dochází ke stabilizaci organizmu na hypoxické vlivy. Plná výkonnost, přiměřená výkonnosti v nížině, se dostavuje až ve 4. týdnu pobytu ve výšce. Aklimatizaci charakterizují tři kritická období a to přibližně 2., 9. a 15. den po příjezdu. V současné době se význam vysokohorského tréninku spojuje se specializacemi, v nichž výkon trvá více než 90 s. Význam vysokohorské přípravy narůstá u sportovců s dobrou trénovaností a s rozvinutými aerobními předpoklady, mentálně zralými a psychicky odolnými osobnostmi. V poslední době se též hojně využívají tzv. barokomory, tj. uzavřené prostory, ve kterých je uměle vytvořeno hypoxické prostředí, odpovídající různým nadmořským výškám [28*].

Úkol:

Pro vysokohorský trénink byla zvolena oblast v Alpách, ležící v nadmořské výšce 2 222 m. Spočtěte jaká zde bude teoreticky teplota vzduchu, je-li teplota v nížině ve výšce 450 m n.m. 26°C. Teplota vzduchu se stoupající výškou klesá přibližně o 1°C na každých 150 m. Dále vypočtěte do jaké nadmořské výšky musí z dané oblasti sestoupit zimomřivá sportovkyně, chce-li trénovat alespoň při teplotě 16,5°C. Jiné vlivy na změnu teploty (např. proudění vzduchu) neuvažujte. Počítejte s přesností na metry.(K výpočtu využijte posloupnosti).

Řešení:

Vyjádříme-li fakt, že teplota v nadmořské výšce 450 m je 26°C, vztahem pro 450-tý člen posloupnosti ($a_{450} = 26$), tvoří takto vytvořené členy a_r aritmetickou posloupnost. Jelikož na každých 150 m klesá teplota o 1°C, na 1 m to činí 1/150°C, platí tedy $d = -1/150$ (diference). Máme vypočítat teplotu v nadmořské výšce 2 222 m, či-li a_{2222}. Dle vzorce

$$a_r = a_s + (r - s) \cdot d$$

platí:

$$\underline{\underline{a_{2222}}} = a_{450} + (2\,222 - 450) \cdot d = 26 + (2\,222 - 450) \cdot \left(-\frac{1}{150} \right) = 26 - \frac{1\,772}{150} = \underline{\underline{14{,}19}}.$$

Za druhé máme určit r, když víme, že $a_r = 16{,}5$. Ze stejného vzorce tedy vyjádříme r a dosadíme:

$$\underline{\underline{r}} = \frac{a_r - a_s + sd}{d} = \frac{16{,}5 - 26 + 450 \cdot \left(-\frac{1}{150}\right)}{\left(-\frac{1}{150}\right)} = \underline{\underline{1\,875}}.$$

Odpověď: Teoretická teplota v nadmořské výšce 2 222 m je 14,19°C. Za teplotou 16,5°C musí sportovkyně sestoupit do nadmořské výšky 1 875 m n.m..

6.3 Olympijské hry

Úvod:

Olympijské hry jsou nejvýznamnější světová sportovní událost, pořádaná od roku 1896 každé čtyři roky městem, které určí Mezinárodní olympijský výbor. Historie novodobých olympijských her navazuje na antickou tradici. Konání prvních her olympiády v Athénách zinicioval zakladatel moderního olympionismu baron Pierre de Coubertin. Zúčastnilo se jich 311 sportovců, tehdy pouze mužů, ze 13 zemí. V současnosti jsou národními olympijskými výbory k účasti nominováni závodníci z více než 180 zemí v téměř třech stech disciplínách. Od roku 1924 se konají zimní olympijské hry, rovněž ve čtyřletém cyklu, nyní v mezidobí konání olympijských her letních. Vítězové OH, ZOH a Paralympiády (navazujících soutěží zdravotně handicapovaných sportovců) jsou dekorováni zlatými, stříbrnými a bronzovými olympijskými medailemi, které jsou považovány za cennější sportovní trofeje než stejná umístění na mistrovství světa [1].

[39*]

Úkol:

Následující úkol počítejte pomocí posloupností, ne vypisováním všech roků či podobně.

1. Na základě informací z úvodu spočtěte, jaké pořadové číslo měly poslední letní olympijské hry (LOH) v Athénách (v r. 2004).
   Pozn.: Pořadové číslo se uvádí i u her, které se správně konat měly, ale nekonaly.
2. Nekonaly se šesté, dvanácté a třinácté letní olympijské hry. Ve kterých letech to bylo (a proč se nekonaly)?
3. Čtyři města se mohou pyšnit tím, že pořádaly LOH už dvakrát. V Paříži se ty druhé konaly po 24 letech a jejich pořadové číslo je čtyřnásobkem pořadového čísla her prvních (v Paříži). Do Londýna hry zavítaly opět po čtyřiceti letech a letopočet těch prvních je 477násobek jejich pořadového čísla. V kterých letech se konaly LOH v Paříži a v Londýně? (Věděli by jste, která další dvě města hostila LOH dvakrát?)

Řešení:

1. Letopočty LOH tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 4$ a prvním členem $a_1 = 1896$. Máme spočítat, kolikátým členem posloupnosti je číslo 2004, tj. máme určit r, když víme, že $a_r = 2004$.
   Ze vzorce

$$a_r = a_1 + (r-1)\cdot d$$

   tedy vyjádříme r a dosadíme:

$$\underline{\underline{r}} = \frac{a_r - a_1 + d}{d} = \frac{2004 - 1896 + 4}{4} = \underline{\underline{28}}.$$

2. Máme určit a_6, a_{12} a a_{13}. Užijeme stejný (nebo analogický) vzorec a dostáváme:

$$\underline{\underline{a_6}} = a_1 + 5d = 1896 + 20 = \underline{\underline{1916}}$$

$$\underline{\underline{a_{12}}} = a_6 + 6d = 1916 + 24 = \underline{\underline{1940}}$$

$$\underline{\underline{a_{13}}} = a_{12} + d = 1940 + 4 = \underline{\underline{1944}}$$

3. Označme r pořadové číslo prvních her v Paříži a s pořadové číslo druhých her v Paříži. Víme, že $s - r = 6$ (hry se konaly po 24 letech, což je rozmezí $24 : 4 = 6$ her) a $s = 4r$. Řešením této soustavy rovnic je $r = 2$ a $s = 8$. Teď již snadno určíme, že

$$\underline{\underline{a_r}} = a_1 + (r-1) \cdot d = 1896 + 4 = \underline{\underline{1900}}$$

$$\underline{\underline{a_s}} = 1900 + 24 = \underline{\underline{1924}}.$$

Pro hry v Londýně platí:

$$a_q - a_p = 40$$

$$a_p = 477p$$

Po dosazení do vzorce $a_p = a_1 + (p-1) \cdot d$ platí $a_p = 1892 + 4p$. Když tento výraz dosadíme do druhé rovnice, dostáváme $1892 = 473p$, takže $p = 4$. Letopočet prvních LOH v Londýně a_p je pak roven $\underline{\underline{a_p}} = 477 \cdot 4 = \underline{\underline{1908}}$, pro druhé LOH platí $\underline{\underline{a_q}} = a_p + 40 = \underline{\underline{1948}}$.

Odpovědi: … naleznete v následující tabulce:

Letní olympijské hry					
I.	1896	**Athény**	XV.	1952	**Helsinky**
II.	1900	**Paříž**	XVI.	1956	**Melbourne**
III.	1904	**St.Louis**	XVII.	1960	**Řím**
IV.	1908	**Londýn**	XVIII.	1964	**Tokio**
V.	1912	**Stockholm**	XIX.	1968	**Mexico City**
VI.	1916	*nekonaly se*	XX.	1972	**Mnichov**
VII.	1920	**Antverpy**	XXI.	1976	**Montreal**
VIII.	1924	**Paříž**	XXII.	1980	**Moskva**
IX.	1928	**Amsterodam**	XXIII.	1984	**Los Angeles**
X.	1932	**Los Angeles**	XXIV.	1988	**Soul**
XI.	1936	**Berlín**	XXV.	1992	**Barcelona**
XII.	1940	*nekonaly se*	XXVI.	1996	**Atlanta**
XIII.	1944	*nekonaly se*	XXVII.	2000	**Sydney**
XIV.	1948	**Londýn**	XXVIII.	2004	**Athény**

[1]

Pozn.: LOH v letech 1916, 1940 a 1944 se nekonaly z důvodu války.

6.4 Bowling

Úvod:

Bowling má dlouhou a bohatou historii a dnes je jedním z nejoblíbenějších sportů na světě. Anglický antropolog, sir Petrie Flinders ve třicátých letech 20. století objevil několik relikvií v dětském hrobě ze starověkého Egypta, u kterých se předpokládá, že byly využívány ke hře, kterou lze označit jako předchůdce bowlingu. Pokud je tato hypotéza pravdivá, tak kořeny bowlingu sahají až do období zhruba 3200 př. n. l. Německý historik William Pehle tvrdí, že se bowling začal hrát okolo roku 300 n. l. v Německu. Jisté je, že bowling získával v Anglii na oblibě už v roce 1336, kdy král Edvard III. bowling úředně zakázal, aby udržel své lučištníky, neboť pro ty se stal bowling oblíbenější činností, než lukostřelba. Jedna z výstředních her byla objevena v Edinburgu, kde hráč rozhoupal míč mezi nohama a vhodil jej mezi kuželky. Pokud se mu to povedlo, pak bylo jeho úkolem co nejrychleji se svalit na zem. Podobných her existovalo v západní Evropě nepočítaně. Podobné hry se hrály v Itálii (bocca), Francii (pétanque) a Anglii (bowlingová verze na trávě). Byli to angličtí, holandští a němečtí osídlenci, kteří přinesli tuto hru do USA. První stálé místo, kde se v Americe hrál bowling byla „New York's Battery", kde je dnes centrum finančnictví. Newyorčané ji však stále nazývají „Bowling Garden". V Americe však byla tato hra v roce 1841 postavena mimo zákon, pravděpodobně proto, že se stala předmětem sázení. Problém ale nebyl vyřešen, protože bowling byl prostě populární. Zákon dosáhl jen toho, že se bowling přenesl z veřejných míst do sídel prominentů. Není jisté, kde se hra začala hrát poprvé, ale do konce 19. století byla módou v celé řadě států jako například New York, Ohio, ale i v západním Illinois. Detaily, jako například hmotnost míčů a kuželek, byly v každém státě odlišné, ale to změnil Joe Thum, který dal dohromady všechny reprezentanty z různých bowlingových klubů a 9. září 1895 v „Beethoven Hall" v New Yorku byla ustanovena Americká bowlingová asociace. Podařilo se standardizovat pravidla a národní soutěž mohla začít. Přestože ženy hrály bowling už od druhé poloviny 19. století, americká bowlingová asociace byla pouze pro muže. Až v roce 1917 se podařilo ustanovit Ženskou asociaci, a to v St. Louis. Vybavení na bowling se v této době prudce rozvíjelo, míče se začaly vyrábět z velmi tvrdého dřeva. V roce 1905 byl představen první gumový balón a v roce 1914 „Brunswick Corporation" úspěšně představila minerální míč z velmi kvalitní pryže. Nyní organizovaná a standardizovaná hra získávala na popularitě a neustále se rozšiřuje její členská základna, ale i na neorganizované úrovni si získává stále nové příznivce [29*].

Úkol:

Petr se přihlásil na „bowlingový maratón", který sestával z dvaceti her, jejichž bodový zisk se sčítal. Pamatuje si, že po prvních deseti hrách měl 1 050 bodů. Pak ovšem selhalo sčítací zařízení a dalších deset her se počítalo opět od nuly. Na konci dvacáté hry (podle tabule desáté) měl skóre 1 450 bodů.

a) Určete, kolik měl Petr bodů v první hře a jaký byl jeho rekord, jestliže víte, že se v každé další hře vždy zlepšil o stejný počet bodů.

b) V kolikáté hře by dosáhl/překonal hranici 200 bodů za jednu hru, kdyby hrál takto dál?

Řešení:

a)

Bodové zisky z jednotlivých her tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí d. Dále víme, že $s_{10} = 1\,050$ (součet prvních deseti členů posloupnosti) a $s_{20} - s_{10} = 1\,450$ nebo-li $s_{20} = 2\,500$ (součet všech dvaceti členů posloupnosti). Máme určit a_1 a a_{20}.

Podle vzorce $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$ platí:

$$s_{10} = \frac{10}{2} \cdot (a_1 + a_{10})$$
$$s_{20} = \frac{20}{2} \cdot (a_1 + a_{20})$$

Po úpravách a dosazení za s_{10} a s_{20} dostáváme:

$$a_1 + a_{10} = 210$$
$$a_1 + a_{20} = 250$$

Po dosazení $a_{10} = a_1 + 9d$, $a_{20} = a_1 + 19d$ dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých:

$$2a_1 + 9d = 210$$
$$2a_1 + 19d = 250,$$

jejichž odečtením získáváme $d = 4$.

Teď už snadno dopočítáme, že $\underline{\underline{a_1}} = \frac{210 - 9 \cdot 4}{2} = \underline{\underline{87}}$ a $\underline{\underline{a_{20}}} = 250 - 87 = \underline{\underline{163}}$.

Odpověď: V první hře měl Petr 87 bodů, v poslední – tedy rekord – 163 bodů.

b)

Hledáme nejmenší *r*, pro které bude $a_r \geq 200$. Ze vzorce

$$a_r = a_1 + (r-1) \cdot d$$

vyjádříme *r* a dosadíme:

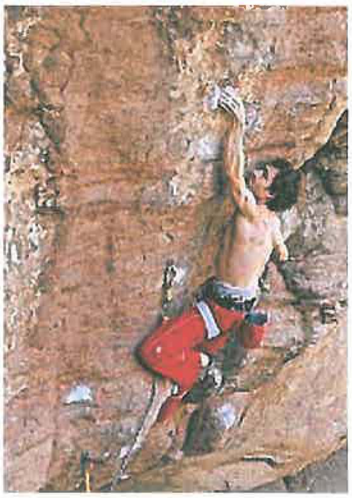
$$r = \frac{a_r - a_1 + d}{d} = \frac{200 - 87 + 4}{4} = 29{,}25$$

Hranici 200 bodů překoná tedy ve 30. hře (na jejím konci má skóre $a_{30} = a_1 + 29d = 87 + 29 \cdot 4 = 203$.

Odpověď: Dvousetbodovou hranici překoná Petr ve třicáté hře (výkonem 203 bodů).

6.5 Nezkušený horolezec

Úvod: *Horolezectví*



[32*]

Tradiční horolezectví prošlo za svůj vývoj několika směry. Postupně se z jedné disciplíny, kterou bylo zdolávání vrcholů hor, vytvořila velmi široká paleta sportovních disciplín. Od nejjednoduššího lezení bez lana (boulderingové lezení bez lana do výše několika m) přes lezení na umělých stěnách (lezení s lanem až do výšky několika desítek m), obtížné lezení po přírodních skalách, nejtěžší horolezectví v Alpských stěnách až k extrémnímu horolezectví v nejvyšších pohořích světa, vyžadující nejen vysoký stupeň soustředění, ale hlavně výbornou psychickou a fyzickou odolnost. Lezení, to není jenom bájemi opředený extrémní sport, ale také životní názor a styl [30*]. Západní svět považuje jako průlom v horolezectví výstup na Mont Blanc v roce 1786, který vykonali Balmet a Paccard. První horolezecký klub se jmenoval Alpine Club a byl založen v roce 1857. V druhé polovině 19. století je již horolezectví uznáváno jako sport. Ve 20. století se díky rozmachu techniky a zlepšení horolezecké výbavy posouvají hranice možností. V roce 1920 je na Mont Everestu překročena hranice 8 000 m n.m. bez kyslíku (Mallory a Norton). První osmitisícovka je pokořena v roce 1950 a o tři roky později je zdolána i nejvyšší hora světa Mt. Everest (E. Hillary a šerpa Tenzing Norkey). V rychlém sledu několika let poté bylo zdoláno i zbývajících 12 osmitisícovek. Jedním z lidí, kteří vystoupili na vrcholy všech osmitisícových hor, je významná osobnost historie horolezectví R. Messner [31*].

Úkol:

Doporučení pro nepříliš zkušené horolezce praví, že pokud hustota vzduchu klesne pod 0,9 kg/m^3, je vhodné nasadit kyslíkový přístroj. Spočtěte do jaké výšky může vystoupit nepříliš zkušený horolezec bez kyslíkového přístroje, který dané doporučení respektuje. Ve výšce 0 m n.m. je hustota vzduchu 1,226 kg/m^3 a každých 1 000 m výšky se snižuje o 8 %. Ostatní vlivy na změnu hustoty (jako teplotu, tlak či vlhkost vzduchu) zanedbáváme.

Řešení: (nadmořská výška v *m*, hustota v *kg/m³*)
Jestliže se hustota snižuje o 8 % na každých 1 000 m, na 1 m činí snížení 0,008 %. V nadmořské výšce 1 m bude tedy hustota

$$1{,}226 - 0{,}000\,08 . 1{,}226 = 1{,}226 \cdot 0{,}999\,92,$$

v nadmořské výšce 2 m

$$1{,}226 \cdot 0{,}999\,92 - 0{,}000\,08 \cdot 1{,}226 \cdot 0{,}999\,92 = 1{,}226 \cdot 0{,}999\,92^2 \text{ atd.}$$

Jednotlivé hodnoty hustoty vzduchu měřené vždy po 1 m tvoří tedy geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 0{,}999\,92$. Za první člen posloupnosti zvolíme hustotu v nadmořské výšce 1 m, tedy $a_1 = 1{,}226 \cdot 0{,}999\,92$ (aby se pořadové číslo členu posloupnosti shodovalo s nadmořskou výškou, pro kterou daný člen určujeme).

Máme určit, v jaké nadmořské výšce je hustota vzduchu rovna 0,9 kg/m^3, tj. víme, že $a_r = 0{,}9$ a máme určit r. To spočítáme podle známého vzorce pro r-tý člen geometrické posloupnosti:

$$a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$$

Výraz postupně upravujeme, abychom vyjádřili r:

$$q \cdot a_r = a_1 \cdot q^r$$

$$q^r = \frac{q \cdot a_r}{a_1}$$

(zlogaritmujeme)

$$\log q^r = \log \frac{q \cdot a_r}{a_1}$$

$$r \cdot \log q = \log \frac{q \cdot a_r}{a_1}$$

$$r = \frac{\log \frac{q . a_r}{a_1}}{\log q}$$

Nyní už můžeme dosadit

$$\underline{\underline{r}} = \frac{\log \frac{0{,}999\,92 \cdot 0{,}9}{1{,}226 \cdot 0{,}999\,92}}{\log 0{,}999\,92} = \underline{\underline{3\,863{,}8}}$$

Odpověď: Podle doporučení může horolezec bez kyslíkového přístroje vystoupit maximálně do výšky 3 863,8 m n.m.

7

Různé

7.1 Školní tělesná výchova

Úvod: *Počátky školní tělesné výchovy ve střední Evropě*

První zemí, která zavedla tělesnou výchovu jako povinný předmět do státních škol bylo v roce 1814 Dánsko. Největší zásluhy o zavádění tělesné výchovy do škol ve střední Evropě měl Adolf Spiess (1810-1858). Zavedl systém prostných a pořadových, které vypracoval do nejmenších podrobností. Žáci cvičili na povel a v taktu. Pokud se cvičilo na nářadí, cvičilo se podobně na několika nářadích současně. Vypracoval první osnovy.

V zemích habsburské monarchie se vývoj opozdil a tělesná výchova byla koncem 40. let 19. století zaváděna jen jako nepovinný předmět do některých škol. Teprve školské zákony z roku 1868 pro Uhry a 1869 pro Rakousko (včetně českých zemí) zavedly povinnou tělesnou výchovu do škol obecných, měšťanských a učitelských ústavů, a to pro chlapce i dívky (podle novely školského zákona z r. 1883 byla tělesná výchova dívek prohlášena opět jen za nepovinnou). Skutečné zavádění tělesné výchovy do jednotlivých škol se však dělo pomalu. Naráželo se na odpor tam, kde bychom ho nečekali – u učitelů. Většina z nich byla totiž vychovávána v duchu tzv. herbartismu, tj. pedagogické teorie J.F. Herbarta, jenž tělesnou výchovu nepovažoval vůbec za součást pedagogiky, pouze za prostředek k utužení kázně a zvládnutí dětí. V důsledku toho řada učitelů odmítala zařadit tělesnou výchovu jako povinný a rovnocenný předmět do škol a vyčlenit jí příslušné hodiny na úkor některého jiného předmětu. Nejvýznamnější reformou, která ovlivnila pojetí školní tělesné výchovy mnohých zemí střední Evropy, byla tzv. novorakouská metoda K. Gaulhofera a M. Streicherové. Místo pořadových cvičení a cvičení na nářadí prosazovali přirozená cvičení prováděná v přírodě, hry, atletiku, plavání, u dívek moderní gymnastické směry. Zdůrazňovali, že školní tělesná výchova má mít především cíle výchovné a zdravotní. Do systému zařadili letní a zimní výcvikové kursy a pobyt v přírodě. Doporučovali ranní rozcvičky (10 minut) i rozcvičky o přestávkách [7].

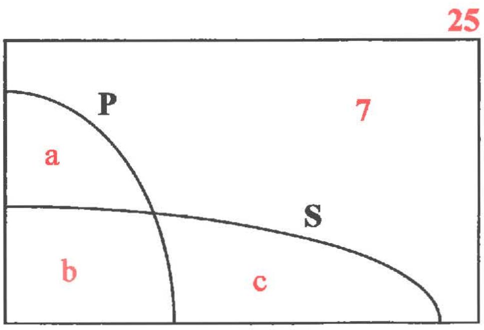
V poslední době nabízí některé školy i velmi kvalitní výuku nepovinných výběrových předmětů. Často se setkáváme se sporty netradičními, málo rozšířenými.

Úkol:

V jedné základní škole dokonce jako nepovinný výběrový předmět nabízejí i sportovní potápění. Dvanáct žáků ze 7.B chodí na potápění a deset na softbal. Ve třídě je 25 žáků a z toho 7 nesportuje vůbec. Vypočítejte, kolik softbalistů chodí také na sportovní potápění.

Řešení:

Do Vennova diagramu si vyznačíme známé i neznámé (označme a, b, c) údaje. Obdélník představuje množinu všech dětí ve třídě. Podmnožina P představuje skupinku dětí, které chodí na potápění. Zahrnuje jak ty co chodí jenom na potápění (těch je *a)*, tak také ty, které mají potápění i softbal (těch je *b*). Podobně podmnožina S. Doplněk těchto dvou podmnožin do celého obdélníku tvoří 7 žáků, kteří si nezvolili žádný sport. Nás zajímá, kolik dětí je v průniku množin P a S, tedy *b*.



Ze zadání plyne: $a+b=12$, $b+c=10$, dále je zřejmé, že $a+b+c+7=25$ nebo-li $a+b+c=18$. Řešením této soustavy tří rovnic o třech neznámých dostáváme $a=8, b=4, c=6$.

Odpověď: Softbalisté, kteří chodí ještě na sportovní potápění, jsou čtyři.

7.2 Skif

Úvod: *České veslování*

České veslování dosáhlo v posledním olympijském cyklu nebývalých úspěchů. Skončily doby, kdy se čeští veslaři prezentovali ve světě pouze díky mistrovství Václava Chalupy na skifu. Do nejužší světové špičky v současné době dorostli i další mladí veslaři včetně skifařky Mirky Knapkové. Na Olympijských hrách v Aténách v roce 2004 se do finále veslařských závodů probojovaly hned čtyři lodě. Čeští veslaři získali díky čtyřce párové mužů ve složení David Jirka, Jakub Hanák, Tomáš Karas a David Kopřiva stříbrné medaile. Mirka Knapková byla velmi těsně čtvrtá, Václav Chalupa vybojoval na skifu na svých pátých olympijských hrách páté místo. Pátá skončila rovněž posádka dvojskifu mužů Milan Doleček a Ondřej Synek. Úspěch na Olympijských hrách nebyl u těchto závodníků vůbec náhodný. Tyto posádky byly ve finále Mistrovství světa v roce 2003. V roce 2004 před olympijskými hrami byla Mirka Knapková celkovou vítězkou Světového poháru, Václav Chalupa skončil celkově druhý, když jeden ze tří závodů SP dokázal vyhrát. Čtyřka párová i dvojskif mužů končily pravidelně v závodech SP 2004 do 3. místa. Z posledních úspěchů jmenujme druhé místo Mirky Knapkové a třetí místo Ondřeje Synka na veslařském mistrovství světa v roce 2006 v britském Etonu, čímž oba obhájili své medailové pozice z předchozího roku. Celé úspěšné družstvo až na Václava Chalupu je věkově velice mladé a je u nich perspektiva dalšího výkonnostního růstu směrem k OH 2008 v Číně [33*].

Úkol:

Představme si, že před mezinárodní regatou na Račickém kanálu trénuje skifařka Mirka Knapková (na obrázku) pod dohledem svého trenéra Tomáše Kacovského na řece Vltavě. Úsek v délce rovné polovině délky regaty projíždí po proudu a proti proudu řeky. Součet obou „čistých" časů na trenérových stopkách dává naději na velmi dobré umístění. Pojede Mirka na klidné vodě Račického kanálu stejně rychle při stejném nasazení?

[34*]

Řešení:

Označme si:

$v_1 \dots$ rychlost lodě (vzhledem ke klidné vodě)
$v_2 \dots$ rychlost proudu vody ve Vltavě

Budeme porovnávat čas dosažený při tréninku na Vltavě (t_V) na dané dráze s a hypotetický čas při závodě na Račickém kanálu (t_R) na stejné dráze.

Čas t_V je součtem času t_1 potřebného k projetí úseku po proudu a času t_2 potřebného k projetí stejného úseku proti proudu. Délka úseku je *s/2*. Vzhledem k pozorovateli na břehu je rychlost lodě jedoucí po proudu $v_1 + v_2$, proti proudu $v_1 - v_2$. Čili (podle vzorce $t = \frac{s}{v}$) platí:

$$t_V = t_1 + t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1 + v_2} + \frac{\frac{s}{2}}{v_1 - v_2} = \frac{s}{2} \cdot \frac{v_1 - v_2 + v_1 + v_2}{(v_1 + v_2) \cdot (v_1 - v_2)} = \frac{sv_1}{v_1^2 - v_2^2}.$$

Rychlost lodě na kanálu vzhledem k pozorovateli na břehu je rovna v_1, platí tedy $t_R = \frac{s}{v_1}$.
Abychom mohli porovnat oba časy, poslední výraz rozšíříme:

$$t_R = \frac{s}{v_1} \cdot \frac{v_1}{v_1} = \frac{sv_1}{v_1^2}.$$

A protože $v_1^2 - v_2^2 < v_1^2$, platí, že $\frac{sv_1}{v_1^2 - v_2^2} > \frac{sv_1}{v_1^2}$, nebo-li $\underline{\underline{t_V > t_R}}$.

Odpověď: Hypotetický čas na Račickém kanálu je při stejném nasazení závodnice menší než čas dosažený v tréninku na Vltavě. Mirka tedy pojede na kanále „rychleji“.

7.3 Stovka

Úvod:

Běh na 100 metrů je nejkratší závodní trať na atletických závodech pod širým nebem. Představuje nejčistší formu rychlostních schopností člověka. Závody se konaly původně na trávě nebo škvárové dráze v britských mírách 100 y (91,44 m). Kontinentálním vlivem byly postupně zavedeny metrické míry. Sprinteři startovali ze stoje až do roku 1887, kdy Charles H. Sheril vykopal malé jamky do dráhy a pokusil se o nízký start, který se používá v různých variantách do dnešní doby. V sezoně 1928/1929 trenéři George Breshnahan a Wiliam Tutle (USA) vynalezli startovní bloky. IAAF oficiálně uznala startovní bloky teprve v roce 1937. O rok později IAAF ustanovila, že žádný rekord nemůže být uznán bez měření rychlosti větru, jehož síla nesmí přesáhnout 2 m/s. Primitivní pokusy s elektronickým měřením času závodníků jsou datovány od první čtvrtiny minulého století. Elektronické technologie se postupně zlepšovaly a IAAF rozhodla přijmout od 1.1.1977 předpis, že pouze elektronicky změřený čas může být uznán jako světový rekord. První foto-finish kamery měly malou schopnost určit přesně čas a pořadí závodníků. Dnešní technologie umožňují rozlišit rozdíly v pořadí na tisíciny vteřiny. Dalšího zlepšení sprintérských výkonů bylo dosaženo zavedením syntetických drah, které jsou mimo jiné odolné i změnám počasí.

Světový rekord v běhu na 100 metrů drží jamajský sprinter Asafa Powell výkonem 9,77 s. Poprvé ho zaběhl loni v Aténách, podruhé letos v Gatesheadu a naposledy 18. srpna 2006 na mítinku atletické Zlaté ligy v Curychu. Stejný čas má od května 2006 na kontě i Američan Justin Gatlin, později však vyšlo najevo, že měl v dubnu pozitivní dopingový nález [35*].

Úkol:

Asafa Powell běžel závod na 100 metrů. Zjednodušme reálnou situaci a představme si, že prvních 50 m zrychloval se zrychlením 2,25 m/s^2 a zbytek trati doběhl konstantní rychlostí. Jakého dosáhl času?

Řešení:

Označme si: $s_1 = s_2 = 50\,m$, $a = 2{,}25\,m/s^2$.

Čas t_1, za který uběhne prvních 50 m, spočteme ze vzorce $s_1 = \frac{1}{2}at_1^2$ (je to rovnoměrně zrychlený pohyb):

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}}.$$

Ve druhé polovině trati běží Powell konstantní rychlostí, pro jejíž velikost platí $v_2 = v_{max} = at_1$. Čas t_2 spočteme ze vzorce $s_2 = v_2 t_2$:

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_2}{at_1} = \frac{s_2}{a}\sqrt{\frac{a}{2s_1}}.$$

Pro výsledný čas t tedy platí

$$\underline{\underline{t}} = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} + \frac{s_2}{a}\sqrt{\frac{a}{2s_1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 50}{2{,}25}}\,s + \frac{50}{2{,}25}\sqrt{\frac{2{,}25}{2\cdot 50}}\,s = \underline{\underline{10\,s}}.$$

Odpověď: Asafa Powell dosáhl času 10 s.

7.4 Sauna

Úvod:

Intenzívně prováděná sportovní činnost přináší i nutnost obnovení sil (regenerace) a odstranění únavových látek. K přirozené regeneraci dochází především ve spánku. Při sportu, kdy při tréninku zatěžujeme organismus úmyslně téměř na hranici fyziologických možností, je odpočinek a regenerace požadavkem nezbytně nutným. Při nedostatečné regeneraci dochází k pocitu „přetrénování", který má zákonitě za následek pokles sportovní výkonnosti. K prostředkům regenerace patří především sportovní masáž, respektive automasáž a sauna. Účinky sauny jsou mnohostranné. Vlivem vysoké teploty potní místnosti dochází k silnému prokrvení kůže, což má kladný účinek na vnitřní orgány. Zatížení srdce je mírné až střední, upravuje se krevní tlak. Pocením jsou odstraňovány z těla ve zvýšené míře únavové látky. Účinek sauny je ale především v oblasti neurohumorálního ochranného systému a neurovegetativního systému. Účinek zvýšené teploty vyvolává v organismu reakci na stresový podnět. Dochází k aktivizaci ochranných systémů, což se projevuje zvýšeným vylučováním nadledvinkových hormonů (např. adrenalinu) a ve změnách v hospodaření s vodou a solemi. Odstraňují se bolesti svalstva a kloubů. V oblasti působení na neurovegetativní systém dochází ke zvyšování tonusu. Uklidňuje se srdeční činnost, upravuje se funkce zažívacích orgánů [8].

Při saunování neztrácíme nadměrné tukové polštáře, ale pouze vodu, kterou je následně nutno doplnit. Pravdou je, že tohoto krátkodobého efektu snížení hmotnosti úbytkem vody je využíváno ve sportech, kde se sportovci řadí do váhových kategorií. Takže saunu před turnaji a zápasy pravidelně a s oblibou navštěvují judisté, zápasníci či boxeři.

Sportovci, a nejen ti, využívají saunu i k předehřátí organismu před následnou masáží těla. Masér pak nemá tolik práce se „ztuhlým" tělem [9].

Úkol:

Tři kamarádi – sportovci Petr (P), Tomáš (T) a Martin (M) se domlouvají, že během příštího týdne půjdou společně do sauny. Sauna je otevřena všech sedm dní v týdnu. Petrovi vyhovuje pondělí, úterý a pátek. Tomášovi nevyhovuje pondělí, středa a pátek. Martin má volné právě čtyři dny v týdnu. Dále víme, že všechny dny, kdy může přijít aspoň jeden z dvojice T, M, může přijít aspoň jeden z dvojice P, M. Pátek je jediný den, který se nehodí ani jednomu z dvojice T, M, ale vyhovuje aspoň jednomu z dvojice P, M.

a) V které dny může přijít do sauny Martin?
b) V které dny mohou být v sauně všichni tři kamarádi.

Řešení:

Úlohu lze řešit buď poměrně jednoduchou úvahou nebo s pomocí Vennových diagramů. Druhý postup je zdlouhavější a složitější. Ve více „zamotaných" příkladech obdobného typu je však velmi efektivní metodou, proto si ukážeme postupy oba.

1) *Řešení s pomocí Vennových diagramů:*

Základní množinou je množina všech dnů v týdnu, kterou označíme $U = \{1;2;3;4;5;6;7\}$, kde *1* je symbol pro pondělí, *2* pro úterý atd. Množinu všech dnů, ve kterých může přijít do sauny Petr (Tomáš, Martin), označíme P (T, M). Podle zadání je $P = \{1;2;5\}$, $T = \{2;4;6;7\}$ a množina M má právě čtyři prvky, tj.

$$M = \{a;b;c;d\}. \qquad (1)$$

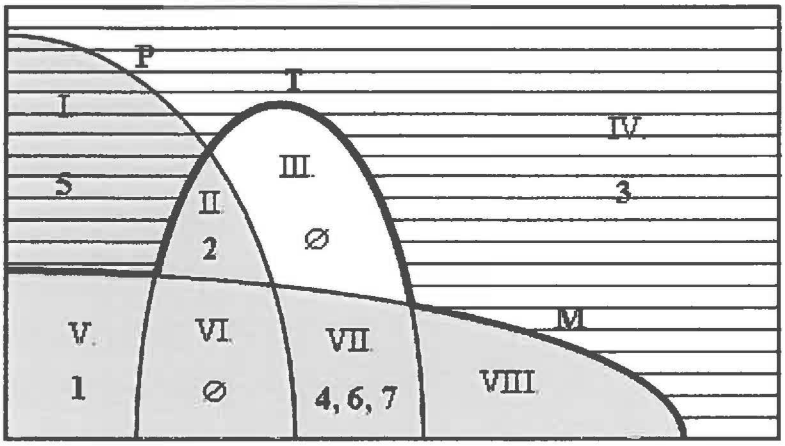
Dále podle textu platí

$$(T \cup M) \subset (P \cup M) \qquad (2)$$

a

$$\{5\} = (T \cup M)' \cap (P \cup M). \qquad (3)$$

Tím jsme danou reálnou situaci matematizovali.
Určujeme tedy množinu M danou podmínkami $(1) \wedge (2) \wedge (3)$. K řešení této matematické úlohy nám poslouží Vennův diagram. V diagramu je šedou barvou vyznačen obraz množiny $P \cup M$ a silnější čárou je vymezen obraz množiny $T \cup M$. Z podmínky (2) plyne, že pole III. je obrazem prázdné množiny. Obraz množiny $(T \cup M)'$ je v diagramu vyšrafován vodorovně, a proto pole šrafované a zároveň šedé (tj. pole I) je podle (3) obrazem jednoprvkové množiny $\{5\}$. To znamená, že $5 \in I$. Zjištěné výsledky zakreslíme do diagramu na obrázku, a tím jsme určili obrazy všech prvků v polích I a III.



Zkoumejme, kam patří obrazy dalších prvků množiny U.
Pro prvek 1 platí: $1 \in P \wedge 1 \notin T$, proto $1 \in V$.
Prvek $2 \in P \cap T$; nelze však prozatím jednoznačně rozhodnout, zda jeho obraz patří do pole II nebo VI.
Prvek $3 \notin P \cup T$; zatím rovněž nelze určit, zda patří do IV nebo VIII.
Prvek $4 \notin P \wedge 4 \in T$; z toho jednoznačně vyplývá, že obraz prvku 4 leží v poli VII. Totéž platí o prvcích 6 a 7.
Po zakreslení těchto prvků zjišťujeme, že množina M je již čtyřprvková, $M = \{1;4;6;7\}$ a podle (1) nemůže obsahovat již žádný další prvek. Proto obraz prvku 2 patří do pole II a obraz prvku 3 patří do pole IV. Nyní již snadno odpovíme na položené otázky.

Odpovědi:

a) Z určené množiny $M = \{1;4;6;7\}$ plyne, že Martin může přijít do sauny v pondělí, ve čtvrtek, v sobotu a v neděli.
b) Porovnáme-li množiny P, T, M (viz obrázek) je patrné, že $P \cap T \cap M = \varnothing$, tedy neexistuje den, ve kterém mohou být v sauně všichni tři kamarádi.

2) *Intuitivní řešení*

Do přehledné tabulky budeme zapisovat, zda určitý den danému kamarádovi vyhovuje (označíme „1“) nebo nevyhovuje (označíme „0“). První dva sloupce vyplníme, s pomocí dvou prvních podmínek, jednoduše. „Dále víme, že všechny dny, kdy může přijít aspoň jeden z dvojice T, M, může přijít aspoň jeden z dvojice P, M.“ Z této věty plyne, že Martinovi vyhovuje čtvrtek, sobota a neděle (doplníme do tabulky – modře). Kdybychom totiž do těchto buněk napsali 0, daná věta by neplatila. „Pátek je jediný den, který se nehodí ani jednomu z dvojice T, M, ale vyhovuje aspoň jednomu z dvojice P, M.“ Je tedy jasné, že pátek se Martinovi nehodí (červená 0). Dále platí, že pátek je *jediný* den dané vlastnosti, tedy jediný den, který má řádek 1 0 0, tudíž u pondělí musíme na poslední místo řádku doplnit 1 (zeleně). Vzhledem k tomu, že Martin má volné právě čtyři dny a ty jsme právě našli (čtyři jedničky v sloupci M), doplníme zbytek tabulky nulami.

	P	**T**	**M**
Po	1	0	1
Út	1	1	0
St	0	0	0
Čt	0	1	1
Pá	1	0	0
So	0	1	1
Ne	0	1	1

Odpovědi:

a) Martin může přijít do sauny v pondělí, ve čtvrtek, v sobotu a v neděli.
b) Všichni tři kamarádi se v jeden den v sauně nesejdou (není žádný řádek 1 1 1).

7.5 Carving

Úvod:

Carving je úžasný sport zažívající velký boom až na počátku devadesátých let minulého století. V tomto období se začaly objevovat první carvingové lyže, které si okamžitě vydobyly místo v závodnické sféře. Carvingová jízda je totiž přirozená jízda bez sebemenšího smyku, tím pádem bez brzdění. To znamenalo rychlejší projetí bránami a tím dosáhnutí kratšího času. Od této doby začali výrobci vyrábět širokou škálu carvingových lyží i pro normální rekreační lyžaře. Začali vyrábět lyže více i méně vykrojené, kratší i delší. Po několika letech již carvingová lyže nebyla jen jakousi anomálií na svazích hor, nýbrž se začala prudce rozšiřovat. Dnes se děti v lyžařských školách neučí na starých a rovných lyžích, ale na carvingových, což jim velmi usnadňuje výuku. Carvingové lyže jsou dnes také velmi víceúčelové, může si je prozkoušet celá rodina, jelikož jejich délka není tak velká, a to umožňuje lepší pohyb v boulích či lepší pohyblivost na lyžích.

[36*]

S příchodem carvingových lyží se samozřejmě měnil i styl jízdy. Stačí jen zatížit jednu lyži a ono to jede samo. Proto si carving vydobyl místo v lyžování a klasický smýkaný styl nechal kdesi v propadlišti dějin. Dnes se spousta výrobců předhání v designu lyží a nových technologiích (např. elektricky řízené zmírňování vibrací lyže), protože se lyžování stalo společenskou akcí všech vrstev.

Když jsme zmínili všechny klady je čas se pozastavit i u záporů. Carving jako takový nelze provozovat na neupravených či zasněžených tratích, ale jen na upravených sjezdovkách (pokud si chceme carving opravdu užít). Carvingovou jízdu lze také aplikovat jen na sjezdovkách, kde je méně lidí. Hrozí totiž riziko, že nás někdo srazí. V takové chvíli je pak pozdě řešit, kdo srážku zavinil. Zda shora jedoucí lyžař, který vždy nese odpovědnost za následky, nebo vy, kteří jezdíte oblouky přes celou sjezdovku [36*].

Nejdůležitějším parametrem carvingové lyže je rádius. Je naprosto prvořadou podmínkou pro výběr lyže. Určuje poloměr oblouku, který bude opisovat zatížená, mírně zahraněná lyže. Lze ho lehce spočítat z parametrů změřených na lyži:

$$R=(L^2 + 4\,H^2) : 8\,H\,,$$

kde L je délka aktivní hrany (přímá vzdálenost mezi dvěma nejširšími místy, orientačně o 15 cm méně než délka lyže) a H je hloubka vykrojení lyže, vypočtená podle vzorce:

$$H=\{[(\text{šířka špice} + \text{šířka paty}) : 2] - \text{šířka středu}\} : 2. \qquad [37*]$$

Úkol:

Lyžař jel z vrcholu hory (1 675 m n.m.) carvingovým obloukem dolů po relativně přímé sjezdovce, zastavil a šel se občerstvit do restaurace. Jako správný matematik si počítal oblouky, od vrcholu k restauraci jich udělal 24. Vypočítejte

a) v jaké nadmořské výšce je restaurace
b) kolik najel lyžař metrů (délka jeho skutečné dráhy, ne délka sjezdovky), jestliže víte:

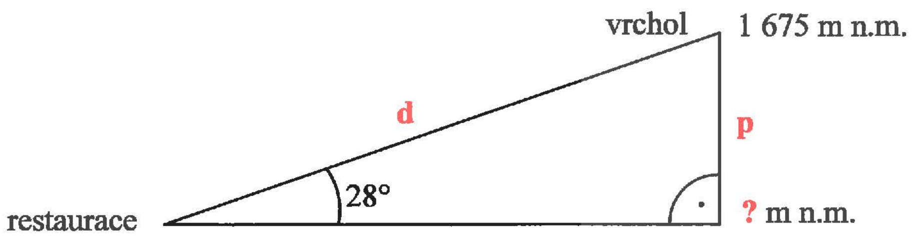
- sklon sjezdovky je konstantní a činí 28°
- jeho lyže mají následující rozměry: délka 160 cm, šířka špice 110 mm, šířka středu 69 mm, šířka paty 98 mm

Uvažujte ideální situaci, kdy všechny oblouky jsou stejné, jsou to přesně půloblouky, po každém oblouku jede lyžař ještě 5 m po vrstevnici a jeho brzdná dráha je 4 m. Souvislosti s úhlem naklopení hrany a tvrdostí lyží zanedbáváme.

Řešení:

a)

Načrtneme si zjednodušený obrázek sjezdovky:



Abychom spočítali výškový rozdíl *p*, musíme nejdříve určit délku sjezdovky *d*. K jejímu určení musíme vypočítat poloměr oblouku lyžaře, nebo-li rádius lyže:

Nejdříve si ze vzorce *H = {[(šířka špice + šířka paty) : 2] - šířka středu} : 2* vypočteme hloubku vykrojení lyže. V našem případě platí: $H = \dfrac{\dfrac{11\,cm + 9{,}8\,cm}{2} - 6{,}9\,cm}{2} = 1{,}75\,cm$.

Nyní již dle vzorce $R = (L^2 + 4\,H^2) : 8\,H$ spočteme rádius. Délka aktivní hrany *L* je v našem případě *160 cm – 15 cm = 145 cm*. Platí tedy: $R = \dfrac{(145\,cm)^2 + 4\cdot(1{,}75\,cm)^2}{8\cdot 1{,}75\,cm} = 1\,503\,cm$.

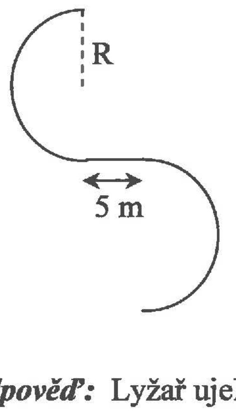
Rádius lyže, čili poloměr oblouku je 15 m.

Přímá vzdálenost, kterou lyžař urazí při vykonání jednoho oblouku, je tedy *2R*, nebo-li 30 m. Při vykonání 24 oblouků, činí přímá vzdálenost *48R*, nebo-li $48\cdot 15\,m = 720\,m$, což je hledaná délka sjezdovky *d*.

Z obrázku je vidět, že $\sin 28° = \dfrac{p}{d}$, z toho plyne $p = 720\,m\cdot\sin 28° = 338\,m$. Restaurace je tedy v nadmořské výšce *1 675 m – 338 m =* <u>*1 337 m*</u>.

Odpověď: Restaurace se nachází v nadmořské výšce 1 337 m.

b)



Skutečná (zakřivená) dráha *l* se skládá z 24 půloblouků o poloměru *R =15 m*, z 23 pětimetrových úseků po vrstevnici a jedné brzdné dráhy o délce 4 m. Platí tedy:

$$\underline{\underline{l}} = 24\pi R + 23\cdot 5\,m + 4\,m = \underline{\underline{1\,250\,m}}$$

Odpověď: Lyžař ujel dráhu 1 250 m.

8

Pro náročné

8.1 Australský fotbal

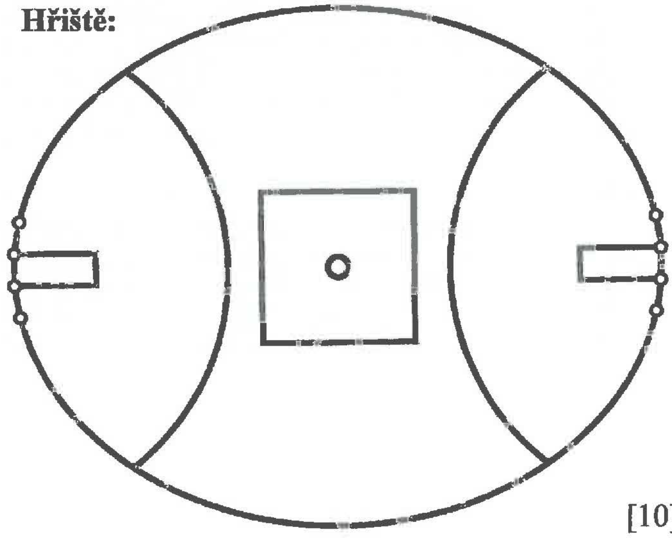
Úvod:

Australský fotbal je sportovní hra brankového typu, známá též pod názvy aussie nebo footy. Hráči osmnáctičlenných družstev se pohybují po hřišti bez omezení do zón, přihrávají si rukama i nohama jakýmkoliv směrem a snaží se dopravit šišatý míč do branky soupeře.

Základy pravidel byly vytvořeny v Austrálii v roce 1858. Zasloužil se o to především jistý Tom Wills, který se vrátil ze studií v Anglii a zorganizoval první utkání. Pravidla obsahují prvky ragby a galského fotbalu. Protože byl australský fotbal hrán zprvu jako doplňkový sport hráčů kriketu, převzal též, pro hry brankového typu naprosto neobvyklé, oválné hřiště. Od roku 1896 se hraje v Austrálii pravidelná ligová soutěž, známá nyní pod názvem Australian Football League. Zvláštní zajímavostí je, že se již v roce 1879 uskutečnilo večerní utkání s využitím elektrického osvětlení.

Gól je dosažen, je-li míč kopnut nebo položen mezi vysoké brankové tyče soupeře. V tomto případě získává družstvo šest bodů. Pokud je míč kopnut mezi brankovou a koncovou tyč, trefí-li brankovou tyč nebo je-li za spojnici brankové a koncové tyče donesen nebo dostrkán, získává družstvo jeden bod. Hráči mohou s míčem neomezeně běhat, avšak nejméně každých 15 metrů s ním musí udeřit o zem. Přihrávat lze jakýmkoliv směrem. Přesto více než 90 % akcí směřuje dopředu, neboť není uplatňováno pravidlo o postavení mimo hru. Přihrává se kopem nebo spodním úderem pěstí do míče drženého v druhé ruce. Házet míč je zakázáno. Hráč, který je v držení míče, může být soupeřem chycen za kteroukoliv část těla od ramen po kolena. Soupeři bez míče nesmí být drženi. Do okruhu 5 m od míče se však do nich může strčit nebo jim bránit v pohybu tělem [10].

Hřiště:

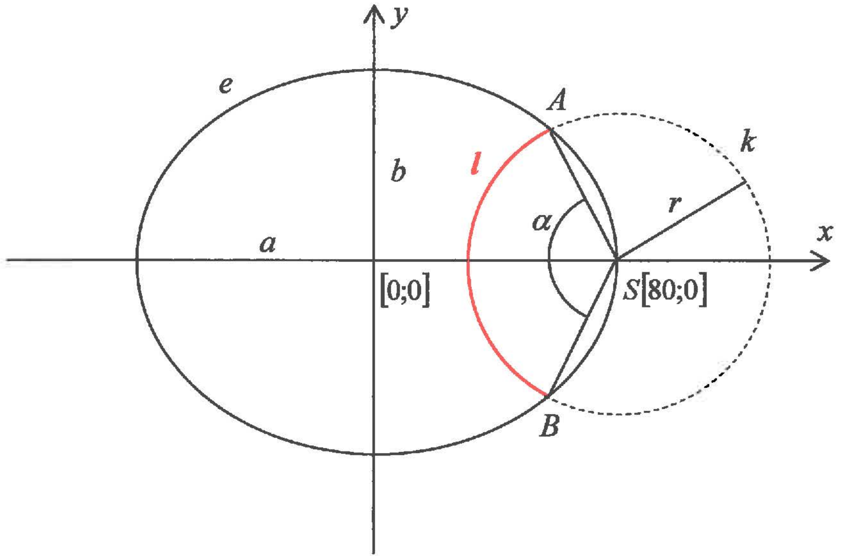


[10]

Úkol:

Při stavbě hřiště na australský fotbal zapomněla firma vyznačit dva oblouky uvnitř hřiště. Dodělat je mohou až za dva měsíce. Mezitím je ale v plánu na onom hřišti 42 zápasů. Proto trenér vymyslel, že si před každým z těchto zápasů oblouky nalajnují sami. Trenér chce spočítat, na kolik ho lajnování vyjde, aby to mohl firmě naúčtovat. Koupil lajnovačku (za 1 100 Kč), na které je napsáno, že má spotřebu 20 g vápna na 1 m jízdy. Kilogram vápna stojí 4 Kč. Kdybyste chtěli být stejně puntičkářsky přesní jako on, kolik peněz byste na firmě za lajnovačku a lajnování dvou oblouků na 42 zápasů požadovali? Trenér ví, že hřiště na australský fotbal připomíná elipsu s maximální délkou 160 m a maximální šířkou 128 m. Oblouk je část kružnice se středem ve středu branky a poloměrem 50 m.

Řešení:
Elipsu umístíme do soustavy souřadnic dle obrázku a popíšeme:



V našem případě platí:
$a = 80\ m$
$b = 64\ m$
$r = 50\ m$

Pro výpočet délky oblouku l musíme znát úhel α. Úhel α spočítáme jako úhel vektorů $(A-S)$ a $(B-S)$. Body A, B jsou průsečíky elipsy e a kružnice k, jejich souřadnice tedy získáme řešením soustavy rovnic

$$\frac{x^2}{80^2}+\frac{y^2}{64^2}=1 \qquad \text{rovnice elipsy}$$
$$(x-80)^2+y^2=50^2 \qquad \text{rovnice kružnice}$$

Řešením soustavy dospějeme k výsledku $A=[57{,}4;\,44{,}6]$, $B=[57{,}4;\,-44{,}6]$.

Dále spočteme souřadnice vektorů
$$(A-S)=(-22{,}6;\,44{,}6)$$
$$(B-S)=(-22{,}6;\,-44{,}6)$$
a jejich úhel α:
$$\cos\alpha=\frac{(A-S)\cdot(B-S)}{\|(A-S)\|\cdot\|(B-S)\|}=\frac{22{,}6^2-44{,}6^2}{50\cdot 50}=-0{,}59136 \qquad \to \qquad \alpha=126°15'.$$

Nyní již můžeme spočítat délku oblouku:
$$\underline{l}=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{360°}\cdot\alpha=\frac{2\cdot\pi\cdot(50\ m)}{360°}\cdot 126°15'=\underline{110\ m}.$$

Na 42 zápasů je nutno nalajnovat 84 oblouků, s lajnovačkou se tedy celkem ujede 9 240 m. Při spotřebě 20 g vápna na 1 m jízdy se spotřebuje 184 800 g vápna. To trenéra vyjde na 739 Kč.

Odpověď: Trenér může na firmě požadovat 1 100 Kč za lajnovačku a 739 Kč za vápno, celkem tedy 1 839 Kč.

8.2 Vrh koulí

Úvod:

Vrh koulí patří k základním atletickým disciplínám. Účinně rozvíjí svalovou sílu ve spojení s maximální akcelerací pohybu. Ve srovnání s jinými atletickými hody, ve kterých je náčiní odhazováno švihem pokrčené či natažené paže, je koule při vrhu roztlačována napínající se paží. Ve vrhu koulí se všeobecně používá zádová technika, která při dobrém provedení umožňuje využít zvláště svalstvo trupu a nohou. Zatím sporadicky se objevuje i rotační technika (vrh s otočkou). Závodník vrhá kouli jednou rukou od ramene. Pokus musí být zahájen z nehybného postoje uvnitř kruhu. Po zahájení pokusu musí být koule v těsné blízkosti čelisti závodníka nebo se jí dotýkat a nesmí být z této polohy spuštěna, ani se nesmí dostat za rovinu ramen (jinak je to „hození" koule, značně časté u začátečníků). Koule musí dopadnout do vyznačené čtyřicetistupňové výseče. Za nezdařené se počítají pokusy, kdy

- závodník při provádění pokusu přešlápne (o vnitřní stranu zarážecího břevna se opřít může)
- koule byla hozena
- koule dopadne na čáru výseče nebo mimo výseč
- závodník opustí kruh přední polovinou
- závodník opustí kruh z nepevného postavení v důsledku ztráty rovnováhy (vyskočí bez uklidnění)
- závodník opustí kruh před dopadem koule [5]

Úkol:

Jednou jsem trénovala vrh koulí na zahradě. Po prvním vrhu jsem se zarazila nad tím, jak velké důlky koule zanechává, ale bylo mi povoleno v tréninku pokračovat. Po devíti odvrzích si tatínek všiml, že důlky jsou opravdu velké, zhrozil se a dostala jsem za úkol je zasypat zeminou. Vypočítejte, jak hluboké důlky jsem „vytvořila", házela-li jsem čtyřkilovou koulí vyrobenou z materiálu o hustotě 7,639 g/cm^3 a k zasypání všech devíti důlků jsem potřebovala 324π cm^3 zeminy. Uvažujte, že jsem vytvořila 9 shodných důlků ideálního tvaru, tj. kulové úseče.

Nápověda:

Pro objem kulové úseče s poloměrem podstavy r a výškou v, vytvořené z koule o poloměru R, platí

$$V_u = \frac{1}{6}\pi v(3r^2 + v^2). \qquad (1)$$

Dále platí vztah

$$r = \sqrt{v(2R - v)}. \qquad (2)$$

Řešení:

Označme si: $m = 4\,000\ g,\ \rho = 7{,}639\ g/cm^3$.

Naším úkolem je spočítat hloubku důlku, tedy výšku kulové úseče v, která má objem $V_u = \frac{324\pi}{9}\ cm^3 = 36\pi\ cm^3$. Z neznámých v rovnicích (1) a (2) lze dopočítat ještě poloměr koule R, pak už nám zbydou dvě rovnice o dvou neznámých (v a r).

Řešme tedy (nejdříve obecně) soustavu rovnic

$$V_u = \frac{1}{6}\pi v(3r^2 + v^2) \tag{1}$$

$$r = \sqrt{v(2R - v)}\,. \tag{2}$$

Dosazením vztahu pro r z rovnice (2) do rovnice (1) dostáváme

$$V_u = \frac{1}{6}\pi v\left[3v(2R - v) + v^2\right]. \tag{3}$$

Postupnými úpravami rovnice (3) získáme rovnici

$$2\pi v^3 - 6\pi R v^2 + 6V_u = 0\,. \tag{4}$$

Poloměr koule R určíme ze vzorce pro objem koule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Vyjádříme $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, dosadíme za V ($V = \frac{m}{\rho}$, kde m je hmotnost koule a ρ její hustota) a dostáváme vztah

$$R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m}{4\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4\,000}{4 \cdot \pi \cdot 7{,}639}}\ cm = 5\ cm$$

Po dosazení za V_u a R do (4) dostáváme rovnici

$$2\pi v^3 - 30\pi v^2 + 216\pi = 0\,,$$

nebo-li po úpravě

$$v^3 - 15v^2 + 108 = 0\,,$$

která má tři řešení: $v_1 = 3$, $v_2 = 14{,}5$, $v_3 = -2{,}5$ (první určeno odhadem, ostatní dopočtené). V našem případě je však jediným možným řešením $\underline{\underline{v = 3\ cm}}$, protože musí platit $0 < v < R$.

Odpověď: Při vrhu koulí jsem na zahradě vytvořila důlky hluboké 3 cm.

8.3 Ringo

Úvod:

Ringo je relativně nová, méně známá, netradiční sportovní hra síťového typu. Hraje se jedním (utkání jednotlivců), nebo dvěma (utkání dvojic a smíšených trojic) gumovými kroužky na hrací ploše o rozměrech 8 x 18 metrů (resp. 9 x 18 metrů) opatřené volejbalovou sítí nebo lankem, které je 243 cm nad zemí. Cílem hry je hodit kroužek přes síť tak, aby dopadl na zem v poli soupeře. Kroužek je vyroben z trubice o výšce 28 mm, má vnější průměr 170 mm, vnitřní průměr 114 mm a hmotnost 160 až 165 gramů. Utkání se hraje do 15 bodů s rozdílem nejméně dvou bodů. Body se získávají nebo ztrácejí za každou chybu, bez ohledu na to, kdo podával. Za chybu je považován dopad kroužku na zem (do vlastní poloviny nebo mimo polovinu soupeře) a každé porušení pravidel o hraní s kroužkem. Kroužek je třeba odhodit stejnou rukou, do které byl chycen. Je zakázáno kroužek přihrávat spoluhráči nebo sám sobě. Každá rozehra je zahajována podáním, které lze provádět z kteréhokoliv místa za koncovou čárou své poloviny hřiště. U dvojic a trojic podává každá strana současně jedním kroužkem.

Původ této sportovní hry je třeba hledat mezi zájemci o míčové hry na palubách lodí. Málo prostoru, kymácivá paluba a snadná ztráta daleko odbitého míče vedly k jeho nahrazení kroužkem. Různé obměny přehazování kroužku přes síť nesly názvy „deck tennis“, „ring tennis“ či „ring volleyball“. Koncem dvacátých let minulého století byla hra přenesena do hal, hlavně v Německu, a postupně byla vytvořena závazná sportovní pravidla. Zasloužil se o ně významnou měrou Wlodzimierz Strzyzewski, pod jehož vedením byla v roce 1993 v polském městě Modlin založena International Ringo Federation (IRF). Mezi pěti zakládajícími národními svazy byli též zástupci Česka. V České Republice je činný Český klub ringa (ČKR) [10].

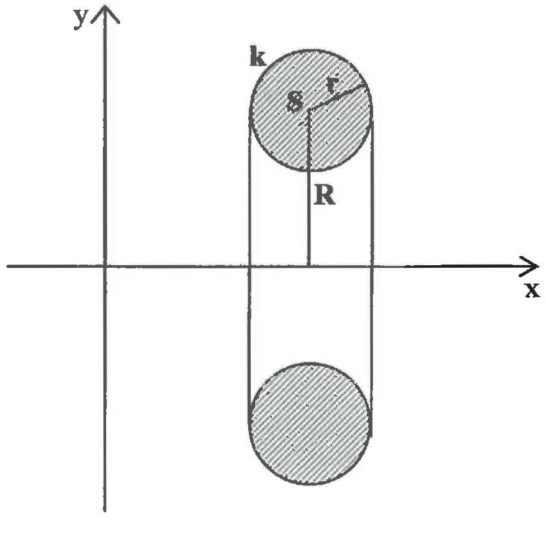
Úkol:

Na základě rozměrů uvedených v úvodu spočtěte objem kroužku (celého – tzn. gumová trubice + prostor uvnitř).

Nápověda: Tvar kroužku je tzv. anuloid, který vzniká rotací kružnice k s poloměrem r a středem S kolem osy x ležící v rovině kružnice ve vzdálenosti R (R>r) od středu S (viz. obrázek). Využijeme tedy známý vzorec pro výpočet objemu tělesa, vzniklého rotací křivky kolem osy: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$, resp. $V = \pi \cdot \int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x))dx$, v případě, že rotující oblast ohraničují dvě křivky.

Kroužek na ringo

[10]



Řešení:
Nejdříve budeme úlohu řešit obecně, s označením poloměrů r a R (viz. obrázek).
Rovnice kružnice k je $x^2 + (y-R)^2 = r^2$.
Po úpravě dostáváme $y^2 - 2yR + R^2 + x^2 - r^2 = 0$.
Úpravou jako při běžném řešení kvadratické rovnice dostáváme dvě rovnice určující danou kružnici: $y_{1,2} = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ (horní a spodní půlkružnice).

Objem anuloidu bude tedy

$$V = \pi \cdot \left(\int_{-r}^{r} (R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx - \int_{-r}^{r} (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \right).$$

Po úpravách postupně dostáváme

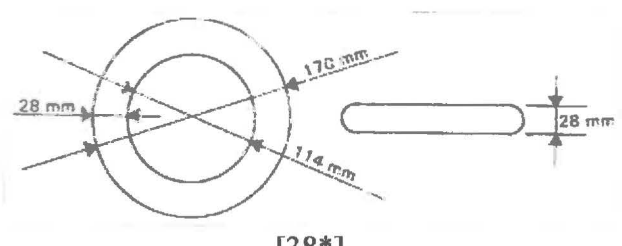
$$V = \pi \int_{-r}^{r} (R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + x^2) dx =$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - x^2} dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Daný integrál počítat nemusíme, neboť funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ je rovnicí horní půlkružnice kružnice o středu $[0,0]$ a poloměru r. Integrál $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx$ je tedy roven obsahu dané půlkružnice, čili $\frac{\pi r^2}{2}$.

Po dosazení je objem anuloidu $V = 4\pi R \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2$.

V našem případě je $r = \frac{28}{2} mm = 14\ mm$ a $R = \frac{114}{2} mm + \frac{28}{2} mm = 71\ mm$ (viz. obrázek)



[38*]

Platí tedy $\underline{\underline{V}} = 2 \cdot \pi^2 \cdot 71\ mm \cdot (14\ mm)^2 = 274\ 691\ mm^3 = \underline{\underline{274{,}7\ cm^3}}$

Odpověď: Kroužek na ringo má objem 274,7 cm³.

8.4 Fanoušci

Úvod:

Sportovní diváci utvářejí atmosféru sportovních soutěží a významně ovlivňují vlastní průběh a často i výsledek sportovní činnosti. Sportovní diváctví se stává stále důležitějším sociologickým jevem těsně souvisejícím s vrcholovým sportem. Vliv přítomnosti sportovních diváků na sportovní výkon je uznávaným a empiricky ověřeným faktorem. Populární sportovní odvětví, která jsou hojně navštěvována diváky, s ním přímo počítají jako s faktorem ovlivňujícím výkon družstva i jednotlivce. Například v hokeji a fotbale se víceméně automaticky počítá s vítězstvím na domácím hřišti, přičemž se spoléhá mimo jiné i na podporu domácích diváků [11].

Úkol:

Představte si čtyři pražské kluky – Jirku, Karla, Milana a Petra, z nichž každý fandí právě jednomu z klubů Bohemians, Slavia, Sparta, Viktoria Žižkov a přitom každý z nich jinému. Znáte o nich tyto údaje:

1. Je-li Jirka sparťan, pak je Milan přívržencem Viktorie Žižkov.
2. Nefandí-li Karel Bohemians, pak není Milan slávista.
3. Je-li Petr slávista, pak Jirka nefandí Bohemians.
4. Je-li Karel slávista, pak Petr fandí Viktorii.
5. Je-li Milan sparťan, pak je Jirka přívržencem Bohemians.
6. Není-li Karel sparťan, pak je Jirka slávista.
7. Je-li Petr fanouškem Bohemians, pak je Karel příznivcem Viktorie.
8. Není-li Karel slávista, pak není Petr sparťan.
9. Není-li Petr slávista, pak Milan nefandí Viktorii.

Zjistěte, kterému klubu fandí každý z jmenovaných hochů. Pokud nebudete moci dát jednoznačnou odpověď, vypište všechny přípustné možnosti.

Pozn.: Touto úlohou si učitelé mohou vyzkoušet žákovo logické myšlení. Může být zajímavé, na jaké metody řešení žáci přijdou. Je vhodné zadat tuto úlohu za DÚ, vyžaduje opravdu hodně času a soustředění.

Řešení:

Uvedené věty si zapíšeme pomocí zkratek a implikací:

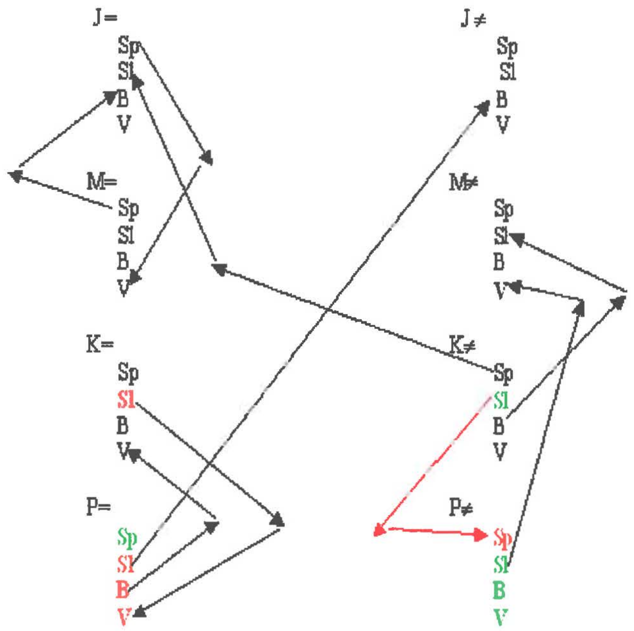
1. $J=Sp \Rightarrow M=V$
2. $K\neq B \Rightarrow M \neq Sl$
3. $P=Sl \Rightarrow J\neq B$
4. $K=Sl \Rightarrow P=V$
5. $M=Sp \Rightarrow J=B$
6. $K\neq Sp \Rightarrow J=Sl$
7. $P=B \Rightarrow K=V$
8. $K\neq Sl \Rightarrow P\neq Sp$
9. $P\neq Sl \Rightarrow M\neq V$

Do náčrtku (viz. další strana) si zakreslíme všechny možné situace a vyznačíme implikace plynoucí ze zadání. Budeme vycházet ze základních vlastností relace implikace. Připomeňme tabulku:

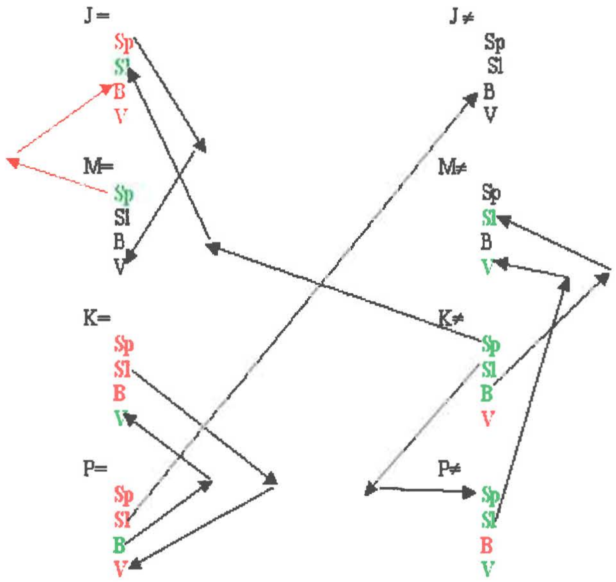
A	*B*	$A \Rightarrow B$
1	*0*	*0*
1	*1*	*1*
0	*0*	*1*
0	*1*	*1*

!!!Stačí si zapamatovat:
Z nepravdy plyne cokoli!
Nepravdivá implikace nastává jen v případě „pravda ⇒ nepravda“

K řešení je vhodné použít červené a zelené papírky, znázorňující nepravdu a pravdu, které lze různě přesouvat. Zde využijeme červená a zelená písmenka.



Začněme např. u Petra (viz 1. schéma). Kdyby byl Petr sparťan (zeleně označené $P=Sp$), bylo by tím pádem $P\neq Sp$ nepravdivé (červené). Aby byla implikace 4 ($K=Sl \Rightarrow P=V$) pravdivá, musí být $K=Sl$ nepravdivá. Tím pádem je $K\neq Sl$ pravdivé. Vyšla nám zde však nepravdivá implikace $K\neq Sl \Rightarrow P\neq Sp$ (z pravdy nemůže nikdy plynout nepravda) – označeno červenou šipkou. Petr tedy sparťan být nemůže.



Podobnou úvahu, i když trochu složitější, aplikujeme na případ, že Petr je fanouškem Bohemians (viz. 2. schéma). Nezapomínejte, že fanouškem jednoho týmu může být jen jeden hoch a že každý hoch je fanouškem jen jednoho týmu. Úvaha opět vede ke sporu.

V případě, že Petr je slávista, už docházíme ke zdárnému konci: Karel je sparťan, Jirka je přívrženec Viktorky a Milan fandí Bohemce.

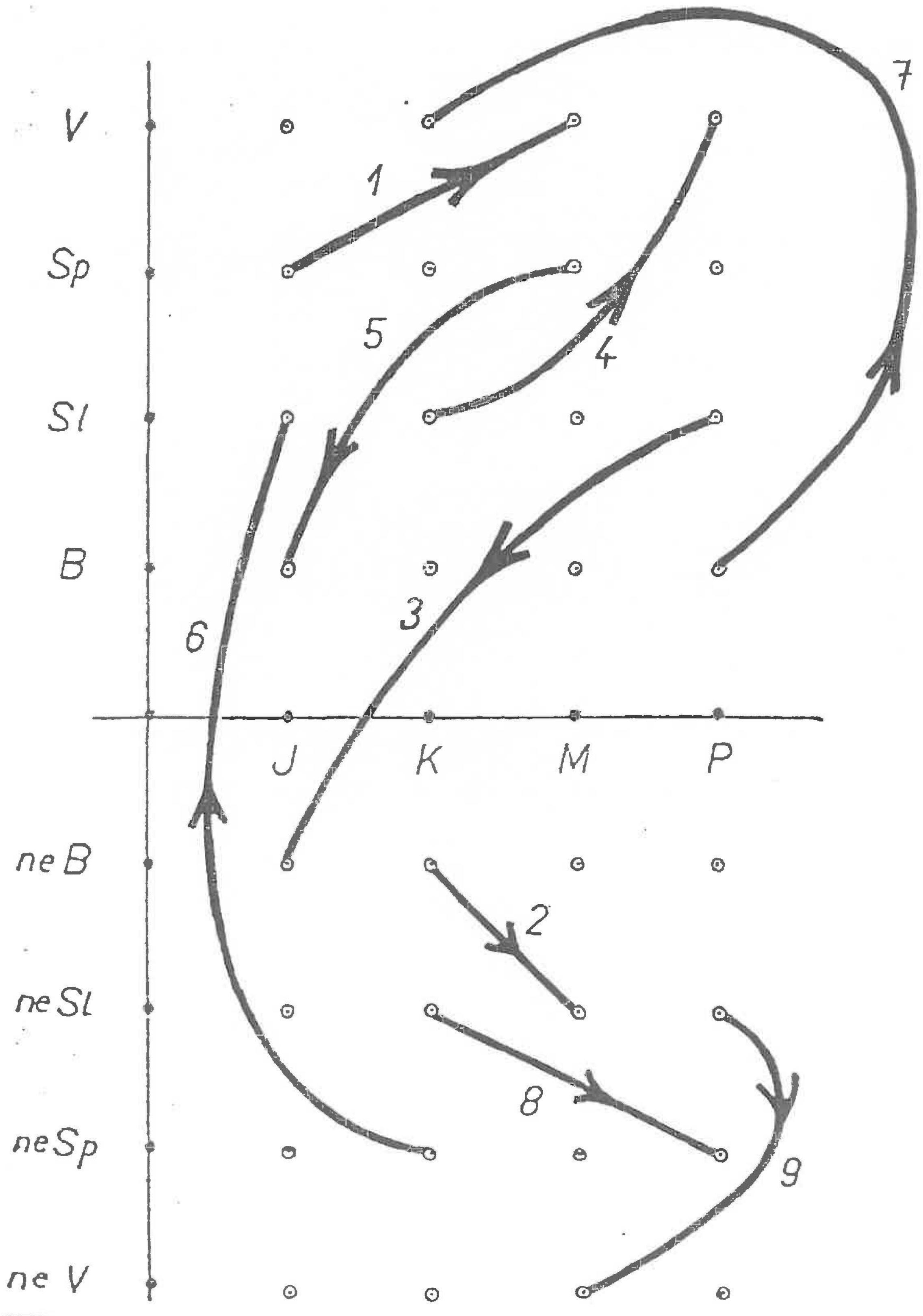
Zbývá nám případ, kdy Petr fandí Viktorce. Zde musíme rozlišit dva případy, abychom se dostali dál. Fandí-li Jirka Bohemce, docházíme ke sporu, je-li Jirka slávista, docházíme k dalšímu možnému řešení a to: Milan-Bohemka a Karel-Sparta.

Odpověď:

Existují dvě řešení:

1) Milan fandí Bohemians, Karel Spartě, Petr Slávii a Jirka Viktorii Žižkov.
2) Milan fandí Bohemians, Karel Spartě, Petr Viktorii Žižkov a Jirka Slávii.

K řešení lze využít i následující úspornější schéma (postup řešení je analogický):



Literatura

[1] *Ilustrovaná encyklopedie lidské vzdělanosti*. Praha: Reader's Digest Výběr, spol. s r.o. 2001.
[2] HNÍZDIL, J., KIRCHNER, J.: *Orientační sporty*. Praha: Grada Publishing, a.s. 2005.
[3] HOCH, M. a kolektiv: *Plavání (teorie a didaktika)*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 1983.
[4] BINTER, L. a kolektiv: *Snowboarding*. Praha: Grada Publishing, spol. s r.o. 2002.
[5] DOSTÁL, E., VELEBIL, V. a kol.: *Didaktika školní atletiky*. Praha: Katedra atletiky fakulty tělesné výchovy a sportu Univerzity Karlovy. 1992.
[6] SKRUŽNÝ, Z. a kolektiv: *Florbal*. Praha: Grada Publishing, a.s. 2005.
[7] KÖSSL, J., ŠTUMBAUER, J., WAIC, M.: *Vybrané kapitoly z dějin tělesné kultury*. Praha: Karolinum. 2000.
[8] BRYCH, J.: *Sportovní střelba (Kulové disciplíny)*. Praha: Naše vojsko. 1982.
[9] LETOŠNÍK, R.: *Sauna*. Praha: Grada Publishing, a.s. 2005.
[10] TÁBORSKÝ, F.: *Sportovní hry*. Praha: Grada Publishing, a.s.. 2004.
[11] VANĚK, M. a kol.: *Psychologie sportu*. Praha: Olympia. 1984.

[1*] http://www.fotbal.cz/ftp/cmfs/pravidla/Pravidla_fotbalu.pdf
[2*] http://www.automotodrombrno.cz/?hs=txt&id=33&hm=14&lm=37&lm2=173&ln=0
[3*] http://www.automotodrombrno.cz/?hs=txt&id=58&hm=14&lm=37&lm2=162&ln=0
[4*] http://www.klubturistu.cz/?oid=2
[5*] http://itakura.kes.vslib.cz/jan/rozhledny/rozhled.html
[6*] http://itakura.kes.vslib.cz/jan/rozhledny/rozhledny-aktivni.html
[7*] http://www.sportovni.net/para/historie/
[8*] http://www.sportovni.net/para/info/
[9*] http://www.sportovni.net/para/zpravy/?op=show&polozka=9080
[10*] http://www.sportovni.net/para/zpravy/?op=show&polozka=8977
[11*] http://www.dkchrast.wz.cz/oletani.htm
[12*] http://www.vztlak.cz/ull/me_ul.html
[13*] http://www.hosin.info/cesky/index.htm
[14*] http://www.sportovnipravidla.cz/pravidla/basketbal/basketbal.php
[15*] http://www.atletika.cz/default.aspx?section=92&server=1&article=3111
[16*] http://www.sportovni.net/kultur/historie/
[17*] http://www.sportovni.net/kultur/info/
[18*] http://kasiopeja.letnitabor.cz/typi.htm
[19*] http://www.typi.cz/
[20*] http://www.ftvs.cuni.cz/assk/pagegen.asp?home=home&sub=info&other=other&page=assk&from=/assk/cze
[21*] http://www.sportovni.net/sipky/historie/
[22*] http://www.sportovni.net/sipky/info/
[23*] http://www.sipky.cz/
[24*] http://www.vpcp.cz/history/
[25*] http://www.sazkaarena.cz/pg.php?id=M04S00A01&lang=1
[26*] http://www.sazkaarena.cz/pg.php?id=M04S00A02&lang=1
[27*] http://www.sazkaarena.cz/pg.php?id=M04S07A01&lang=1

[28*] http://www.ceskeveslovani.cz/1693323/sportovni-vykon-ve-vyssi-nadmorske-vysce
[29*] http://www.bowlingricochet.cz/bowlhistorie.htm
[30*] http://www.sportovni.net/horolez/info/
[31*] http://www.sportovni.net/horolez/historie/
[32*] http://hory.lezec.cz/reference.php
[33*] http://www.scullers.cz/index.php?selected=programtymu.php
[34*] http://www.scullers.cz/index.php?selected=fotogalerieKnapkova.php
[35*] http://www.joesaman.estranky.cz/stranka/Strucna-historie-a-vykonnostni-vyvoj-atletickych-disciplin_-1_kapitola---Sprint
[36*] http://carving.webzdarma.cz/carving.html
[37*] http://www.carv.cz/carving/index.php?site=radius
[38*] http://www.ringo.cz/pravidlo3.html
[39*] http://www.olympic.cz/index.php?clanek=5962&hledat=vlajka&strana=1&all=0&jazyk=cz

Inspirací při tvorbě diplomové práce mi byly tyto učebnice a sbírky:

- Benda P., Daňková B., Skála J. (1979): Sbírka maturitních příkladů z matematiky. SPN, Praha.
- Bušek I. (2002): Řešené maturitní úlohy z matematiky. Prometheus, spol. s r.o., Praha.
- Calda E., Dupač V. (2004): Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Prometheus, spol. s r.o., Praha.
- Herman J. a kol. (2003): Chci se dostat na střední školu : průvodce přípravou k přijímacím zkouškám z matematiky na všechny typy středních škol. Barrister & Principal, Brno.
- Charvát J., Zhouf J., Boček L. (2000): Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice. Prometheus, spol. s r.o., Praha.
- Maška O. (1967): Řešené úlohy z matematiky – stereometrie, trigonometrie, analytická geometrie. SNTL, Praha.
- Novotná J. a kol. (1997): Sbírka úloh z matematiky (nejen) pro přípravu k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy. Scientia spol. s r.o., Praha.
- Nýdl V., Pech J., Lexová R. (1998): Přijímací zkouška z matematiky (Pro ekonomické obory). Jihočeská univerzita, Zemědělská fakulta. České Budějovice.
- Odvárko O. (2004): Matematika pro gymnázia – Goniometrie. Prometheus, spol. s r.o., Praha.
- Petáková J. (2005): Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Prometheus, spol. s r.o., Praha.
- Polák J. (1996): Středoškolská matematika v úlohách I. Prometheus, spol. s r.o., Praha.
- Pomykalová E. (2004): Matematika pro gymnázia – Planimetrie. Prometheus, spol. s r.o., Praha.
- Pomykalová E. (2004): Matematika pro gymnázia – Stereometrie. Prometheus, spol. s r.o., Praha.