PEDAGOGICKÁ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY
KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

Některé nové formy rozvíjení geometrické představivosti

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Václav Sýkora, CSc.

Vypracovala: Lenka Hašková
Obor: matematika - pedagogika
Forma studia: prezenční

Praha 2006

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a veškerou použitou literaturu uvádím v seznamu.

V Praze 19. 11. 2006

……………..........................

Lenka Hašková

Děkuji RNDr. Václavu Sýkorovi za odborné vedení a za rady, které mi poskytoval v průběhu práce na diplomovém úkolu.

Obsah

1. Úvod

Často se setkáváme s názorem, že geometrické učivo je ve školské matematice podceňováno, a to nejen z hlediska jeho rozsahu v osnovách nebo vzdělávacích programech. Šetření ukazují, že i učitelé dávají ve své práci přednost ostatním partiím matematiky. Tento jev je celosvětový a nemáme pro něj přiměřené zdůvodnění. Přitom je v rozporu se základním posláním matematického vzdělání. Školská matematika vytváří předpoklady pro rozvoj řady kompetencí nezbytných pro každého člověka v jeho praktickém životě. Geometrizace reálného světa, orientace v prostoru a času, dovednosti modelovat a zobrazovat, to jsou významné a nezpochybnitelné cíle školské geometrie. Říkáme, že každý člověk by měl být vybaven dostatečně rozvinutou geometrickou představivostí. Ta mu usnadňuje celou řadu aktivit důležitých pro jeho úspěšný praktický život. Učitelé matematiky i didaktici proto hledají nové formy rozvíjení této představivosti. V současné době dáváme přednost formám, které žáky pozitivně motivují k osvojování geometrických poznatků, mají konstruktivní charakter a na základní škole přispívají také k paralelnímu rozvíjení dovedností motorických. Zvolila jsem si geometrii překládaného papíru jako východisko mého úsilí. V souvislosti s ní jsem dospěla i k otázkám rozvíjení prostorové představivosti. Ta mě potom dovedla k některým novým pohledům na učivo zabývající se řezy těles. Považuji svou práci za příspěvek k rozvíjení geometrické představivosti. V žádném případě si nečiním nárok na to, že bych tuto problematiku mohla postihnout v celé její šíři.

Chci tedy v první řadě ukázat, že překládání papíru je možné využít jako vysoce efektivní a zároveň finančně nenáročný nástroj pro rozvoj prostorové inteligence žáků. Pomocí této metody je možné zároveň prohlubovat a upevňovat učivo školské matematiky. Lze ji přirozeně propojit s klasickými metodami výuky geometrie i s novějšími metodami jako je například Cabri geometrie. Nespornou výhodou výuky pomocí překládání papíru je skutečnost, že většina žáků ji vnímá jako zábavnou činnost. Atraktivnost této činnosti zvyšuje motivaci žáků a tím i efektivitu vyučování. Myslím, že z hlediska třídění vyučovacích metod, je možné překládání papíru také přiřadit k didaktickým hrám.

2. Prostorová inteligence

Jedním z hlavních cílů školské matematiky je rozvoj kompetence, kterou obvykle zahrnujeme pod název prostorová inteligence. Co si můžeme přesně pod pojmem prostorová inteligence představit?

Popisem jednotlivých inteligencí se v knize „Dimenze myšlení“ zabývá Howard Gardner (1999). Prostorovou inteligenci zde vymezuje jako „...schopnosti, které zajišťují přesné vnímání vizuálního světa, umožňují transformovat a modifikovat původní vjemy a vytvářejí z vlastní vizuální zkušenosti myšlenkové představy, i když už žádné vnější podněty nepůsobí. Díky těmto schopnostem můžeme konstruovat různé tvary nebo s nimi manipulovat.“[1] Prostorová inteligence se tedy skládá z více schopností. H. Gardner považuje za základní z nich „...schopnost rozpoznat stejnou formu, schopnost transformovat jednu formu do formy druhé nebo rozpoznat, že k takové transformaci došlo, schopnost vytvářet mentální představy a pak tyto představy transformovat a schopnost grafického záznamu prostorových informací.“[2] Tyto schopnosti se nemusí vždy vyskytovat pospolu. Je však pravděpodobné, že člověk, který je nadaný v jedné z oblastí, bude vynikat v prostorovém myšlení jako celku. Stejně jako u jiných forem inteligence zde také platí, že procvičování některé z dílčích schopností stimuluje vývoj ostatních schopností. U normálních jedinců se prostorová inteligence rozvíjí převážně na základě vlastního pozorování světa. Na zrakovém vnímání však není zcela závislá. Může se rozvíjet i u nevidomých osob prostřednictvím hmatových vjemů.

Prostorová inteligence se uplatňuje při orientaci na různých místech, při pozorování předmětů či prostředí, při práci s grafickým znázorněním či jiným symbolickým zobrazením skutečnosti. Z prostorové inteligence vychází i cit pro vyváženost a kompozici. Zakládá se na ní také schopnost nalézat metaforickou podobnost v různých jevech. Někteří vědci dokonce považují vizuální a prostorovou představivost za primární zdroj myšlení. Například psycholog umění Rudolf Arnheim (1967) tvrdí, že skutečně tvůrčí myšlení v jakémkoliv oboru poznání se odehrává v představivosti.

Prostorová inteligence bývá považována za protipól inteligence jazykové. To odpovídá teorii dvou systémů reprezentací – verbální a obrazový kód. Schopnosti prostorové a jazykové se projevují relativně nezávisle a mohou se navzájem doplňovat.

---

[1] GARDNER, H. *Dimenze myšlení.* Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3 (s. 196)
[2] GARDNER, H. *Dimenze myšlení.* Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3 (s. 198)

Neexistuje mnoho výzkumů zabývajících se vývojem prostorové inteligence. Jedním z mála vědců věnujících se této problematice byl Jean Piaget (1999). Podle něho vývoj prostorové inteligence začíná již v kojeneckém věku. Dítě se učí sledovat dráhu pohybujících se předmětů a orientovat se v nejbližším okolí. Na konci raného dětství si dítě začíná vytvářet mentální představy. Ty jsou však pouze statické, mentální operace s představami nejsou ještě možné. V době nástupu dítěte do školy se začíná rozvíjet jeho schopnost aktivní prostorové manipulace s představami i objekty. Dítě si již umí představit, jak vypadá objekt z jiného místa. Prostorová inteligence se však stále rozvíjí jen v rámci konkrétních situací. Až v období puberty se objevuje schopnost představit si abstraktní prostor nebo formální zákony, které v prostoru platí. V tomto období dítě objevuje vztahy mezi prostorovými útvary a slovní výpovědí, dokáže spojit logicko-matematickou a prostorovou formu inteligence v jednotný systém (např. geometrický).

„Z výsledků běžně používaných testů vizuálně prostorového myšlení vyplývá, že výkony normální populace se s věkem zhoršují.... Zároveň je však zřejmé, že ti, kdo v této oblasti vynikají, neztrácejí své schopnosti až do konce života."[3] Každá forma inteligence má svůj přirozený průběh. Logicko-matematická a tělesně pohybová inteligence se s přibývajícím věkem u všech lidí zhoršuje. Vizuálně prostorová inteligence je však v určitých aspektech odolná. Smysl pro celek se s přibývajícím věkem zlepšuje. „Schopnost nazírat celek se neztrácí, naopak se spíše prohlubuje. Starší lidé lépe vnímají širší struktury, i když přitom mohou ztrácet schopnost rozeznávat drobné detaily. Lepší porozumění strukturám, formám a celku je možná tím, na čem se zakládá moudrost."[4]

Neuropsychologické výzkumy prokázaly, že prostorové a vizuálně-prostorové funkce sídlí v pravé hemisféře a to především v její zadní části. Při klinických studiích jedinců s poškozením mozku bylo zjištěno, že léze pravé temenní oblasti mají za následek zhoršení zrakové pozornosti, omezují schopnost pochopit uspořádání prostoru a orientovat se v něm, snižuje se tvorba představ a dochází i k poškození paměti.

Zajímavý je pohled na prostorovou inteligenci z hlediska evoluce. Mnoho druhů primátů žije v tlupách. Skupinový život je zřejmě na prostorových schopnostech hodně závislý. Prostorová inteligence měla zásadní význam pro kočovné tlupy. Velký význam, který kdysi měly prostorové schopnosti, může být příčinou rozdílů mezi pohlavími ve výsledcích testů prostorové inteligence, jež jsou u prostorových schopností prokazatelnější než u jiných forem intelektu. Lov zvěře a cestování patřily převážně mezi mužská zaměstnání.

---

[3] GARDNER, H. *Dimenze myšlení.* Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3 (s. 224)
[4] GARDNER, H. *Dimenze myšlení.* Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3 (s. 224)

V naší společnosti má rozvinutá prostorová inteligence obrovskou cenu. Velký význam má v přírodních vědách. Mnoho problémů, kterými se vědci zabývají, se nedá vystihnout slovy. Prostorová inteligence zde pomáhá vytvořit pomocnou metaforu nebo model daného problému. „Prostorová inteligence může ve vědě sloužit různým účelům: může být užitečným nástrojem, pomocným způsobem myšlení, cestou k získání informací, způsobem formulace úkolů nebo přímo prostředkem, kterým lze určitý problém vyřešit.“[5]

[5] GARDNER, H. *Dimenze myšlení.* Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3 (s. 212)

3. Geometrie překládaného papíru

Ve školské matematice se tradičně užívají konstrukce pomocí pravítka a kružítka zvané **euklidovské konstrukce**. Jsou složeny z konečného počtu elementárních kroků spočívajících v konstrukcích bodů, přímek a kružnic, jež se uskutečňují takto:

a) Bod sestrojíme tak, že zvolíme jeho polohu v rovině nebo ho určíme jako společný bod přímek nebo kružnic.

b) Přímku sestrojíme tak, že určíme dva její body.

c) Kružnici sestrojíme tak, že určíme její střed a poloměr.

Od dob antického Řecka trápí matematiky otázka, zda je možné konečnou posloupností těchto základních konstrukcí rozdělit obecný úhel na třetiny (trisekce úhlu) nebo zvětšit hranu krychle tak, aby objem nové krychle byl dvojnásobný (duplikace krychle). Řešení těchto problémů bylo objeveno už ve starověku, ale nešlo o euklidovskou konstrukci (pomocí pravítka a kružítka). Teprve na konci 19. století bylo dokázáno v souvislosti s důkazem transcendentnosti čísla π, že konstruovatelná jsou pouze algebraická čísla. „Komplexní číslo, které je kořenem aspoň jedné algebraické rovnice s racionálními koeficienty se nazývá algebraické. Komplexní číslo α se nazývá transcendentní, právě když neexistuje žádná algebraická rovnice s racionálními koeficienty, která má kořen α.“[6]

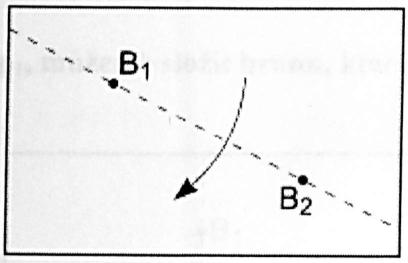
Konstruovatelností čísel se zabývají J. Švrček a J. Vanžura v knize „Geometrie trojúhelníka“ (1988). Píší zde, že „... vyjdeme-li z úsečky délky 1, potom pomocí kružítka a pravítka můžeme zkonstruovat úsečku, jejíž délka je libovolné předem dané kladné číslo m/n. ... pomocí kružítka a pravítka můžeme zkonstruovat i úsečky, jejichž délky nejsou racionální čísla (např. úsečka délky $\sqrt{2}$). ... součet, součin a podíl dvou konstruovatelných čísel je opět konstruovatelné číslo a druhá odmocnina z konstruovatelného čísla je opět konstruovatelné číslo. Každé číslo tvaru $r \pm s\sqrt{t}$, kde r, s a t jsou racionální, je konstruovatelné.“[7] Dále v knize nalezneme návod jak dokázat, že reálné číslo ξ (a tedy i geometrický obrazec, v němž má některý prvek velikost ξ) není možno zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka: „Dejme tomu, že zjistíme, že velikost ξ ... je kořenem mnohočlenu s racionálními koeficienty, který je nerozložitelný v oboru racionálních čísel, a že dokážeme, že žádný reálný kořen tohoto

[6] BARTSCH, H.-J. *Matematické vzorce.* Praha: SNTL, 1983. (s. 212)
[7] ŠVRČEK, J; VANŽURA, J. *Geometrie trojúhelníka.* Praha: SNTL, 1988. (s. 156-157)

mnohočlenu není konstruovatelným číslem. Potom ovšem ani velikost ξ není konstruovatelným číslem ..."[8]

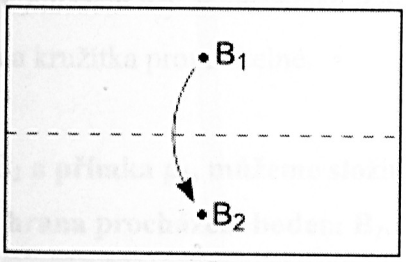
Geometrie překládaného papíru umožňuje i jiné konstrukce nežli euklidovská geometrie. Vymezit soubor základních konstrukcí (axiomy) geometrie překládaného papíru je velice složité. Obecně nejuznávanější je v současné době soubor axiomů, který zformuloval italsko-japonský matematik Humiaki Huzita ve svém článku "Chápání geometrie prostřednictvím axiomů origami"[9]:

1) Jsou-li dány dva body B_1 a B_2, můžeme složit hranu tak, aby jimi procházela.



Tato konstrukce odpovídá druhému z elementárních kroků euklidovské geometrie. Je sestrojitelná pomocí pravítka.

2) Jsou-li dány dva body B_1 a B_2, můžeme složit hranu tak, aby bod B_1 ležel na bodě B_2.



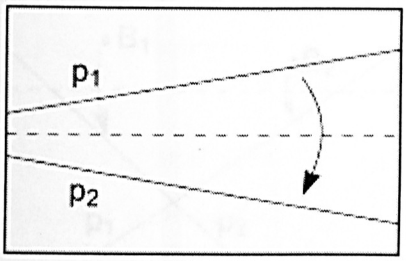
Tento axiom odpovídá konstrukci osy úsečky B_1B_2 (tzn. *hledání osové souměrnosti, která zobrazí bod B_1 do bodu B_2*), což lze také sestrojit pomocí pravítka a kružítka.

---

[8] ŠVRČEK, J; VANŽURA, J. *Geometrie trojúhelníka.* Praha: SNTL, 1988. (s. 157-158)

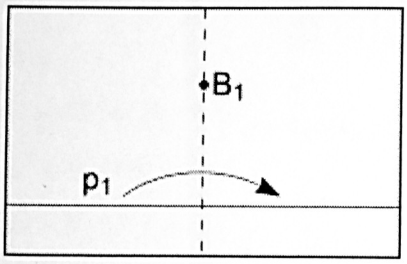
[9] *Huzita, H., Understanding Geometry through Origami Axioms, in the Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91), J. Smith ed., British Origami Society, 1992, pp. 37-70*

3) Jsou-li dány dvě přímky (hrany) p_1 a p_2, můžeme složit hranu tak, aby přímka p_1 ležela na přímce p_2.



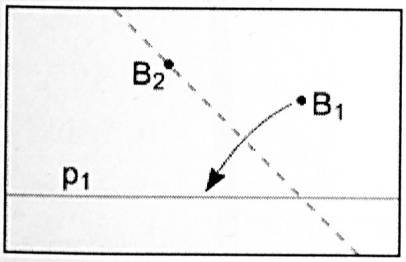
Tato konstrukce odpovídá sestrojení osy úhlu, resp. pásu (tzn. *hledání osové souměrnosti, která zobrazí přímku p_1 na přímku p_2*), což je také řešitelné pomocí pravítka a kružítka.

4) Je-li dán bod B_1 a přímka p_1, můžeme složit hranu, která je kolmá k p_1 a zároveň prochází bodem B_1.



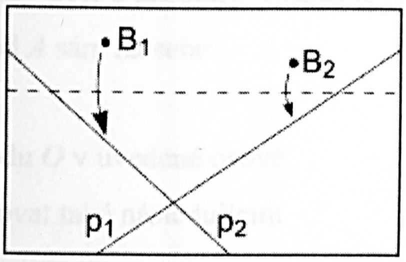
Paralelou k tomuto axiomu je v euklidovské geometrii sestrojení kolmice k dané přímce p_1 daným bodem B_1 (tzn. *nalezení osy souměrnosti dané přímky procházející daným bodem*), což je pomocí pravítka a kružítka proveditelné.

5) Jsou-li dány dva body B_1, B_2 a přímka p_1, můžeme složit hranu tak, aby bod B_1 ležel na přímce p_1 a zároveň tato hrana procházela bodem B_2.



Interpretace této konstrukce z hlediska euklidovské geometrie je poněkud složitější. Je také proveditelná pomocí pravítka a kružítka. Budeme se jí ještě podrobněji zabývat (viz samostatná kapitola Pátý axiom).

6) Jsou-li dány dva body B_1, B_2 a dvě přímky p_1, p_2, můžeme složit hranu tak, aby bod B_1 ležel na přímce p_1 a zároveň bod B_2 ležel na přímce p_2.



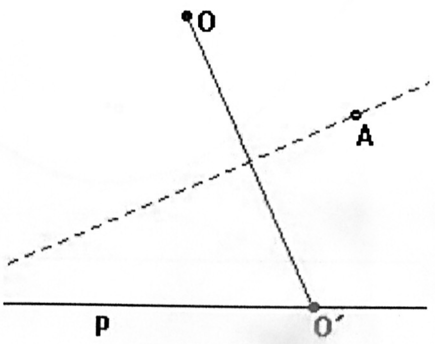
Tato konstrukce není proveditelná pomocí pravítka a kružítka. Také jí se budeme ještě podrobněji zabývat (viz samostatná kapitola Šestý axiom).

Všechny konstrukce geometrie překládaného papíru souvisejí s osovou souměrností. Přeložení papíru lze chápat jako zobrazení jedné části papíru (poloroviny) na druhou část v osové souměrnosti podle hrany přeložení.

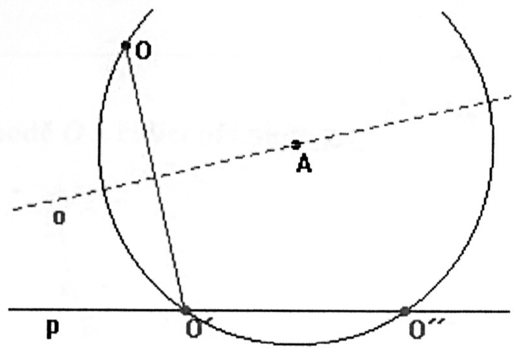
3.1. Pátý axiom

Znění: Jsou dány dva body O, A a přímka p. Můžeme nalézt osovou souměrnost, která zobrazí bod O na přímku p a bod A sám na sebe.

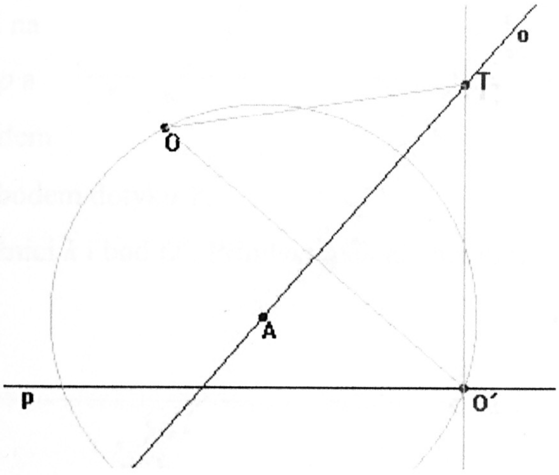
Nazveme-li O' obraz bodu O v uvedené osové souměrnosti, lze úlohu zformulovat také následujícím způsobem:
Jsou dány dva body O, A a přímka p. Můžeme sestrojit úsečku OO', kde O' leží na přímce p a osa souměrnosti úsečky OO' prochází bodem A.



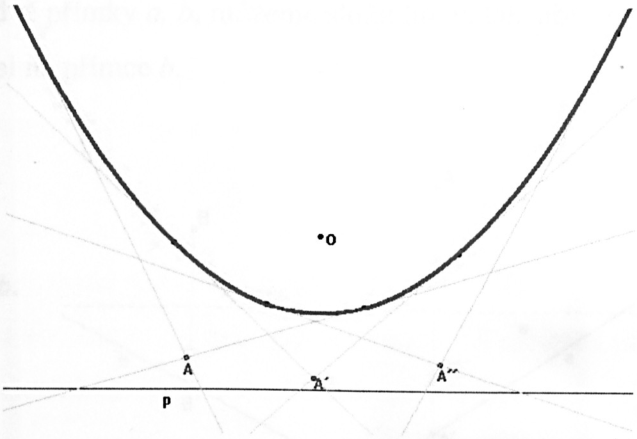
Nyní je zřejmé, že tuto konstrukci je možné provést pomocí pravítka a kružítka.
Protože bod A leží na ose souměrnosti úsečky OO', platí $|OA| = |O'A|$. Tedy bod O' můžeme nalézt jako průsečík kružnice se středem v bodě A a poloměrem $|OA|$ a přímky p. Nyní zbývá zkonstruovat přímku o, která je osou úsečky OO'.



Přímka o má však ještě jiný zajímavý význam. Vztyčíme v bodě O' kolmici q k přímce p. Průsečík přímek o a q nazveme T. Protože bod T leží na ose úsečky OO', platí $|OT| = |O'T|$. Protože úsečka $O'T$ je kolmá k přímce p, je $|O'T|$ vzdálenost bodu T od přímky p. Bod T má stejnou vzdálenost od bodu O jako od přímky p, což je vlastnost bodu paraboly. **Bod T je tedy bodem paraboly s ohniskem v bodě O a řídící přímkou p.** Jiný bod přímky o tuto vlastnost nemá (viz důkaz tohoto tvrzení v následujícím textu). Přímka o má s uvedenou parabolou pouze jeden společný bod a není kolmá k přímce p. **Přímka o je tedy tečnou této paraboly.**



V elektronické příloze „Tečna paraboly“ je možno tuto konstrukce podrobněji prozkoumat. Ke zvolenému bodu A narýsuje program Cabri geometrie tečny paraboly s ohniskem v bodě O a řídící přímkou p.



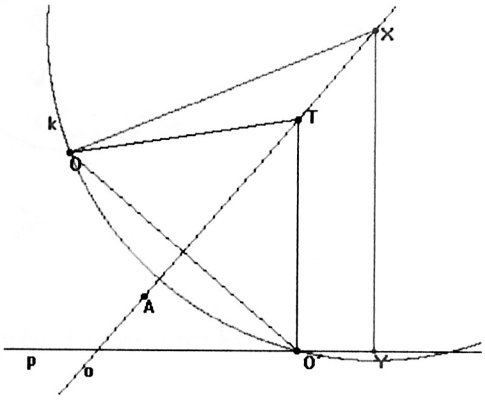
Pokud bod A leží na uvedené parabole, má úloha 1 řešení. Pokud bod A leží ve vnitřní oblasti paraboly úloha nemá řešení. Pokud bod A leží vně paraboly má úloha 2 řešení.

Tvrzení: **Přímka o je tečnou paraboly s ohniskem v bodě O a řídící přímkou p.**

Důkaz provedeme sporem.

Předpokládejme, že existuje bod X ležící na přímce o různý od bodu T, který je také bodem uvedené paraboly.

Vzdálenost bodu X od bodu O je tedy stejná jako jeho vzdálenost od přímky p. Existuje tedy bod Y ležící na přímce p, takový že úsečka YX je kolmá k přímce p a platí $|OX|=|XY|$. Pak existuje kružnice k se středem X a poloměrem $|OX|$, k níž je přímka p tečnou s bodem dotyku Y.

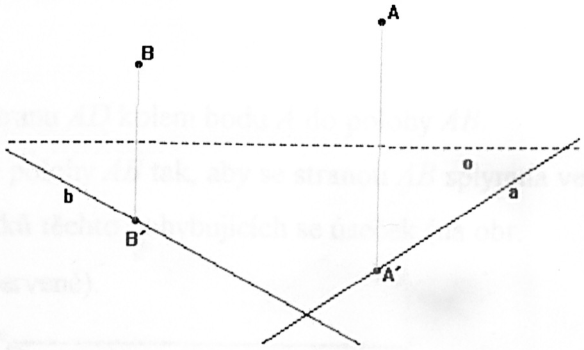


Protože bod X leží na ose úsečky OO', leží na kružnici k i bod O'. Přímka p pak ale nemůže být tečnou kružnice k (spor).

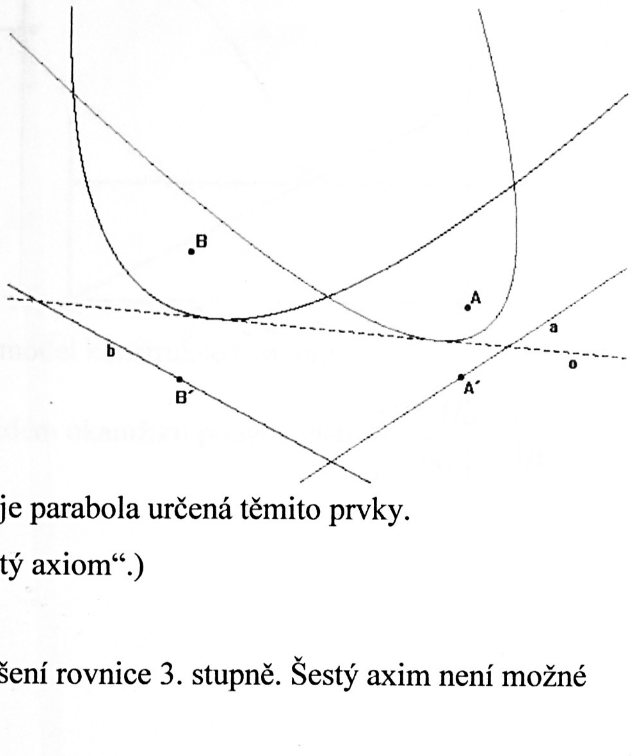
3.2. Šestý axiom

Znění: Jsou-li dány dva body *A, B* a dvě přímky *a, b*, můžeme složit hranu tak, aby bod *A* ležel na přímce *a* a zároveň bod *B* ležel na přímce *b*.

Z úvah o Pátém axiomu je zřejmé, že úlohu lze zformulovat také takto: **Jsou dány dva body *A, B* a dvě přímky *a, b*. Můžeme nalézt úsečky *AA′* a *BB′*, kde *A′* leží na přímce *a*, *B′* leží na přímce *b* a úsečky *AA′* a *BB′* mají společnou osu souměrnosti *o*.**



Obdobnými úvahami jako u Pátého axiomu lze dále vyvodit, že **přímka *o* je společnou tečnou paraboly s ohniskem v bodě *A* a řídící přímkou *a* a paraboly s ohniskem v bodě *B* a řídící přímkou *b*.**



Přímka *o* existuje pro všechny polohy daných objektů. Leží-li bod *A* na přímce *a* (resp. bod *B* na přímce *b*), neexistuje parabola určená těmito prvky. (Je možno ověřit v elektronické příloze „Šestý axiom“.)

Řešení tohoto problému se opírá o řešení rovnice 3. stupně. Šestý axim není možné realizovat pomocí pravítka a kružítka.

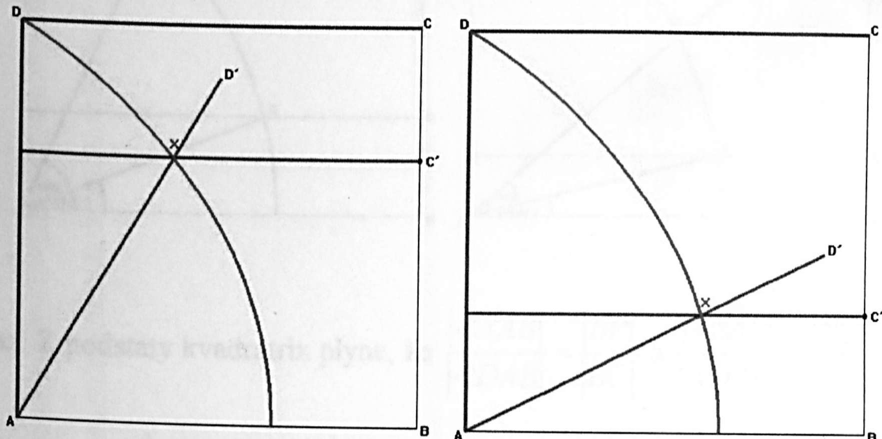
Pomocí Šestého axiomu je možné řešit i úlohy, které jsou euklidovskými konstrukcemi neřešitelné. Jako příklad si ukážeme trisekci úhlu a duplikaci krychle.

3.3. Trisekce úhlu

Matematici antického Řecka trisekci úhlu řešit uměli. Jejich řešení však byla kinematická, což podle tehdejšího přesvědčení do matematiky nepatřilo.

Jako příklad uvádím Hippiovu kvadratrix. Jedná se o křivku, kterou získáme následujícím postupem:

Ve čtverci *ABCD* rovnoměrně otáčíme stranu *AD* kolem bodu *A* do polohy *AB*. Současně stranu *DC* rovnoměrně posouváme do polohy *AB* tak, aby se stranou *AB* splynula ve stejný okamžik jako strana *AD*. Množina průsečíků těchto pohybujících se úseček (na obr. bod *X*) tvoří křivku zvanou kvadratrix (na obr. červeně).

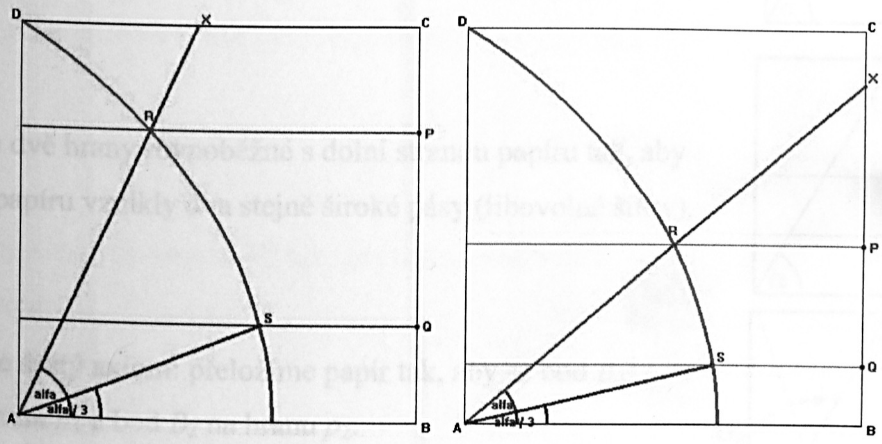


V příloze „Kvadratrix" je pohyblivý model konstrukce kvadratrix.

Konstrukce je utvořena tak, že v každém okamžiku pohybu platí $\frac{|\sphericalangle D'AB|}{|\sphericalangle DAB|} = \frac{|BC'|}{|BC|}$.

Máme-li sestrojenu kvadratrix, můžeme pomocí ní provést trisekci libovolného (ostrého) úhlu XAB a to následujícím postupem:

Nalezneme průsečík úsečky AX a kvadratrix a nazveme jej R. Vztyčíme kolmici na stranu BC procházející bodem R a její patu nazveme P. Na úsečce BP vyznačíme bod Q, pro nějž platí $|BQ| = \frac{1}{3}|BP|$. Z bodu Q vztyčíme kolmici na stranu BC a její průsečík s kvadratrix nazveme S. Úhel SAB je hledaná třetina úhlu XAB.

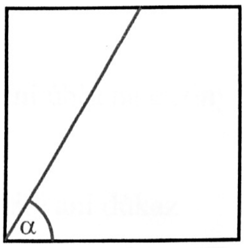


Důkaz: Z podstaty kvadratrix plyne, že $\frac{|\sphericalangle XAB|}{|\sphericalangle DAB|} = \frac{|BP|}{|BC|}$ a $\frac{|\sphericalangle SAB|}{|\sphericalangle DAB|} = \frac{|BQ|}{|BC|}$. Bod Q jsme sestrojili tak, že $|BQ| = \frac{1}{3}|BP|$. Dosazením získáme vztah $\frac{|\sphericalangle SAB|}{|\sphericalangle DAB|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|\sphericalangle XAB|}{|\sphericalangle DAB|}$. Platí tedy $|\sphericalangle SAB| = \frac{1}{3} \cdot |\sphericalangle XAB|$.

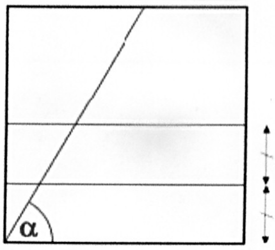
V elektronické příloze „Kvadratrix – trisekce úhlu" je pohyblivý model konstrukce trisekce úhlu pomocí kvadratrix.

Trisekci úhlu můžeme provést i překládáním papíru. Ukážeme si způsob, který vymyslel Hisaši Abe[10].

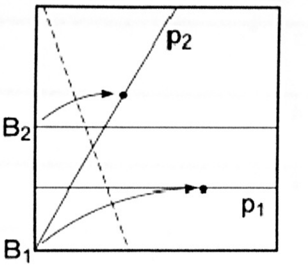
Nechť dělený úhel má vrchol v levém dolním rohu listu papíru. Nazveme jej α (Uvažujeme ostrý úhel, ale metodu lze snadno rozšířit pro tupé úhly.)



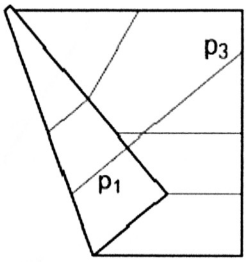
1) Vytvoříme dvě hrany rovnoběžné s dolní stranou papíru tak, aby v dolní části papíru vznikly dva stejně široké pásy (libovolné šířky).



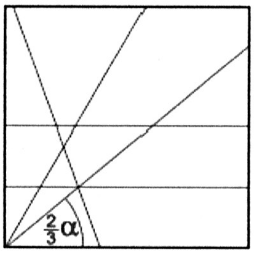
2) Aplikujeme šestý axiom: přeložíme papír tak, aby se bod B_1 zobrazil na hranu p_1 a bod B_2 na hranu p_2.



3) Znovu přeložíme hranu p_1 v její nové pozici – přeložením ji prodloužíme na listu papíru. Vznikne nová hrana p_3. Rozložíme hranu z kroku 2 a prodloužíme hranu p_3 (protne levý dolní roh listu papíru).



Vymodelovali jsme úhel velikosti $\frac{2}{3}\alpha$.



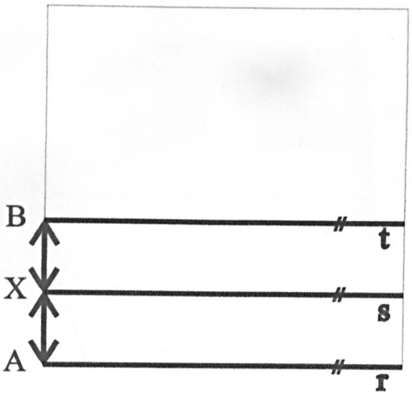
[10] ABE, H., *Trisection of angle by H. Abe* (in Japanese) by K. Fusimi, in Science of Origami, a supplement to Saiensu (the Japanese version of Scientific American), Oct. 1980, p. 8

V konstrukci jsme použili „dvojité přeložení". To není uvedeno v systému axiomů. 3. krok však můžeme nahradit vymodelováním přímky procházející bodem B_1 a průsečíkem přímky p_1 s hranou sestrojenou ve 2. kroku.

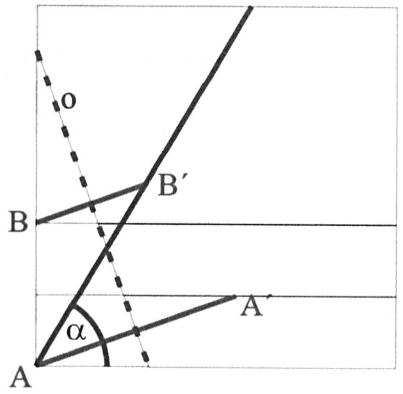
V geometrii překládaného papíru lze konstrukci vedoucí k rozdělení úhlu na třetiny ověřit pouhým přeložením a porovnáním.

Uvědomíme-li si, že jde v podstatě o osovou souměrnost není složitý ani důkaz vycházející z pohledu geometrie využívající kružítka a pravítka.

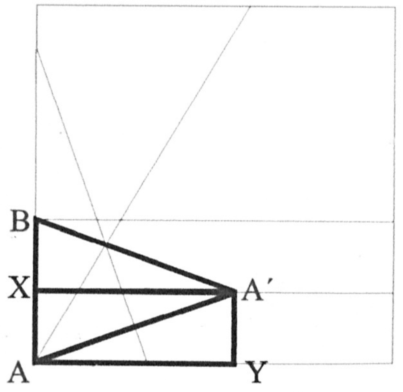
Přímky r, s, t jsme sestrojili tak, že jsou rovnoběžné a platí $|AX| = |BX|$.



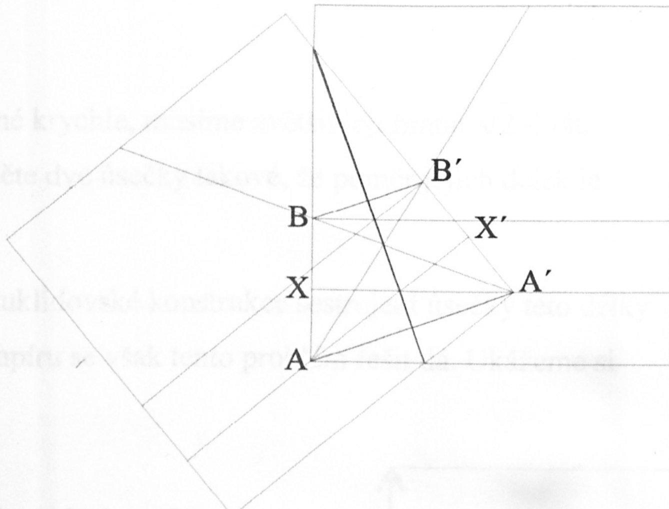
Dále jsme sestrojili přímku o a body A', B' tak, že přímka o je osou souměrnosti úseček AA' a BB'.



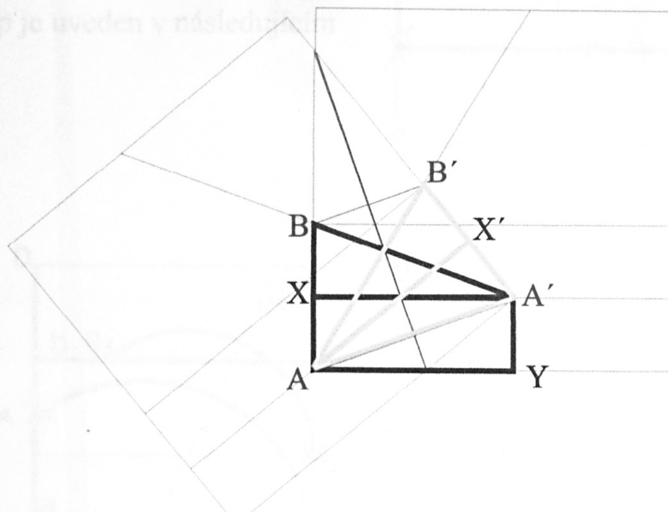
Je tedy zřejmé, že trojúhelníky $AA'Y$, $A'AX$ a $A'BX$ jsou shodné.



Nyní si ukážeme, jak by se v osové souměrnosti podle osy o zobrazily všechny objekty.



Doplníme-li do obrázku i výše zmíněné shodné trojúhelníky $AA'Y$, $A'AX$ a $A'BX$ a jejich obrazy v osové souměrnost podle osy o, je zřejmé, že úhly YAA', $A'AX'$, $X'AB'$ jsou shodné. Nyní si stačí uvědomit, že úsečka AX′ je obrazem úsečky XA' (část přímky s) a je tedy částí přímky p_3.

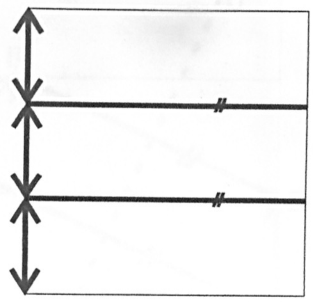


3.4. Duplikace krychle

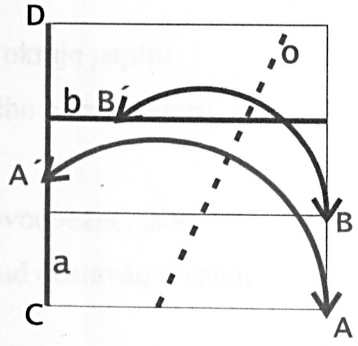
Chceme-li zdvojnásobit objem dané krychle, musíme zvětšit její hranu $\sqrt[3]{2}$ -krát. Problém lze tedy zformulovat takto: Najděte dvě úsečky takové, že poměr jejich délek je roven $\sqrt[3]{2}$.

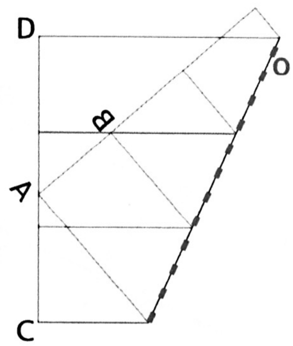
$\sqrt[3]{2}$ je řešením kubické rovnice. Euklidovské konstrukce sestrojení úsečky této délky neumožňují. V geometrie překládaného papíru se však tento problém řešit dá. Ukážeme si postup, který vymyslel Peter Messer[11].

Čtvercový papír rozdělíme na tři shodné pásy. (Přesné rozdělení úsečky na tři shodné části lze provést například na základě vlastností podobných trojúhelníků. Postup je uveden v následujícím textu.)

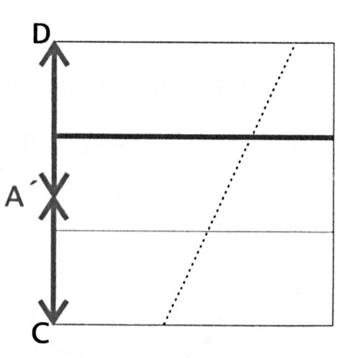


Přeložíme papír tak, aby bod A ležel na přímce a a bod B na přímce b (Šestý axiom).





Označíme bod A´ na přímce a, na nějž se zobrazí při přeložení bod A (obraz bodu A v dané osové souměrnosti). Nechceme-li používat tužku, bod A' můžeme nalézt jako průsečík přímky a a kolmice na přímku o procházející bodem A.



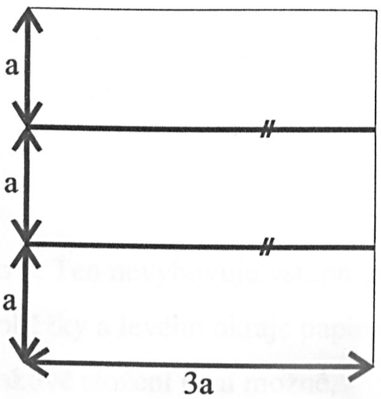
Poměr $|DA'|:|CA'|$ je hledané číslo $\sqrt[3]{2}$.

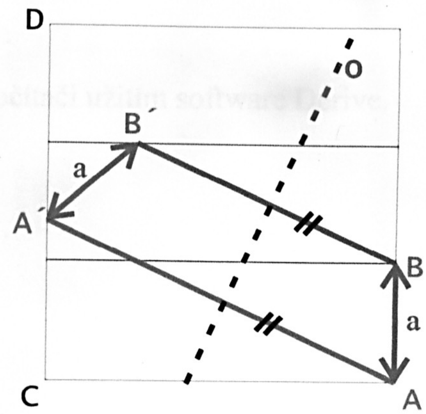
[11] Peter Messer, From Problem 1054, in Crux Mathematicorum, Vol. 12, No. 10, 1986, pp. 284-285.

Důkaz duplikace krychle je obtížnější.

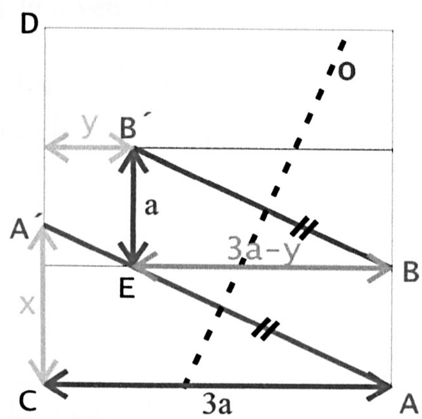
Nejprve zopakujeme předpoklady:

Čtvercový papír jsme rozdělili na tři shodné pásy.





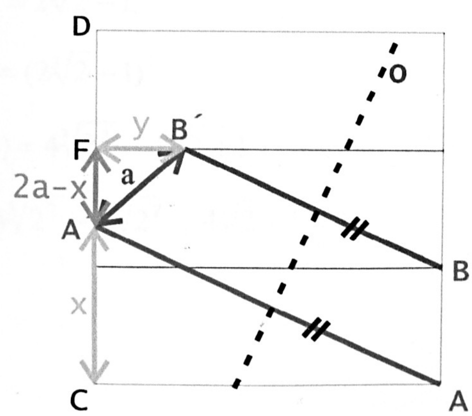
Úsečky AA' a BB' mají společnou osu souměrnosti.
Jsou tedy rovnoběžné a platí $|AB| = |A'B'|$.



Vzdálenost bodu A' od spodního okraje papíru označíme x a vzdálenost bodu B' od levého okraje papíru nazveme y.

Protože úsečky AA' a BB' jsou rovnoběžné, jsou trojúhelníky $AA'C$ a $BB'E$ podobné. Odtud dostáváme vztah $\dfrac{x}{a} = \dfrac{3a}{3a-y}$ (*I*).

Výraz na pravé straně nemá smysl, pokud $y = 3a$. To by nastalo pouze tehdy, kdyby bod B' ležel na přímce AB. Takové složení však není možné. Dále nesmí být $a = 0$, tedy papír nesmí mít nulové rozměry.



Aplikací Pythagorovy věty na pravoúhlý trojúhelník $A'B'F$ získáme vztah $2a - x = \sqrt{a^2 - y^2}$,

který upravíme na tvar $x = 2a - \sqrt{a^2 - y^2}$ (*II*).

Po dosazení vztahu (*II*) do rovnice (*I*) dostáváme rovnici

$$\frac{2a-\sqrt{a^2-y^2}}{a}=\frac{3a}{3a-y}.$$

Tu postupně upravíme na tvar

$$y^4-6ay^3+12a^2y^2-6a^3y=0.$$

Tato rovnice má dva reálné kořeny. Jeden z nich je číslo 0. Ten nevyhovuje vstupním podmínkám, protože, je-li $y = 0$, bod A' je průsečík první rovnoběžky a levého okraje papíru a bod B' je průsečík druhé rovnoběžky a levého okraje papíru. Takové složení není možné, protože úsečky AA' a BB' nemají společnou osu souměrnosti .

Pro nás je důležitý kořen $y=a(2-\sqrt[3]{2})$ získaný na počítači užitím software Derive. Dosadíme-li ho do rovnice (*II*), získáme vztah

$$x=2a-\sqrt{a^2-a^2(2-\sqrt[3]{2})^2}.$$

Ten upravíme na tvar

$$x=2a-a\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}.$$

Nyní můžeme dokázat tvrzení, že poměr $|DA'|:|CA'|$ je roven $\sqrt[3]{2}$.

$$\frac{|DA'|}{|CA'|}=\frac{3a-x}{x}=\frac{3a-2a+a\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}}{2a-a\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}}=\frac{1+\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}}{2-\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}}$$

Stačí ověřit, zda platí $\dfrac{1+\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}}{2-\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}}=\sqrt[3]{2}$.

Rovnost upravíme.

$$1+\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}=\sqrt[3]{2}\left[2-\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}\right]$$

$$1+\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}=2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}$$

$$(1+\sqrt[3]{2})\sqrt{1-(2-\sqrt[3]{2})^2}=2\sqrt[3]{2}-1$$

$$(1+\sqrt[3]{2})^2(1-(2-\sqrt[3]{2})^2)=(2\sqrt[3]{2}-1)^2$$

$$(1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})(4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2^2}-3)=4\sqrt[3]{2^2}-4\sqrt[3]{2}+1$$

$$4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2^2}-3+8\sqrt[3]{2^2}-4-6\sqrt[3]{2}+8-2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2^2}-4\sqrt[3]{2^2}+4\sqrt[3]{2}-1=0$$

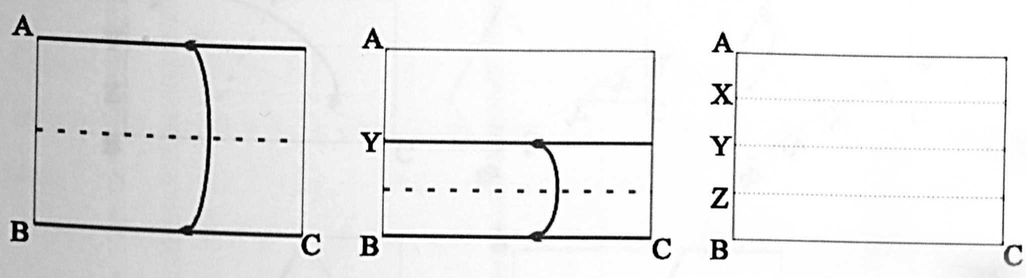
$$0=0$$

Důkaz je dokončen.

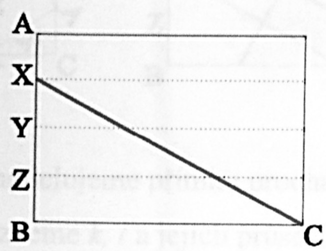
Rozdělení úsečky na tři shodné části

Pomocí druhého či třetího axiomu (osa úsečky a osa pásu) jsme schopni rozdělit úsečku na 2^n shodných částí (kde n je přirozené číslo).

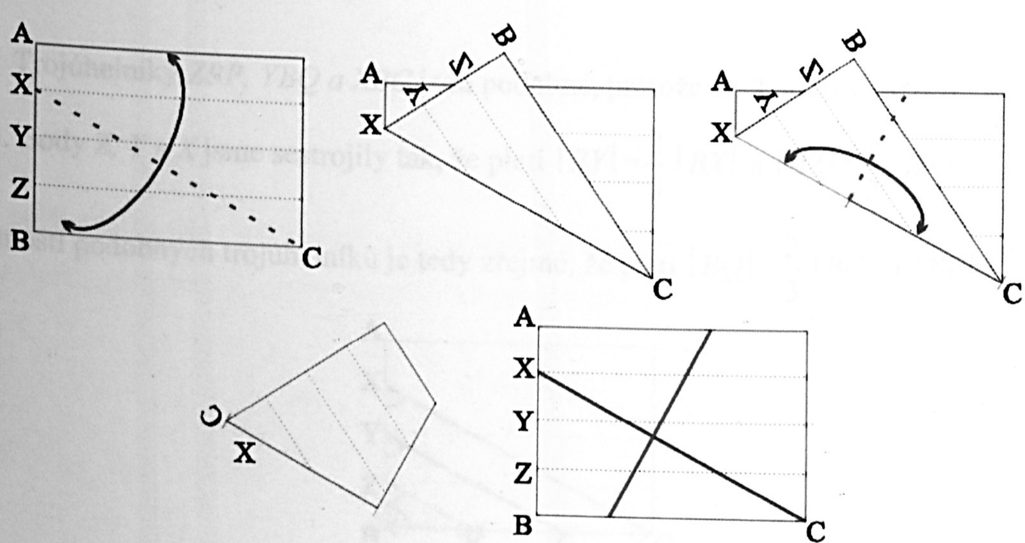
Rozdělíme levý okraj papíru (úsečku *AB*) na čtyři shodné části.



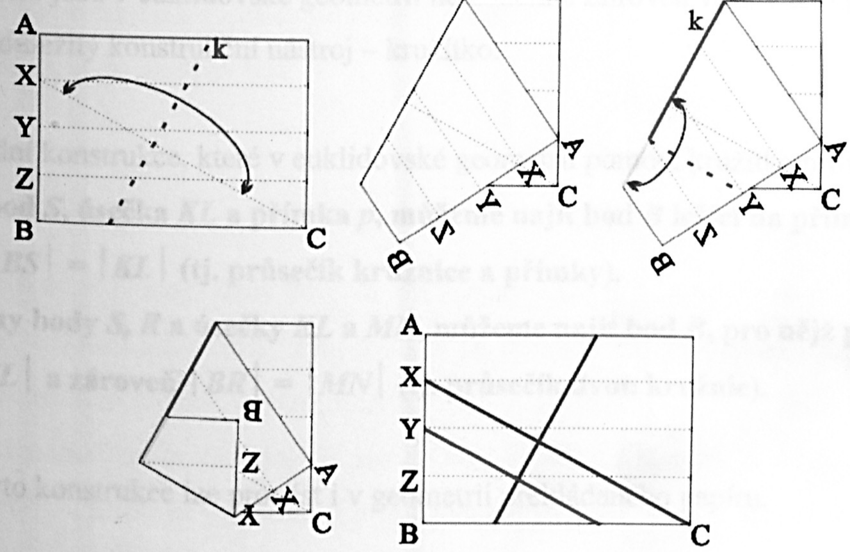
Vymodelujeme úsečku *XC*.



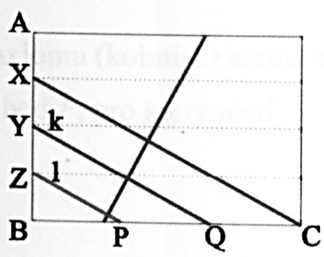
Zkonstruujeme přímky rovnoběžné s přímkou *XC* tak, aby jedna procházela bodem *Y* a druhá bodem *Z*. Nejprve přeložíme papír podle hrany *XC*. Na přeloženém papíru vymodelujeme pomocí čtvrtého axiomu libovolnou kolmici na přímku *XC*. („Dvojité přeložení“ není nutné, ale je pohodlnější.)



Přeložíme papír podle přímky k získané v minulém kroku. Vytvoříme hranu kolmou na přímku k procházející bodem Y.

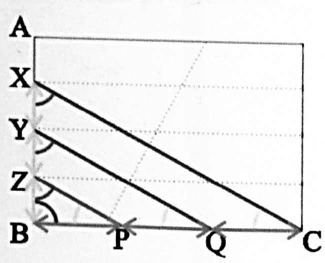


Obdobným způsobem vymodelujeme přímku procházející bodem Z a rovnoběžnou s přímkou XC. Vzniklé přímky nazveme k, l a jejich průsečíky s přímkou BC pojmenujeme Q,, P.



Trojúhelníky ZBP, YBQ a XBC jsou podobné, protože se shodují ve všech vnitřních úhlech. Body Z, Y a X jsme sestrojily tak, že platí $|BY| = \frac{2}{3}|BX|$ a $|BZ| = \frac{1}{3}|BX|$.

Z vlastností podobných trojúhelníků je tedy zřejmé, že platí $|BQ| = \frac{2}{3}|BC|$ a $|BP| = \frac{1}{3}|BC|$.



3.5. Kružítko a geometrie překládaného papíru

Ukázali jsme, že geometrie překládaného papíru díky Šestému axiomu umožňuje konstrukce, které jsou v euklidovské geometrii neřešitelné. Zároveň však v této geometrii přicházíme o důležitý konstrukční nástroj – kružítko.

Základní konstrukce, které v euklidovské geometrii pomocí kružítka provádíme, jsou:

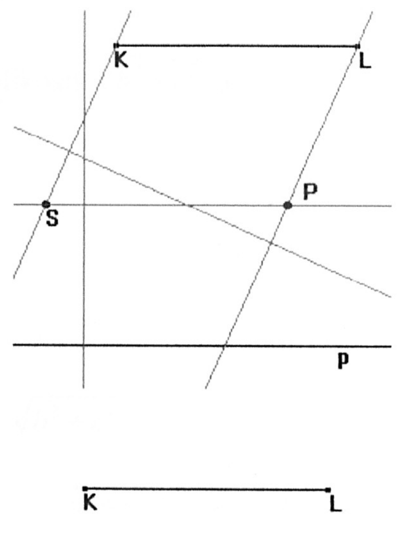
1) Je-li dán bod S, úsečka KL a přímka p, můžeme najít bod B ležící na přímce p, pro nějž platí $|BS| = |KL|$ (tj. průsečík kružnice a přímky).

2) Jsou-li dány body S, R a úsečky KL a MN, můžeme najít bod B, pro nějž platí $|BS| = |KL|$ a zároveň $|BR| = |MN|$ (tj. průsečík dvou kružnic).

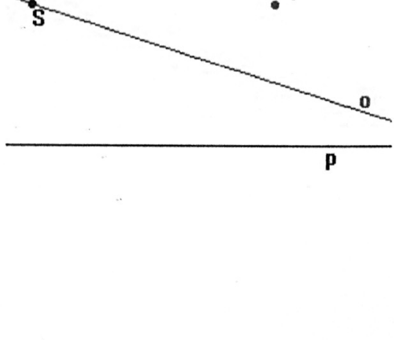
Obě tyto konstrukce lze provést i v geometrii překládaného papíru.

1. konstrukce (Je-li dán bod S, úsečka KL a přímka p, můžeme najít bod B ležící na přímce p, pro nějž platí $|BS| = |KL|$) :

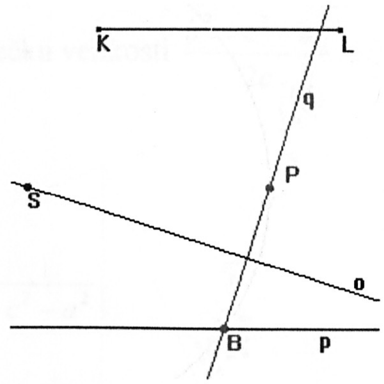
Nejprve pomocí Čtvrtého axiomu (kolmice) sestrojíme rovnoběžník $SKLP$, čímž získáme bod P, pro který platí $|SP| = |KL|$.



Dále použijeme Pátý axiom - složíme hranu o tak, aby bod P ležel na přímce p a zároveň tato hrana procházela bodem S.



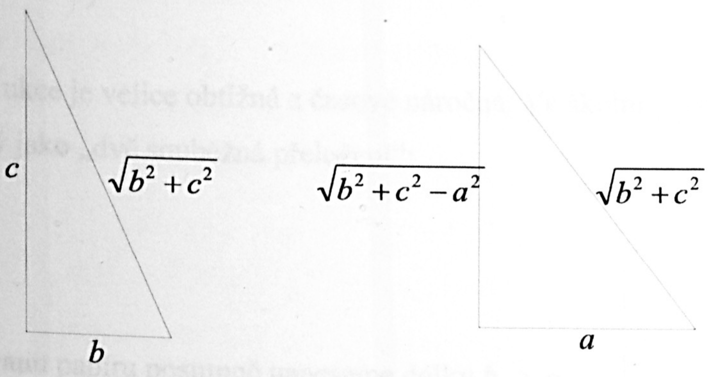
Nakonec užitím Čtvrtého axiomu složíme hranu q, která je kolmá na přímku o a zároveň prochází bodem P. Průsečík přímek p, q je hledaný bod B.



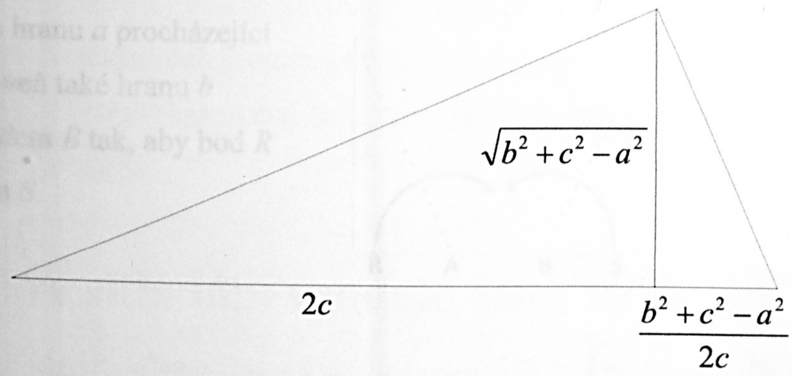
2. konstrukce (Jsou-li dány body S, R a úsečky KL a MN, můžeme najít bod B, pro nějž platí $|BS| = |KL|$ a zároveň $|BR| = |MN|$). Pomocí Huzitových axiomů lze tuto konstrukci provést také, je však značně složitá.

Úlohu lze přeformulovat takto: Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li velikosti všech jeho stran. Při důkazu, že úloha je v geometrii překládaného papíru řešitelná, můžeme vyjít z kosinové věty $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$. Z předchozích úvah víme, že můžeme sestrojit kolmici na danou přímku daným bodem a „průsečík kružnice a přímky“. Můžeme tedy využít Pythagorovu větu a Euklidovu větu o výšce.

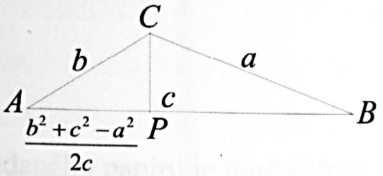
Pomocí Pythagorovy věty postupně sestrojíme úsečky velikostí $\sqrt{b^2+c^2}$ a $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$.



Dále pomocí Euklidovy věty o výšce sestrojíme úsečku velikosti $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.

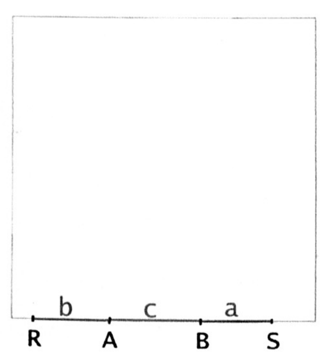


Ta má délku rovnou vzdálenosti paty výšky v_c (nazveme ji P) od bodu A. Nyní stačí na úsečku AB nanést bod P, vztyčit z něho kolmici p na úsečku AB. Bod C leží na přímce p a platí pro něj $|AC| = b$ (sestrojíme pomocí Šestého axiomu).

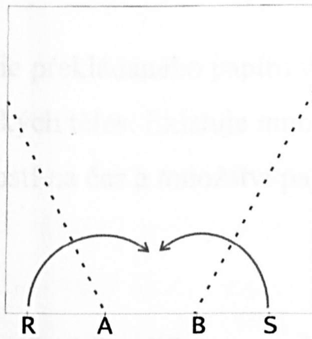


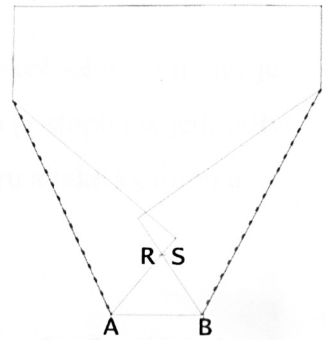
Tato konstrukce je velice obtížná a časově náročná. Ve školní praxi je možné použít postup označovaný jako „dvě souběžná přeložení“:

Na dolní hranu papíru postupně naneseme délky *b, c, a*.

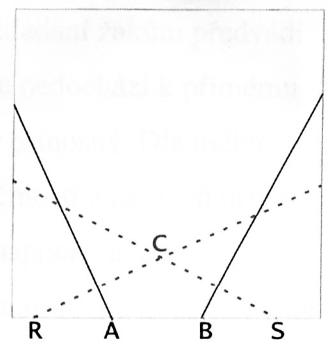


Složíme hranu a procházející bodem A a zároveň také hranu b procházející bodem B tak, aby bod R splynul s bodem S.





Složíme hranu r procházející bodem R a kolmou na přímku a. Obdobně složíme hranu s procházející bodem S a kolmou na přímku b. Průsečík přímek r, s je hledaný bod C. (Případně jsme mohli obraz bodů R a S vyznačit tužkou v minulém kroku.)



Pomocí geometrie překládaného papíru je možné řešit většinu úloh školské geometrie. Žáci si tak prohloubí své geometrické znalosti jejich použitím v netradiční situaci. Mnozí žáci lépe přijímají vědomosti, mohou-li je získat materiální konstrukcí s využitím motorických dovedností. Rozvoj těchto dovedností je důležitou součástí pojmotvorného procesu. Tato problematika však není hlavním předmětem mé práce.

4. Modely těles

Jednou z možností využití geometrie překládaného papíru ve školské matematice je zhotovování modelů základních geometrických těles. Existuje mnoho postupů jak jednotlivá tělesa zkonstruovat. Liší se různou náročností na čas a množství papíru a také kvalitou a velikostí výsledného tělesa.

4.1. Metody skládání modelů těles ve školní třídě

Učitel má různé možnosti jak s žáky při tvorbě modelů pracovat.

U mladších žáků se mi nejvíce osvědčila metoda, kdy učitel skládání žákům předvádí a jednotlivé kroky komentuje „laickým“ jazykem. Při této metodě sice nedochází k přímému procvičování pojmů školské matematiky, ale pro žáky je bez pochyby přínosný. Dle mého názoru je tuto činnost možné považovat za prepedeutiku osové souměrnosti a zároveň první seznámení s vlastnostmi geometrických těles. Žáci je mohou vnímat hapticky a „prožijí“ mnohé situace související s osovou souměrností. Vytvářejí a transformují různé dvojrozměrné a trojrozměrné geometrické útvary. Myslím, že tyto zkušenosti jim usnadní pochopení a interiorizaci pojmů, se kterými se později setkají v běžných hodinách geometrie.

U žáků 2. stupně základní školy je možné použít metodu, kdy žáci skládají tělesa samostatně či ve skupinách podle tištěných návodů. Několik takových návodů jsem pro tento účel zpracovala (viz přílohy: 1. Čtyřstěn z jednoho listu papíru – obrázkový návod, 2. Čtyřstěn ze dvou listů papírů – obrázkový návod, 3. Krychle - obrázkový návod). Hlavním prvkem těchto návodů jsou dvojrozměrná schémata jednotlivých kroků postupu doplněná symbolickými značkami (různé typy šipek, přerušované čáry znázorňující hranu přeložení,...). Na základě zkušeností s chybami žáků jsou k některým krokům přidány slovní komentáře. Komentáře jsou zde opět „laické“. Tato metoda je pro žáky poněkud obtížnější. Musí ve svých představách převádět dvojrozměrné modely na trojrozměrné. Navíc při ní potřebují dešifrovat symbolické značky. Stejně jako předcházející metoda slouží i tento postup jako prepedeutika osové souměrnosti a vlastností geometrických těles. Navíc, podle mého názoru, procvičuje důležitou složku prostorové inteligence – schopnost transformovat dvojrozměrné schéma do trojrozměrného objektu.

Nejobtížnější je metoda, kdy žáci dostávají pouze slovní instrukce. Tyto instrukce mohou být založeny na pojmech týkajících se osové souměrnosti a vlastností geometrických útvarů (viz přílohy: 4. Čtyřstěn z jednoho listu papíru – obrázkový návod doplněný slovními instrukcemi, 5. Čtyřstěn ze dvou listů papírů – obrázkový návod doplnění slovními instrukcemi, 6. Krychle - obrázkový návod doplněný slovními instrukcemi, 7. Čtyřstěn z jednoho listu papíru – návod bez obrázků, 8. Čtyřstěn ze dvou listů papírů – návod bez obrázků). Tento postup vyžaduje od žáků dobrou znalost pojmů školské geometrie a navíc schopnost tyto pojmy použít v netradiční situaci. Tuto metodu jsem zkoušela u žáků 9. ročníku. Protože je pro mnohé žáky příliš obtížná, postupovali jsme následujícím způsobem. Slovně jsem žákům popsala požadovaný krok. Všichni žáci se pokoušeli krok uskutečnit na své skládance. Občas bylo nutné instrukci několikrát zopakovat. Poté, co se několika žákům podařilo krok realizovat, ukázali postup zbytku třídy. (Zajímavé bylo, že na jednotlivé kroky přicházeli různí žáci a ne stále titíž.) Já jsem také daný krok provedla na své skládance a zkontrolovali jsme si správnost s celou třídou. Poté následovala další instrukce. Tato metoda je pro žáky velice obtížná. Klade veliké nároky na jejich znalosti. Také je přitom nutné převést slovní instrukce na složitý pohyb v prostoru. Žáci si při ní upevňují pojmový aparát geometrie a užívají známé pojmy v netradiční situaci. Metoda bezpochyby také procvičuje prostorovou inteligenci.

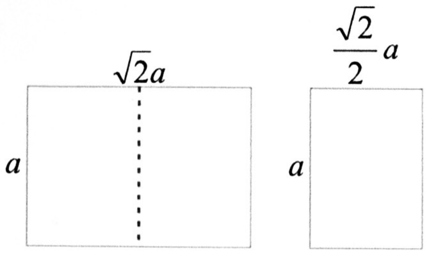
4.2. Geometrický rozbor vybraných skládaček

Následující rozbory jsou určeny především učiteli. Pro učitele by neměly být prezentované skládačky fascinujícím kouzlem, jak tomu může být u žáků, ale měl by chápat důvody, proč je nutné jednotlivé kroky při skládání provést.

4.2.1. Formát papíru A

Formát papíru A má z hlediska matematiky velmi zajímavou vlastnost, na kterou stojí za to upozornit žáky. Touto vlastností je poměr jeho stran. U všech velikostí papírů formátu A (tzn. A0, A1, A2,…) je poměr velikostí stran $1:\sqrt{2}$. List papíru formátu A0 má přitom obsah rovný 1 m^2. Přeložíme-li papír tohoto formátu podle osy delších stran, dostaneme znovu papír formátu A. Žádný obdélník s jiným poměrem stran tuto vlastnost nemá. Domnívám se, že důkazy obou těchto výroků jsou přiměřené žákům 9. ročníků ZŠ.

Přeložíme-li papír formátu A podle osy delších stran, dostaneme znovu papír formátu A.



Důkaz:

Velikost kratší strany papíru označíme a.

Velikost delší strany je tedy rovna $\sqrt{2}\,a$.

Přeložíme-li papír podle osy delších stran, mají strany velikosti a a $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Delší strana má v tomto případě velikost a. Poměr délek kratší strany ku delší straně je tedy $\frac{\sqrt{2}}{2}a : a$.

Tento poměr můžeme upravit:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a : a = \frac{\sqrt{2}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{2}$$

Vzniklý list papíru má tedy formát A.

Nechť platí věta: „Přeložíme-li obdélník podle osy delších stran, dostaneme obdélníky se stejným poměrem stran, jako měl původní obdélník." Potom jsou strany obdélníka v poměru $1:\sqrt{2}$.

Důkaz:

Kratší stranu obdélníku označíme *a*. Delší stranu označíme *b*. Poměr délek kratší strany ku delší straně je tedy $a : b$.

Přeložíme-li obdélník podle osy delší strany, bude mít vzniklý obdélník rozměry $\frac{b}{2}$ a *a*.

Poměr kratší strany ku delší je tedy $\frac{b}{2} : a$.

Podle předpokladu se tyto poměry rovnají. Platí tedy $\frac{a}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{a}$.

Rovnost postupně upravujeme:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{a} \qquad | \cdot ab$$

$$a^2 = \frac{b^2}{2} \qquad | \cdot 2$$

$$2a^2 = b^2 \qquad | - b^2$$

$$2a^2 - b^2 = 0$$

$$(\sqrt{2}a - b)(\sqrt{2}a + b) = 0$$

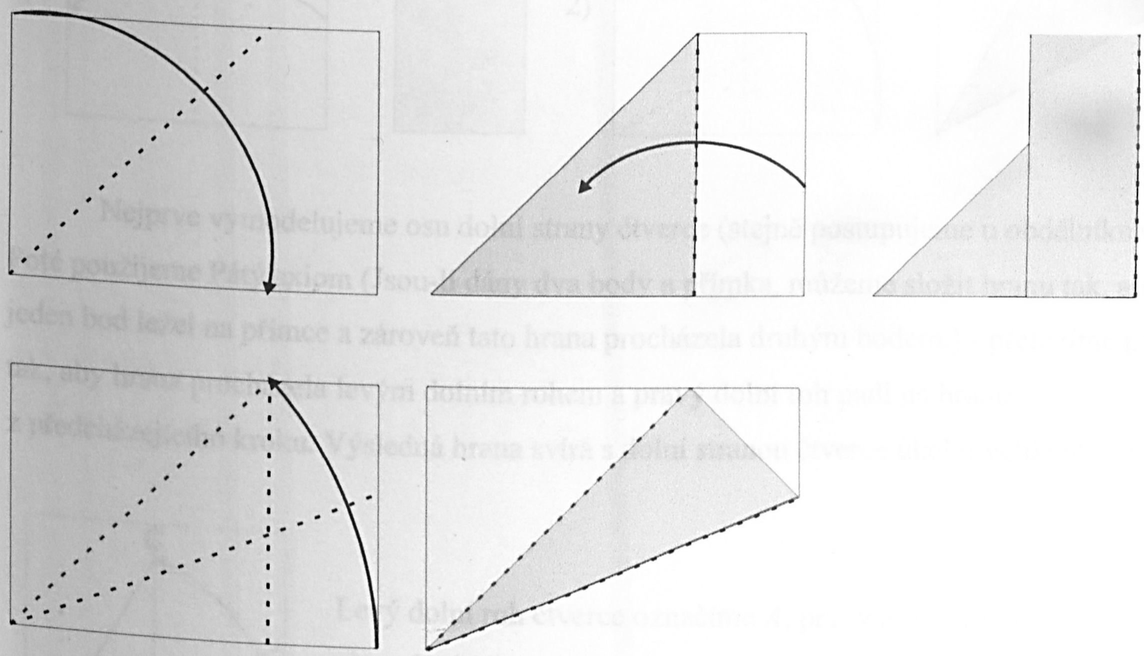
Protože *a* a *b* jsou kladná čísla, nastane rovnost pouze je-li:

$$\sqrt{2}a - b = 0$$

$$b = \sqrt{2}a$$

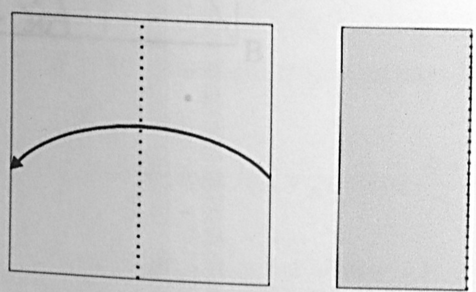
Dosadíme-li výsledek do poměru $a : b$, dostáváme poměr $a : \sqrt{2}a$, který je roven poměru $1:\sqrt{2}$.

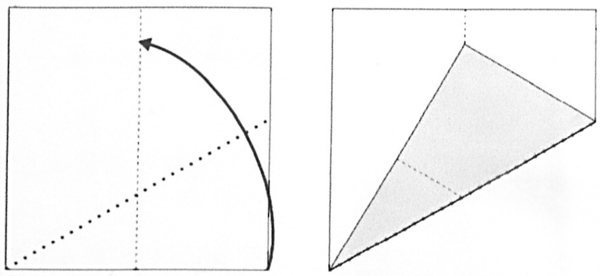
Papír formátu A je jeden z mála předmětů všední reality, u kterého se žáci setkají s odmocninou ze dvou. Skutečnost, že papír formátu A má skutečně strany v poměru $1:\sqrt{2}$, mohou žáci ověřit i pomocí překládání papíru. Jednou z možností je využít vlastnosti úhlopříčky čtverce. V 8. ročníku žáci probírají Pythagorovu větu. V rámci této látky zjistí, že úhlopříčka čtverce s délkami stran a měří $\sqrt{2}\,a$. Vymodelují-li čtverec a jeho úhlopříčku, mohou přeložením lehko ověřit, že tato úhlopříčka je stejně dlouhá jako delší strana papíru.



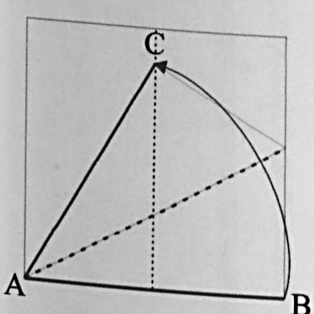
4.2.2. Úhel 30°

Než začnu rozebírat jednotlivé návody, vysvětlím jeden krok, který není na první pohled příliš zřejmý a v návodech se často objevuje. Jde o postup, jak vymodelovat úhel o velikosti 30°.

1) 

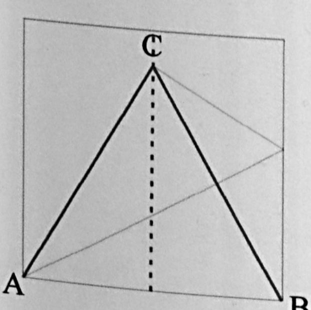
2) 

Nejprve vymodelujeme osu dolní strany čtverce (stejně postupujeme u obdélníku). Poté použijeme Pátý axiom (Jsou-li dány dva body a přímka, můžeme složit hranu tak, aby jeden bod ležel na přímce a zároveň tato hrana procházela druhým bodem.) - přeložíme papír tak, aby hrana procházela levým dolním rohem a pravý dolní roh padl na hranu z předcházejícího kroku. Výsledná hrana svírá s dolní stranou čtverce úhel o velikosti 30°.

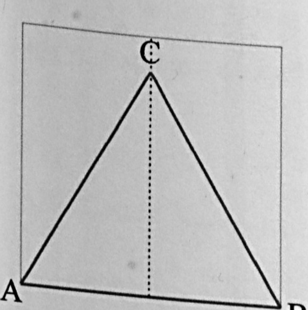


Levý dolní roh čtverce označíme A, pravý dolní roh označíme B a obraz bodu B označíme C.

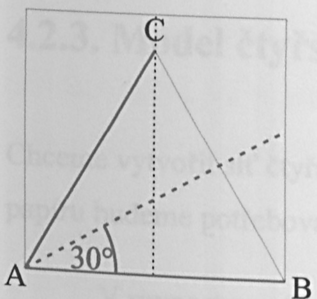
Protože úsečka AC je obrazem úsečky AB, platí $|AB| = |AC|$.



Bod C leží na ose úsečky AB, proto platí $|AC| = |BC|$.

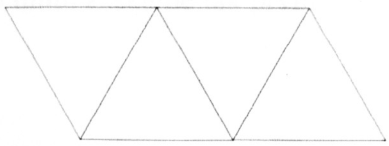


Trojúhelník ABC je rovnostranný. Všechny jeho vnitřní úhly mají velikost 60°.



Zkoumaná hrana je osou úhlu BAC. Svírá tedy s úsečkou AB úhel 30°.

4.2.3. Model čtyřstěnu z jednoho listu papíru



Chceme vytvořit síť čtyřstěnu a tážeme se, jaký formát papíru budeme potřebovat?

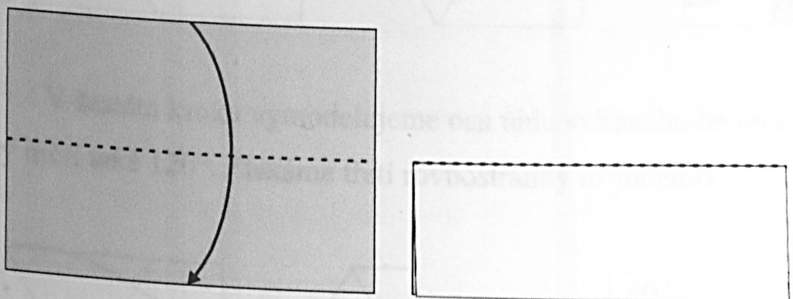
V rovnostranném trojúhelníku platí $v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Papír musí mít výšku v_a a šířku $2{,}5a$.

Jeho strany tedy musí být v poměru $\frac{\sqrt{3}}{2} : 2{,}5$, což je přibližně $1 : 2{,}89$.

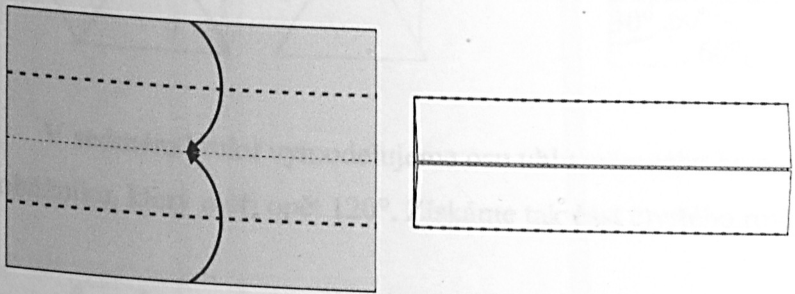
Formát papíru A má strany v poměru $1 : \sqrt{2}$, což je přibližně $1 : 1{,}41$. Zmenšíme-li na polovinu kratší stranu papíru, budou strany v poměru $1 : 2{,}82$, což téměř odpovídá našemu požadavku.

K úpravě poměru stran papíru slouží první dva kroky následujícího postupu.

1)



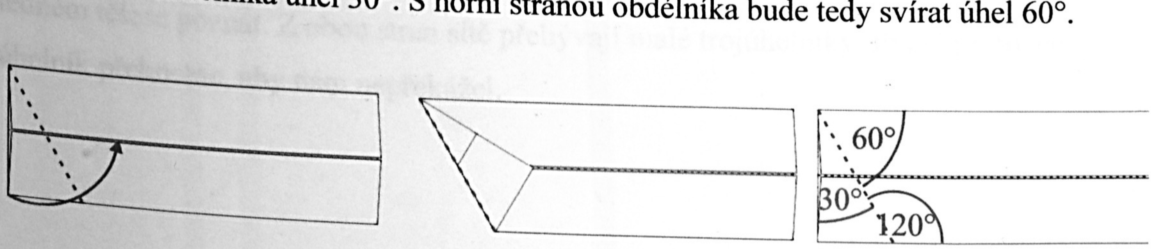
2)



Po těchto úpravách pracujeme s dvojitým papírem, model tedy bude pevnější. Také jsme předem vymodelovali osu pásu, kterou budeme v dalším potřebovat.

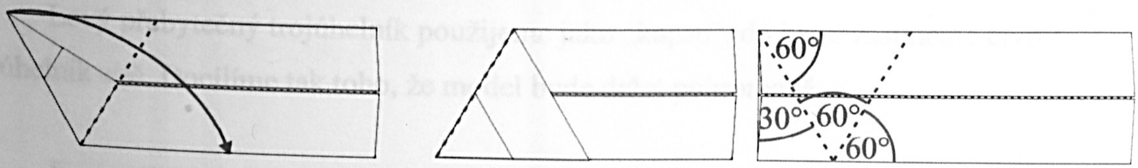
Ve třetím kroku vymodelujeme výše popsaným způsobem přímku, která bude svírat s levou stranou obdélníka úhel 30°. S horní stranou obdélníka bude tedy svírat úhel 60°.

3)



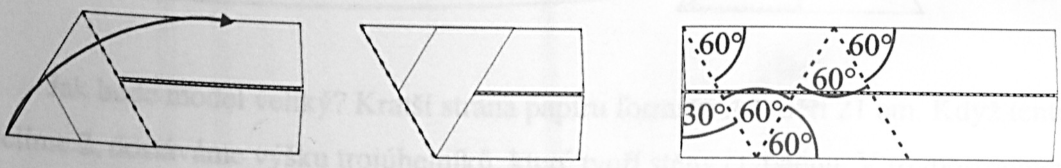
Po třetím kroku máme lichoběžník, v němž levá a dolní strana svírají úhel 120° (střídavé úhly). Ve čtvrtém kroku vymodelujeme osu tohoto úhlu. Získáme tak první rovnostranný trojúhelník.

4)



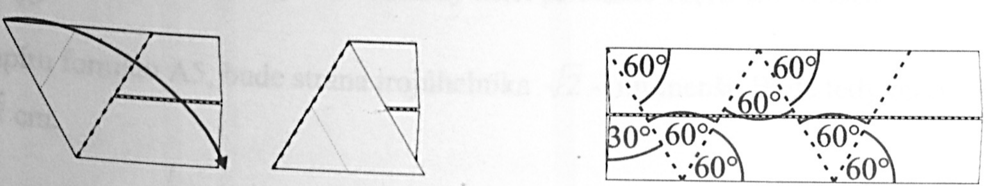
V pátém kroku vymodelujeme osu úhlu svíraného levou a horní stranou lichoběžníku, který měří opět 120°. Získáme druhý rovnostranný trojúhelník.

5)



V šestém kroku vymodelujeme osu úhlu svíraného levou a dolní stranou lichoběžníku, který měří také 120°. Získáme třetí rovnostranný trojúhelník.

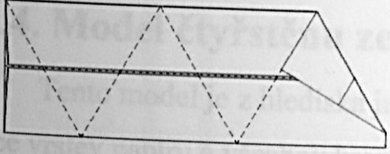
6)



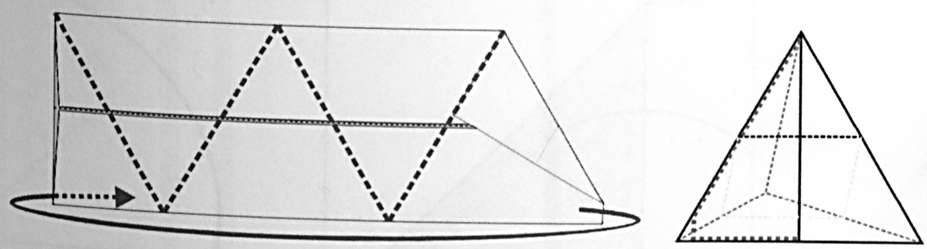
V sedmém kroku vymodelujeme osu úhlu svíraného levou a horní stranou lichoběžníku, který měří opět 120°. Získáme tak část čtvrtého rovnostranného trojúhelníka.

7)

Nyní máme připravenou síť čtyřstěnu. Čtvrtý trojúhelník není celý, ale to nebude na výsledném tělese poznat. Z obou stran sítě přebývají malé trojúhelníky. Pravý přebytečný trojúhelník přehneme, aby nám nepřekážel.

8) 

Levý přebytečný trojúhelník použijeme jako „kapsu“, do které zasuneme čtvrtý trojúhelník sítě. Docílíme tak toho, že model bude držet pohromadě.

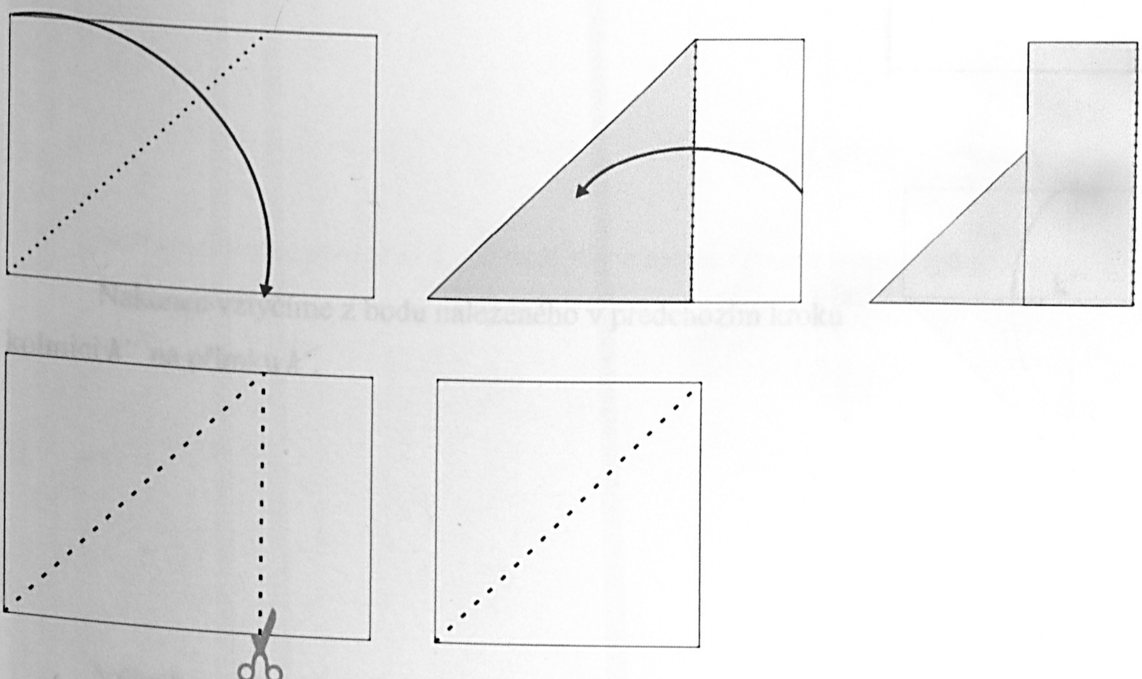
9) 

Jak bude model veliký? Kratší strana papíru formátu A4 měří 21 cm. Když tento údaj vydělíme 2, dostáváme výšku trojúhelníků, které tvoří stěny čtyřstěnu. V rovnostranném trojúhelníku platí $v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Dosadíme-li velikost výšky 10,5 cm, získáme údaj $a = \frac{21}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{3}$. Strana trojúhelníku tedy měří přibližně 12,12 cm. Budeme-li skládat čtyřstěn z papíru formátu A5, bude strana trojúhelníka $\sqrt{2}$-krát menší. Bude tedy měřit přibližně 8,57 cm.

4.2.4. Model čtyřstěnu ze dvou listů papíru

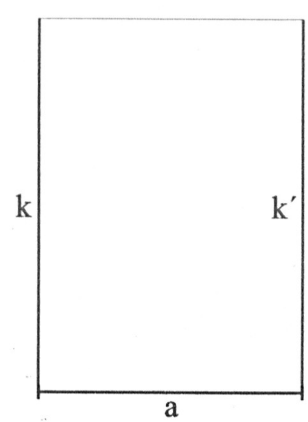
Tento model je z hlediska jeho použití při vyučování pevnější. Stěny jsou tvořeny z více vrstev papíru a všechny hrany jsou navzájem spojené.

Nejprve je nutné překládáním vymodelovat 2 čtverce. Je více možností jak postupovat. Následující postup zná většina žáků.

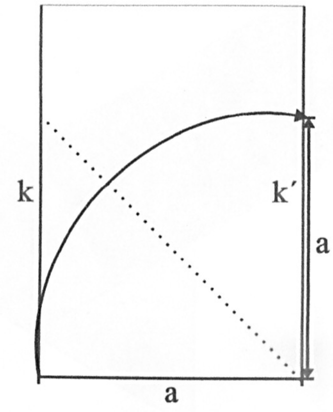


Podle mých zkušeností však ne všichni žáci dokáží vysvětlit, proč tímto postupem získáme čtverec. Tento postup je podobný běžné konstrukci čtverce, kterou znají z geometrie.

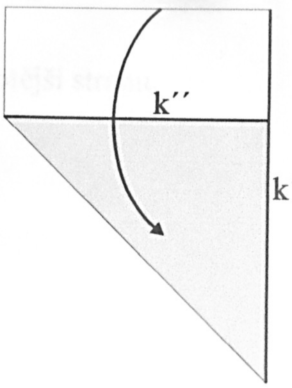
Samotný list papíru má tvar obdélníku a je proto možno vnímat jeho hrany jako úsečku (a), z jejíchž krajních bodů jsou vztyčeny kolmice (k a k').



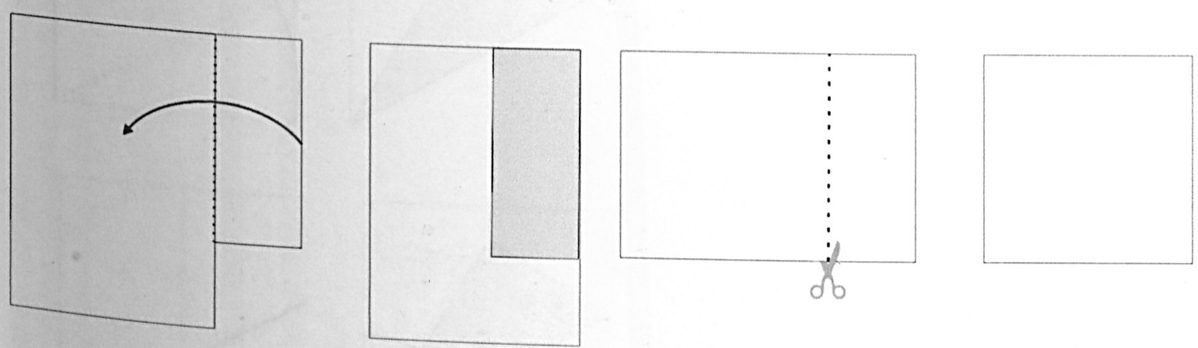
Přeložení podle osy úhlu svíraného úsečkou a a kolmicí k', můžeme vnímat jako obdobu nanesení velikosti úsečky a na kolmici k' pomocí kružíka.



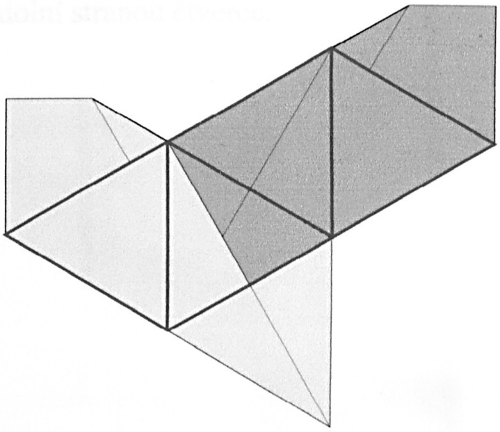
Nakonec vztyčíme z bodu nalezeného v předchozím kroku kolmici k'' na přímku k'.



Výhodou následujícího postupu je, že na výsledném čtverci nebude vymodelována úhlopříčka. Tento postup je možné využít k netradiční definici čtverce jako průnik dvou stejně širokých navzájem kolmých pásů (Obdobně je možné definovat kosočtverec, obdélník a rovnoběžník).

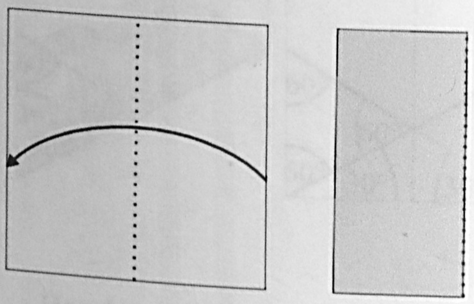


Cílem této skládanky je vymodelování obdobné sítě jako u čtyřstěnu z jednoho listu papíru. Je však složená ze dvou listů papíru a je na ní více spojovacích částí.



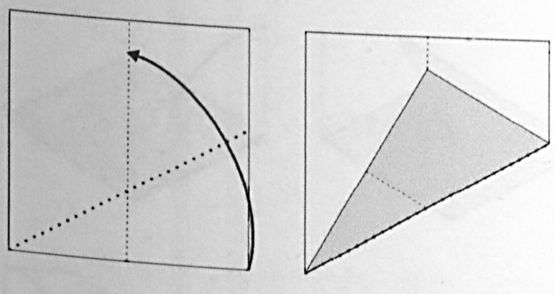
Nalezneme osu, podle níž se zobrazí jedna strana čtverce na protější stranu.

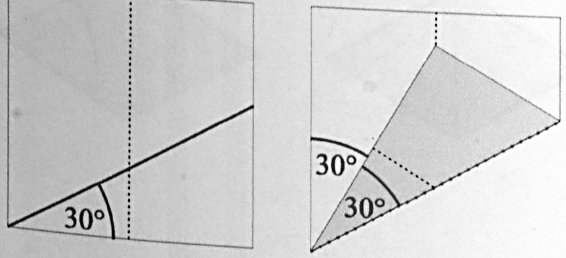
1)



Vymodelujeme úhel 30°.

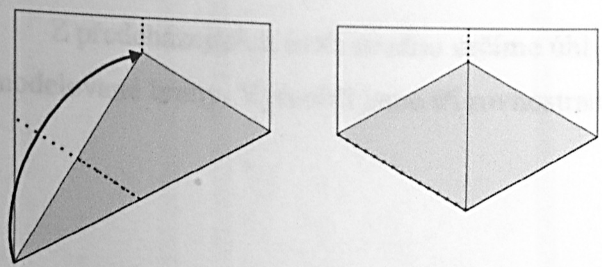
2)



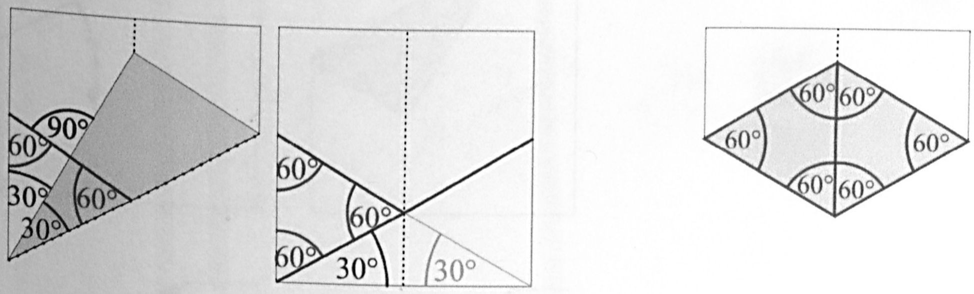


Vymodelujeme osu úsečky, která byla původně dolní stranou čtverce.

3)

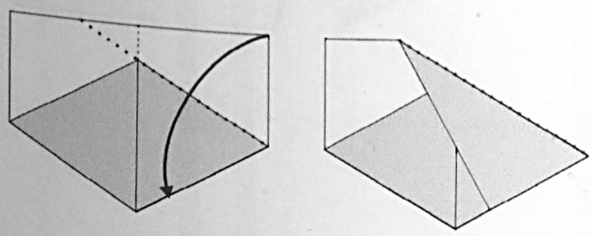


Dopočítáme-li ostatní úhly, zjistíme, že jsme vytvořili první rovnostranný trojúhelník.

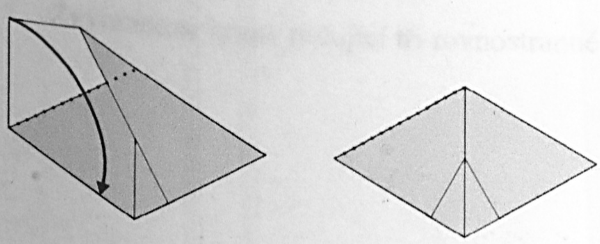


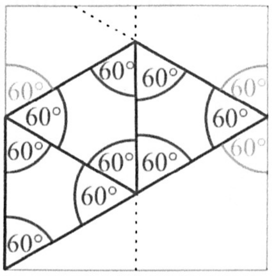
Horní vrstvy papíru tvoří dva rovnostranné trojúhelníky. Přeložíme podle nich zbývající část papíru.

4)



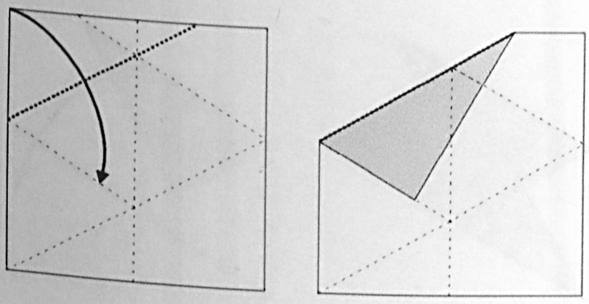
5)

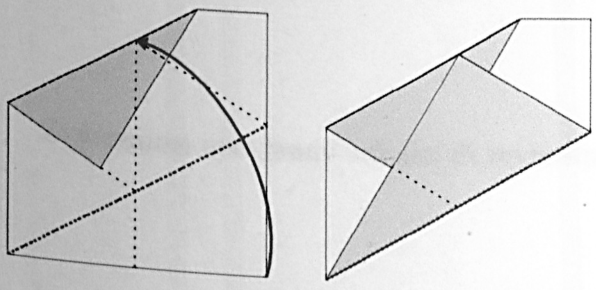




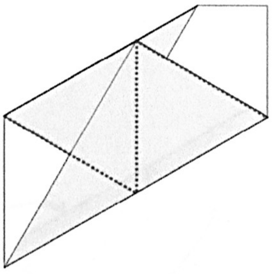
Z předcházejících úvah snadno určíme úhly, které svírají vymodelované hrany. Vytvořili jsme tři rovnostranné trojúhelníky.

Papír v dalších krocích složíme následujícím způsobem.

1) 

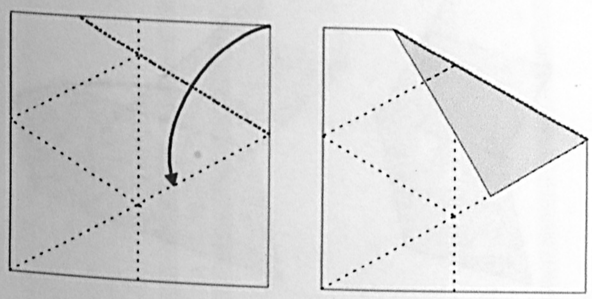
2) 

Zvýrazníme hrany určující tři rovnostranné trojúhelníky.

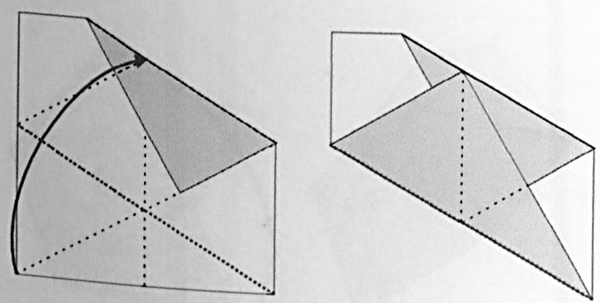


Opakujte postup skládání s druhým čtvercem. Konečné složení musíme provést zrcadlově.

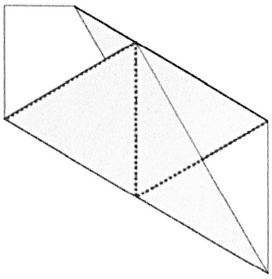
1)



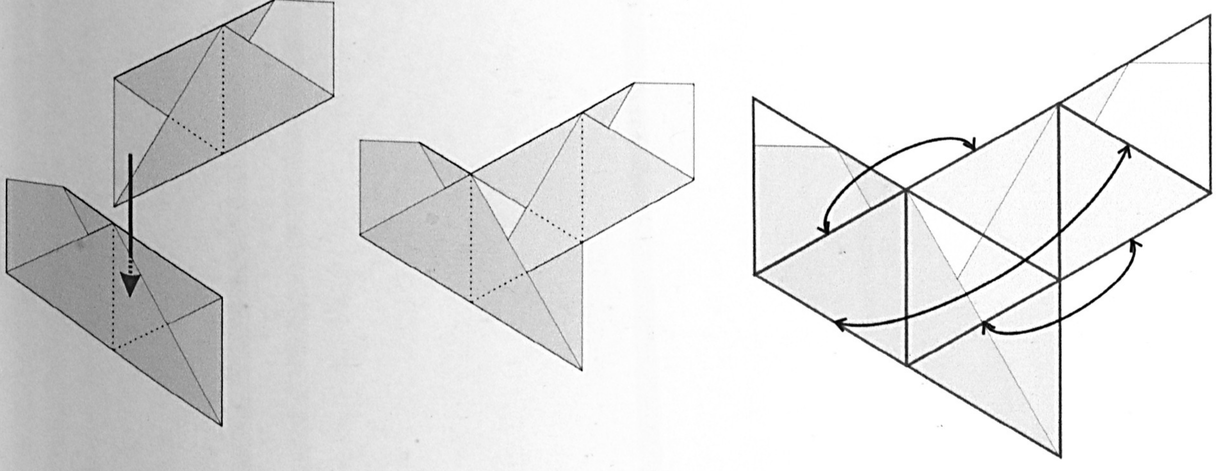
2)



Zvýrazníme opět hrany určující tři rovnostranné trojúhelníky.

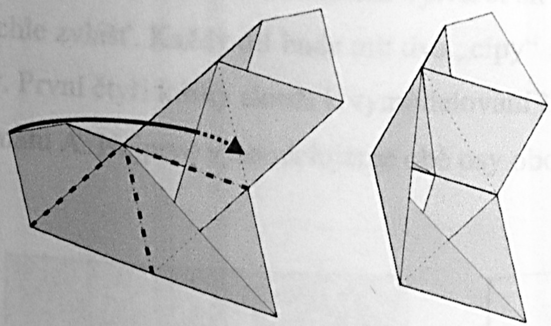


Oba díly skládanky spojíme v jednu síť čtyřstěnu.

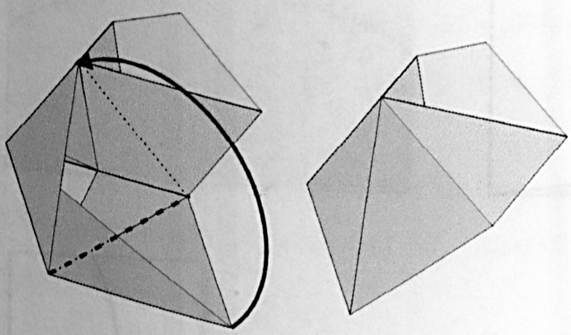


Složení čtyřstěnu je patrné z následujícího schématu:

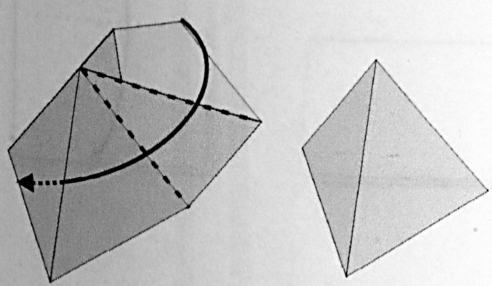
1)



2)

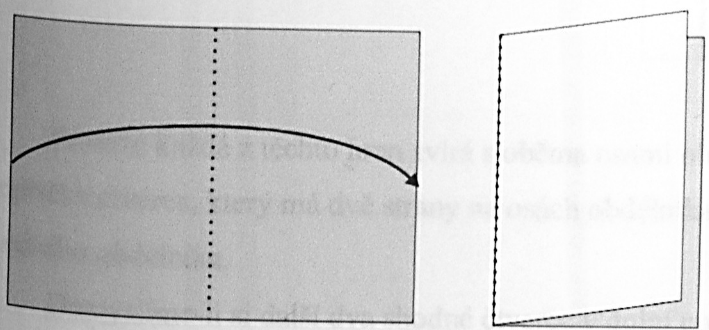


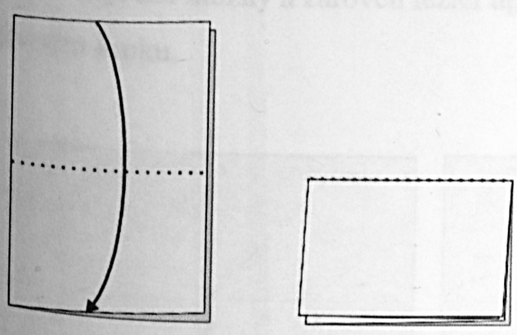
3)



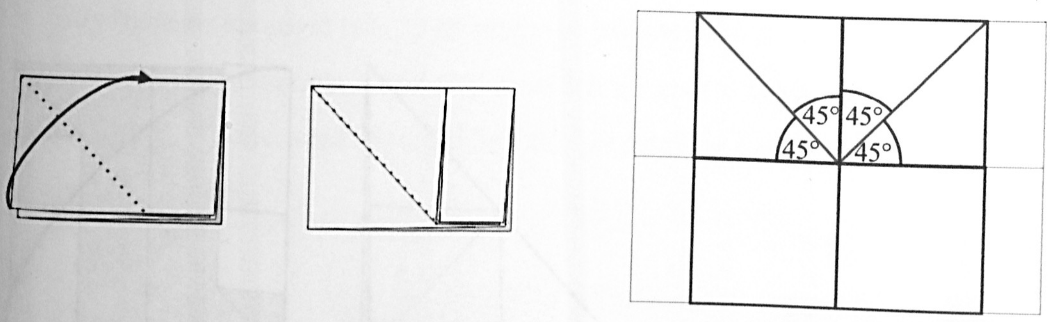
4.2.5. Model krychle

V této skládance nebudeme vytvářet síť tělesa, ale vymodelujeme každou stěnu krychle zvlášť. Každý díl bude mít dva „cípy“ a dvě „kapsy“ tak, aby se dal spojit s ostatními díly. První čtyři kroky slouží k vymodelování čtverce umístěného uprostřed listu papíru formátu A. Nejprve vymodelujeme obě osy obdélníka.

1) 

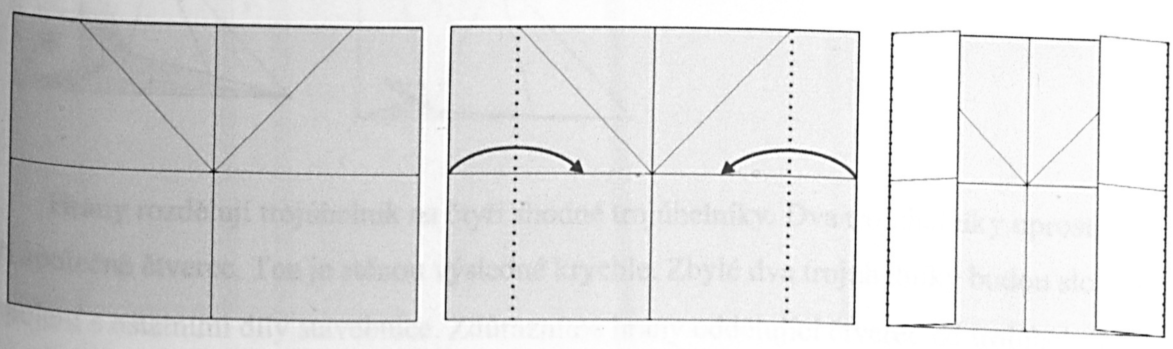
2) 

Ve třetím kroku vymodelujeme osy úhlů, které svírají osy obdélníka.

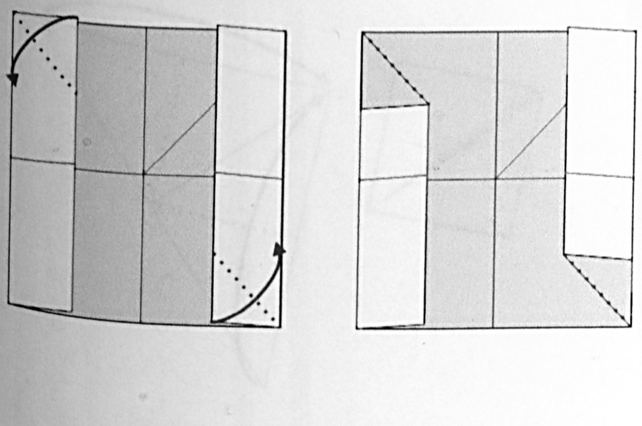
3) 

Protože každá z těchto hran svírá s oběma osami obdélníka úhel velikosti 45°, je to úhlopříčka čtverce, který má dvě strany na osách obdélníka a jednu stranu na straně původního obdélníka.

Domyslíme-li si další dva shodné čtverce v dolní polovině papíru, dostáváme hledaný čtverec – největší možný a zároveň ležící uprostřed listu papíru. Ten vymodelujeme ve čtvrtém kroku.

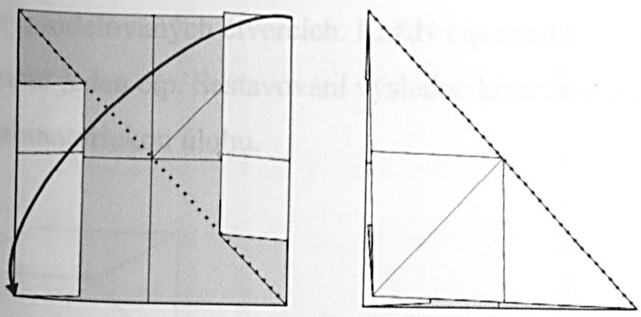
4) 

V pátém kroku si připravíme rohy skládanky na šestý krok.

5) 

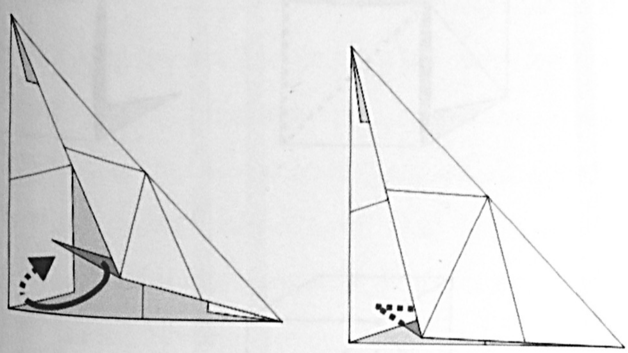
V šestém kroku přeložíme čtverec podle úhlopříčky. Dostaneme tedy rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník.

6)



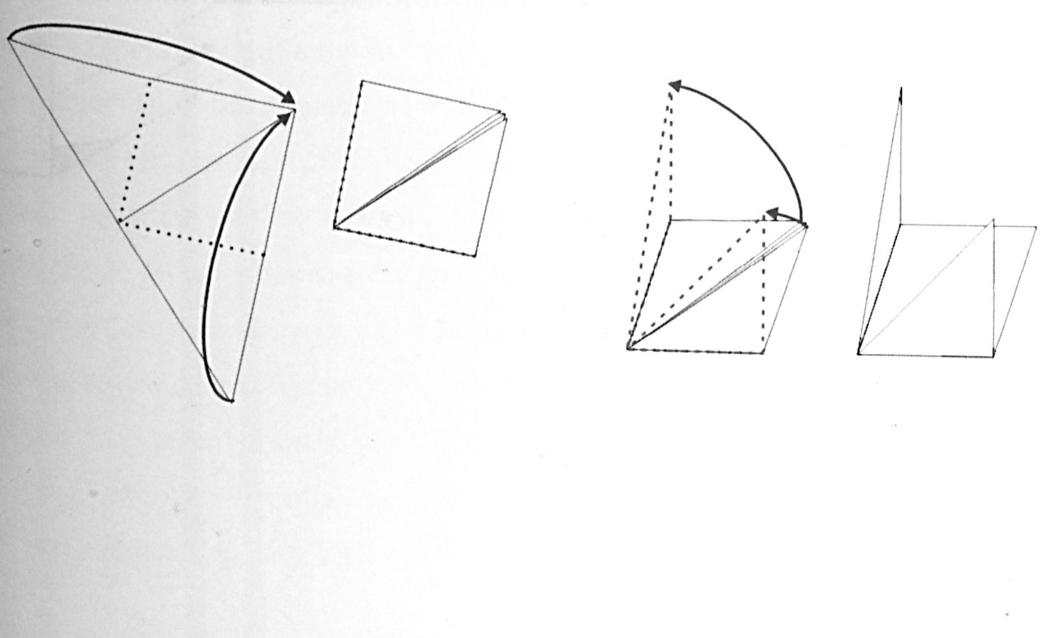
Zahákneme do sebe horní a dolní trojúhelník, aby se skládanka nerozevírala.

7)



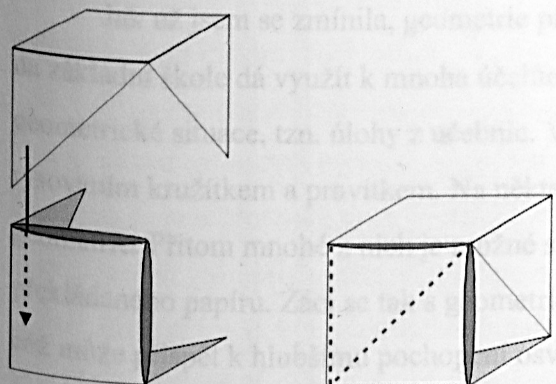
Hrany rozdělují trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky. Dva trojúhelníky uprostřed tvoří společně čtverec. Ten je stěnou výsledné krychle. Zbylé dva trojúhelníky budou sloužit ke spojení s ostatními díly stavebnice. Zdůrazníme hrany oddělující čtverec od trojúhelníků a trojúhelníky zdvihneme.

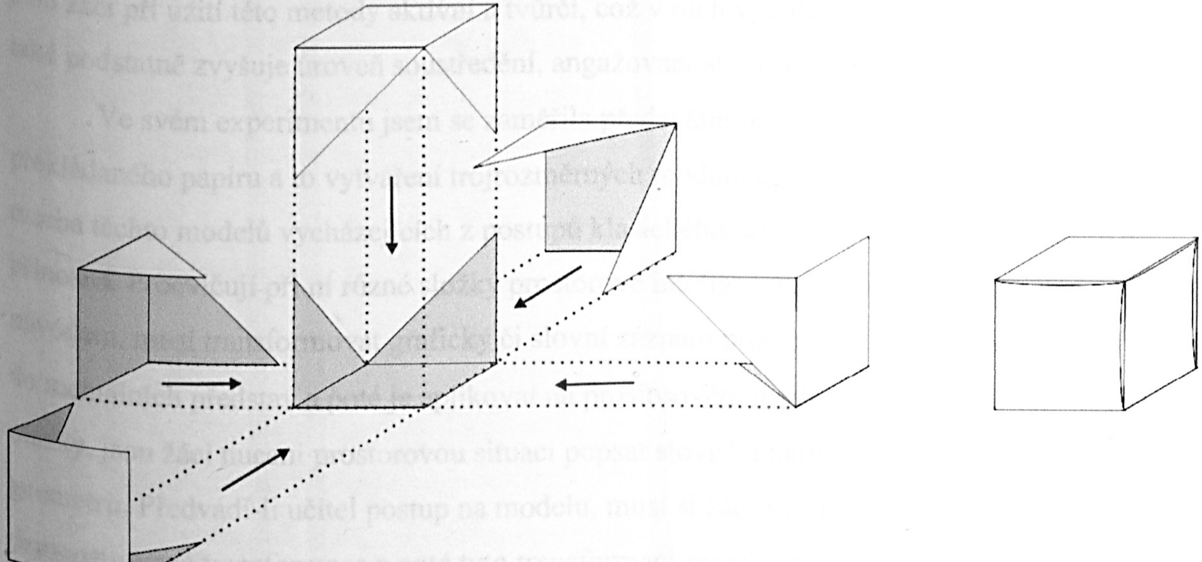
8)



Stejným způsobem vyrobíme dalších pět dílů tvořících zbývající stěny krychle.

Díly budeme spojovat tak, že zasunujeme trojúhelníkové cípy do kapes ve vymodelovaných čtvercích. Každý cíp musí být zasunut v kapse. Do každé kapsy musí být zasunut jeden cíp. Sestavování výsledné krychle představuje pro žáky zajímavou kombinatorickou úlohu.





5. Projekt

5.1. Užití geometrie překládaného papíru ve výuce matematiky na základní škole

Jak už jsem se zmínila, geometrie překládaného papíru se v hodinách matematiky na základní škole dá využít k mnoha účelům. Můžeme pomocí ní řešit například klasické geometrické situace, tzn. úlohy z učebnic. V současnosti jsou tyto úlohy řešeny převážně rýsováním kružítkem a pravítkem. Na některých školách se k jejich řešení užívá také Cabri geometrie. Přitom mnohé z nich je možné snadno a velice názorně řešit metodou překládaného papíru. Žáci se tak s geometrickými útvary a pojmy setkají v jiném prostředí, což může přispět k hlubšímu pochopení osvojovaných poznatků. Další výhodou této metody je, že žáci zapojují více smyslů (geometrickou situaci vnímají i hmatem), což podle současných pedagogických teorií vede u mnohých žáků k lepšímu pochopení učiva. Navíc jsou žáci při užití této metody aktivní a tvůrčí, což v nich vyvolává pozitivní motivaci. To také podstatně zvyšuje úroveň soustředění, angažovanost a vytrvalost žáků.

Ve svém experimentu jsem se zaměřila především na další možnosti využití metody překládaného papíru a to vytváření trojrozměrných modelů geometrických těles. Samotná tvorba těchto modelů vycházejících z postupů klasického origami, je pro žáky zajímavá a přínosná. Procvičují při ní různé složky prostorové inteligence. Pokud pracují s tištěným návodem, musí transformovat grafický či slovní záznam prostorových informací do mentálních představ a poté je aplikovat na prostorovém modelu. Klade-li učitel vhodné otázky, jsou žáci nuceni prostorovou situaci popsat slovně a najít její paralelu v dvojrozměrné geometrii. Předvádí-li učitel postup na modelu, musí si žáci vytvořit mentální představu demonstrované transformace a poté tuto transformaci provést na svém modelu. Dalším přínosem je upevnění a hlubší pochopení geometrických pojmů, k němuž dojde díky používání těchto pojmů v netradičním prostředí. Vyrobené modely se dají dále využít. Žáci na nich mohou objevovat a zkoumat vlastnosti geometrických těles. V mém experimentu modely využijeme k úvodu do problematiky řezů těles rovinou. K tomuto účelu jsem připravila v Cabri geometrii pracovní soubory, v nichž žáci posouváním bodů po hranách tělesa určují rovinu řezu. K té se jim ve vedlejším okně zobrazuje skutečný tvar řezu a rozměry jeho stran a úhlů. Předpokládám, že žáci, kteří na základní škole absolvují „hravý“ úvod do problematiky řezů těles rovinou, budou na střední škole k této látce přistupovat sebevědoměji a s menšími obavami. Látka by pro ně také měla být snazší, protože již budou mít utvořen určitý prekoncept pojmu řez tělesa rovinou.

Domnívám se, že fyzická manipulace s trojrozměrnými geometrickými tělesy je pro žáky velice důležitá. V běžné školní praxi je však zanedbávána. Během svého působení na ZŠ Odolena Voda jsem dospěla k názoru, že vědomosti týkající se geometrických těles má většina žáků pouze na formální úrovni. Například, když jsme v šestém ročníku začínali probírat objem kvádru, žáci tvrdili, že už tuto látku ovládají z prvního stupně ZŠ. Většina z nich byla skutečně schopna objem kvádru vypočítat. Rozdala jsem žákům sady krychliček. Dohodli jsme se, že tyto krychličky pro nás budou jednotkami objemu. Zadávala jsem různá přirozená čísla a žáci měli sestavovat co nejvíce kvádrů s daným objemem. Mnou stanoveným cílem činnosti bylo především upevnit pojem objemu, procvičit rozklad čísel na součin v nové situaci. Dalším cílem byl trénink kombinačních schopností. Všichni žáci úlohu brzy pochopili. Většině žáků po několika úkolech došla souvislost s vzorcem pro objem kvádru a někteří úlohu začali řešit početně (na sestavování kvádrů jsem však trvala). Pro většinu nebyl problém ani v hledání všech možností. Překvapivé pro mě bylo to, že největší obtíže měli zpočátku takřka všichni se zapisováním rozměrů nalezených kvádrů. Někteří si vůbec nevěděli rady. Většina zapisovala špatně poslední rozměr. Myslím, že je to způsobeno přílišným důrazem na teoretickou výuku a nedostatečnou fyzickou zkušeností s tělesy.

5.2. Experiment

5.2.1. Cíl experimentu

Cílem experimentu je rozvoj geometrických představ o trojrozměrných tělesech a to nejprve při skládání modelů těles a poté na úlohách zabývajících se problematikou řezů krychle a čtyřstěnu rovinou. Experiment se v tomto smyslu štěpil na dvě části, které se problematikou prostorové představivosti zabývaly z různých přístupů. V první řadě jsem se pokusila ověřit rozvoj žákovských dovedností při tvorbě modelů těles s využitím postupů geometrie překládaného papíru. Zjišťovala jsem předpoklady žáků 2. stupně základní školy při skládání modelů krychle a čtyřstěnu. V další části jsem se zaměřila na některé otázky související s rozvojem dovedností konstruovat řezy těles rovinou. Vím, že toto téma působí žákům značné problémy i na středních školách. Přitom jde o situace, s nimž se poměrně často setkávají ve svém praktickém životě. Zároveň chci připomenout předpoklad didaktiky matematiky, podle něhož úlohy zaměřené na řezy těles rovinou velmi účinně rozvíjejí prostorovou představivost. Většinou jsou úlohy koncipovány tak, že žáci musí určit mnohoúhelník, který je průnikem roviny a stěn příslušného tělesa. Takové úlohy jsou poměrně složité a mají s nimi problémy i studenti středních škol. Já jsem se v experimentu rozhodla pro jiný, v podstatě obrácený přístup. Svým způsobem jde o inverzní mentální operaci. Rozhodla jsem se, že v první fázi budeme vycházet z řezu a budeme hledat rovinu, jejíž řez s daným tělesem je předem definován. Definice bude spočívat v tom, že příslušný mnohoúhelník bude vystřižený v listu papíru a žáci se budou snažit nasadit vystřiženou část listu papíru na model tělesa, tak aby vytvořili situaci řezu – tedy tak, že příslušný mnohoúhelník bude ležet na povrchu tělesa.

5.2.2. Koncepce experimentu

Nejprve žáci absolvují úvodní motivační cvičení, v němž se nenáročným způsobem setkají s problematikou řezů těles rovinou. Dostanou dřevěný kvádr a čtvrtku a mají za úkol vymodelovat část střechy s komínem. Střechu budou nejprve moci vytvořit s libovolným sklonem, poté jim bude sklon střechy zadán. V každé části žáci zapíší tvar a rozměry otvoru, který museli do čtvrtky vystřihnout.

Ve druhé části žáci vytvoří modely těles překládáním papíru. Nejprve vymodelují krychli podle tištěného návodu. Poté budou modelovat čtyřstěn na základě slovních instrukcí, ve kterých bude postup popsán jako hledání os souměrnosti geometrických útvarů.

V další části žáci určí vzájemnou polohu roviny a tělesa tak, aby řezem byl trojúhelník. Trojúhelník narýsují na čtvrtku a vystřihnou. Poté čtvrtku s vystřiženým otvorem nasadí na těleso tak, aby přesně seděla. Tím zjistí vzájemnou polohu roviny a tělesa. Tímto způsobem postupně prozkoumají, které typy trojúhelníků (rovnostranný, rovnoramenný, obecný; ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý) mohou být řezem čtyřstěnu a které řezem krychle. Dále se budou zabývat otázkou možné velikosti různých typů trojúhelníků (pouze u vybraných případů). Své poznatky zapíší a posléze ověří pomocí počítačového programu Cabri geometrie. Zde si v předem připravených pracovních souborech vyzkouší, je-li skutečně možné najít rovinu ke všem jimi předpokládaným řezům a upřesní si své předpoklady o možných velikostech trojúhelníků.

Další část bude podobná přecházející. Žáci obdobným způsobem prozkoumají vzájemnou polohu roviny a tělesa v případech, kdy je řezem čtyřúhelník. Vyzkouší, které typy čtyřúhelníků (čtverec, obdélník, lichoběžník, rovnoběžník, obecný čtyřúhelník) mohou být řezem čtyřstěnu a které řezem krychle. Zamyslí se nad možnými velikostmi čtyřúhelníků (pouze u vybraných případů). Své poznatky opět zapíší a posléze ověří pomocí Cabri geometrie.

Nakonec v připravených pracovních souborech Cabri geometrie prozkoumají další možnosti řezů. Vyberou si jeden konkrétní případ, kdy je řezem krychle rovinou pětiúhelník, a jeden případ, kdy je řezem šestiúhelník. Narýsují je na čtvrtku, vystřihnou a zkusí nasadit na krychli.

5.2.2.1. Pracovní soubory vytvořené v Cabri geometrii

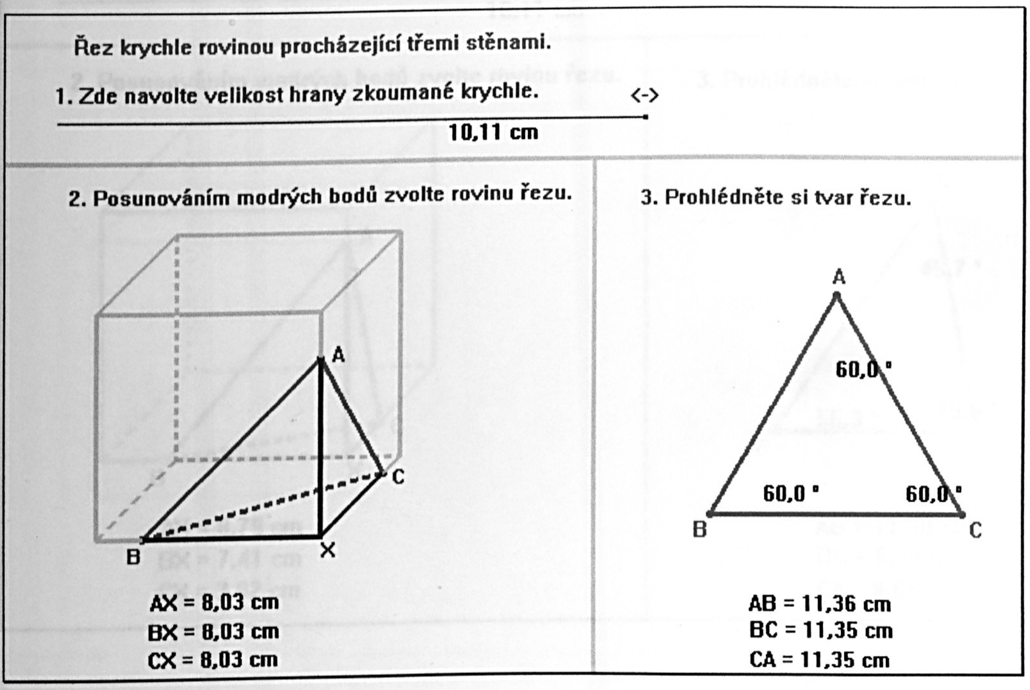
V Cabri geometrii jsem pro potřeby experimentu připravila pracovní soubory (viz přílohy: 1. Krychle – trojúhelník, 2. Krychle – rovnoběžník, 3. Krychle – lichoběžník, 4. Krychle – pětiúhelník, 5. Krychle – šestiúhelník, 6. Čtyřstěn – trojúhelník, 7. Čtyřstěn – čtyřúhelník). V horní části obrazovky si žák nastaví rozměry svého modelu, aby bylo možné nalezené řezy vyzkoušet na skutečném modelu. V levé polovině obrazovky je vždy dvourozměrný obraz tělesa. Žáci zde posunováním tří bodů po hranách tělesa určují rovinu řezu. Části hran jsou různě zbarveny podle toho, v které části prostoru vzhledem k rovině řezu jsou. Pod obrazem tělesa se vypisují vzdálenosti posunovaných bodů od určeného vrcholu. K zvolené rovině se jim v pravé polovině obrazovky zobrazuje skutečný tvar řezu a rozměry jeho stran a úhlů. Protože tato verze Cabri geometrie neumožňuje modelování trojrozměrných situací, jsou rozměry řezu propočítávány pomocí analytické geometrie. U řezů krychle to bylo relativně jednoduché, protože body určující rovinu řezu se pohybují po osách souřadnicové soustavy nebo po přímkách s nimi rovnoběžných. U řezů čtyřstěnu byly výpočty mnohem složitější.

Žáci pomocí těchto pracovních souborů mohou vyzkoušet všechny možné řezy. Mohou tak prozkoumat jaké tvary a rozměry mohou řezy daného tělesa mít. Vidí zde zároveň znázornění řezu na dvojrozměrném obrazu tělesa a skutečný tvar řezu, což může přispět k hlubšímu pochopení látky. Vybrané řezy mohou žáci narýsovat a zkusit nasadit na těleso, aby měli zkušenost s řezem co nejreálnější.

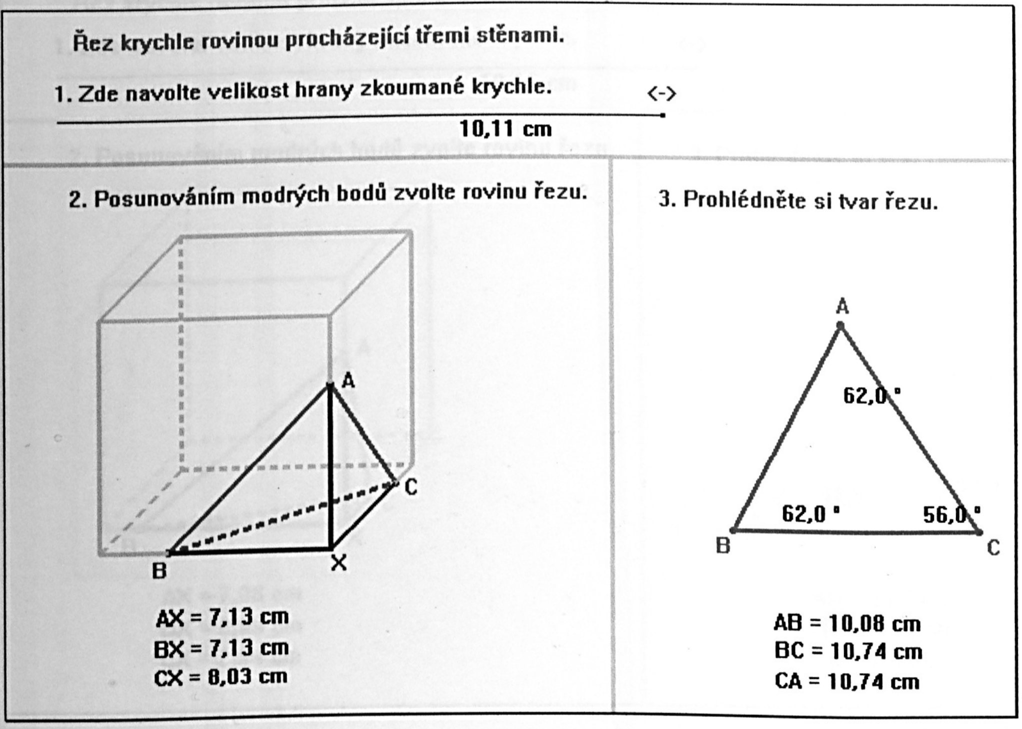
Řezy jsou rozděleny do různých souborů podle toho, jaký geometrický útvar vznikne:

1. Trojúhelník - řez krychle rovinou procházející třemi stěnami krychle

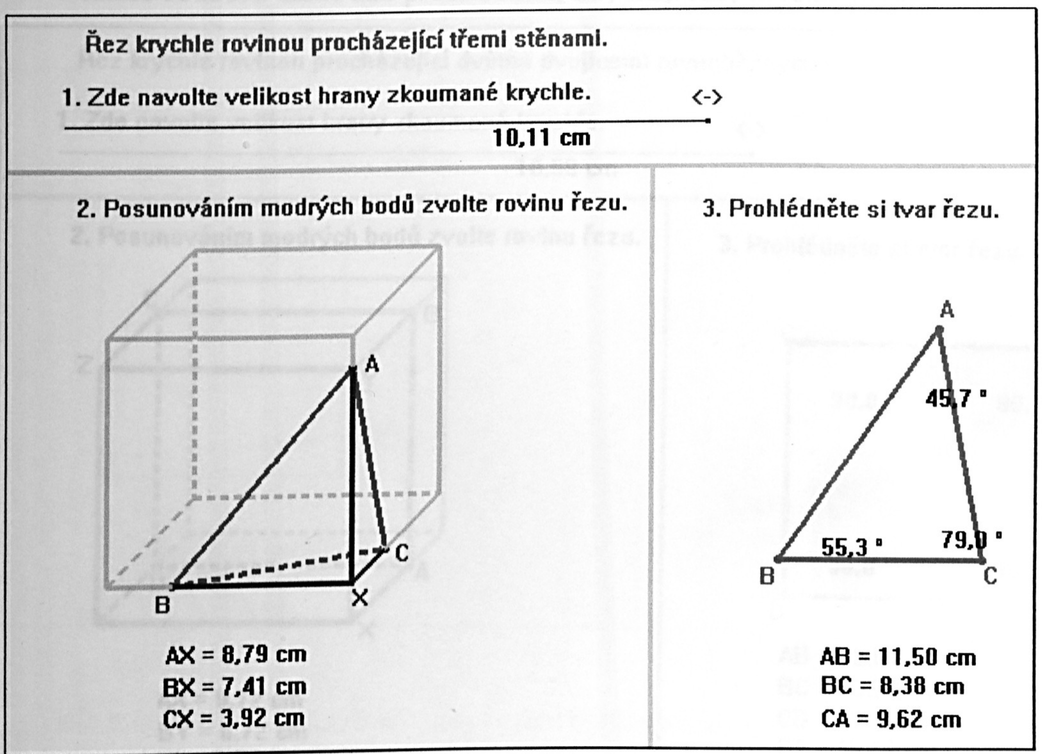
V tomto souboru žák může prozkoumat, kdy mají řezy krychle rovinou tvar **rovnostranného trojúhelníka**.

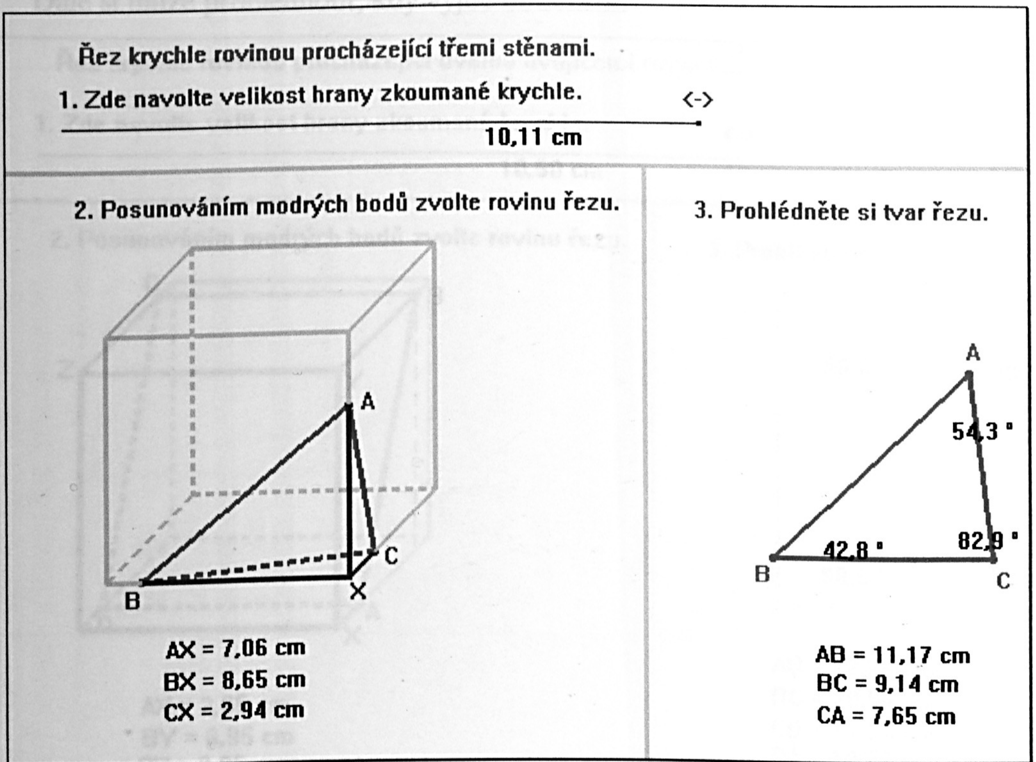


Dále si může prohlédnout, kdy řezem je **rovnoramenný trojúhelník**.



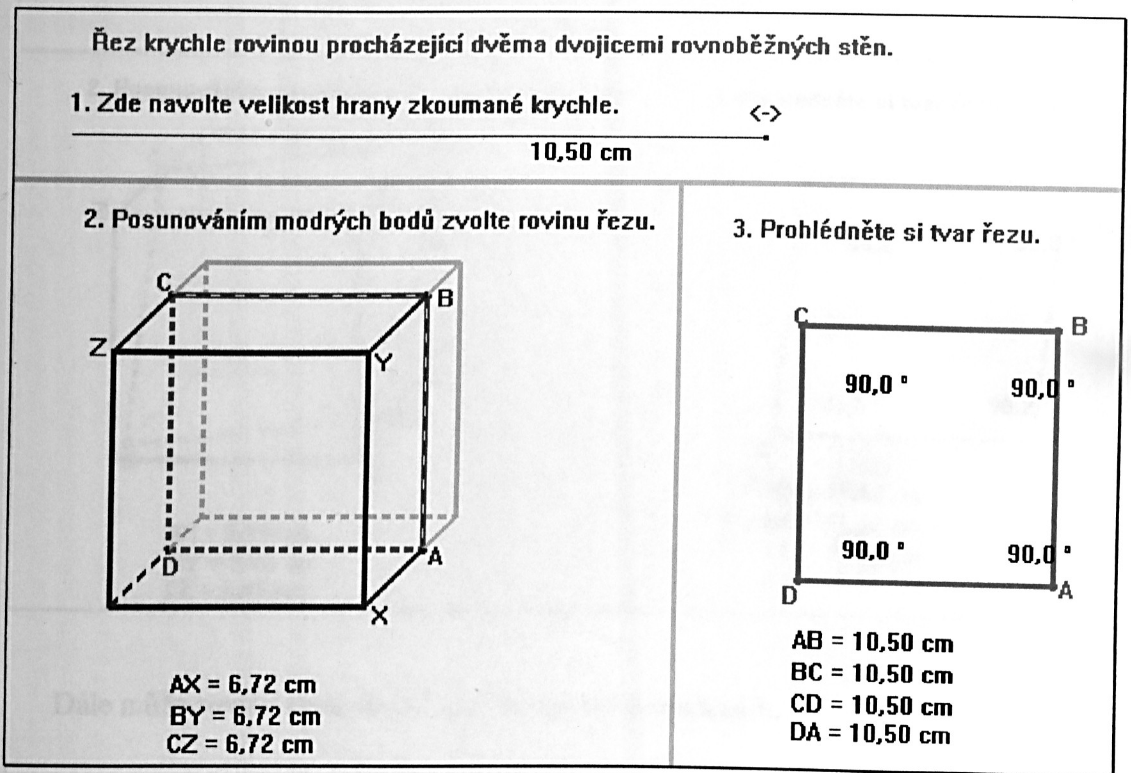
V dalším může zkoumat různé **obecné trojúhelníky.**



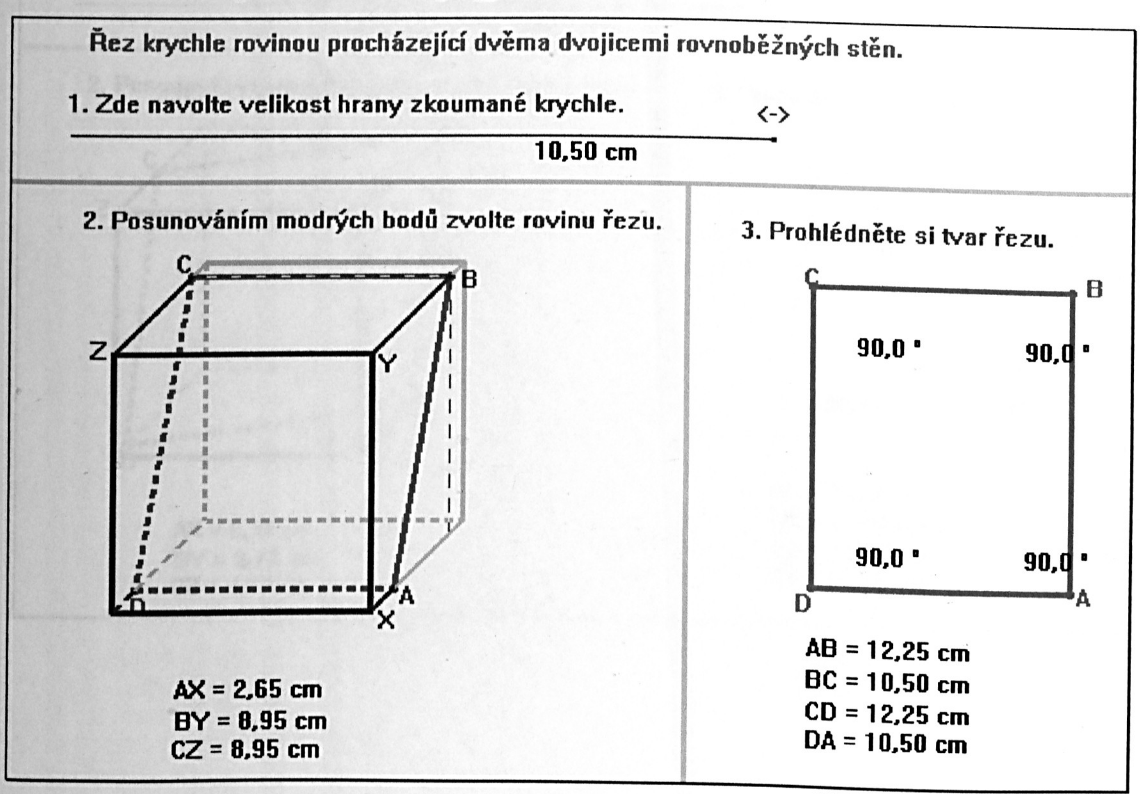


2. Rovnoběžník - řez krychle rovinou procházející dvěma dvojicemi rovnoběžných stěn krychle

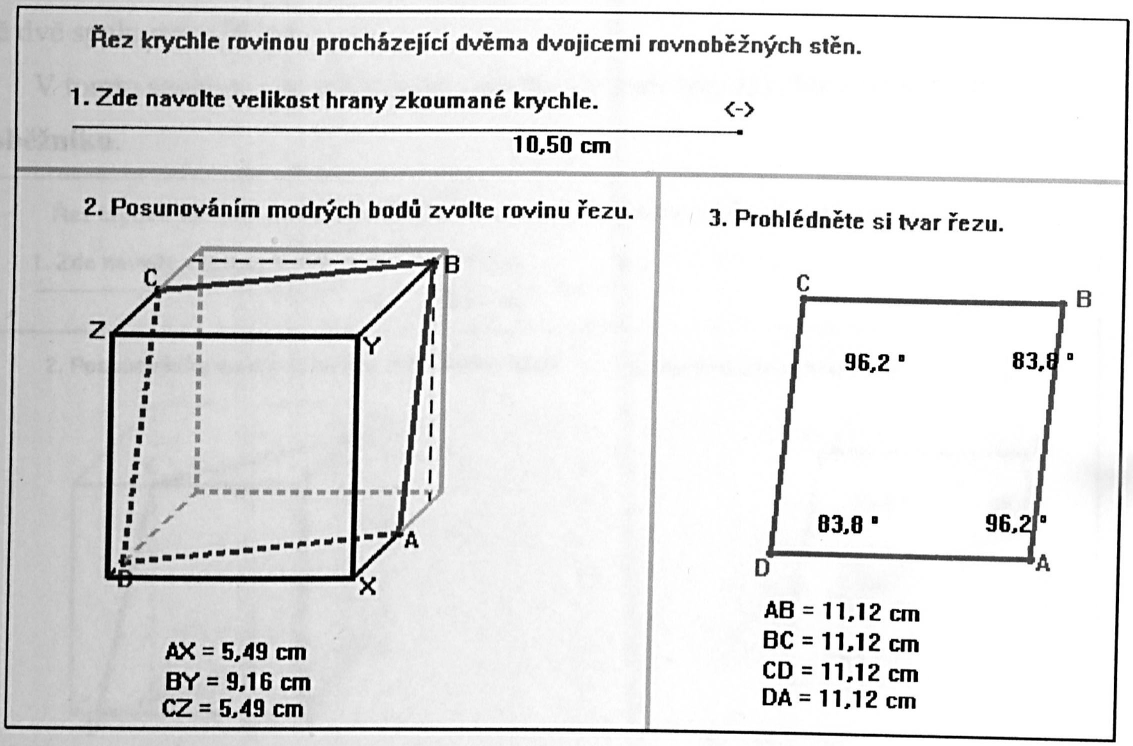
V tomto souboru může žák prozkoumat, kdy mají řezy krychle rovinou tvar **čtverce**.



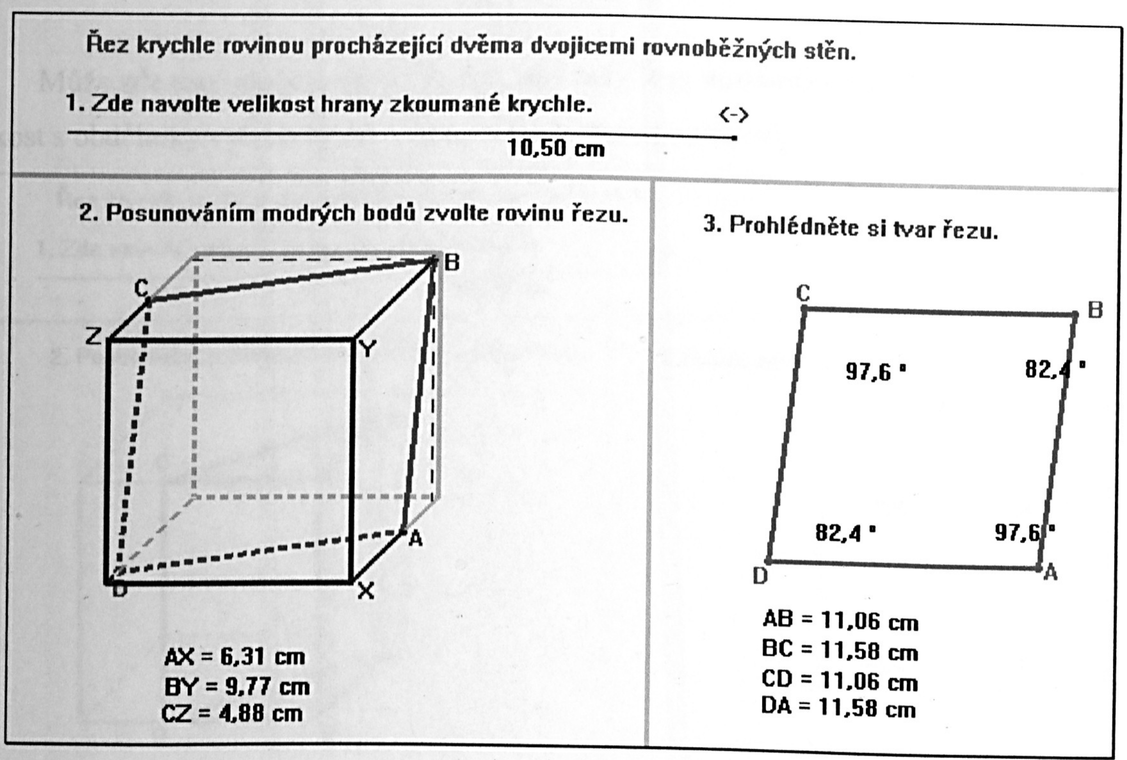
Dále si může prohlédnout, kdy vyjde **obdélník.**



Také může hledat situace, kdy jsou řezy **kosočtverce.**

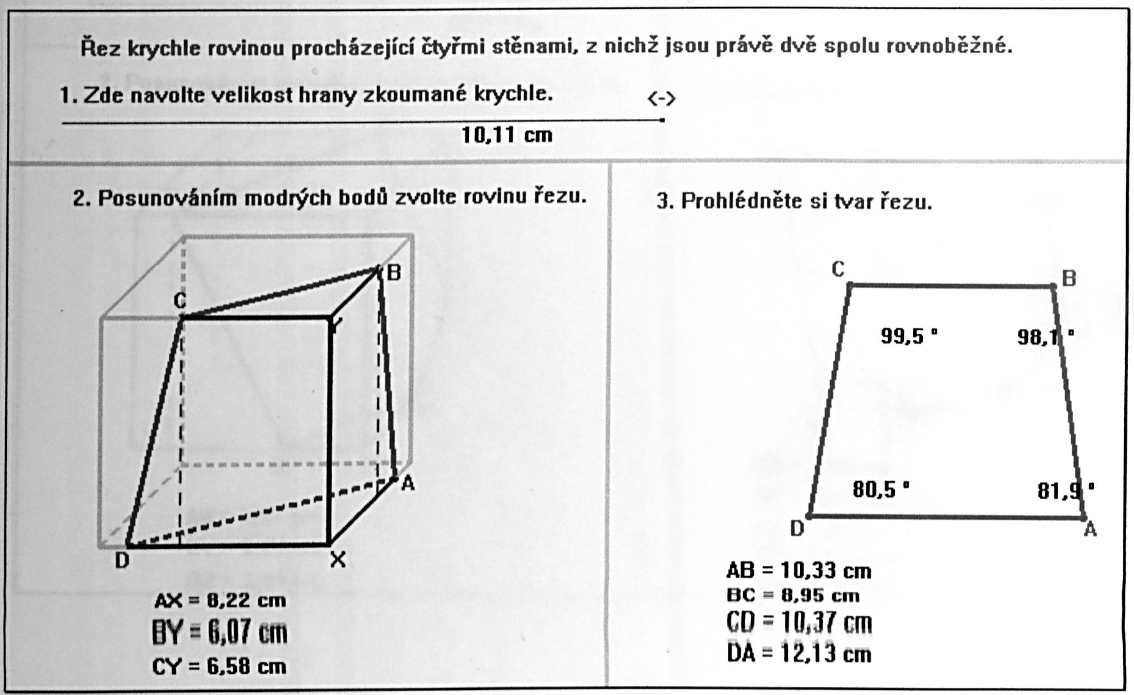


Dále může rovinu nastavit tak, aby řezem byl **kosodélník.**

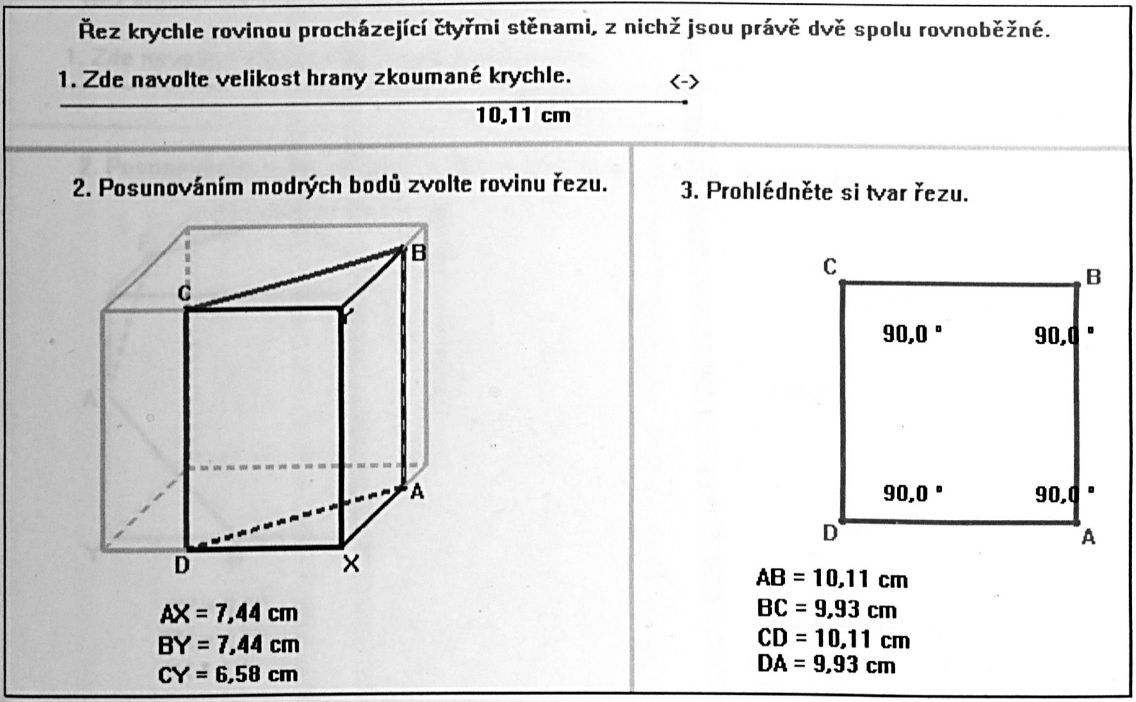


3. Lichoběžník - řez krychle rovinou procházející čtyřmi stěnami krychle, z nichž jsou právě dvě spolu rovnoběžné

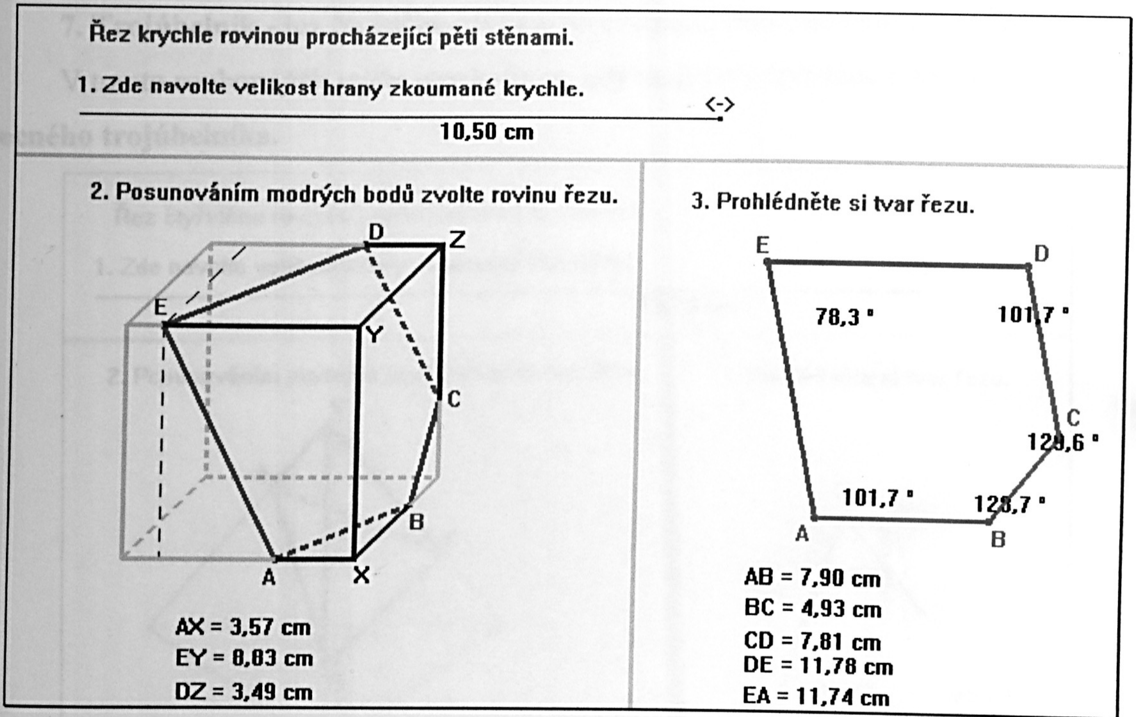
V tomto souboru žák může prozkoumat, kdy mají řezy krychle rovinou tvar **lichoběžníku.**



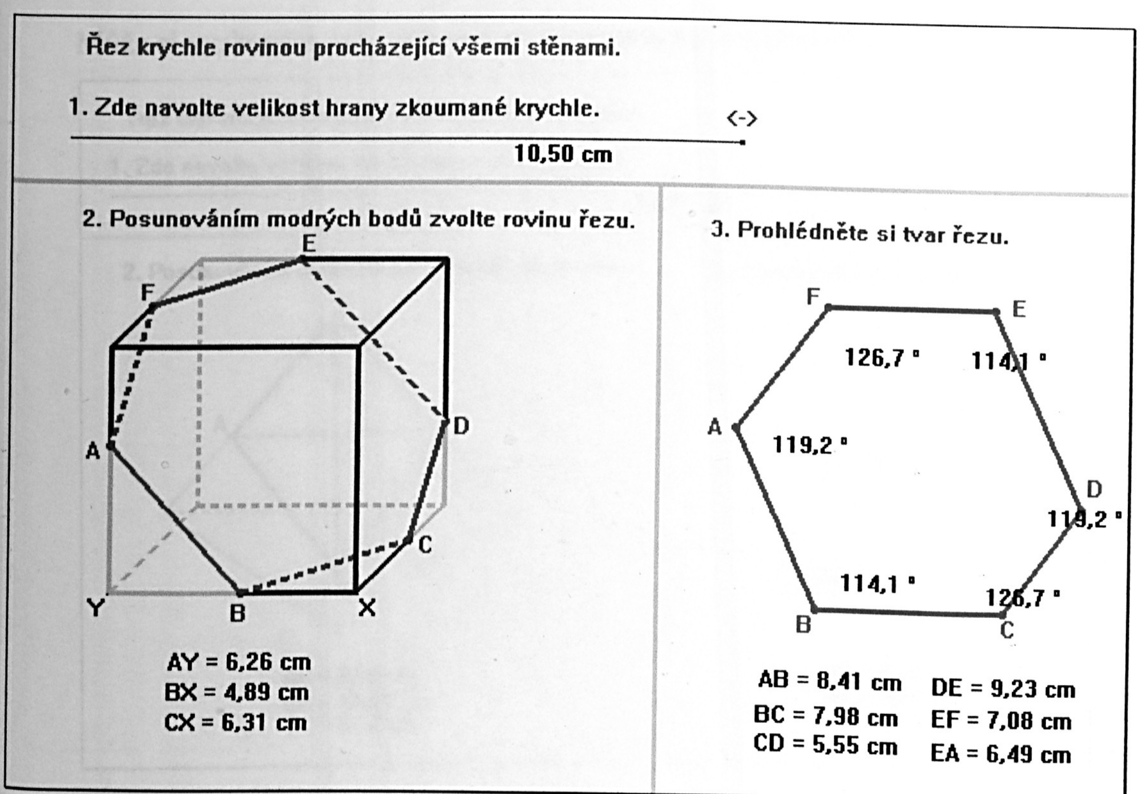
Může zde také nastavovat rovinu tak, aby byly řezy **obdélníky** a porovnat jejich velikost s obdélníky vytvořenými v druhém souboru (rovnoběžník).



4. Pětiúhelník - řez krychle rovinou procházející pěti stěnami krychle



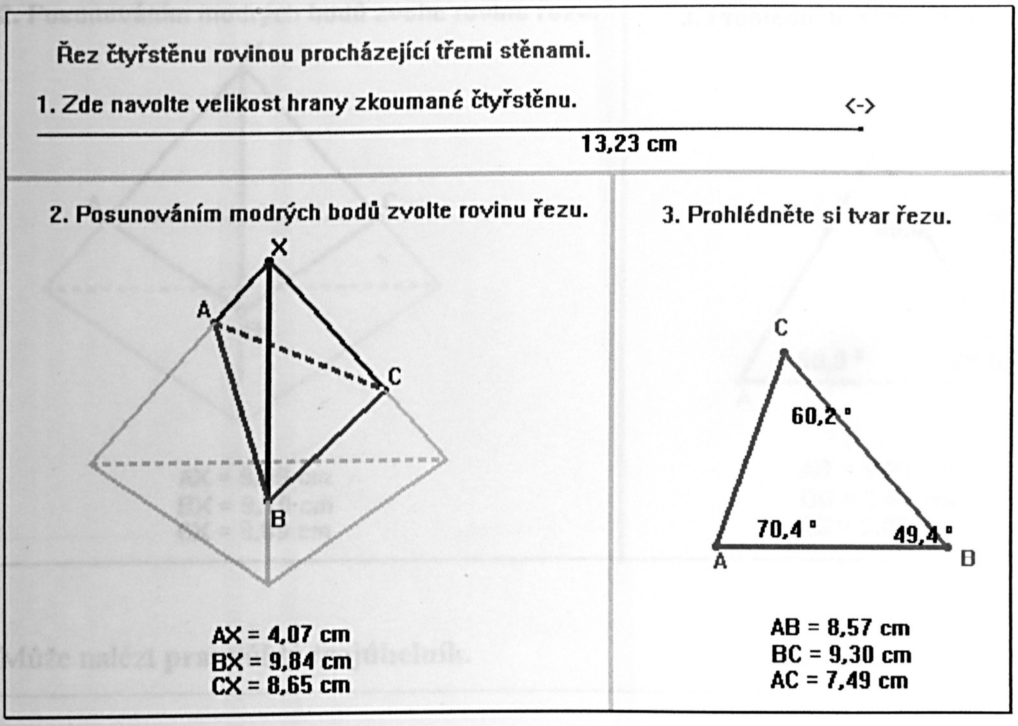
5. Šestiúhelník - řez krychle rovinou procházející šesti stěnami krychle



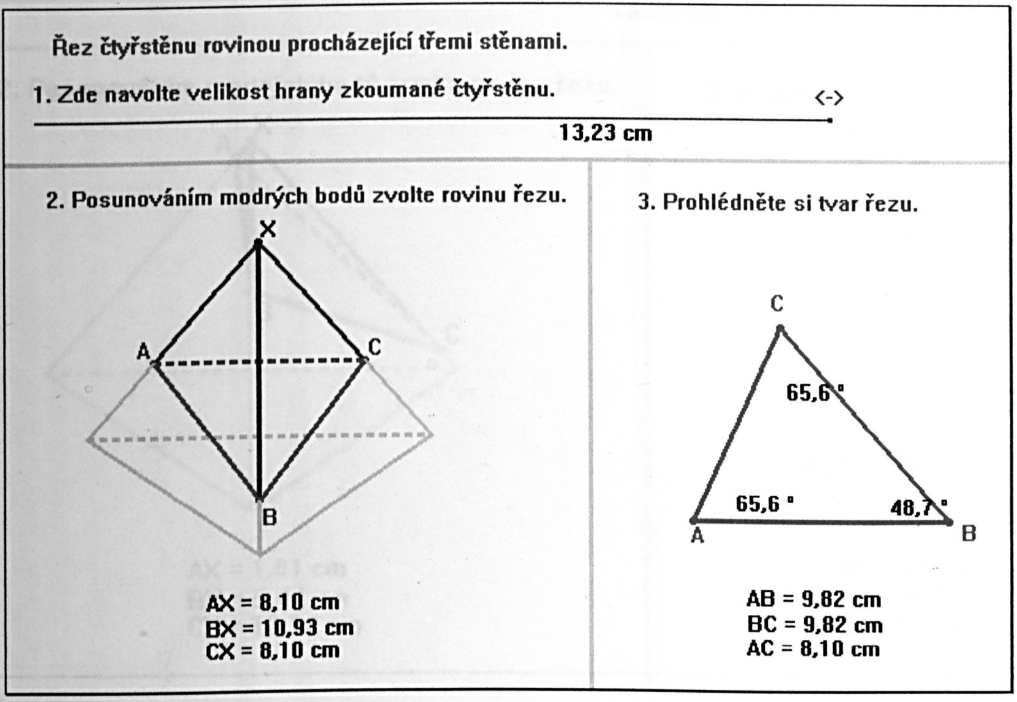
Podobné soubory jsem vytvořila také pro čtyřstěn. I zde jsou řezy rozděleny do souborů podle toho, jaký geometrický útvar vznikne:

7. Trojúhelník - řez čtyřstěnu rovinou procházející třemi stěnami čtyřstěnu

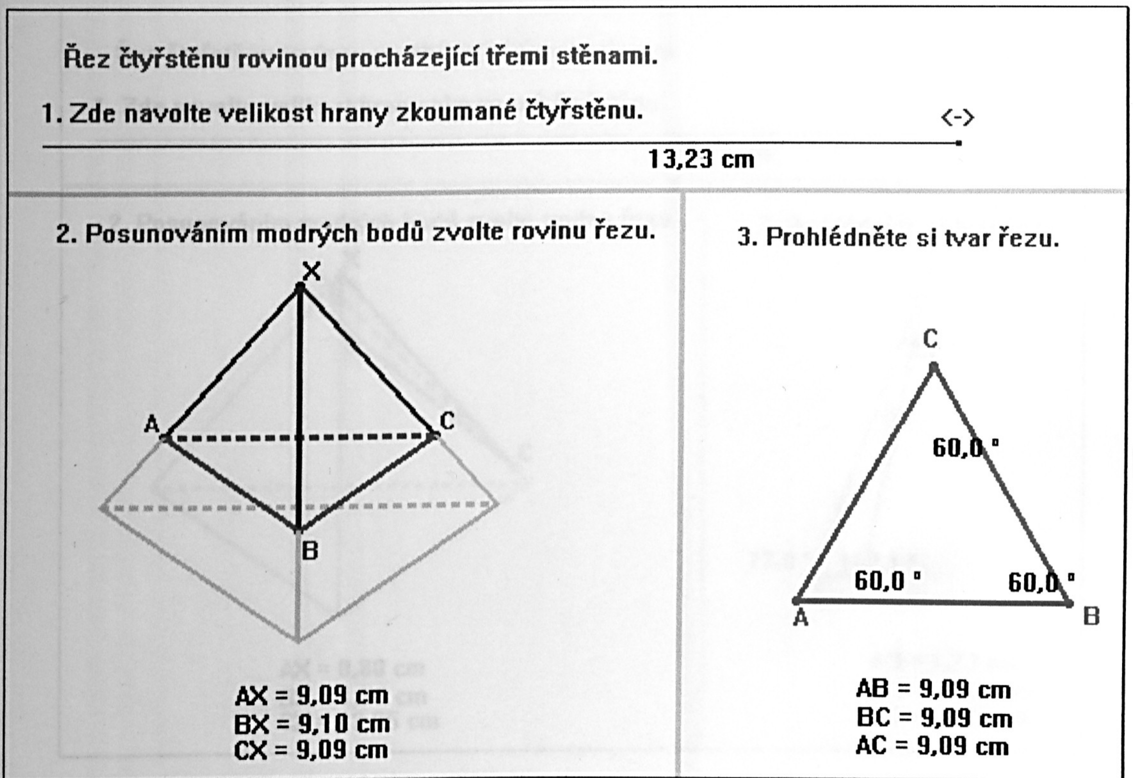
V tomto souboru žák může prozkoumat, kdy mají řezy čtyřstěnu rovinou tvar **obecného trojúhelníka.**



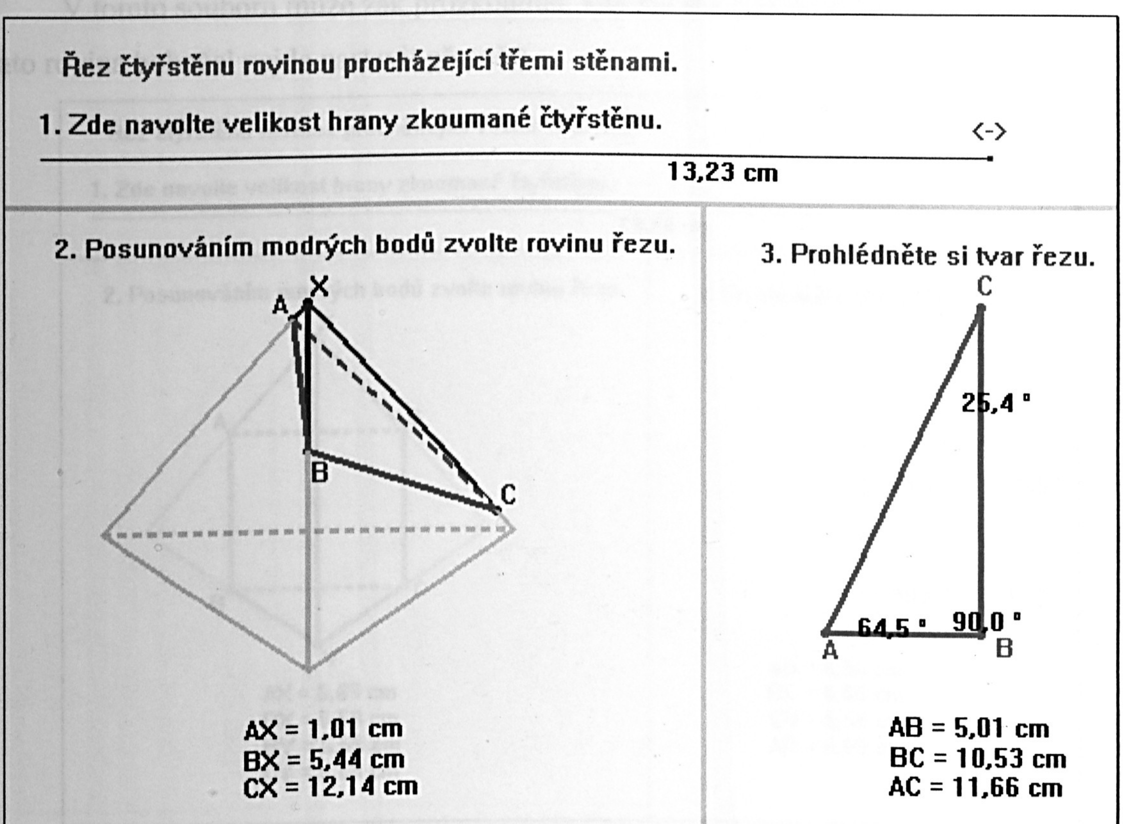
Může si vyzkoušet, kdy je řezem **rovnoramenný trojúhelník.**



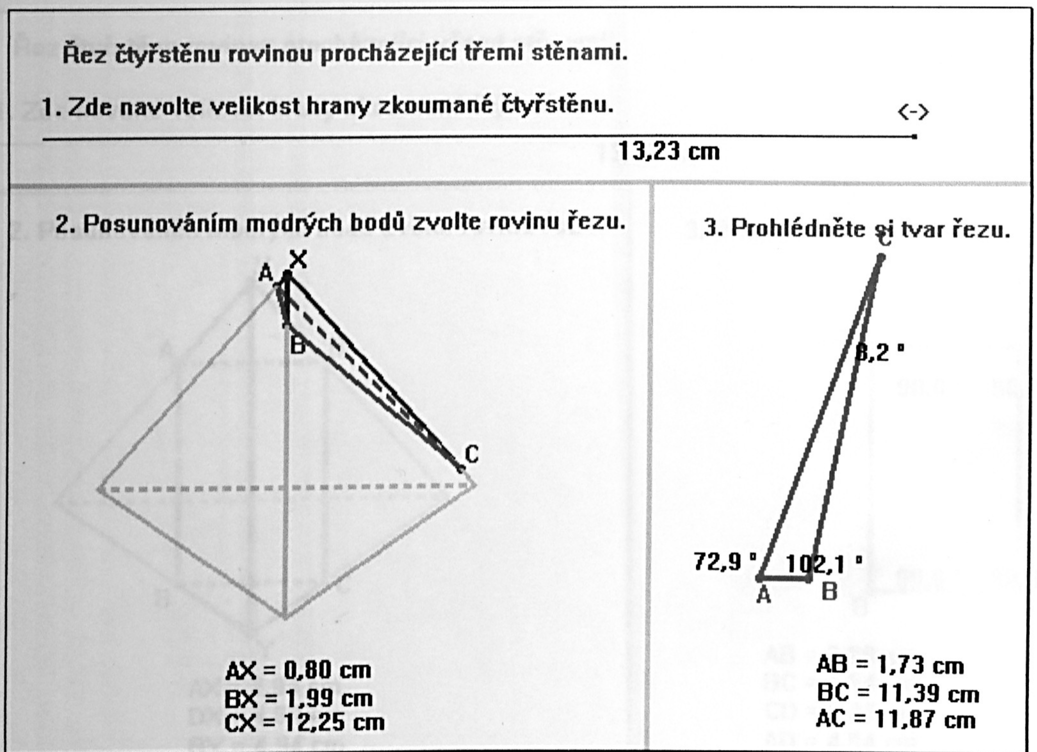
Může rovinu nastavovat tak, aby řezy byly **rovnostranné trojúhelníky.**



Může nalézt **pravoúhlý trojúhelník.**

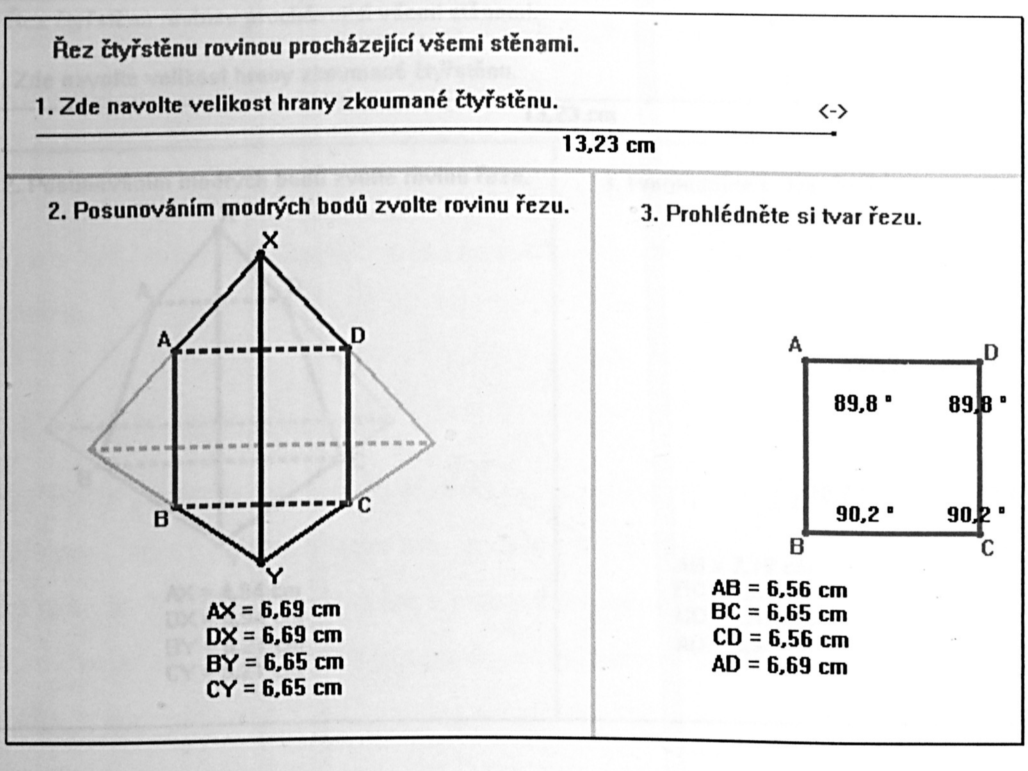


Řešením může být i **tupoúhlý trojúhelník.**

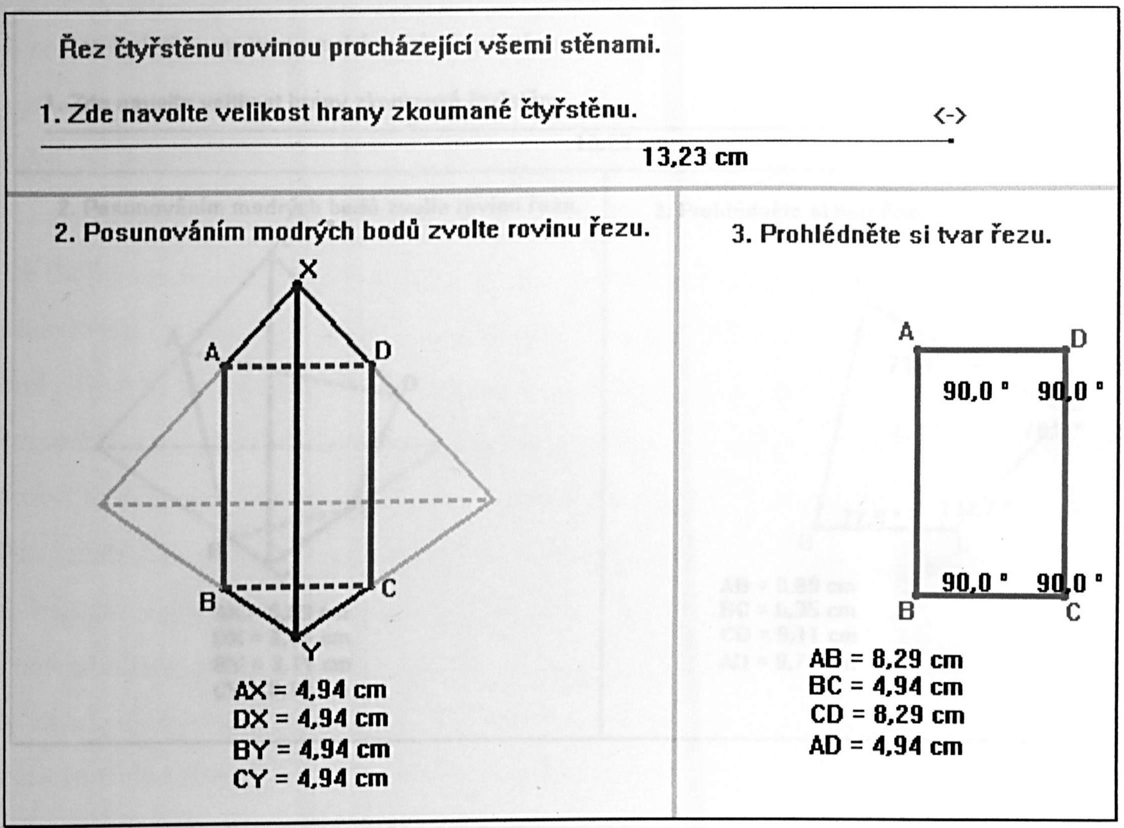


8. Čtyřúhelník - řez čtyřstěnu rovinou procházející čtyřmi stěnami čtyřstěnu

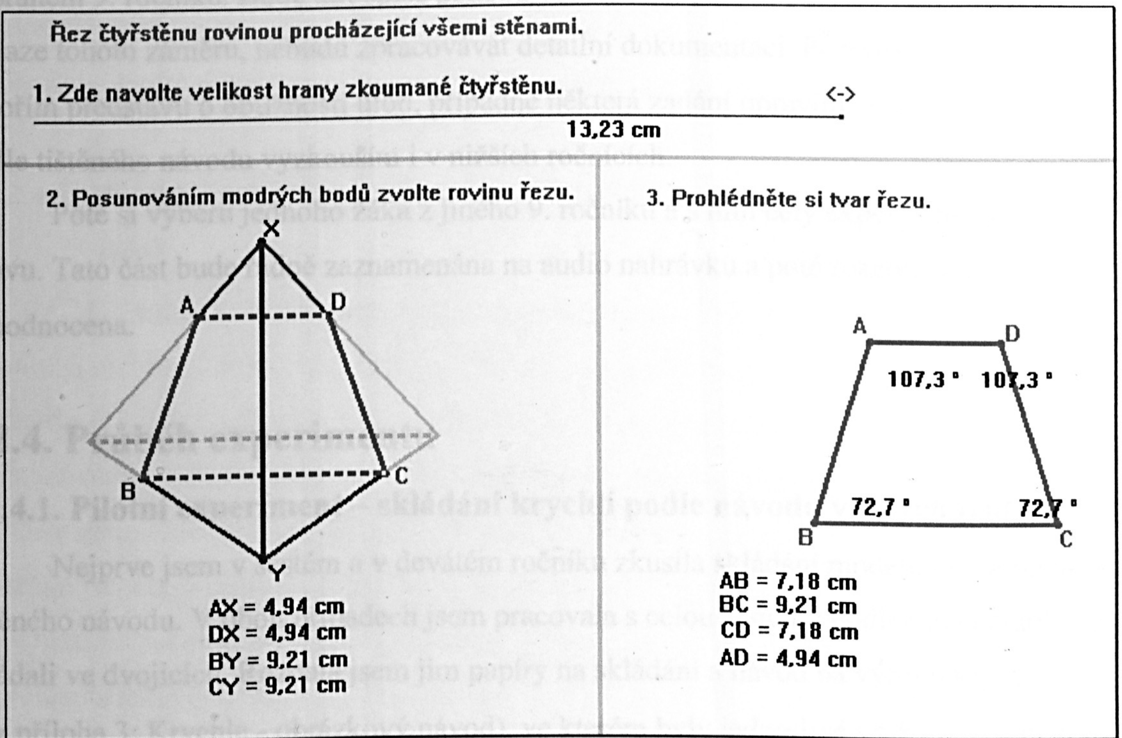
V tomto souboru může žák prozkoumat, kdy má řez čtyřstěnu rovinou tvar **čtverce**. (Tato rovina bohužel nejde nastavit přesně.)



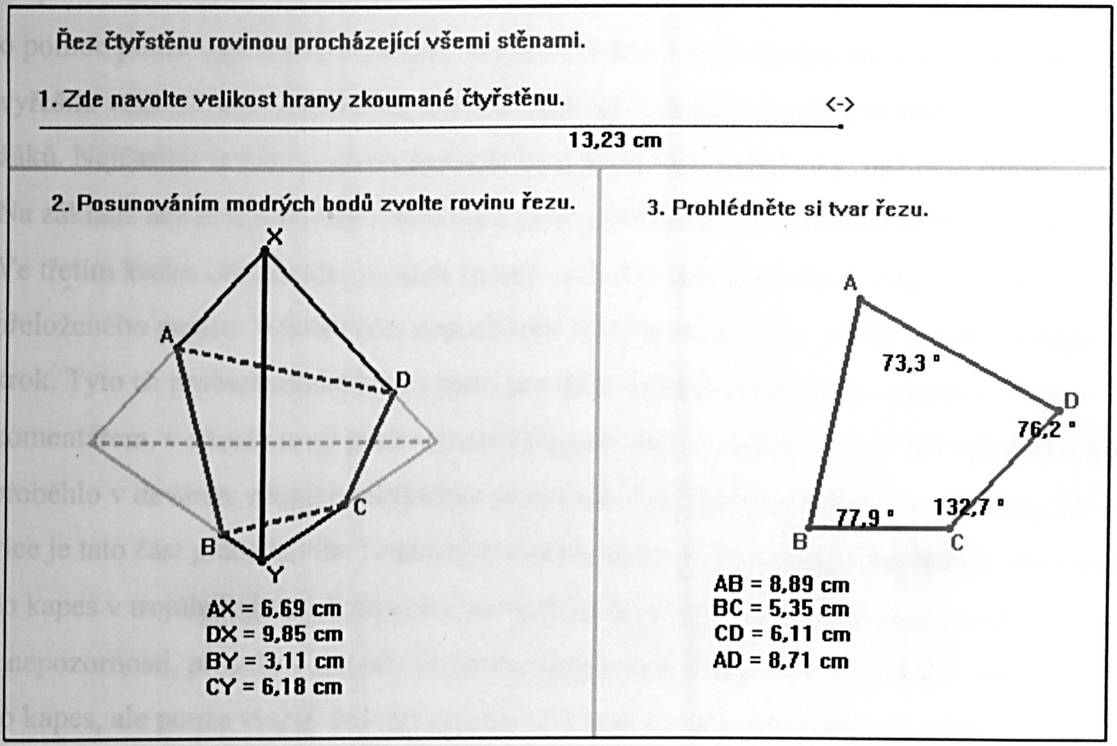
Může zkoumat řezy tvaru **obdélníka.**



Může nastavovat řezy tvaru **lichoběžníka.**



Může si prohlédnout různé řezy ve tvarech **obecných čtyřúhelníků.**



5.2.3. Organizace experimentu

Rozhodla jsem se pro následující postup: Nejprve experiment provedu v celém vybraném 9. ročníku. Bude mít spíše podobu volnější skupinové práce. Vzhledem k pilotní povaze tohoto záměru, nebudu zpracovávat detailní dokumentaci. Pozorováním práce žáků si utvořím představu o obtížnosti úloh, případně některá zadání upravím. Skládání modelů těles podle tištěného návodu vyzkouším i v nižších ročnících.

Poté si vyberu jednoho žáka z jiného 9. ročníku a s ním celý experiment provedu znovu. Tato část bude řádně zaznamenána na audio nahrávku a poté rozebrána a vyhodnocena.

5.2.4. Průběh experimentu

5.2.4.1. Pilotní experiment – skládání krychlí podle návodu v celých třídách

Nejprve jsem v šestém a v devátém ročníku zkusila skládání modelu tělesa podle tištěného návodu. V obou případech jsem pracovala s celou třídou v hodině matematiky. Žáci skládali ve dvojicích. Rozdala jsem jim papíry na skládání a návod na výrobu krychle (viz příloha 3: Krychle - obrázkový návod), ve kterém byly jednotlivé kroky popsány pouze pomocí obrázků bez jakéhokoliv slovního komentáře. Dále jsem se jim věnovala individuálně na požádání. Téměř všichni žáci byli ve skládání úspěšní. V devátém ročníku byly žádosti o pomoc pouze ojedinělé. V šestém ročníku mě žáci volali častěji, ale většinu problémů vyřešila věta: „Pořádně se na ten obrázek podívej.“, protože potíže pramenily z nepozornosti žáků. Nejčastěji se žáci snažili manipulovat s jinou částí skládanky, než bylo třeba. Na základě nejčastějších chyb žáků jsem jako problematické vyhodnotila tři kroky postupu. Ve třetím kroku někteří žáci zvedali špatný vrchol skládanky nebo zvedali obě vrstvy přeloženého papíru. Někteří žáci nepochopili šestý krok. Dalším dělalo obtíže pochopit osmý krok. Tyto tři problematické kroky jsem pro další průběh experimentu opatřila slovním komentářem, v němž varuji před nejčastějšími chybami. Skládání jednotlivých dílů v krychli proběhlo v devátém ročníku takřka bez problémů. Šesťákům působili trochu obtíže, ale o to více je tato část práce bavila. Nejčastější chybou bylo to, že trojúhelníkové cípy zasunovali do kapes v trojúhelníkových cípech a ne ve čtvercových. Což lze také považovat za chybu z nepozornosti, protože v návodu je situace jasně zakreslena. Někteří několik cípů nezasunuli do kapes, ale pouze vložili dovnitř krychle. To bylo možná způsobeno soutěživou atmosférou, která ve třídě vznikla, a která vedla k vysoké rychlosti práce. Do návodu jsem tedy raději přidala komentář upozorňující na tyto chyby. Pouze jedné skupině se model nepodařilo složit, protože vymodelovala jednotlivé díly příliš nepřesně a práci vzdala. Výtvory žáků devátých ročníků byly o poznání přesnější. V obou ročnících práce žáky velice bavila a dělali ji radostně a se zápalem. Žáci šestých ročníků měli navíc radost ze složených krychlí. Pomalovali si je a vytvořili z nich rozličné herní či věštící kostky.

5.2.4.2. Pilotní experiment – skládání čtyřstěnu podle slovních instrukcí v celé třídě

V devátém ročníku jsem vyzkoušela modelování čtyřstěnu ze dvou papírů podle slovních instrukcí. Pracovala jsem s celou třídou v hodině matematiky. Žáci skládali jednotlivě. Jednotlivé kroky postupu jsem žákům popisovala jako předmětné modely zobrazování v osové souměrnosti. V pokynech jsem kladla důraz na užití správných pojmů školské geometrie (trojúhelník, kosočtverec, pětiúhelník, rovnoběžky, atd.). V druhé části postupu jsem například modelovala hrany přeloženého papíru jako grafy funkcí, s nimiž žáci už v matematice pracovali. Žáci vybírali správné hrany na základě instrukcí odkazujících na rostoucí a klesající funkce. Tato metoda je pro žáky velice obtížná. Klade veliké nároky na předběžné znalosti. Žáci se navíc s objekty známými převážně z obrázků v učebnicích setkávají v nezvyklé formě papírové skládanky, což jim ztěžuje aktivaci osvojených vědomostí.

Postupovali jsme následujícím způsobem: Slovně jsem žákům popsala požadovaný krok. Všichni se pokoušeli tento krok uskutečnit na své skládance. Občas bylo nutné instrukci několikrát zopakovat. Poté, co se několika žákům podařilo krok správně realizovat, ukázali postup zbytku třídy. Já jsem také daný krok provedla na své skládance a zkontrolovali jsme si správnost postupu s celou třídou. Poté následovala další instrukce. Předpokládala jsem, že na základě slovních instrukcí bude schopno skládat pouze několik žáků. Překvapilo mě, že v prvenství při realizaci popsaného kroku se prostřídalo mnoho žáků. Myslím, že žáky metoda zaujala, motivovala a většina se skutečně snažila na postup přijít jen podle slovní instrukce. Atraktivnost této metodě také dodala skutečnost, že žáci nevěděli, co bude výsledkem skládanky. Při skládání podle tištěných návodů se totiž mohou podívat, jak bude konečný výtvor vypadat. Bylo patrné, že čím déle jsme skládali, tím byli zvědavější na výsledek své práce.

5.2.4.3. Pilotní experiment – modelování střechy s komínem v celé třídě

Tuto část experimentu jsem se rozhodla také realizovat v celém vybraném devátém ročníku (stejném s tím, který se účastnil předchozích cvičení) v hodině matematiky. Původní plán byl rozdělit žáky do skupin po dvou a každé skupině dát písemné zadání úloh. Bohužel, v té době došlo v naší škole k havárii, která zapříčinila, že poslední tři týdny školního roku nebyla ve škole zapojena elektřina. Nemohla jsem tedy zadání zkopírovat a musela jsem jej žákům předčítat. Byla bych přitom raději, kdyby měla každá skupina zadání sama k dispozici. Myslím, že mnoho žáků se cítí jistěji, mohou-li si zadání úkolu přečíst sami svým tempem, některé pasáže číst opakovaně a nemusí-li se bát, že zadání zapomenou. Navíc by mohly jednotlivé skupiny pracovat rychlostí, která jim vyhovuje. Naštěstí všichni žáci vědí, jak vypadá střecha s komínem, takže zadání pro ně bylo srozumitelné a snadno pochopitelné. Cíl byl jasný okamžitě, přemýšlet museli až nad jeho realizací. Trochu nepříjemné bylo, že se zadáním dalšího úkolu jsem musela čekat, až práci dokončí celá třída. Zdálo se mi, že to vyvíjelo tlak na pomalejší skupiny. O experimentu jsem pořídila audio záznam.

Žáci dostali dřevěné kvádry a čtvrtky. **Prvním úkolem** bylo změřit a zapsat rozměry kvádru. Tento úkol jsem zařadila proto, že v dalším se žáci měli zabývat řezy kvádru. Měli zapisovat velikosti stran obdélníků vniklých jako řezy kvádru rovinou. Úkol úspěšně splnilo sedm z osmi skupin. Jedna skupina zapomněla zapsat třetí rozměr kvádru. Žákům vyšli různé výsledky, což je pravděpodobně dáno tím, že kvádry nejsou přesně stejně velké a také tím, že žáci používají k měření nekvalitní pravítka s nepřesnými měřítky. Výsledky jejich měření jsou zapsány v tabulce na konci této kapitoly (strana 55) ve sloupci nazvaném „kvádr“.

Přesné zadání **druhého úkolu** znělo: „Vymodelujte část střechy s komínem. Dřevěný kvádr představuje komín a čtvrtka střechu. Do čtvrtky vystřihněte otvor tak, aby šla přesně nasadit na kvádr (na sklonu střechy nezáleží). Jaký tvar a rozměry má otvor?“

Čtyři skupiny vymodelovaly vodorovnou střechu. Zbylé čtyři skupiny vymodelovaly nakloněnou střechu. Šest skupin uvedlo jeden rozměr řezu stejný jako jeden rozměr kvádru. Jedna skupina zapsala odpovídající rozměr o 1 milimetr větší a jedna skupina o 2 milimetry větší. Tato odchylka je nejspíše způsobena tím, že žáci sice správně usoudili, že jedna strana řezu se má shodovat s jednou hranou kvádru, ale údaje zapisovala na základě přeměření vystřiženého otvoru ve čtvrtce. Výsledky jsou opět uvedeny v tabulce ve sloupci s názvem „řez 1“.

Přesné zadání **třetího úkolu** znělo: „Obdobným způsobem vymodelujte část střechy s komínem tak, aby střecha měla sklon 45°. Jaký tvar a rozměry má otvor? Zapište postup, kterým jste rozměry zjistili.“

Čtyři skupiny úkol řešily metodou pokus – omyl. Narýsovaly a vystřihly menší obdélník. Nasadily jej na kvádr. Prozkoumaly sklon roviny. Pokud byl sklon malý otvor zvětšily a znovu prozkoumaly sklon roviny. Některé skupiny otvor zvětšovaly násilným nasazováním na kvádr – protrhly větší díru v papíru. Tři z těchto skupiny správně zapsaly, že jeden rozměr obdélníku se shoduje s jedním rozměrem kvádru. Čtvrtá skupina rozměr nejspíše měřila na vystřiženém obdélníku, takže jí vyšel o 3 milimetry větší. Žádná z těchto skupin se u druhého rozměru obdélníka příliš nepřiblížila k ideální hodnotě. (Ideální hodnotu jsem určila pomocí goniometrických funkcí na základě rozměrů kvádru zapsaných žáky.) Tři skupiny zapsaly o 7 mm menší a jedna skupina o 10 mm větší rozměr. Důvodem byla pravděpodobně skutečnost, že tyto skupiny úhel neměřily, ale pouze odhadovaly. Domnívám se, že všechny čtyři skupiny situaci pochopily a jejich představa o řezu byla poměrně dobrá, z hlediska techniky však nebyly schopny úkol přesně vyřešit.

Dvě skupiny úkol řešily tak, že si řez narýsovaly na kvádr, poté změřily zakreslené čáry a narýsovaly na čtvrtku obdélník s naměřenými rozměry. Jedna skupina tímto způsobem zjistila poměrně přesný rozměr obdélníku. V zapsaném údaji se odchýlila pouze o 3 mm a u rozměru vystřiženého obdélníku činila odchylka pouze 2 mm. Rozměr obdélníku, který se shoduje s příslušným rozměrem kvádru však zapsala špatně. Vzhledem k tomu, že ve vymodelované řezu je tento rozměr správně, šlo nejspíš o chybu z nepozornosti. Druhá skupina tak přesného výsledku nedosáhla. Její odchylka činí 6 mm. Domnívám se, že obě skupiny situaci pochopily a udělaly si správnou představu o řezu. Nedostatky jsou nejspíše způsobeny opět technickou stránkou věci.

Dvě skupiny využily při řešení úkolu znalostí o vlastnostech rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka. Jedna z nich při rozměřování použila trojúhelníkové pravítko, o které vědí, že má dva úhly o velikosti 45°. Její výsledek se však od ideálního rozměru liší o 7 mm. Druhá skupina se snažila rozměr zjistit pomocí Pythagorovi věty. Žáci se však zmýlili ve výběru rozměrů a došli ke špatnému výsledku. Jejich odchylka tak činila 5 mm. I v tomto případu se domnívám, že obě skupiny situaci pochopily a udělaly si správnou představu o řezu. Nedostatky jsou nejspíše způsobeny opět technickou stránkou věci.

Přesné zadání **čtvrtého úkolu** znělo: „Obdobným způsobem vymodelujte část střechy s komínem tak, aby střecha měla sklon 25°. Jaký tvar a rozměry má otvor? Zapište postup, kterým jste rozměry zjistili."

Tři skupiny úlohu nestihly dořešit.

Pět skupin použilo metodu pokus – omyl. Jedna z nich nezapsala rozměry. Druhý rozměr jejího modelu řezu byl o 3 mm větší než ideální rozměr. Jedna skupina došla k ideálním rozměrům. Dvě skupiny uvedly rozměr o 1 mm větší. Jedna z nich nestihla vyrobit model. Poslední skupina zapsala rozměr o 2 mm menší.

Dvě skupiny opět rýsovaly na kvádr. Obě se od ideálního rozměru odchýlily o 2 mm. Jedna skupina se pokusila o řešení pomocí goniometrických funkcí (viz příloha: 10. Modelování střechy s komínem – 8. skupina). Úlohu však nevyřešila správně.

Jedna skupina (v tabulce uvedená pod číslem 5) došla k výborným výsledkům. U ostatních skupin se údaje ze třetího úkolu poměrně lišily od ideálních rozměrů řezů. Ve čtvrtém úkolu se však hodnoty u všech skupin, které jej stihly dokončit, odchylovaly maximálně o 2 mm. Toto zlepšení může být způsobeno zkušenostmi z předchozího úkolu. Myslím, že experiment splnil účel. Žáci si utvořili základní představy (prekoncept) o pojmu řez tělesa rovinou. Věřím, že na základě takto náročných manipulací se jim i pevně zakotvil v paměti. Žáci nejsou na podobné úlohy zvyklí, a proto mají obtíže při vymýšlení vhodných postupů řešení. Předpokládala jsem, že úkoly budou většinou řešit tak, že si na papír narýsují stěnu kvádru, na které je „šikmý řez" a odtud měřením zjistí správné rozměry celého řezu. Dalším aparátem, který měli k dispozici, byly goniometrické funkce. Ty jsou pro ně však poměrně obtížné a příliš čerstvé z hlediska jejich osvojení, než aby si je troufli použít, když „nemusí". U třetího úkolu mohli využít Pythagorovu větu. Myslím, že pro ně i tato situace byla natolik nezvyklá, že si ji nedokázali propojit se svými dosavadními znalostmi.

Tabulka: Rozměry zapsané jednotlivými skupinami experimentálního vzorku

(údaje jsou uvedeny v milimetrech)

Skupina		Kvádr			Řez 1		Řez 2 - 45°		Řez 3 - 25°		Metoda
		a	b	c	a	b	a	b	a	b	
1	zápis	37	26	52	37	26	40	30	40	30	pokus - omyl
	správně				37	-	37	36,8	37	28,7	
	model				38	28	38	31	x	x	
2	zápis	28	38	53	28	38	28	64	x	x	pokus - omyl
	správně				28	-	28	53,7	28	41,9	
	model				28	38	28	64	29	45	
3	zápis	27	37	53	27	37	27	45	27	42	pokus - omyl
	správně				27	-	27	52,3	27	40,8	
	model				28	42	29	46	28,0	45	
4	zápis	x	38	53	30	40	30	47	30	42	pokus - omyl
	správně				30	-	30	53,7	30	41,9	
	model				29	48	30	45	29	43	
5	zápis	38	28	54	38	35	35	43	35	29	narýsovala na kvádr
	správně				38	-	38	39,6	38	30,9	
	model				38	34	38	42	35	29	
6	zápis	28	38	54	29	39	29	48	29	44	narýsovala na kvádr
	správně				28	-	28	53,7	28	41,9	
	model				29	39	29	48	29	44	
7	zápis	28	38	55	30	40	31	47	30	40	2 - změřila na pravítku, 3 - pokus-omyl
	správně				28	-	28	53,7	28	41,9	
	model				30	40	30	47	30	40	
8	zápis	28	38	53	28	48	28	49	x	x	2 - Pythagorova věta, 3 - goniometrické funkce
	správně				28	-	28	53,7	28	41,9	
	model				28	48	28	49	x	x	

Na základě pilotního experimentu jsem se rozhodla, že v hlavní části experimentu doplním do zadání úkolu o modelování střechy s komínem doporučení, jaké postupy je možné použít.

Poslední část experimentu jsem chtěla vyzkoušet nejprve v devátém ročníku. Měla jsem v plánu to provést v předposledním týdnu školního roku. Vzhledem k tomu, že důležitým prvkem poslední části experimentu je zkoumání řezů těles pomocí pracovních listů Cabri geometrie a ve škole došlo k přerušení dodávky elektřiny, byla jsem nucena tuto část z pilotního experimentu vyloučit a realizovat ji pouze v hlavním experimentu.

5.2.4.4. Hlavní experiment

Hlavní experiment jsem se rozhodla uskutečnit laboratorním způsobem s jedním žákem devátého ročníku. V letošním roce žádné deváté ročníky neučím a žáky z těchto ročníků jsem matematiku neučila ani vloni. Znám je však z hodin fyziky. Vybrala jsem jednoho chlapce (Honza), který má velmi přátelský vztah k učitelům a je snaživý při studiu. Experiment jsme realizovali v kabinetě, a to především kvůli technickému vybavení (technika na audiozáznam, Cabri geometrie). Experiment se konal v odpoledních hodinách po vyučování.

Situaci velice komplikovala Honzova nervozita. Bál se, že mu práce nepůjde, a styděl se mluvit, když byl zapnutý mikrofon. Zpočátku při řešení úkolů zmatkařil a byl nesoustředěný. Postupně se trochu uklidnil, ale ne úplně.

Průběh experimentu jsem nahrávala na audio záznam – pomocí mikrofonu do počítače. Průběžně jsem musela nahrávání vypínat a ukládat, protože jinak by vznikl příliš velký soubor, s nímž by se obtížně pracovalo a bylo by vysoké riziko ztráty dat.

Nejprve Honza modeloval část střechy s komínem. Poté skládal čtyřstěn z jednoho kusu papíru podle slovních instrukcí. V poslední části jsme zkoumali řezy krychle rovinou a to pomocí nasazování čtvrtek s otvory na origami model krychle a pomocí Cabri geometrie.

5.2.4.5. Hlavní experiment – modelování střechy s komínem

Honza dostal písemné zadání (viz příloha 8: Modelování střechy s komínem – zadání), dřevěný kvádr a čtvrtky. Průběh úkolu jsem nahrávala na audio záznam. V případě nesnází jsem s Honzou úlohy konzultovala a vedla jej ke správnému řešení. Své výsledky Honza zapisoval (viz příloha 11: Modelování střechy s komínem – Honzův zápis).

První úkol:

„Změř a zapiš rozměry kvádru." Honza kvádr pečlivě změřil a zapsal: „a = 9,4 cm; b = 2,7 cm; c = 3,4 cm".

Zadání **druhého úkolu:**

„Vymodeluj část střechy s komínem. Dřevěný kvádr představuje komín a čtvrtka střechu. Do čtvrtky vystřihni otvor, tak aby šla přesně nasadit na kvádr (na sklonu střechy nezáleží). Jaký tvar a rozměry má otvor?"

Honza okamžitě po přečtení zadání přiložil kvádr stěnou 2,7 cm x 3,4 cm na čtvrtku a chtěl ho obkreslovat. Náhle si to rozmyslel. Podíval se na údaje zapsané v prvním kroku a narýsoval na čtvrtku obdélní o rozměrech 2,7 cm x 3,4 cm. Obdélník vyřízl modelářským nožem a čtvrtku nasadil na kvádr. (Zvolila jsem modelářský nůž, protože otvory ve čtvrtce je jím možné vytvářet rychleji a přesněji než nůžkami.) Zhotovil tak model vodorovné střechy. Zapsal: „vzniklý tvar obdélník a = 3,4 b = 2,7“. Pracoval jistě, bez delšího přemýšlení.

Třetí úkol :

„Obdobným způsobem vymodeluj část střechy s komínem, tak aby střecha byla vodorovná. Jaký tvar a rozměry má otvor?“

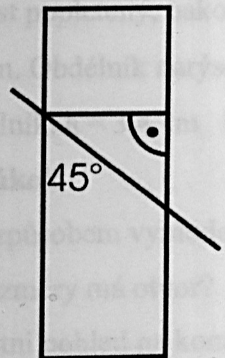
Vodorovnou střechu Honza zhotovil v předcházejícím kroku, zapsali jsme tedy pouze: „viz 2“

Zadání **čtvrtého úkolu** znělo:

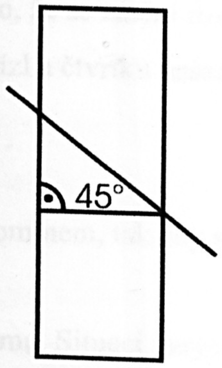
„Obdobným způsobem vymodeluj část střechy s komínem, tak aby střecha měla sklon 45°. Jaký tvar a rozměry má otvor?

(Návod: Udělej náčrt pohledu na komín z čelní strany domu. Situaci narýsuj a změř hledaný rozměr. Místo rýsování můžeš použít Pythagorovu větu.)“

V tomto úkolu jsme již narazili na obtíže. Honza byl velice nervózní, což mu ztěžovalo soustředění a navíc zmatkoval – nebyl schopen systematičtěji přemýšlet a postup volil spíše na základě náhodného tipu. Po přečtení úkolu si znovu nechápavě přečítal návod. Poslala jsem ho raději k oknu, odkud jsou vidět rodinné domky s pětiúhelníkovými čelními zdmi. Při pohledu na skutečné domy jsme si vyjasnili, jaký náčrt má udělat. Honza nakreslil obdélník jako komín a přes něj šikmo čáru jako střechu. Požadovaných 45° však zakreslil jinam, než jsem čekala (viz obrázek).

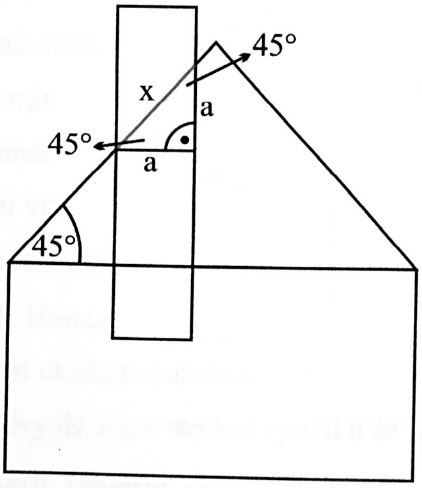


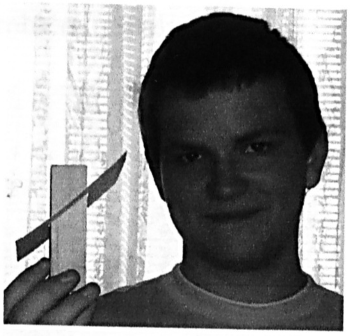
Honzův nákres



očekávaný nákres

Vzhledem k velikosti úhlu byl jeho nákres správný. Nebyla jsem si však jista, jestli správně pochopil, co myslím sklonem střechy. Přikreslila jsem raději k zadání čelní stranu domu a vyznačila na ní, kde má být zadaných 45°. Honza si také nakreslil čelní stranu domu a vyznačil k spodnímu okraji střechy 45°. Dále přikreslil obdélník jako komín (včetně části, která je uvnitř domu). Zeptala jsem se, která úsečka nás zajímá, abychom zjistili rozměry otvoru, který musíme vystřihnout do čtvrtky. Honza správně ukázal úsečku na náčrtu. Barevně jsme ji zvýraznili. Navedla jsem ho, aby dokreslil na komín trojúhelník, z kterého budeme vycházet a vyznačil si v něm úhly. Honza znovu správně určil, že se jedná o rovnoramenný trojúhelník. Váhal při určování rozměrů jeho ramen. Stačilo mu však připomenout, že místo komínu bude dřevěný kvádr, a uvědomil si, že rameno trojúhelníka bude dlouhé jako šířka kvádru. Jako šířku zvolil rozměr 2,7 cm. Bez problému použil Pythagorovu větu a spočítal, že jeden rozměr hledaného obdélníka bude 3,8 cm. Obtíže však nastaly s určením druhého rozměru. Honza se do situace zapletl a nemohl přijít na to, že když ve výpočtech použil rozměr 2,7 cm, musí mít obdélník rozměr 3,4 cm. Snažila jsem se mu pomoci tím, že jsem k náčrtu přiložila kvádr a natočila ho tak, jak namaloval. Dala jsem mu do ruky čtvrtku, ať si ji přiloží nad kvádr a zkusí si situaci představit. To příliš nepomohlo. Rozhodla jsem se tedy pro jinou strategii. Na kvádr jsem nasadila čtvrtku s vystřiženým otvorem, kterou jsme vytvořili jako model vodorovné střechy. Snažila jsem se Honzovi navodit představu, jak se střecha naklání, aby přišel na to, který rozměr se zvětší a který zůstane stejný. Honza z toho byl dost popletený, nakonec však přišel na to, že se změní rozměr 2,7 cm a zůstane rozměr 3,4 cm. Obdélník narýsoval na čtvrtku, vyřízl a čtvrtku nasadil na kvádr. Zapsal: „Vznikl obdélník: a = 3,4 cm b = 3,8 cm“.



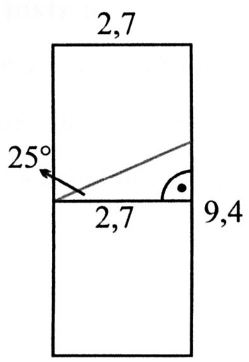


Pátý úkol:

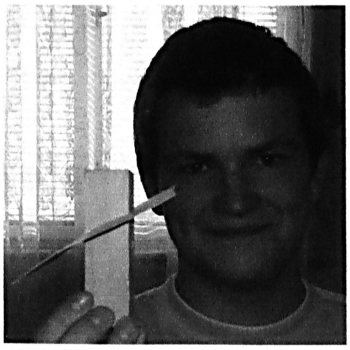
„Obdobným způsobem vymodeluj část střechy s komínem, tak aby střecha měla sklon 25°. Jaký tvar a rozměry má otvor?

(Návod: Načrtni pohled na komín z čelní strany domu. Situaci narýsuj a změř hledaný rozměr.)“

Nejprve jsme si ujasnili, kde má být daných 25° a to, že Pythagorovu větu tentokrát použít nemůžeme, protože se nejedná o rovnoramenný trojúhelník. Honza chtěl rovnou rýsovat na čtvrtku. Musela jsem ho upozornit, že ještě nezná rozměry řezu a musí tedy nejprve rýsovat pohled na komín z čelní strany domu. Dále jsem mu připomenula problém z minulého úkolu a navrhla mu, aby si nejprve rozmyslel, který rozměr řezu bude shodný s rozměrem kvádru a který rozměr se zvětší. Honza vytvořil náčrtek komínu (tentokrát bez domu) a zaznamenal do něho všechny známé rozměry. Správně určil, ze kterého trojúhelníku budeme vycházet a která úsečka bude mít hledanou velikost (vyznačili jsme ji modře). Příslušný trojúhelník začal rýsovat. Narýsoval stranu délky 2,7 cm a úhel o velikosti 90°. S dalším postupem si nevěděl rady. Konstrukce trojúhelníka, u kterého známe stranu a dva úhly k ní přilehlé, se probírá v sedmé třídě. Honza ji zjevně pozapomněl. Vyzvala jsem ho, ať mi na náčrtku znovu ukáže trojúhelník, který rýsuje, a zvýrazní jej. Zopakovala jsem mu, které známé rozměry již v konstrukci využil a že zbývá úhel 25°. Honzova nervozita opět stoupla a začal zmatkařit. Nedařilo se mu dát do souvislosti náčrt a hotovou část konstrukce. Pomohla jsem mu určit, kde bude úhel 25°. Další obtíže byly s úhloměrem. Honza byl zvyklý na průhledný, já mu půjčila papírový a on nevěděl, jak ho použít. (Podobné problémy pozoruji u mnohých žáků, když mají pracovat s jiným úhloměrem, než jsou zvyklí. Možná by bylo prospěšné přimět občas při geometrii děti, aby si navzájem úhloměry vyměnily a zkusily rýsovat i s jinými typy.) Když Honza konstrukci dokončil, naměřil, že hledaný rozměr je 3 cm. Další problém nastal opět



při určování rozměrů obdélníka. Nejspíše kvůli obtížnosti předchozí konstrukce Honza zapomněl, co a proč vlastně děláme. Když se v situaci zorientoval, nedařilo se mu opět určit druhý rozměr obdélníku. Doufala jsem, že napodruhé to pro něho bude snazší. Navíc jsem si myslela, že obtížím předejdeme využitím rozměrů zapsaných v náčrtu. Situace byla pro Honzu velmi obtížná a nezvyklá. Navíc vše komplikovala jeho nervozita. Znovu jsme se museli vrátit k modelu vodorovné střechy a představovat si, jak se naklání. Po chvíli Honza přišel na to, že druhý rozměr obdélníku bude 3,4 cm. Narýsoval jej na čtvrtku, vyřízl a nasadil na kvádr. Zapsal: „vznikl obdélník: a = 3,4 cm   b = 3 cm“.



Úkoly, v nichž se modeluje řez kvádru rovinou s konkrétním sklonem, jsou pro žáky devátého ročníku obtížné. V úvodní úloze by bylo možná vhodnější modelovat pouze vodorovnou střechu, mírně nakloněnou střechu a více nakloněnou střechu. Na řešení tohoto typu úkolů je většina žáků schopna přijít samostatně. V případě modelování střechy s konkrétním sklonem by, podle mého názoru, bylo dobré nejprve žákům předvést řešený příklad a také jim umožnit rýsovat na kvádr a nenutit je, dělat si nákres na papír.

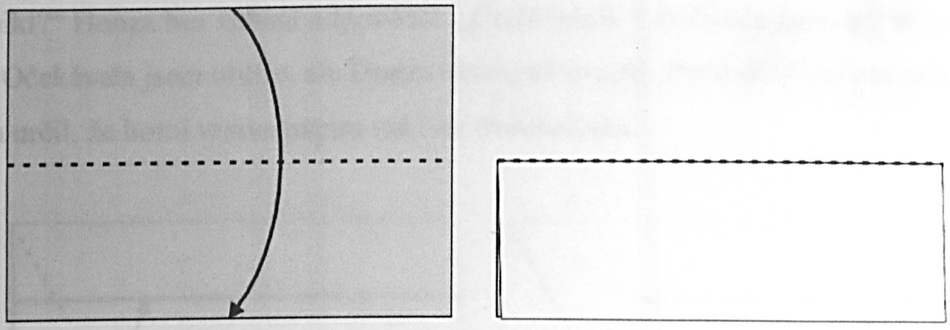
5.2.4.6. Hlavní experiment – skládání čtyřstěnu podle slovních instrukcí

Honza dostal písemné zadání bez obrázků (viz příloha 7: Čtyřstěn z jednoho listu papíru – návod bez obrázků) a papír na skládání. Průběh úkolu jsem nahrávala na audio záznam. Jednotlivé kroky jsme nahlas předčítali. V případě nesnází jsem s Honzou postup konzultovala a vedla ho ke správnému řešení.

První krok byl zadán:

„Přelož papír podle osy souměrnosti kratších stran."

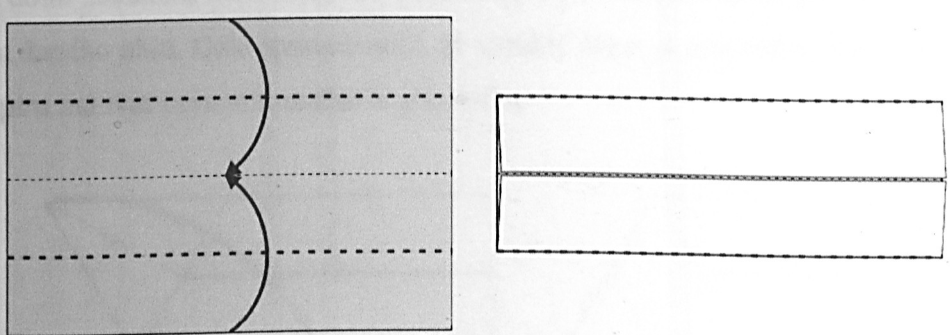
Honza úkol splnil rychle a bez většího váhání. Potřeboval se pouze ujistit, zda překládá správně.



Druhý krok byl popsán:

„Papír rozlož. Pomocí dvou přeložení zobraz obě delší strany na hranu vzniklou v předešlém kroku."

Honza zaváhal nad formulací „pomocí dvou přeložení". Rychle však pochopil, co se tím myslí a krok vykonal. Možná by bylo vhodnější tento krok rozdělit na dva – nejprve zobrazit horní stranu a poté dolní stranu obdélníka.

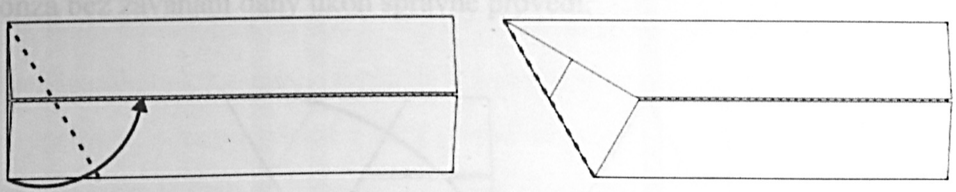


Pokyny pro **třetí krok** zněly:

„Papír nech složený a polož jej na délku tak, aby se otevíral nahoru. Nalezni osu, podle které se levý dolní vrchol obdélníku zobrazí na vodorovnou osu souměrnosti obdélníka. Osa musí procházet levým horním vrcholem obdélníka. Papír podle ní přelož.

Jaký útvar vznikl? Jaký útvar tvoří horní vrstva papíru?"

Honza v předcházejícím kroku papír rozložil. Když jsem ho vyzvala, ať ho znovu složí, přeložil ho na půl. Musela jsem ho upozornit, že má papír složit tak, jak byl složený na konci druhého kroku. Protože třetí krok je velice obtížný, požádala jsem Honzu, aby nejprve ukázal všechny objekty, o kterých se v zadání hovoří. Poté se Honza pokoušel o přeložení. Několikrát jsem ho musela zastavit a upozornit ho, který z pokynů jím zvolené přeložení nesplňuje. Nakonec Honza správnou hranu nalezl a papír podle ní přeložil. Na otázku: „Jaký útvar vznikl?" Honza bez váhání odpověděl: „Čtyřúhelník." Požádala jsem ho, ať to zkusí upřesnit. Očekávala jsem obtíže, ale Honza okamžitě uvedl: „Pravoúhlý lichoběžník." Bez problému určil, že horní vrstva papíru má tvar trojúhelníku.

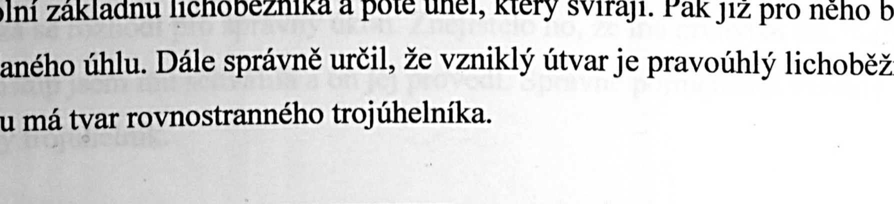


Zadání **čtvrtého kroku** bylo:

„Nalezni osu úhlu, který svírá levé rameno a dolní základna lichoběžníka. Papír podle ní přelož.

Jaký útvar vznikl? Jaký útvar tvoří horní vrstva papíru?"

Zprvu se Honza rozhodl papír přeložit nesprávně. Vyzvala jsem ho, aby ukázal levé rameno a dolní základnu lichoběžníka a poté úhel, který svírají. Pak již pro něho bylo snadné nalézt osu daného úhlu. Dále správně určil, že vzniklý útvar je pravoúhlý lichoběžník a horní vrstva papíru má tvar rovnostranného trojúhelníka.

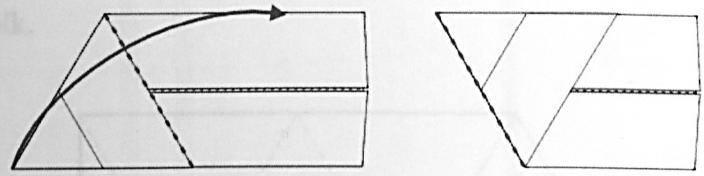


Pátý krok byl popsán:

„Nalezni osu úhlu, který svírá levé rameno a horní základna lichoběžníka. Papír podle ní přelož.

Jaký útvar vznikl? Jaký útvar tvoří horní vrstva papíru?"

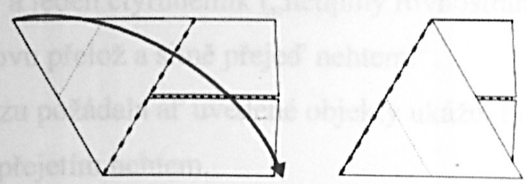
Tento krok je podobný kroku předcházejícímu. Honza si sám ukázal levé rameno a horní základnu lichoběžníka. Správně přeložil papír a pojmenoval vzniklé objekty.



Postup **šestého kroku** se shoduje s postupem ve čtvrtém kroku:

„Nalezni osu úhlu, který svírá levé rameno a dolní základna lichoběžníka. Papír podle ní přelož."

Honza bez zaváhání daný úkon správně provedl.

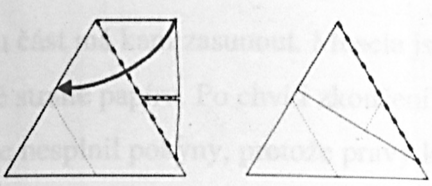


Sedmý krok je stejný jako pátý krok:

„Nalezni osu úhlu, který svírá levé rameno a horní základna lichoběžníka. Papír podle ní přelož.

Jaký útvar vznikl?"

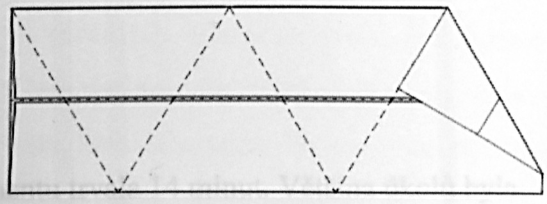
Honza se rozhodl pro správný úkon. Znejistělo ho, že má přehýbat tak malý cíp. Chystaný postup jsem mu schválila a on jej provedl. Správně pojmenoval vzniklý útvar jako rovnostranný trojúhelník.



Zadání **osmého kroku** znělo:

„Papír rozlož tak, abys znovu měl podlouhlý obdélník ze dvou vrstev papíru (viz krok 2).
Znovu přelož pouze pravý krajní trojúhelník (z posledního kroku).
Jaký útvar vznikl?“

Honza papír správně rozložil. Před sebe si ho však položil otočený o 180° stupňů oproti očekávané poloze. Raději jsem mu papír přetočila, aby správně splnil další pokyn. (Tento krok by bylo dobré doplnit obrázkem.) Honza krok úspěšně dokončil a správně určil, že vznikl pětiúhelník.



Následovala instrukce:

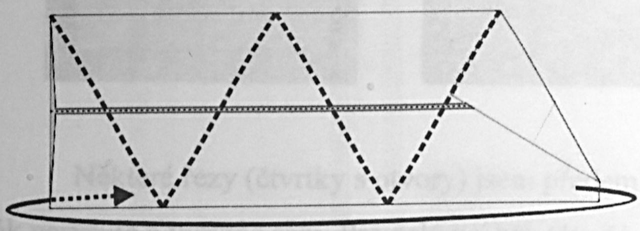
„Papír je hranami z předchozích čtyř kroků rozdělen na jeden pravoúhlý trojúhelník, tři rovnostranné trojúhelníky a jeden čtyřúhelník („neúplný rovnostranný trojúhelník“).
Tyto hrany zvýrazni – znovu přelož a silně přejeď nehtem.“

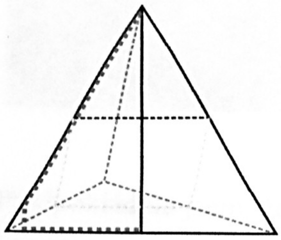
Nejprve jsem Honzu požádala ať uvedené objekty ukáže. Poté jednotlivé hrany znovu přeložil a upevnil silným přejetím nehtem.

Poslední **devátý krok** byl popsán:

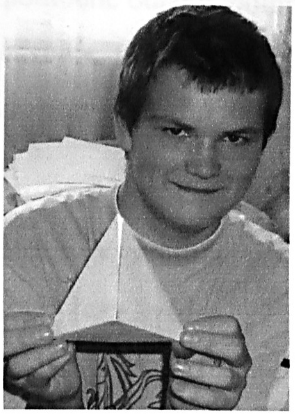
„Zpřehýbej papír podle těchto čtyř hran tak, abys mohl zasunout pravou polovinu „neúplného trojúhelníka“ (pravý konec papíru) do „kapsy“ tvořené pravoúhlým trojúhelníkem (levý konec papíru).
Jaké těleso vzniklo?
Jaké jsou jeho stěny? Kolik jich je?
Kolik má hran? Co o nich platí?
Kolik má vrcholů?“

Ukázali jsme si, kterou část má kam zasunout. Musela jsem ho upozornit, aby nerozevíral přeložení na pravé straně papíru. Po chvíli zkoušení složil rovnostranný trojúhelník. Řekla jsem mu, že nesplnil pokyny, protože pravý konec papíru zasunul do jiné kapsy. Znovu jsme si ukázali, kterou část má kam zasunout. Dále jsem mu napověděla, že má vzniknout trojrozměrné těleso. Po chvíli zkoušení se mu podařilo sestavit čtyřstěn. Nejprve ho nazval pyramidou, rychle se však opravil na jehlan. Bez problému ověřil, že jeho stěny jsou čtyři a že se jedná o rovnostranné trojúhelníky. Napočítal šest hran a uvedl, že jsou stejně dlouhé. Nakonec spočítal čtyři vrcholy.





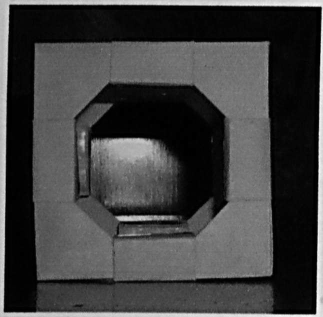
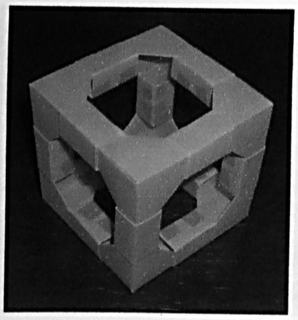
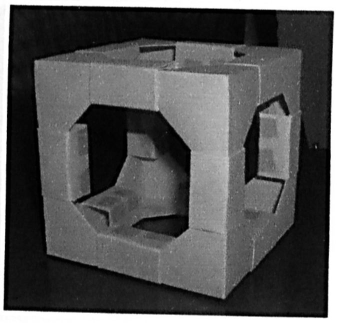
Tato část experimentu trvala 14 minut. Většina úkolů byla pro Honzu snadná. Problematický byl třetí krok (modelování úhlu o velikosti 30°). S touto částí je nutné žákům pomoci nebo návod doplnit obrázkem. Obrázky by bylo vhodné přidat i k osmému a devátému kroku, aby žáci správně položili papír na stůl a mohli pochopit další instrukce.



5.2.4.7. Hlavní experiment – řezy krychle

V této části jsme zkoumali řezy krychle rovinou a to pomocí nasazování čtvrtek s otvory na origami model krychle a pomocí Cabri geometrie.

Krychli jsme s Honzou neskládali, zhotovila jsem ji já předem. Šlo o modulární model, který je v podstatě obdobou tyčového modelu (bez výplně stěn – pouze hrany). Úmyslně jsem ji vyrobila z modrého papíru. Je tedy kontrastní k bílým čtvrtkám a modely situací řezů jsou tak přehlednější. Modulární model mi připadá pro tento účel nejvhodnější. Jeho výhodou je, že žák vidí i zadní hrany. U tyčových modelů mají někteří žáci problém s představou krychle. Tento model má mohutné hrany, takže v něm žáci krychli vidí. Další výhodou jeho líbivý vzhled. S několika třídami jsem modulární modely krychlí skládala v hodinách matematiky a všimla jsem si, že jim vzniklé krychle připadali hezké a zajímavé.

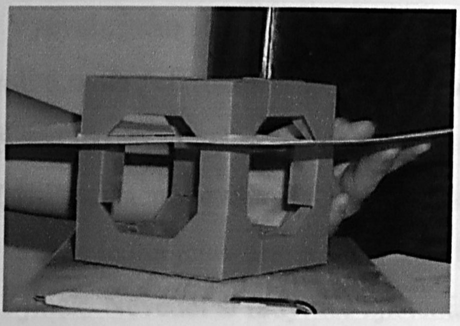
  

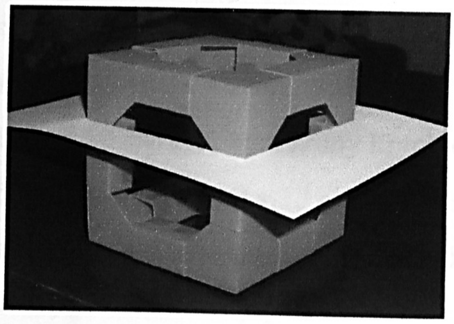
Některé řezy (čtvrtky s otvory) jsem předem připravila. Předpokládala jsem, že další si žák narýsuje a vyřízne sám. Pro celý průběh této části experimentu jsem připravila scénář (viz příloha 9: Řezy krychle – zadání). V něm je nejprve odkaz k modelování střechy s komínem a vysvětlení termínu řez tělesa rovinou. Poté následují úkoly, otázky a pomocné otázky, pomocí nichž žák postupně zkoumá, které mnohoúhelníky mohou být řezem krychle. U vybraných obrazců se žák zabývá i jejich možnými velikostmi. Své závěry ověřuje pomocí Cabri geometrie.

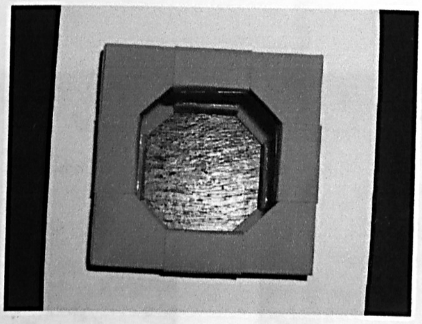
Nejprve jsem Honzovi připomenula modelování střechy s komínem. Vysvětlila jsem mu, co znamená řez tělesa rovinou, a že obdélníky, které vystřihoval, byly řezy kvádru různými rovinami. Dále jsem ho vyzvala, aby pomocí otázek, které dostal předem vytištěné na papíru, zkoumal řezy krychle.

První úkol zněl:
„Může být řezem krychle čtverec?
Jaké má rozměry?
Jak ho můžeme modelovat nasazením na krychli?“

Honza bez váhání změřil, že hrany krychle mají délku 10 cm, a navrhl čtverec o rozměrech 10 cm x 10 cm. Čtverec vyřízl a nasadil na krychli. Bez problémů byl schopný ukázat, že čtvrtku můžeme libovolně posunovat po krychli. Na otázku, zda by mohla být čtvrtka nasazena i „nakřivo“, okamžitě odpověděl, že v tom případě by byl řezem obdélník.



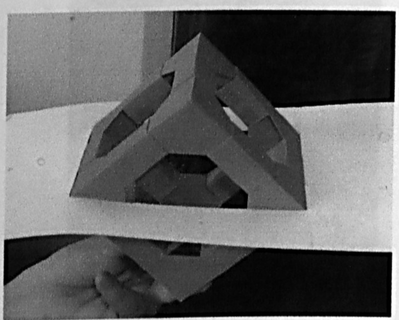


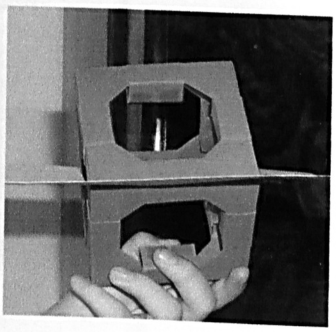


Druhý úkol zněl:

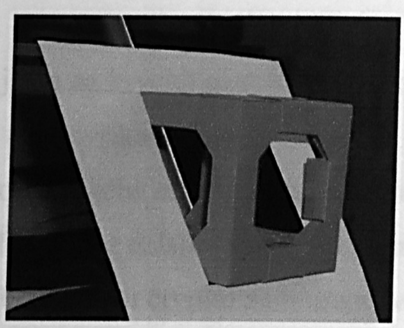
„Už víš, že řezem kvádru může být obdélník. Může být obdélník i řezem krychle? Jaké může mít rozměry? Jaký může být největší a jaký nejmenší? Jak můžeme obdélníky tvořící řez nasadit na krychli?“

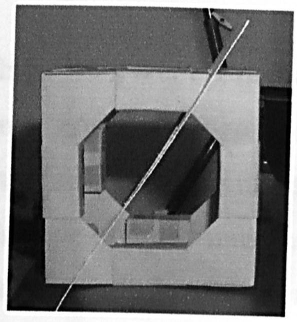
Na první otázku Honza odpověděl již v předcházejícím úkolu. K modelování jsme využili čtverec z předchozího úkolu. Honza jej předělal na obdélník s rozměry 10 cm x 14 cm, což byl největší možný obdélníkový řez – daný rovinou procházející úhlopříčkami dvou protějších stěn. To Honza neměl v plánu. Využili jsme toho k úvahám o rozměrech možných obdélníků. Honza správně určil, že žádný větší už být nemůže.



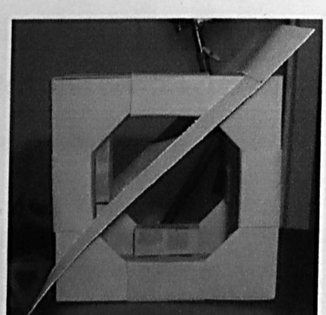


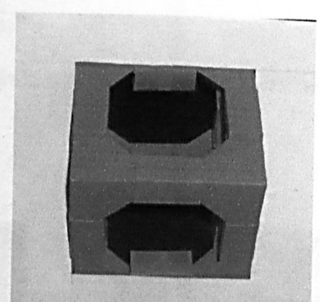
Vyzvala jsem Honzu, ať zkusí vytvořit menší obdélníkový řez. Nejprve jsme uvažovali o možných rozměrech. Honza správně vyvodil, že jeden rozměr musí být 10 cm (shodný s velikostí hrany krychle) a druhý musí být mezi 10 cm (velikost hrany krychle) a 14 cm (velikost stěnové úhlopříčky). Narýsoval obdélník s rozměry 10 x 12 cm. Nasadil jej na krychli tak, že jedna jeho strana splývala s hranou krychle. Vyzvala jsem ho, ať zkusí čtvrtku nasadit i jinak. Nevěděl si rady. Ke zjištění, že hrana krychle nemusí splývat se stranou obdélníku jsem ho musela navést.





Během zkoumání různých poloh čtvrtky sám přišel na situaci, kdy rovina neodděluje celou stěnu, ale odděluje pouze jednu celou hranu. Toho jsem využila ke zpochybnění našeho předchozího závěru o možných rozměrech obdélníků. Honza souhlasil, že obdélníky mohou být i menší. Narýsovala a vyřízl obdélník o rozměrech 10 x 6 cm. Dokázal ho nasadit na krychli různými způsoby – různě nakláněl čtvrtku. Znovu jsme uvažovali o možných rozměrech obdélníků. Pomocí pomocných otázek přišel na to, že jeden rozměr obdélníku musí zůstat 10 cm a druhý se může zmenšovat až k 0 cm. Závěr k tomuto úkolu tedy byl, že obdélníky musí mít jeden rozměr 10 cm a druhý rozměr se může pohybovat od 0 do 14 cm.





Zadání **třetího úkolu** bylo:

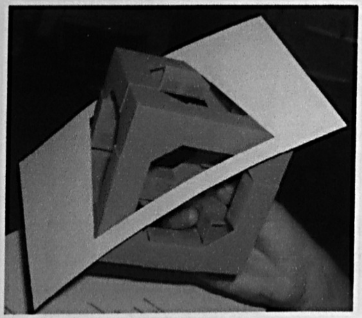
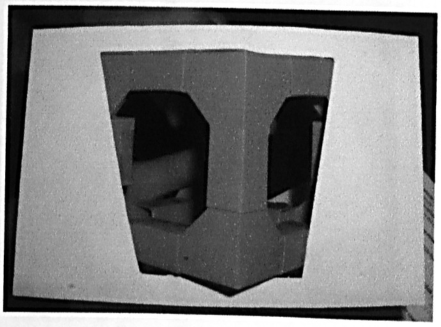
„Jak by vypadal řez rovinou, která by oddělovala jednu hranu od ostatních (jako u posledního obdélníka), ale byla by „nakřivo“?

Pomocná otázka:

Zkus vymodelovat tuto situaci pomocí posledního vytvořeného řezu.

Vidíš, že strana obdélníka kterou jsi naklonil blíž k vrcholu krychle je moc dlouhá. Kdyby byla kratší, jaký geometrická útvar by vznikl (2 rovnoběžné strany – každá jinak dlouhá a dvě boční „šikmé“ strany)?“

Nasadila jsem na krychli obdélník o rozměrech 10 cm x 6 cm (z minulého úkolu) a naklonila jej, tak aby čtvrtka nebyla rovnoběžná s hranou krychle. Upozornila jsem Honzu, že v této poloze otvor nedoléhá na povrch krychle, a zeptala se ho, jaký by musel mít tvar, aby přesně „seděl“. Honza bez delšího přemýšlení odpověděl, že otvor by musel mít tvar lichoběžníku. Dala jsem mu čtvrtku s otvorem ve tvaru lichoběžníku a on jej nasadil na krychli.

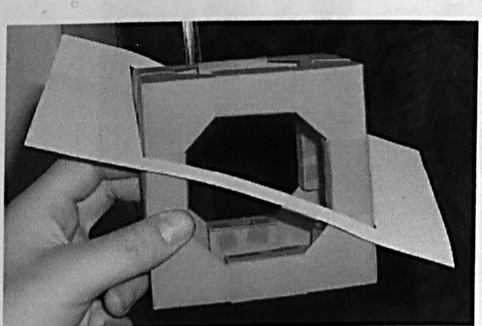
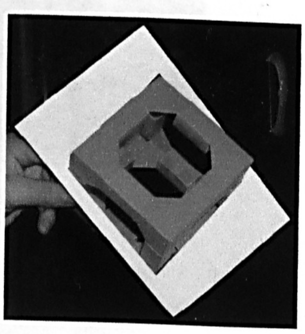



Čtvrtý úkol zněl:

„Mohl by být řezem kosočtverec?

Jeden jsem připravila. Zkus ho nasadit na krychli.“

Dala jsem Honzovi čtvrtku s otvorem ve tvaru kosočtverce. Chvilku mu trvalo, než našel správnou polohu, ale našel ji.

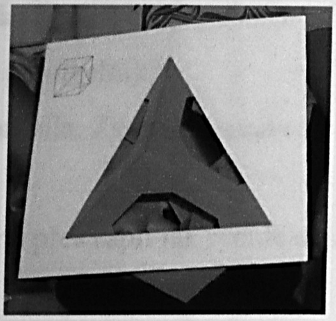



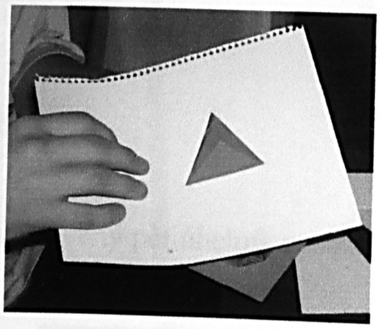
Poté jsem Honzovi zapnula program Cabri geometrie. Postupně v souborech „Krychle - rovnoběžník“ a „Krychle - lichoběžník“ zkoušel nastavovat různé řezy.

Pátý úkol zněl:

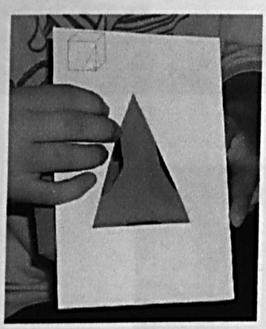
„Šel by na krychli nasadit i řez ve tvaru trojúhelníku? Může být rovnostranný, rovnoramenný i různostranný? Jaký největší rovnostranný trojúhelník to může být? Může být řezem trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý i tupoúhlý?“

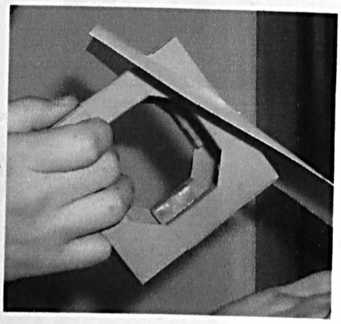
Dala jsem Honzovi čtvrtky s otvory ve tvaru rovnostranného trojúhelníka se stranou velikosti 14 cm (délka stěnové úhlopříčky zjištěná měřítkem). Bez váhání ho nasadil na krychli. Dále si zkusil sám narýsovat, vyříznout a nasadit rovnostranný trojúhelník menší velikosti. Na dotaz o možných velikostech rovnostranných trojúhelníků bez váhání odpověděl, že největší velikost strany může být 14 cm a že jakýkoliv menší trojúhelník půjde také nasadit.



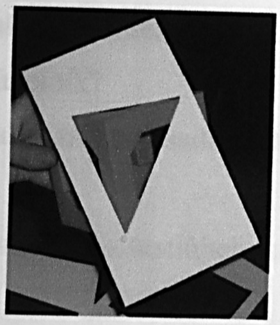
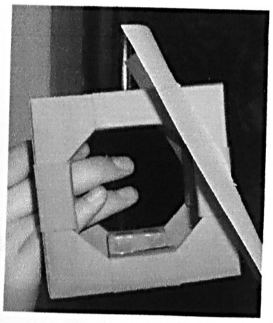


Poté jsem dala Honzovi čtvrtku s otvorem ve tvaru rovnoramenného trojúhelníka. Bez obtíží ji nasadil a správně nastavil její polohu.





Nasazení různostranného trojúhelníka dalo Honzovi více práce, ale zvládl to.

Dále jsme uvažovali o úhlech trojúhelníků. Konstatovali jsme, že ostroúhlé trojúhelníky řezem být mohou. Honza narýsoval pravoúhlý trojúhelník. Pokoušel se ho nasadit. S pomocí zjistil, že tento trojúhelník nasadit nejde. Podobně vyzkoumal, že ani tupoúhlý trojúhelník nemůže být řezem krychle.

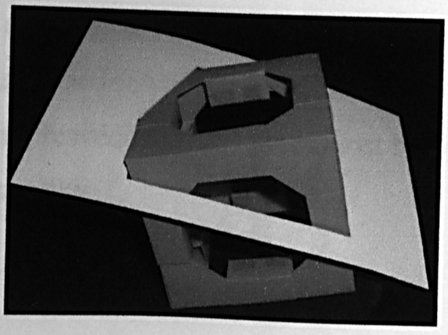
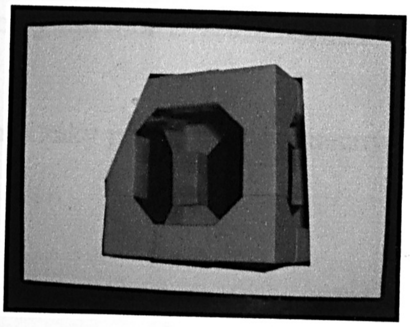
Následovalo ověření závěrů pomocí Cabri geometrie. V souboru „Krychle - trojúhelník“ Honza prozkoumal možné velikosti úhlů a stran trojúhelníkových řezů.

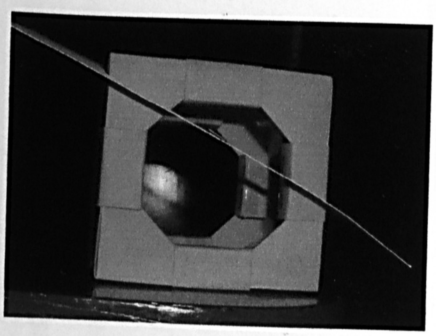
Šestý úkol zněl:

„Šel by nasadit pětiúhelník?

Jeden jsem připravila. Zkus ho nasadit na krychli.“

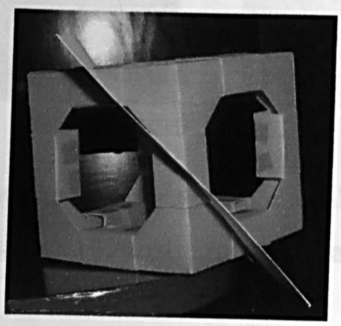
Honza mě překvapil jak rychle dokázal připravený pětiúhelník nasadit.

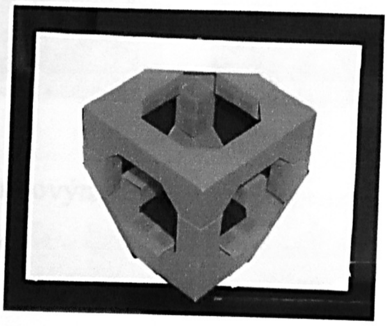





Poslední úkol se týkal šestiúhelníka:
„Šel by nasadit šestiúhelník?
Jeden jsem připravila. Zkus ho nasadit na krychli.“

Nasazení připraveného šestiúhelníka dalo Honzovi velkou práci, ale také to zvládl.





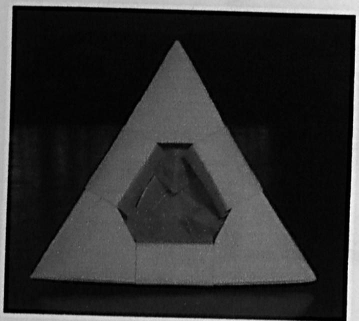
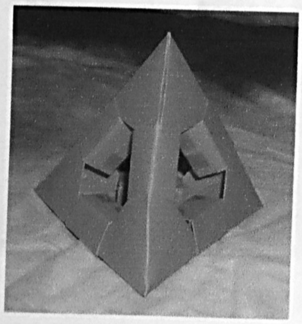
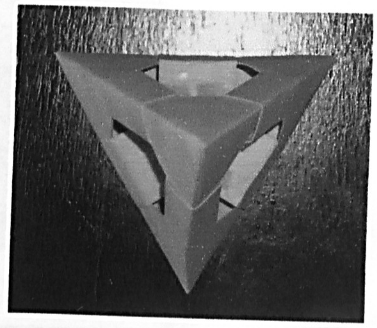
Nakonec opět prozkoumal v Cabri geometrii v souborech „Krychle - pětiúhelník“ a „Krychle - šestiúhelník“ řezy krychle rovinou protínající pět stěn krychle a rovinou procházející všemi šesti stěnami krychle.

Myslím, že tato část experimentu byla úspěšná. Nečekala jsem, že plnění úkolů půjde Honzovi tak snadno. Práce ho zjevně bavila i přesto, že trvala přes hodinu. Domnívám se, že si utvořil velmi propracovanou představu o řezech těles. Navíc ji má spojenou s činnostní zkušeností a věřím, že i s příjemnými emocemi. To by mu mohlo velmi usnadnit osvojování si látky týkající se řezů těles na střední škole.

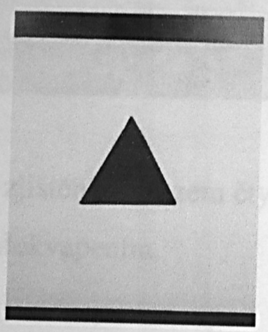
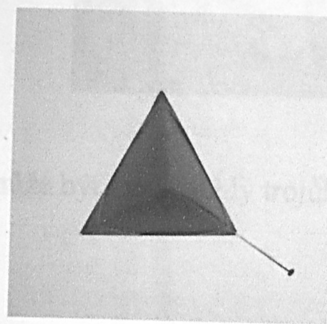
Jsem přesvědčena, že tato činnost by byla pro žáky příjemným a užitečným zpestřením hodin matematiky.

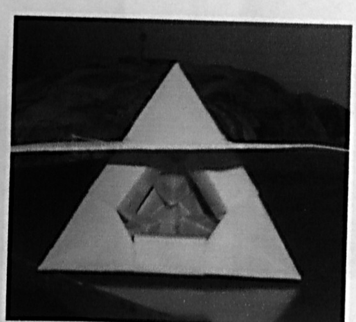
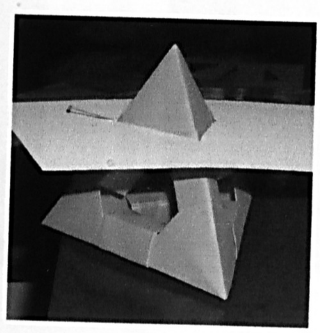
5.2.4.8. Řezy čtyřstěnu (náměty vyplývající z průběhu experimentu)

Obdobným způsobem je možné zkoumat řezy čtyřstěnu.

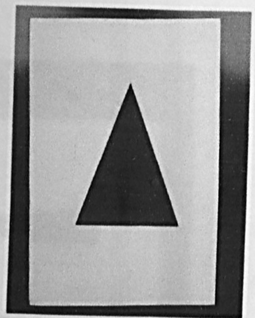
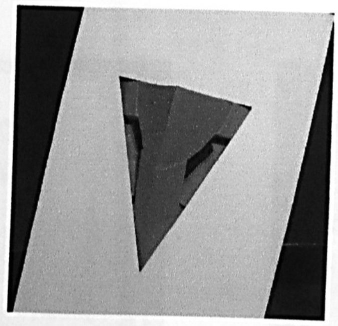
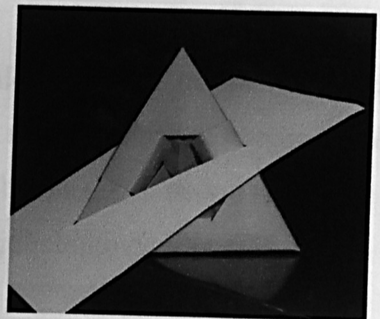
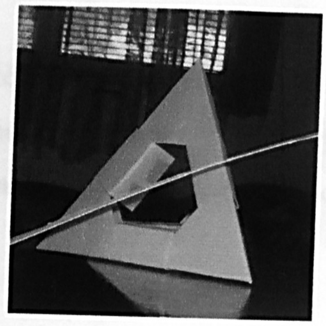




Žáci mohou nejprve bádat nad trojúhelníkovými řezy. Mohou prozkoumat polohu rovin, jejichž řezem je rovnostranný trojúhelník.

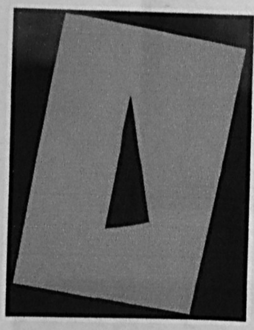
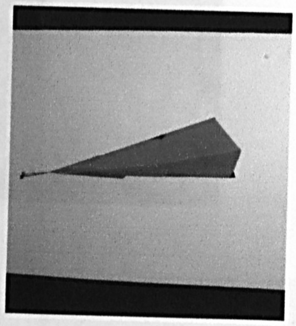
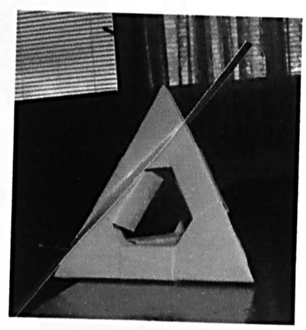
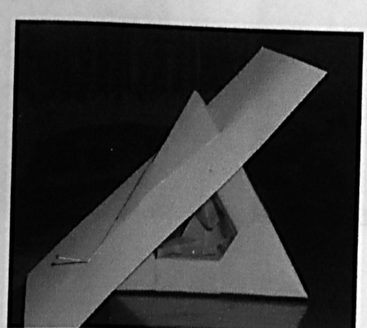
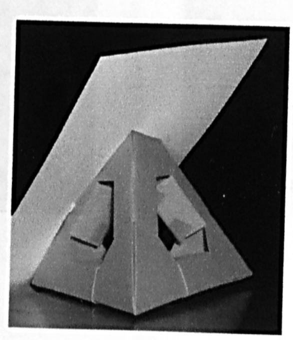



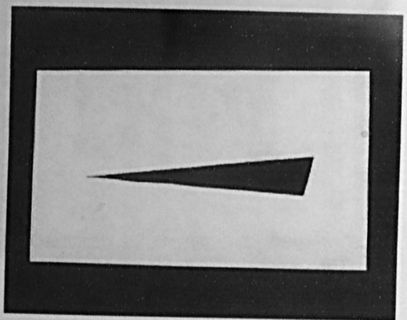
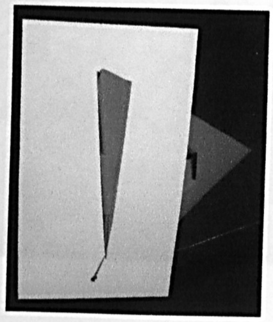
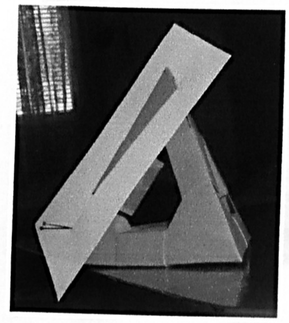
Dále mohou zkoumat trojúhelníky rovnoramenné.

Myslím, že zjištění, že řezem čtyřstěnu může být i pravoúhlý trojúhelník, bude pro žáky velikým překvapením.

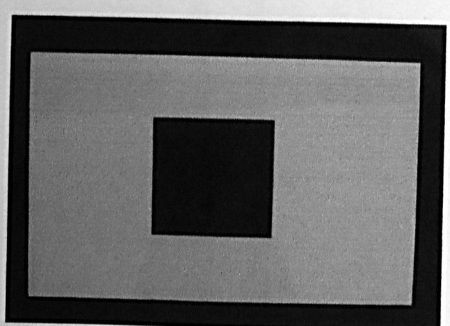
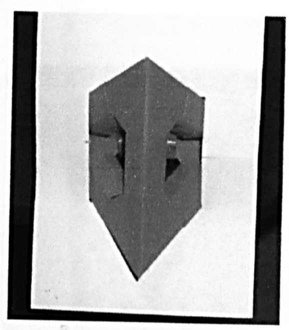






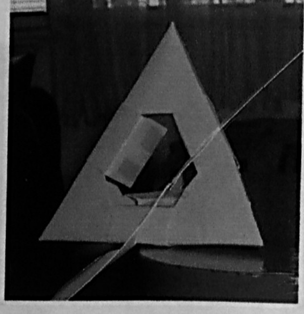
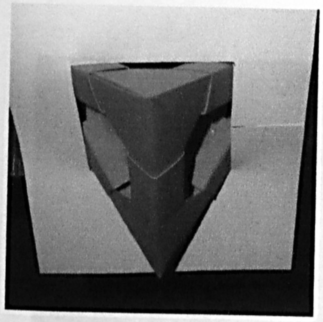
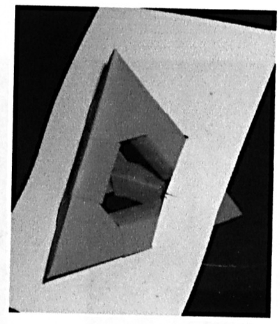
Tím spíše jim nebude připadat samozřejmá skutečnost, že řezy čtyřstěnu mohou být i trojúhelníky tupoúhlé.

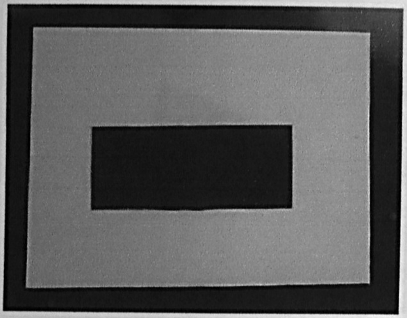
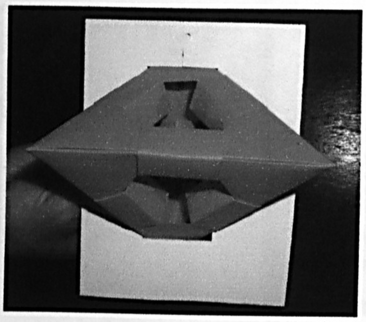
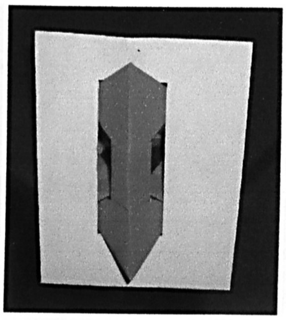
Pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky žáci pravděpodobně nebudou schopni vymyslet náhodně. Jejich rozměry bude tedy nutné nalézt pomocí Cabri geometrie (viz příloha 6: Čtyřstěn – trojúhelník). Zde budou moci také ověřit a upřesnit své závěry o možných tvarech a rozměrech trojúhelníkových řezů.

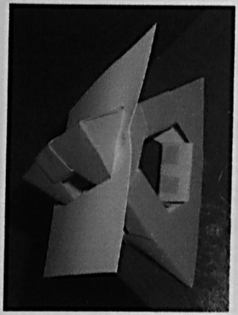
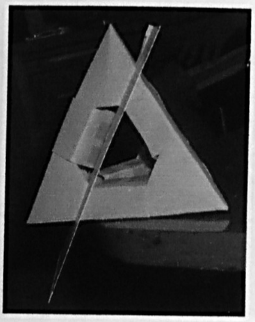
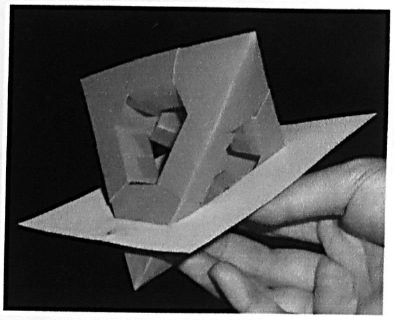
Domnívám se, že i nasazování čtverce na čtyřstěn bude pro mnohé žáky fascinující.

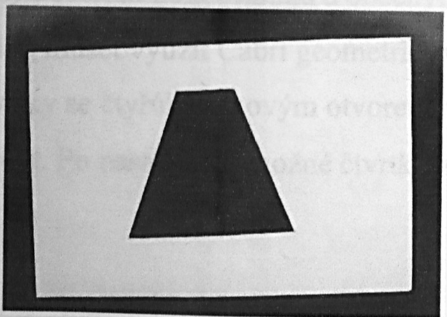
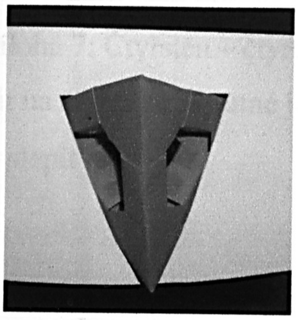




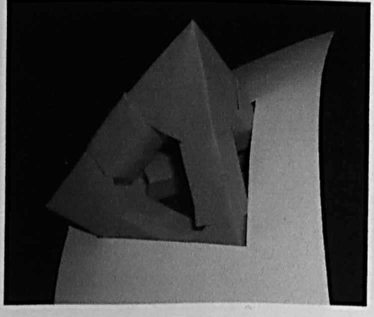
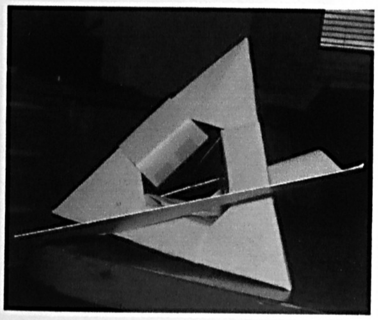
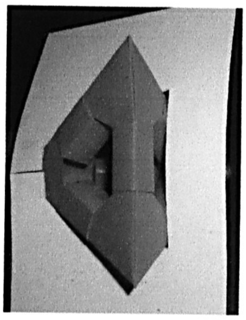
Také mohou zkoumat řezy, které mají tvar různých obdélníků.

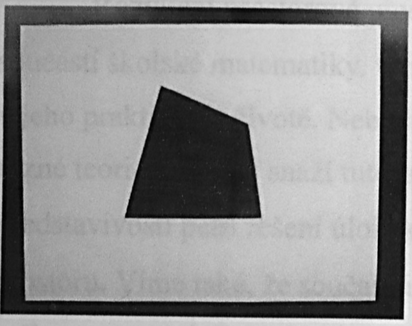
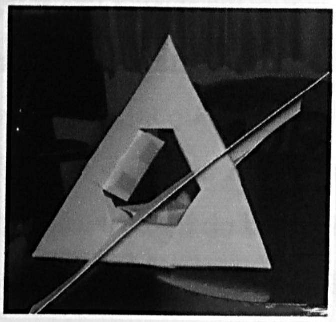
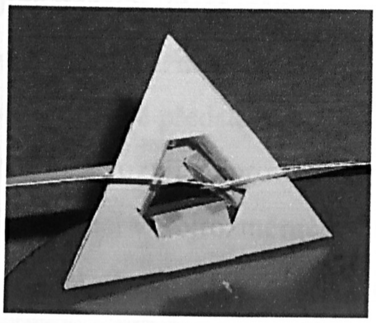
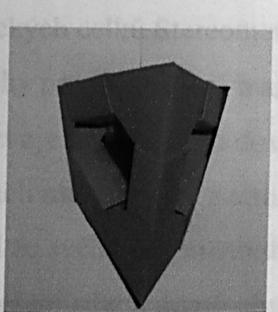
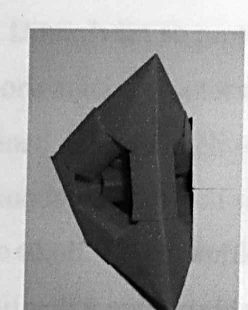
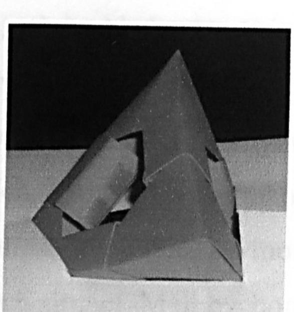




Dále mohou zhotovovat řezy s tvarem rovnoramenných lichoběžníků.

Mohou zkusit nasadit na čtyřstěn i některé obecné čtyřúhelníky.

Řezy s tvarem čtverce a obdélníků by mohli žáci navrhnout i pomocí měření na modelu. Řezy s tvarem lichoběžníků a obecných čtyřúhelníků však pravděpodobně sami nenajdou a budou muset využít Cabri geometrie (viz příloha 7: Čtyřstěn – čtyřúhelník). Aby bylo možné čtvrtky se čtyřúhelníkovým otvorem nasadit na čtyřstěn, je nutné je v jednom místě rozstřihnout. Po nasazení je možné čtvrtku znovu slepit lepenkou.

5.2.5. Závěr

Rozvíjení prostorové představivosti patří k důležitým kompetencím, které jsou součástí školské matematiky. Orientace v prostoru a času je nezbytná pro každého člověka v jeho praktickém životě. Nebudu zde rozebírat otázku podstaty prostorové představivosti a různé teorie, které se snaží tuto podstatu postihnout. Z praxe víme, že k rozvíjení prostorové představivosti patří řešení úloh, které žáky uvádějí do konkrétních situací v trojrozměrném prostoru. Víme také, že současná školská matematika (na celém světě) věnuje těmto otázkám málo pozornosti. Pokud se jimi zabývá, jde většinou o standardní úlohy tradičně zařazované do tématických celků Stereometrie. Domnívám se proto, že je třeba hledat nové situace a tedy i nové úlohy pro žáky, které budou orientaci v prostoru podporovat. Důležitá přitom je i otázka rozvoje motorických dovedností. Žáci by měli sami vytvářet modely různých druhů, sami by měli manipulovat s těmito modely v různých situacích, a to především takových, které znají ze svého bezprostředního okolí. To je například otázka řezů těles rovinou. Stavební řešení střech domů obsahují velké množství takových situací. Měli bychom proto žáky učit, jak přitom využívat matematických poznatků získaných ve škole. Moje výsledky z experimentu svědčí o tom, že vhodně formulované úlohy a přiměřená motivace žáků usnadňují propojení praktické zkušenosti s matematickými poznatky a dovednostmi. Musím přiznat, že příprava nástrojů, které jsem užívala, byla náročná. Využití Cabri geometrie například k zajištění dynamického znázornění tvaru řezu při pohybu bodů po hranách tělesa předpokládá širší znalosti v práci s Cabri geometrii a nepředpokládám, že by si každý učitel sám podobný nástroj zpracoval. Snažila jsem se tím naznačit možnosti další tvorby pomůcek pro rozvíjení prostorové představivosti. Výsledky experimentu naznačují, že tyto postupy jsou přiměřené i žákům bez vyšších znalostních nebo motivačních dispozic pro studium matematiky. Se stejným uspokojením hodnotím průběh části experimentu zabývající se geometrií překládaného papíru. Považuji za užitečné, že se tento způsob modelování v poslední době objevuje ve stále širší míře ve škole. Nejde jen o to, že geometrie překládaného papíru představuje „silnější" soubor konstrukčních prostředků než je klasická euklidovská geometrie. Z didaktického hlediska jde jednak o alternativní způsob modelování, jímž se posiluje efektivita pojmotvorného procesu, jednak o ryze praktickou záležitost umožňující dosažení stavu, kdy ve třídě má každý žák k dispozici svůj vlastní model (navíc v konstruktivistickém duchu samostatně vytvořený). I v této záležitosti potvrdily výsledky mého experimentu, že navrhované postupy jsou přiměřené „standardním" žákům, že jsou schopni je zvládnout a využít k úspěšnému průběhu výuky. Svoje výsledky jsem nezpracovávala kvantitativně s využitím statistických metod. Nebylo by to ani věrohodné, protože rozvíjení prostorové představivosti doposud představuje oblast pedagogického výzkumu využívajícího především kvalitativní analýzy. Omezila jsem se proto především na laboratorní formy experimentu. Přínos své práce vidím především v hledání nových přístupů k řešení didaktického zpracování klasických stereometrických témat. Velmi prospěšné přitom bylo využití Cabri geometrie.

6. Použitá literatura

ARNHEIM, R. *Art and visual perception*. Berkeley & Los Angeles: University of California Press, 1967.

BARTSCH, H.-J. *Matematické vzorce*. Praha: SNTL, 1983.

CLAPAREDE, E. *Psychologie dítěte a experimentální pedagogika II*. Praha a Brno: Ústřední spolek jednot učitelských na Moravě a Dědictví Komenského v Praze, 1928.

GARDNER, H. *Dimenze myšlení*. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3

HEJNÝ, JIROTKOVÁ, STEHLÍKOVÁ: *Analytická geometrie*. Praha: UK Praha, 1996.

HEJNÝ, STEHLÍKOVÁ. *Číselné představy dětí*. Praha: UK - Pedagogická fakulta, 1999. ISBN 80-86039-98-6

MAŇÁK, J. *Nárys didaktiky*. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 1995. ISBN 80-210-124-6.

PIAGET, J. *Psychologie inteligence*. Praha : Portál, 1999. ISBN 80-7178-309-9

PRŮCHA, J; WALTEROVÁ, E; MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-579-2.

SKALKOVÁ, J. *Obecná didaktika*. Praha: ISV, 1999. ISBN 80-85866-33-1.

ŠVRČEK, J; VANŽURA, J. *Geometrie trojúhelníka*. Praha: SNTL, 1988.

www.origami.cz

7. Seznam příloh

Všechny přílohy jsou na přiloženém CD.

Textové dokumenty:

1. Čtyřstěn z jednoho listu papíru – obrázkový návod
2. Čtyřstěn ze dvou listů papírů – obrázkový návod
3. Krychle - obrázkový návod
4. Čtyřstěn z jednoho listu papíru – obrázkový návod doplnění slovními instrukcemi
5. Čtyřstěn ze dvou listů papírů – obrázkový návod doplnění slovními instrukcemi
6. Krychle - obrázkový návod doplnění slovními instrukcemi
7. Čtyřstěn z jednoho listu papíru – návod bez obrázků
8. Modelování střechy s komínem – zadání
9. Řezy krychle – zadání
10. Modelování střechy s komínem – 8. skupina
11. Modelování střechy s komínem – Honzův zápis

Pracovní soubory v Cabri geometrii:

1. Krychle – trojúhelník
2. Krychle – rovnoběžník
3. Krychle – lichoběžník
4. Krychle – pětiúhelník
5. Krychle – šestiúhelník
6. Čtyřstěn – trojúhelník
7. Čtyřstěn – čtyřúhelník
8. Tečna paraboly
9. Šestý axiom
10. Kvadratrix
11. Kvadratrix – trisekce úhlu