

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Lukáš Timko

# **Gravitační čočkování kombinací spojitě a diskrétní hmoty**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Gravitační čočkování kombinací spojitě a diskrétní hmoty

Autor: Lukáš Timko

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Cílem této práce je zkoumat vliv perturbace hmotným bodem na kaustickou strukturu modelu Navarra, Frenka a Whitea aplikací metody zpětného střelení paprsků. Speciální pozornost je zaměřena na popis přechodů mezi jednotlivými kaustickými topologiemi při změně relativní hmotnosti a polohy hmotného bodu. Ukazuje se, že při kombinaci diskrétní a spojitě hmoty se objevují typy přechodů, jako eliptická umbilika, lips a pravděpodobně i hyperbolická umbilika, které se v čistě diskrétních modelech nevyskytují. Hlavním, a poněkud překvapivým, výsledkem práce je zjištění, že i při relativní hmotnosti bodu  $10^{-4} - 10^{-3}$  je perturbace tak silná, že vyvolá změny v kaustické struktuře velikostně srovnatelné s původními kaustikami.

Klíčová slova: gravitační čočky, halo temné hmoty, kupy galaxií

Title: Gravitational lensing by combined continuous and discrete matter

Author: Lukáš Timko

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. David Heyrovský, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: The aim of this work is to investigate the influence of perturbation by point mass on the caustic structure of the Navarro-Frenk-White model using the inverse ray shooting method. We specifically focus on the description of metamorphoses between different caustic topologies when changing the relative mass and position of the point. It turns out that in the combined model of discrete and continuous matter there appear some types of metamorphoses, such as elliptical umbilic, lips and probably also hyperbolic umbilic, that do not exist in purely discrete models. The main, and somewhat surprising, result of the work is the finding that even at the relative mass of the point  $10^{-4} - 10^{-3}$  the perturbation is strong enough to cause changes in the caustic structure which are in size comparable to the original caustics.

Keywords: gravitational lenses, dark matter halo, galaxy clusters

Rád bych zde poděkoval především svému vedoucímu práce Mgr. Davidu Heyrovskému, Ph.D. za perfektní vedení práce, řadu cenných připomínek a jeho neskutečnou ochotu a trpělivost. Dále bych rád poděkoval mé rodině za podporu během studia a poskytnuté zázemí. Nakonec bych chtěl poděkovat Kristíně Nešporové za jazykovou korekturu této práce.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Základní principy gravitačního čočkování</b>	<b>4</b>
2.1	Čočkovací rovnice . . . . .	4
2.2	Einsteinův poloměr a kritická hustota . . . . .	5
2.3	Zjasnění a čočkovací potenciál . . . . .	6
2.3.1	Singularity zjasnění . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Jednoduché modely čoček se spojitou hmotou</b>	<b>11</b>
3.1	Singulární izotermální sféra . . . . .	11
3.2	Model Navarra, Frenka a Whitea (NFW) . . . . .	12
3.3	Elipsoidální model . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Kombinace NFW modelu a hmotného bodu</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Numerický výpočet map zjasnění</b>	<b>16</b>
5.1	Metoda zpětného střelení paprsků . . . . .	16
5.2	Hlavní simulační program . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Vlastnosti kombinace NFW modelu a hmotného bodu</b>	<b>18</b>
6.1	Volba parametrů modelu . . . . .	18
6.2	Analytická limita pro centrální polohu bodu . . . . .	18
6.3	Mapa kaustických přechodů . . . . .	23
6.4	Teoretická předpověď dvojčočkových přechodů . . . . .	23
6.5	Eliptická umbilika a trojcípé kaustiky . . . . .	29
6.6	Přechody při malém $\theta_p$ . . . . .	29
<b>7</b>	<b>Diskuse</b>	<b>37</b>
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>39</b>
	<b>Literatura</b>	<b>41</b>

# 1. Úvod

První úvahy o tom, že by hmotné objekty mohly „na dálku“ ohýbat světelné paprsky, vyslovil již Newton roku 1704 ve své knize *Opticks*. O téměř sto let později, v roce 1801, se pak německý astronom J. Soldner zabýval určením chyby pozic hvězd v důsledku ohybu světla. Spočítal při tom trajektorii paprsku, který projde blízko sféricky symetrického hmotného tělesa.

Přelom pak nastal roku 1915, kdy Einstein z tehdy již téměř hotové obecné teorie relativity v článku (Einstein, 1915) odvodil, že úhel, o který se ohne světelný paprsek, je dvakrát větší, než předpovídá Newtonova teorie gravitace. Experimentálně pak tento výsledek o čtyři roky později potvrdila výprava Arthura Eddingtona, kdy se jim podařilo změřit změnu poloh některých hvězd v důsledku ohybu světla okolo Slunce v průběhu úplného zatmění. Tento výsledek významně poukázal na správnost obecné teorie relativity a díky němu se stal Einstein celosvětově známým.

Einstein i další si uvědomovali, že při příznivém postavení hvězdy-čočky a hvězdy-zdroje by mohlo vzniknout více obrazů hvězdy-zdroje a tyto obrazy by byly zjasněny, což je koncept gravitační čočky. Sám Einstein ale zastával názor, že taková konstelace je velmi nepravděpodobná, navíc by obrazy byly tak blízko, že by byly nerozlišitelné, nemělo tedy podle něj valný smysl se tímto konceptem dále zabývat. Zmiňme zde známou historku, kdy Einstein na popud českého elektroinženýra Rudiho W. Mandla publikoval článek (Einstein, 1936) o efektu gravitační čočky, v poznámce editorovi časopisu ale napsal: „Děkuji Vám za spolupráci s touto drobnou poznámkou, kterou ze mě pan Mandl vymámil. Nemá velkou cenu, ale učiní tomu hochovi radost.“<sup>1</sup> Naštěstí se Einstein mýlil a my dnes můžeme efekt gravitační čočky pozorovat u celé řady objektů.

Roku 1937 přišel Fritz Zwicky (Zwicky, 1937) s nápadem, že efekt gravitační čočky by měl být pozorovatelný, pokud jako čočku nepoužijeme hvězdu, ale „extragalaktickou mlhovinu“, což byl tehdejší název pro galaxie. Na objev první gravitační čočky jsme si ale museli počkat až do roku 1979, kdy byl pozorován dvojitý obraz kvasaru (Walsh a kol., 1979). Jako čočka posloužila mezilehlá galaxie.

Od té doby se s gravitačními čočkami takřkajíc roztrhl pytel. Záhy byly pozorovány i vícenásobné obrazy nebo téměř dokonalé Einsteinovy prstence, které nastávají, když jsou zdroj, kruhově symetrická čočka a pozorovatel v jedné přímce. Dnes již gravitační čočkování není pouze zajímavým efektem, ale je prakticky používáno jako nástroj v různých oblastech astronomie, od objevování exoplanet, až po kosmologické aplikace.

Jednou z důležitých aplikací je mapování temné hmoty v kupách galaxií. Temná hmota je elektromagneticky neinteragující, či jen velmi slabě interagující látka, jedinou možností, jak ji detekovat, je tedy její gravitační působení. Při metodě mapování gravitačním čočkováním působí kupa galaxií jako čočka deformující obrazy galaxií v pozadí, z těchto deformací je pak možné určit rozložení hmoty v čočce, tedy v našem případě v kupě. Kupy se při tomto procesu modelují spojitými modely hmoty, nicméně jednotlivé galaxie v kupě jsou natolik malé, že by mohly být aproximovány hmotnými body.

---

<sup>1</sup>Doslovně převzato z (Boháček, 1997).

Cílem naší práce pak bylo zjistit, jak se liší vlastnosti takového kombinovaného modelu spojitě hmoty a hmotných bodů od čistě spojitěho modelu. Protože dle našich informací zatím žádný z této třídy kombinovaných modelů zkoumán nebyl, je cílem prvně prozkoumat vlastnosti kombinace jednoho bodu a jednoduchého modelu spojitě hmoty.

V kapitole 2 si představíme formalismus a základní pojmy, na kterých je gravitační čočkování vybudováno. Speciálně se seznámíme s katastrofami prvního a druhého řádu, které mohou v čočkování nastat, protože jejich výskyt je důležitou vlastností modelu. V kapitole 3 si ukážeme několik jednoduchých modelů spojitě hmoty, mezi nimi i model Navarra, Frenka a Whitea (Navarro a kol., 1996), který budeme dále používat, a v následující kapitole jej zkombinujeme s hmotným bodem. Kapitola 5 pak představuje metodu zpětného střílení paprsků, což je jeden ze způsobů výpočtu mapy zjasnění. Kapitola 6 je pak stěžejní kapitolou celé práce, neboť v ní rozebíráme vlastnosti námi použitého kombinovaného modelu. Práci pak uzavírá diskuse v kapitole 7 a závěr v kapitole 8.

# 2. Základní principy gravitačního čočkování

## 2.1 Čočkovací rovnice

Vztahy v následující kapitole byly převzaty z práce Wambsganss (1998). Předpokládáme tenkou čočku, tedy takovou čočku, kde je její tloušťka zanedbatelná oproti její vzdálenosti od zdroje  $D_{LS}$  i od pozorovatele  $D_L$ . Dále pro jednoduchost předpokládáme kruhově symetrický případ. Náčrt takové čočky vidíme na Obrázku 2.1. Vzdálenost  $\xi$  je impaktní parametr paprsku,  $\theta$  je úhel mezi čočkou a obrazem z pohledu pozorovatele,  $\beta$  je úhel mezi čočkou a zdrojem z pohledu pozorovatele,  $\tilde{\alpha}$  je úhel ohybu paprsku a  $\alpha$  je tzv. redukovaný úhel ohybu paprsku, tedy úhel mezi zdrojem a obrazem z pohledu pozorovatele.

Poznamenejme zde, že vzdálenosti  $D_L$ ,  $D_{LS}$  i vzdálenost zdroje od pozorovatele  $D_S$  jsou tzv. úhlové vzdálenosti<sup>1</sup>. Ta je definována jako podíl skutečné velikosti objektu, jehož vzdálenost měříme a jeho úhlové velikosti, jak je viděna z místa, odkud vzdálenost měříme, zpravidla tedy ze Země.

Dle Obrázku 2.1 pak za předpokladu  $\theta, \beta, \tilde{\alpha} \ll 1$  platí vztahy

$$\begin{aligned} \xi &= D_L \theta, \\ \theta D_S &= \beta D_S + \tilde{\alpha} D_{LS}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Substitucí  $D_S \alpha = D_{LS} \tilde{\alpha}$  pak získáme čočkovací rovnici ve tvaru

$$\beta = \theta - \alpha(\theta). \quad (2.2)$$

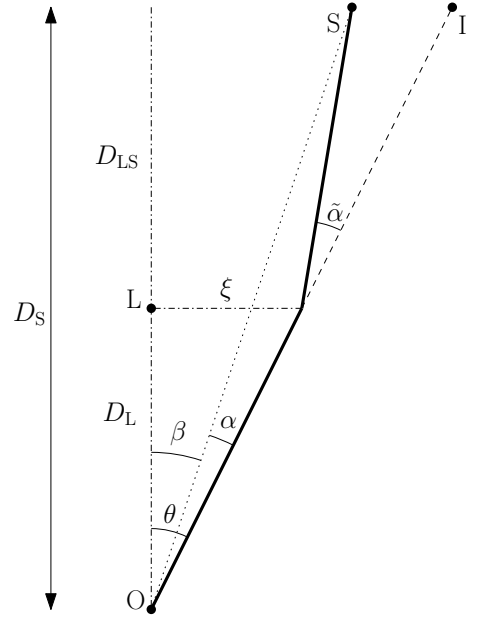
Tu je možné zobecnit i pro nesymetrický případ

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}). \quad (2.3)$$

Vektory v tomto případě leží v rovině nebe, tj. v rovině kolmé na směr čočka- pozorovatel.

Pro úhel odklonu paprsku  $\tilde{\alpha}$  pro kruhově symetrický případ v první postnewtonovské aproximaci platí

$$\tilde{\alpha}(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c_s^2} \frac{1}{\xi}, \quad (2.4)$$



Obrázek 2.1: Náčrt k vysvětlení pojmů v čočkové rovnici. Vysvětlivky: S – zdroj, I – obraz, L – čočka, O – pozorovatel, tučně – světelný paprsek.

<sup>1</sup>Anglicky angular diameter distance.



kde  $G$  je gravitační konstanta,  $c_s$  rychlost světla a  $M(\xi)$  hmotnost pod poloměrem  $\xi$ .

Pro úhel odklonu způsobený obecně rozloženou spojitou hmotou pak platí

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c_s^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \Sigma(\vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi', \quad (2.5)$$

kde  $\Sigma(\vec{\xi})$  je plošná hustota hmoty. Tu obdržíme integrací prostorové hustoty přes tloušťku čočky.

## 2.2 Einsteinův poloměr a kritická hustota

Dosazením z rovnic (2.1) a (2.4) do rovnice (2.2) obdržíme čočkovací rovnici pro bodovou čočku ve tvaru

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S D_L} \frac{4GM}{c_s^2} \frac{1}{\theta},$$

kterou je výhodné přepsat do tvaru

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}, \quad (2.6)$$

kde

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_S D_L} \frac{4GM}{c_s^2}}$$

je tzv. Einsteinův poloměr. Jeho význam odhalíme, pokud do rovnice (2.6) dosadíme  $\beta = 0$ , tedy případ, kdy je zdroj přímo za čočkou. Vznikne pak jediný obraz v podobě kružnice o poloměru  $\theta_E$ . V této práci bude obdoba Einsteinova poloměru hrát především roli přirozené úhlové škály.

Úhel odklonu pro konečnou kruhovou čočku o poloměru  $\xi_0$  s konstantní plošnou hustotou  $\Sigma$  je za předpokladu  $\xi < \xi_0$  roven

$$\alpha(\xi) = \frac{4GD_{LS}}{c_s^2 D_S} \frac{\Sigma \pi \xi^2}{\xi}. \quad (2.7)$$

Definujme kritickou hustotu výrazem

$$\Sigma_{\text{cr}} = \frac{c_s^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_{LS} D_L}.$$

Pak můžeme výraz (2.7) přepsat za pomoci vztahu (2.1) do tvaru

$$\alpha(\theta) = \frac{\Sigma}{\Sigma_{\text{cr}}} \theta = \kappa \theta.$$

Nově zavedená veličina  $\kappa$  se nazývá konvergence a jde o plošnou hustotu v jednotkách kritické hustoty.

## 2.3 Zjasnění a čočkovací potenciál

Protože plošná jasnost se při čočkování zachovává, je zjasnění určeno úhlovým zvětšením obrazu, a je tedy definováno vztahem

$$\mu = \frac{\theta \, d\theta}{\beta \, d\beta}.$$

Zjasnění můžeme taktéž popsat pomocí Jacobiho matice

$$A_{ij} = \frac{\partial\beta_i}{\partial\theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial\alpha_i}{\partial\theta_j}, \quad (2.8)$$

kde jsme při úpravě použili rovnici (2.3).

Pro praktické výpočty je výhodné zavést čočkovací potenciál  $\psi$  tak, aby platilo  $\vec{\alpha} = \nabla_{\vec{\theta}}\psi$ . Z rovnice (2.5) lze s použitím definice konvergence odvodit vztah

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'| \, d^2\theta'. \quad (2.9)$$

Aplikací Laplaceova operátoru na rovnici (2.9) obdržíme vztah

$$\Delta\psi(\vec{\theta}) = 2\kappa(\vec{\theta}), \quad (2.10)$$

neboť platí  $\Delta \ln |\vec{x}| = 2\pi\delta(\vec{x})$ , kde  $\delta(\vec{x})$  je dvourozměrná  $\delta$ -funkce. Fakt, že je čočkovací potenciál řešením rovnice (2.10), je významný mj. pro hledání potenciálu v kruhově symetrických situacích.

S použitím čočkovacího potenciálu pak můžeme rovnici (2.8) přepsat do tvaru

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_i\partial\theta_j}. \quad (2.11)$$

Zjasnění pak můžeme pomocí jakobiánu  $A$  zapsat jako

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\det A}.$$

Spočítáme-li pro danou polohu zdroje  $\vec{\beta}$  zjasnění jeho obrazů  $\tilde{\mu}_i$ , celkové zjasnění získáme ze vztahu

$$\mu = \sum_i |\tilde{\mu}_i|.$$

Závislost  $\mu(\vec{\beta})$  nazýváme mapou zjasnění. Udává celkové zjasnění bodového zdroje jako funkci jeho polohy  $\vec{\beta}$ .

Pokud si zavedeme shear  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$  o složkách

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_1\partial\theta_1} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_2\partial\theta_2} \right), \\ \gamma_2 &= \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_1\partial\theta_2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

můžeme pomocí rovnic (2.11) a (2.10) přepsat Jacobiho matici do tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix},$$

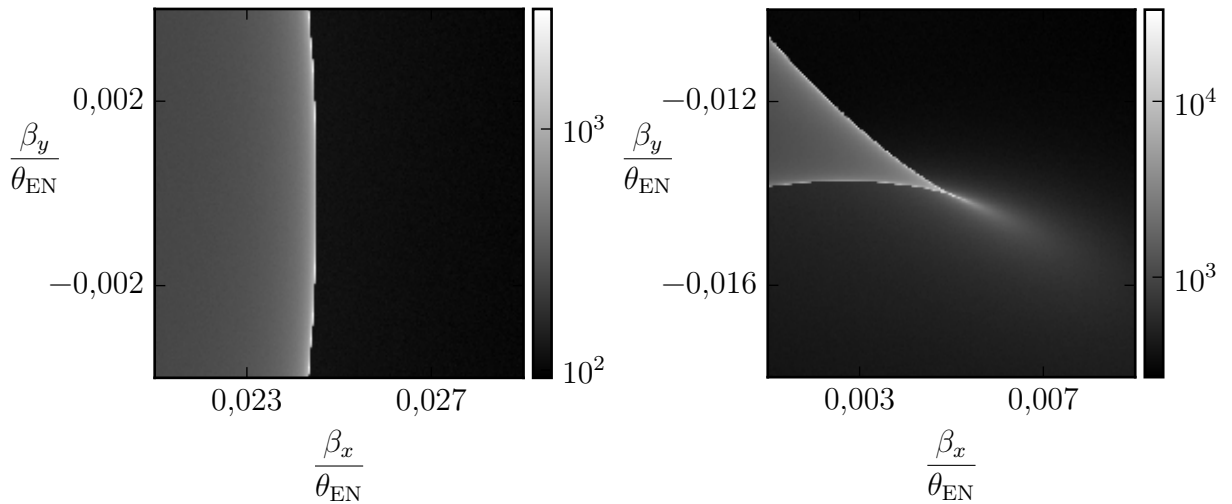
kde  $\gamma$  je velikost shearu.

Lze ukázat, jak je uvedeno např. v (Schneider a kol., 1992, kap. 5.2), že matice  $A$  má vlastní čísla  $\lambda_t = 1 - \kappa + \gamma$  a  $\lambda_r = 1 - \kappa - \gamma$ . Příslušné vlastní vektory pak odpovídají radiálnímu a tečnému směru. A protože  $\det A = \lambda_r \lambda_t$ , projeví se v místech s nekonečným zjasněním jen jedno z těchto vlastních čísel. Množina bodů  $\vec{\theta}$ , pro které  $\lambda_t = 0$ , tvoří tzv. radiální kritické křivky, body, pro které  $\lambda_r = 0$ , tvoří tzv. tangenciální kritické křivky.

### 2.3.1 Singularity zjasnění

Speciální význam při analýze map zjasnění mají tzv. *kaustiky*, místa, kde zjasnění bodového zdroje diverguje. Jejich divergentně zjasněné obrazy se pak nazývají *kritické křivky*. Příkladem může být, v případě bodové čočky, bodová kaustika ve středu a odpovídající kritická křivka ve tvaru kružnice o Einsteinově poloměru. Zajímavou vlastností kaustik je, že pokud přes ni přejde zdroj, vzniknou či zaniknou dva obrazy.

Kaustiky často nejsou hladké křivky, ale sestávají z hladkých částí, tzv. *foldů* a jejich napojení, tzv. *cuspuů*, vizte Obrázky 2.2 a 2.3.



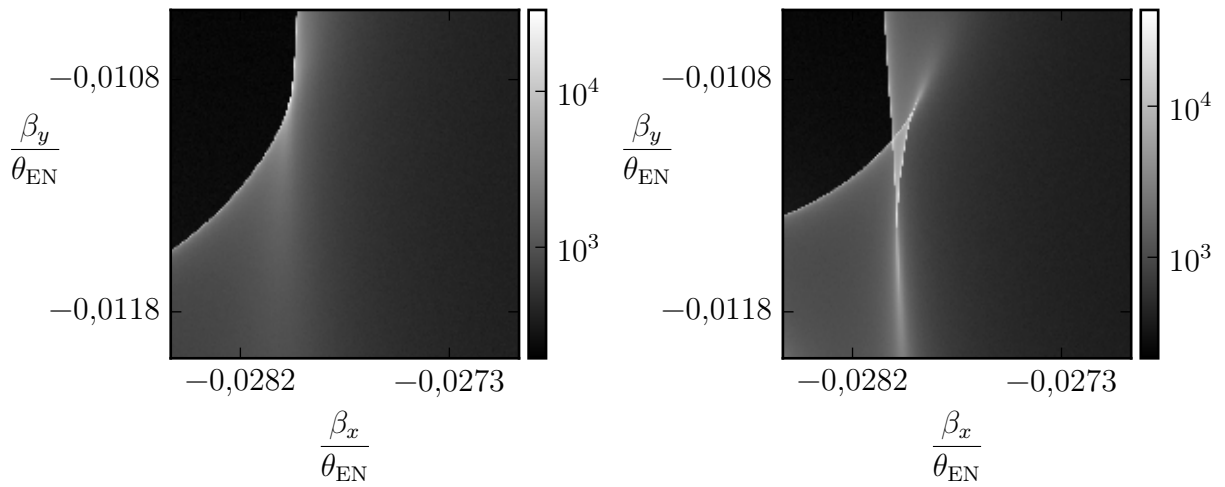
Obrázek 2.2: Detail mapy zjasnění v okolí foldu. Barevná škála udává celkové zjasnění cuspu.  $\mu$ . Poloha je udána v jednotkách Einsteinova poloměru  $\theta_{\text{EN}}$ .

Kaustiky mezi sebou mohou při změně jednoho parametru modelu přecházet dle (Schneider a kol., 1992, kap. 6.3) pěti základními způsoby. Prvním z nich je přechod *beak-to-beak* (Obrázek 2.5), kdy se dotknou dvě kaustiky, jejich části se přepojí do jiných dvou kaustik uspořádaných kolmo k původním, a ty se zase oddělí.

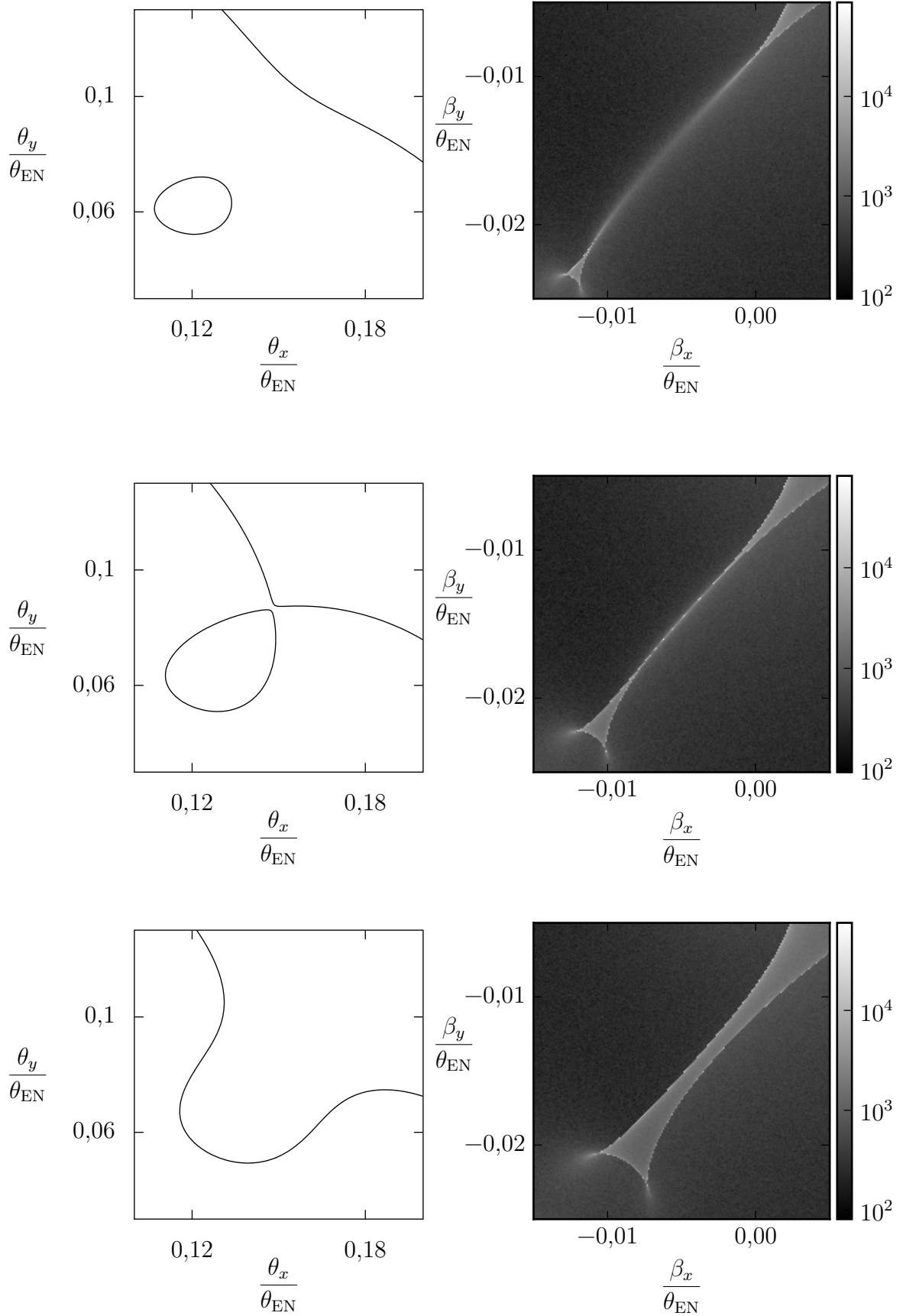
Druhým přechodem je *swallowtail* (Obrázek 2.4), při kterém na foldu vyroste kaustika tvarem připomínající ocas vlaštovky. Speciálním případem tohoto přechodu pak je *butterfly*, který se od obecného swallowtailu liší tím, že vyroste na cuspu.

Beak-to-beak a swallowtail jsou jediné přechody, které se vyskytují v roviných čočkách složených pouze z hmotných bodů. Zbylé přechody vyžadují složitější model nebo čočkování ve více rovinách. Třetím přechodem jsou *lips*, které tvoří kaustika o dvou foldech a dvou cuspech. Ta se s rostoucím parametrem scvrkne do bodu a zanikne.

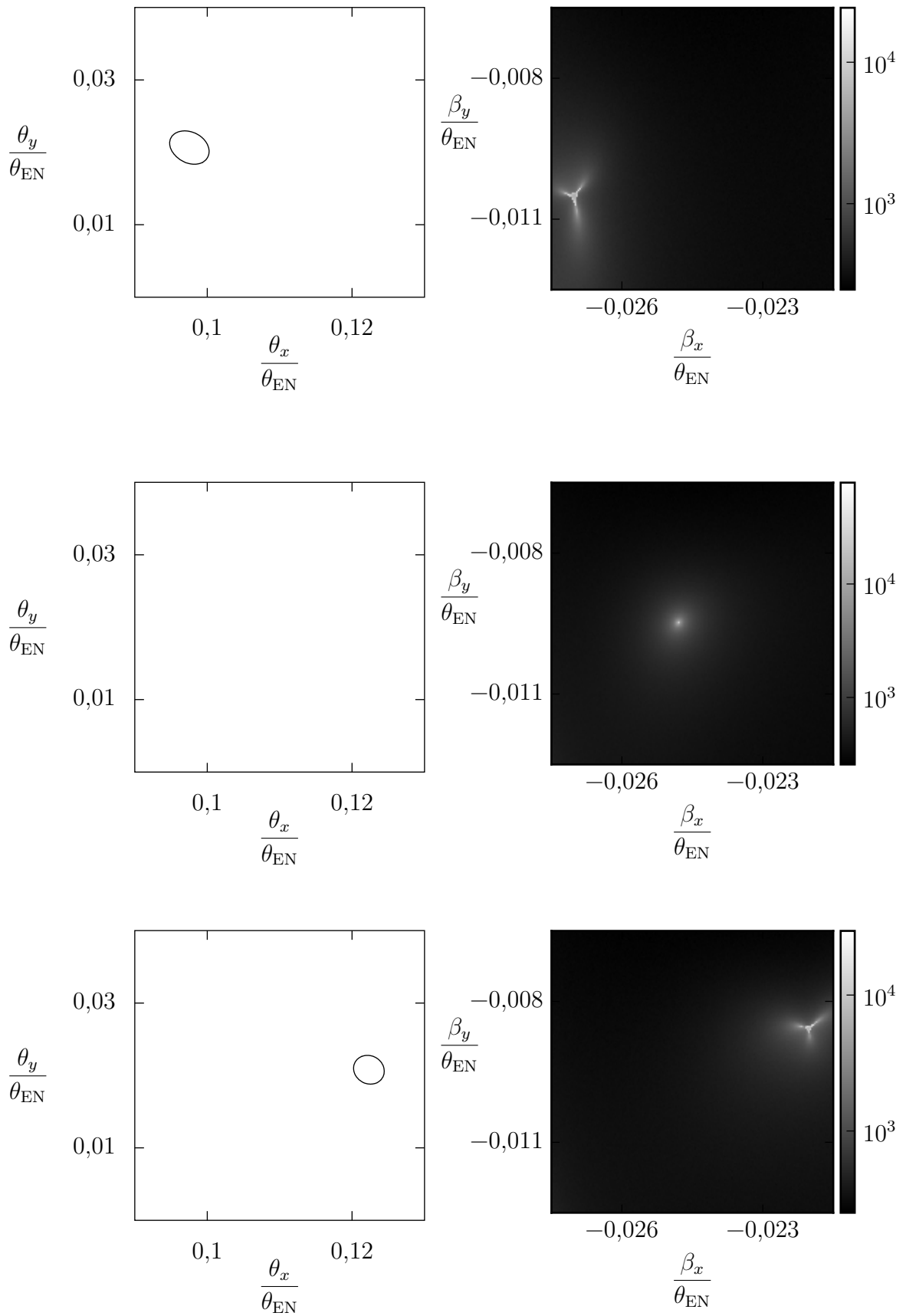
Posledními dvěma přechody jsou *eliptická umbilika* (Obrázek 2.6) a *hyperbolická umbilika*. Eliptická umbilika má tvar trojcípé kaustiky, která se při změně parametru hladce zmenší do bodu a dále znovu vyroste do trojcípé kaustiky. Hyperbolická umbilika sestává ze dvou kusů kaustik, jednoho hladkého a druhého s jedním cuspem. Při změně parametru se kaustiky k sobě přiblíží a projdou bodem dotyku se vzájemným prohozením cuspů a foldu.



Obrázek 2.4: Swallowtail. Mapy zjasnění odpovídají kombinovanému NFW modelu (vizte kapitolu 4) s parametry  $c = 3,5$ ,  $r_s = 1,2\theta_{EN}$ ,  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$  a (zleva)  $\theta_P \in \{0,087; 0,091\}\theta_{EN}$ .



Obrázek 2.5: Beak-to-beak přechod. Kritické křivky a mapy zjasnění odpovídají kombinovanému NFW modelu s parametry  $c = 3,5$ ,  $r_s = 1,2\theta_{\text{EN}}$ ,  $\sigma = 1 \cdot 10^{-3}$  a (shora)  $\theta_{\text{P}} \in \{0,1450; 0,1512; 0,1600\}\theta_{\text{EN}}$ .



Obrázek 2.6: Eliptická umbilika. Kritické křivky a mapy zjasnění odpovídají kombinovanému NFW modelu s parametry  $c = 3,5$ ,  $r_s = 1,2\theta_{\text{EN}}$ ,  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$  a (shora)  $\theta_{\text{P}} \in \{0,1025; 0,1142; 0,1255\}\theta_{\text{EN}}$ .

# 3. Jednoduché modely čoček se spojitou hmotou

V následující kapitole se budeme zabývat popisem jednoduchých, s výjimkou elipsoidálního modelu sféricky symetrických modelů spojitě hmoty z hlediska gravitačního čočkování. Na těchto modelech ukážeme typický postup při analytickém rozboru modelů gravitačního čočkování a ilustrujeme některé jejich vlastnosti. Tyto modely dále v práci srovnáme s vlastnostmi modelu Navarra, Frenka a Whitea kombinovaného s hmotným bodem a ukážeme tak, které vlastnosti „dědí“ od některého z jednodušších modelů a které vzniknou zcela nové.

## 3.1 Singulární izotermální sféra

Jednoduchým příkladem sféricky symetrického modelu spojitě hmoty je singulární izotermální sféra. Jak zmiňuje Narayan a Bartelmann (1999), jde o jednoduchý model galaxie, kdy se jednotlivé hvězdy chovají jako částice ideálního plynu. Z tohoto modelu je odvozeno rozložení hustoty

$$\varrho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2}, \quad (3.1)$$

kde  $\sigma_v$  je jednodimenzionální rychlostní rozptyl.

Integrací (3.1) podél jedné z kartézských os získáme plošnou hustotu

$$\Sigma(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dz = \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{1}{\xi}, \quad (3.2)$$

kde  $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Rovnice (3.2) po přeškálování vede na konvergenci

$$\kappa(\theta) = \frac{2\pi\sigma_v^2 D_{LS}}{D_S c_s^2 \theta}.$$

Nyní vypočteme čočkovací potenciál, ze kterého již přímočaře odvodíme ostatní základní charakteristiky. Ač bychom mohli použít přímo vztah (2.9), je v tomto případě díky středové symetrii problému vhodnější řešit Poissonovu rovnici (2.10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 \psi(\theta)}{\partial \varphi^2} &= 2\kappa(\theta), \\ \frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \theta \frac{d\psi(\theta)}{d\theta} \right) &= 2\kappa(\theta), \\ \psi(\theta) &= 2 \int_0^\theta \frac{1}{\theta'} \int_0^{\theta'} \theta'' \kappa(\theta'') d\theta'' d\theta', \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde jsme v druhé úpravě využili toho, že z důvodu symetrie závisí čočkovací potenciál explicitně pouze na úhlové radiální vzdálenosti  $\theta$  a nikoliv už na úhlu  $\varphi$ .

Nyní již dosazením konvergence singulární izotermální sféry do vztahu (3.3) obdržíme potenciál

$$\psi(\theta) = \frac{4\pi\sigma_v^2 D_{LS}}{D_S c_s^2} \theta.$$

Aplikací gradientu pak získáme úhel odklonu

$$\alpha = \frac{4\pi\sigma_v^2 D_{LS}}{D_S c_s^2}.$$

Zajímavým poznatkem je, že úhel odklonu nezávisí na poloze obrazu  $\theta$ . Dosazením do čočkovací rovnice pak snadno zjistíme, že pro každou polohu zdroje  $\beta$  existuje vždy právě jeden obraz.

Také můžeme nahlédnout, že singulární izotermální sféra má jednu kaustiku v bodě  $\beta = 0$ , která se zobrazuje na kruhovou kritickou křivku o poloměru  $\alpha$ . To, že jde skutečně o kaustiku, můžeme potvrdit vypočtením zjasnění, které by mělo v takovém případě divergovat.

Dle vztahu (2.11) platí

$$\det A(\theta) = 1 - \frac{\alpha}{\theta},$$

který je skutečně pro  $\theta = \alpha$  roven nule, a tedy zde leží kritická křivka.

### 3.2 Model Navarra, Frenka a Whitea (NFW)

Jak bylo ukázáno v práci Navarra, Frenka a Whitea (Navarro a kol., 1996), tento model rozložení hmoty dobře popisuje strukturu chladné temné hmoty v halech kup galaxií i v halech jednotlivých galaxií. Přesto je relativně jednoduchý, proto byl vybrán pro účely této práce jako vhodný kandidát pro analýzu jeho vlastností při kombinaci s bodovou hmotou.

Prostorová hustota dle NFW modelu je

$$\varrho(r) = \frac{\varrho_s}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2},$$

kde  $r_s$  a  $\varrho_s$  jsou parametry modelu.

Projekcí do roviny pak dostaneme konvergenci

$$\kappa(\xi) = \frac{1}{\Sigma_{cr}} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(\vec{\xi}, z) dz = 2\kappa_s \frac{1 - F(x)}{x^2 - 1}, \quad (3.4)$$

kde  $x = \xi/r_s$ ,  $\kappa_s = \varrho_s r_s / \Sigma_{cr}$  a  $F(x)$  je pomocná funkce definovaná vztahem

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} & \text{pro } x > 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{argtgh} \sqrt{1-x^2} & \text{pro } x < 1, \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Značení parametrů  $\varrho_s$ ,  $\kappa_s$ ,  $r_s$  a pomocná funkce  $F(x)$  byly převzaty z práce Keeton (2001).

Dosazením do vztahu (3.3) pak získáme čočkovací potenciál

$$\psi(\xi) = 2\kappa_s \frac{r_s^2}{D_L^2} \left( \ln^2 \frac{x}{2} - \operatorname{argtgh}^2 \sqrt{1-x^2} \right)$$

a aplikací gradientu pak získáme úhel odklonu

$$\alpha(\xi) = 4\kappa_s \frac{r_s}{D_L} \frac{\ln \frac{x}{2} + F(x)}{x}. \quad (3.5)$$

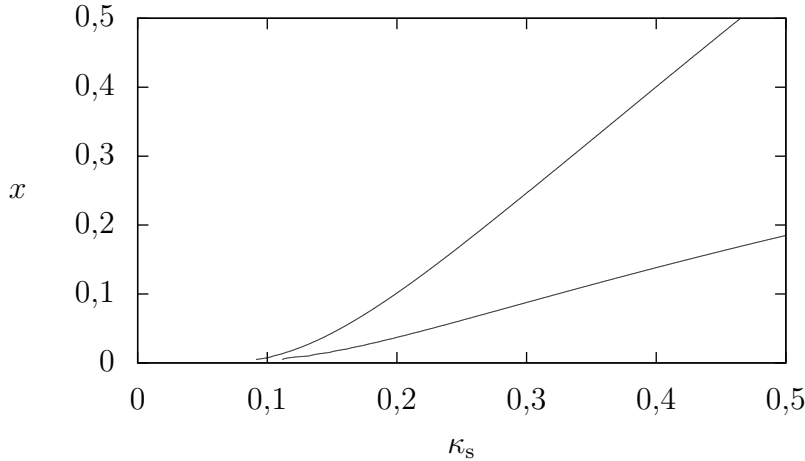


Z něj pak určíme převrácenou hodnotu zjasnění

$$\det A = 1 - 4\kappa_s \frac{1 - F(x)}{x^2 - 1} + 16\kappa_s^2 \left( \frac{(1 - F(x)) \left( \ln \frac{x}{2} + F(x) \right)}{x^2 (x^2 - 1)} - \frac{\left( \ln \frac{x}{2} + F(x) \right)^2}{x^4} \right).$$

Na Obrázku 3.1 jsou pak vyznačeny křivky, pro něž platí  $\det A = 0$ . Hodnoty na svislé ose pak odpovídají poloměrům kružnic, které představují kritické křivky pro daný parametr  $\kappa_s$ .

Z grafu je patrné, že pro dostatečně malá  $\kappa_s$  žádná kritická křivka nevzniká, od určité kritické hodnoty  $\kappa_s$  pak existují dvě kritické křivky. Pokud poloměry kritických křivek dosadíme do rovnice (3.5), a tedy zjistíme poloměry kaustik, zjistíme, že vnější kritická křivka odpovídá bodové kaustice ve středu. Druhá z kritických křivek pak odpovídá kruhové kaustice, jejíž poloměr se vzrůstajícím  $\kappa_s$  roste.



Obrázek 3.1: Polohy kritických křivek NFW modelu.

### 3.3 Elipsoidální model

Posledním jednoduchým modelem spojitě hmoty, kterým se v této kapitole budeme zabývat, je elipsoidální model. Konkrétně použijeme model, který zmiňuje Narayan a Bartelmann (1999, kap. 1.3.5.1), jenž je definován čočkovacím potenciálem

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = 4\pi \frac{D_{LS}}{D_S} \frac{\sigma_v^2}{c_s^2} \sqrt{\theta_c^2 + (1 - \varepsilon)\theta_1^2 + (1 + \varepsilon)\theta_2^2},$$

kde  $\theta_1$  a  $\theta_2$  jsou složky polohového vektoru,  $\varepsilon$  je excentricita a  $\sigma_v$  a  $\theta_c$  jsou parametry modelu.

Dle definice opět určíme úhel odklonu

$$\vec{\alpha} = 4\pi \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{S}}} \frac{\sigma_{\text{v}}^2}{c_{\text{s}}^2} \frac{1}{\sqrt{\theta_{\text{c}}^2 + (1 - \varepsilon)\theta_1^2 + (1 + \varepsilon)\theta_2^2}} ((1 - \varepsilon)\theta_1, (1 + \varepsilon)\theta_2)$$

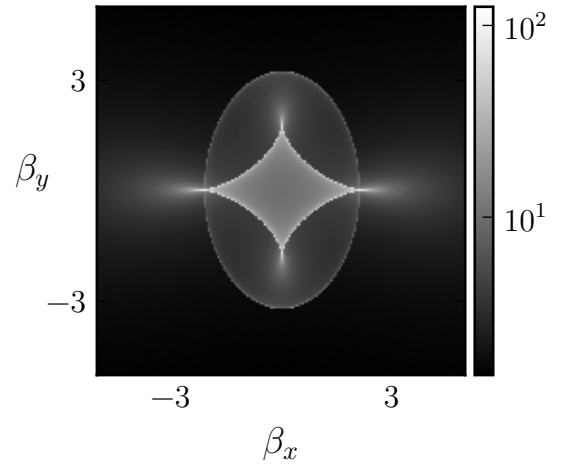
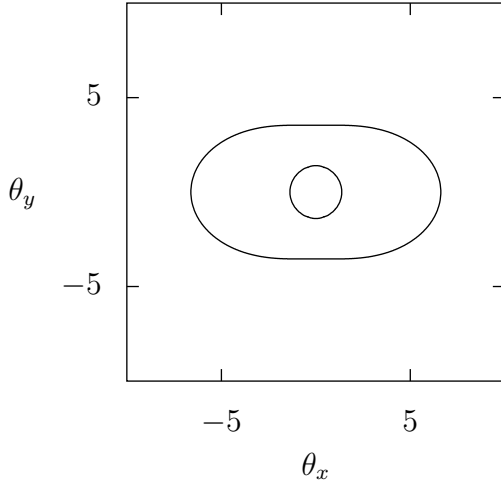
a převrácenou hodnotu zjasnění

$$\det A = 1 - 4\pi \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{S}}} \frac{\sigma_{\text{v}}^2}{c_{\text{s}}^2} \frac{(\theta_1^2 + \theta_2^2)(1 - \varepsilon^2) + 2\theta_{\text{c}}^2}{(\theta_{\text{c}}^2 + (1 - \varepsilon)\theta_1^2 + (1 + \varepsilon)\theta_2^2)^{\frac{3}{2}}} + 16\pi^2 \frac{D_{\text{LS}}^2}{D_{\text{S}}^2} \frac{\sigma_{\text{v}}^4}{c_{\text{s}}^4} \frac{\theta_{\text{c}}^4(1 - \varepsilon^2) + \theta_{\text{c}}^2(1 - \varepsilon^2)(\theta_1^2(1 - \varepsilon) + \theta_2^2(1 + \varepsilon))}{(\theta_{\text{c}}^2 + (1 - \varepsilon)\theta_1^2 + (1 + \varepsilon)\theta_2^2)^3}.$$

Se znalostí  $\det A(\vec{\theta})$  je možné vykreslit kritické křivky. Pro námi zvolené parametry  $4\pi \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{S}}} \frac{\sigma_{\text{v}}^2}{c_{\text{s}}^2} = 5$ ,  $\theta_{\text{c}} = 1$  a  $\varepsilon = 0,2$  má eliptický model dvě kritické křivky, jak je vidět na Obrázku 3.2.

Můžeme též znázornit kaustiky, resp. mapu zjasnění ve zdrojové rovině, vizte Obrázek 3.3. K jeho vytvoření byla použita metoda zpětného střílení paprsků, která je popsána dále v práci.

Na mapě zjasnění jsou patrné dvě kaustiky, jedna oválná a jedna ve tvaru čtyřcípé hvězdy. Tento klasický příklad je ukázkou, že i pouhou elipsoidální deformací modelu jsme schopni docílit netriviálního tvaru kaustiky. Cípy zmíněné astroidy se nazývají *cuspy*. Hladké části kaustik se pak nazývají *foldy*.



Obrázek 3.2: Kritické křivky elipsoidálního modelu.

Obrázek 3.3: Mapa zjasnění elipsoidálního modelu.

# 4. Kombinace NFW modelu a hmotného bodu

Parametr  $\kappa_s$  v NFW modelu je nepraktický z toho hlediska, že člověk intuitivně nezná jeho škálu. Daleko praktičtější by bylo jej nahradit například hmotností. Problém ale je, že hustota v NFW modelu klesá jako  $r^{-3}$ , hmotnost, jako prostorový integrál hustoty, tedy nekonverguje. Řešením je model v určité vzdálenosti useknout.

Poznamenejme, že se zde dopouštíme nekonzistence, neboť při odvozování konvergence v rovnici (3.4) jsme při integraci model neusekávali. Předpokládáme, že ve velkých vzdálenostech od středu je vliv již natolik malý, že viditelně neovlivní zkoumané jevy.

Dle (Schneider, 2014, kap. 7.6) je vhodná vzdálenost  $r_{200}$  taková, pod kterou je průměrná hustota dvoustnásobkem kritické hustoty vesmíru  $\rho_{\text{cr}}(z)$  při daném červeném posuvu  $z$ . Je zřejmé, že hmotnost pod tímto poloměrem je

$$M = \frac{4}{3}\pi r_{200}^3 200 \rho_{\text{cr}}(z).$$

Zároveň Schneider (2014, kap. 7.6) pro NFW model odvozuje vztah

$$\rho_s = \frac{200}{3} \rho_{\text{cr}}(z) \frac{c^3}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}},$$

kde  $c = r_{200}/r_s$  je koncentrační parametr.

Kombinací těchto vztahů dostáváme pro hmotnost NFW modelu výraz

$$M_{\text{NFW}} = 4\pi r_s^3 \rho_s \left( \ln(1+c) - \frac{c}{1+c} \right)$$

a odtud už dostáváme úhel odklonu

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{NFW}} &= \frac{M_{\text{NFW}}}{\pi r_s D_L \Sigma_{\text{cr}}} \frac{1}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \frac{\ln \frac{x}{2} + F(x)}{x} \\ &= \frac{\theta_{\text{EN}}^2}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \frac{\ln \frac{x}{2} + F(x)}{\theta}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde  $\theta_{\text{EN}}$  je Einsteinův poloměr NFW modelu.

Díky aditivitě úhlu odklonu má čočkovací rovnice tvar

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \theta_{\text{EP}}^2 \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}_{\text{P}}}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_{\text{P}}|^2} - \theta_{\text{EN}}^2 \frac{\ln \frac{x}{2} + F(x)}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \frac{\vec{\theta}}{|\vec{\theta}|^2},$$

kde  $\theta_{\text{EP}}$  je Einsteinův poloměr bodové čočky a  $\vec{\theta}_{\text{P}}$  pozice bodové čočky. Označme  $\sigma$  podíl hmotnosti bodové čočky a NFW modelu. Zároveň zavedme úmluvu, že veličiny  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\theta}$  a  $r_s$  budou nadále v jednotkách  $\theta_{\text{EN}}$ . Pak čočkovací rovnice přejde do tvaru

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \sigma \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}_{\text{P}}}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_{\text{P}}|^2} - \frac{\ln \frac{x}{2} + F(x)}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \frac{\vec{\theta}}{|\vec{\theta}|^2}, \quad (4.2)$$

kde  $x = \theta/r_s$ .

Vzhledem k předpokladům použitým v odvození je zřejmé, že čočkovací rovnice (4.2) platí pouze pro  $\theta < cr_s$ .

# 5. Numerický výpočet map zjasnění

Naším cílem je vypočítat mapy zjasnění ve zdrojové rovině, tedy v závislosti na  $\vec{\beta}$ . Nicméně, jak bylo ilustrováno v minulé kapitole, u složitějších modelů je nemožné analyticky nalézt inverzi čočkovací rovnice, aby bylo možno provést přechod od souřadnic  $\vec{\theta}$  k souřadnicím  $\vec{\beta}$ . Proto je nutné přistoupit k některé z numerických metod.

## 5.1 Metoda zpětného střílení paprsků

Metoda, která byla použita v této práci se nazývá metoda zpětného střílení paprsků<sup>1</sup>. Jde o metodu Monte Carlo, kdy náhodně zvolíme souřadnice paprsku  $\vec{\theta}$  v čočkové rovině, pro který pomocí čočkovací rovnice následně nalezneme souřadnice zdroje  $\vec{\beta}$ . Ve zdrojové rovině pak máme vytvořenou mřížku pixelů, do kterých paprsky binujeme.

Protože souřadnice paprsků v čočkové rovině volíme rovnoměrně, je počet paprsků v pixelu mřížky přímo úměrný velikosti plochy v čočkové rovině, na kterou se tento pixel zobrazuje. Dle definice zjasnění tedy relativní počet paprsků v pixelu je přímo zjasnění daného pixelu.

Kladem této metody je jednoduchost, neboť je třeba znát pouze tvar čočkovací rovnice. Negativním aspektem je pak skutečnost, že jde o pravděpodobnostní metodu, je tedy nutné vygenerovat značné množství paprsků, aby se chyba snížila pod únosnou mez.

V našem případě byl pro generování poloh paprsků použit generátor pseudonáhodných čísel `Ran` převzatý z (Press a kol., 2007, kap. 7.1). Perioda tohoto generátoru je řádově  $10^{57}$ , pro naše účely, kdy používáme řádově  $10^{10}$  pseudonáhodných čísel tedy plně dostačuje. Generátor je vyčleněn v samostatném souboru `rayshooter/nr.h`, který z licenčních důvodů není přiložen. Paprsky pak byly zachytávány do rovnoměrné čtvercové mřížky.

Důležitým aspektem, který je třeba při použití této metody podchytit, je, abychom pro zvolenou oblast ve zdrojové rovině generovali paprsky v čočkové rovině z oblasti tak velké, aby obsahovala všechny obrazy oblasti ve zdrojové rovině. V opačném případě bychom dostali zkreslenou mapu zjasnění. Ověřili jsme, že v případě námi studovaného modelu se porušení tohoto pravidla projeví výraznými laloky v mapě zjasnění šířícími se od rohů mapy. Existenci těchto laloků jsme tedy použili jako jednoduchý indikátor porušení výše zmíněného pravidla a oblast, ze které se střílí, jsme v takovém případě zvětšili.

Pokud ale potřebujeme pouze malý detail z mapy zjasnění, je střílení z velké oblasti v čočkové rovině zbytečným plýtváním paprsků, neboť většina jich dopadne mimo chtěný detail. Zároveň ale nemůžeme oblast zmenšit, neboť bychom tak minuli některé obrazy našeho detailu. Řešením, které jsme použili, je rozdělit oblast v čočkové rovině na mnoho malých stejně velkých obdélníků. Z prostředka každého obdélníku vystřelíme paprsek, a pokud dopadne do detailu mapy, který

---

<sup>1</sup>anglicky inverse ray shooting method.

vykreslujeme, nebo do jeho okolí, pak tento obdélník a všechny obdélníky s ním sousedící použijeme k výsledné střelbě. Tímto přístupem byl zrychlen výpočet některých použitých map až o tři řády při zachování přesnosti.

## 5.2 Hlavní simulační program

Hlavní simulační program byl napsán v programovacím jazyce C a jeho úkolem je spočítat mapu zjasnění pomocí metody zpětného střelení paprsků. Jako jediný parametr očekává cestu k souboru se vstupními daty a výsledek vypisuje na standardní výstup.

Zdrojový kód programu je přiložen v souboru `rayshooter/main.c`, pro překlad je nutné mít nainstalovanou knihovnu `libconfig`.

Výpočet je možné paralelizovat nastavením různých seedů generátoru pseudonáhodných čísel na jednotlivých výpočetních uzlech a následným součtem výsledků jednotlivých uzlů.

Formát vstupu syntakticky vychází z formátu knihovny `libconfig`. Ukázkový soubor se vstupními daty lze nalézt v příloze na cestě `rayshooter/config.txt`. Formát tvoří následující položky:

- `rayCount` – počet paprsků použitých pro metodu rayshootingu
- `seed` (*nepovinné*) – seed generátoru pseudonáhodných čísel, pokud neuveden, použije se aktuální čas
- `source` – nastavení parametrů výsledné mapy zjasnění
  - `resolution` – rozlišení mapy zjasnění v pixelech
  - `size` – velikost mapy zjasnění v  $\theta_{EN}$
  - `llcorner` – souřadnice levého spodního rohu mapy zjasnění v  $\theta_{EN}$
- `image` – nastavení parametrů čočkové roviny
  - `size` – velikost čočkové roviny v  $\theta_{EN}$
  - `llcorner` – souřadnice levého spodního rohu čočkové roviny v  $\theta_{EN}$
  - `rectangles` – počet obdélníků, na které se rozdělí čočková rovina, výchozí hodnota je 1 v každém směru
    - \* `sourceSizeMultiplier` – velikost okolí mapy zjasnění použitá při výběru obdélníků, ze kterých se střílí, výchozí hodnota je 2
- `background` – nastavení parametrů NFW modelu
  - `c` – parametr  $c$  z rovnice (4.2)
  - `rS` – parametr  $r_s$  v jednotkách  $\theta_{EN}$
- `points` – nastavení parametrů hmotných bodů
  - `x,y` – pozice hmotného bodu  $\vec{\theta}_P$  v  $\theta_{EN}$
  - `sigma` – poměrná hmotnost bodu vůči hmotnosti NFW modelu

Výstup hlavního simulačního programu sestává z hlavičky a těla. Hlavička obsahuje vstupní data, která vedle k danému výsledku, ve formátu popsaném výše. Je ukončena řádkem `====header end====`. Tělo je tvořeno daty ve formátu CSV, obsahuje `source.resolution.x` řádků a každý řádek obsahuje `source.resolution.y` hodnot.

# 6. Vlastnosti kombinace NFW modelu a hmotného bodu

## 6.1 Volba parametrů modelu

Jak je patrné z rovnice (4.2), kombinovaný model NFW a hmotného bodu má čtyři parametry, a to koncentrační parametr  $c$ , parametr  $r_s$ , relativní hmotnost bodu  $\sigma$  a jeho polohu  $\vec{\theta}_P$ . Protože procházení čtyřrozměrného prostoru parametrů by bylo náročné, je vhodné se omezit na procházení méně parametrů a některé se pokusit vhodně zafixovat.

Pokud se podrobněji zamyslíme nad významem parametrů, zjistíme, že zatímco parametry  $c$  a  $r_s$  popisují pouze vlastnosti spojitě části modelu, parametry  $\vec{\theta}_P$  a  $\sigma$  popisují vztah mezi spojitou a diskrétní částí modelu, bude tedy spíše zajímavé zkoumat vlastnosti modelu na dvou později zmíněných parametrech.

Jak již bylo zmíněno, NFW model lze použít k modelování hal kup galaxií, je tedy rozumné, pokud budeme kombinovaný model zkoumat pro parametry  $c$  a  $r_s$  odpovídající typické kupě galaxií. Merten a kol. (2015) ve své práci uvádí naměřené parametry 20 kup galaxií, které následně fitují NFW modelem. Nás zajímají především koncentrační parametr  $c_{200c}$ , který odpovídá naší definici hmotnosti NFW modelu a parametr  $r_s$ . Pokud si vyneseme parametr  $r_s$  v jednotkách  $\theta_{EN}$  a koncentrační parametr  $c$  (viz Obrázek 6.1), zjistíme, že tyto dvě veličiny spolu korelují a jako reprezentativní hodnoty parametrů lze použít  $c = 3,5$  a  $r_s = 1,2 \theta_{EN}$ . Pokud nebude explicitně uvedeno jinak, je nadále zkoumaným modelem myšlen kombinovaný model NFW a hmotného bodu s těmito parametry  $c$  a  $r_s$ .

Díky této volbě je náš model platný až do vzdálenosti  $cr_s = 4,2 \theta_{EN}$  v čočkové rovině. Tím máme shora omezenou i maximální velikost  $\vec{\theta}_P$ . Zbývá zvolit rozsah relativní hmotnosti bodu  $\sigma$ , což učiníme v následujícím odstavci analytickým rozbořem situace pro  $\vec{\theta}_P = \vec{0}$ .

## 6.2 Analytická limita pro centrální polohu bodu

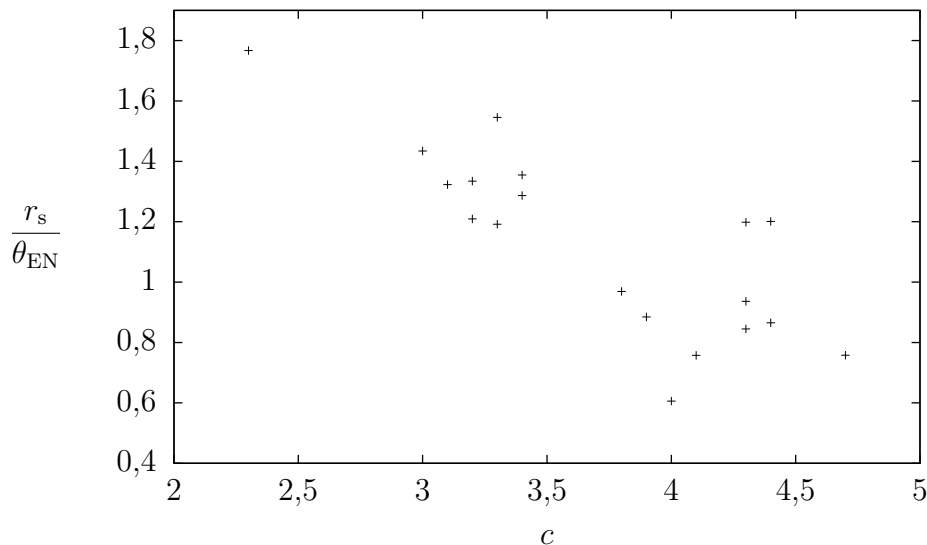
Za podmínky  $\vec{\theta}_P = \vec{0}$  přejde čočková rovnice do tvaru

$$\beta = \theta - \frac{\sigma}{\theta} - \frac{\ln \frac{x}{2} + F(x)}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \frac{1}{\theta}. \quad (6.1)$$

Pro převrácenou hodnotu zjasnění pak platí

$$\det A = 1 + \frac{1}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \frac{1 - F(x)}{\theta^2 - r_s^2} \left( \frac{\sigma}{\theta^2} + \frac{1}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \frac{\ln \frac{x}{2} + F(x)}{\theta^2} - 1 \right) - \left( \frac{\sigma}{\theta^2} + \frac{1}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \frac{\ln \frac{x}{2} + F(x)}{\theta^2} \right)^2.$$

Pokud pro každé  $\beta$  nalezneme všechny obrazy jako kořeny rovnice (6.1) a sečteme zjasnění těchto obrazů, dostaneme řez mapou zjasnění. Výhodou oproti



Obrázek 6.1: Hodnoty parametrů  $c$  a  $r_s$  pro kupy z článku autorů Merten a kol. (2015). Kupa Abell 1423 byla z důvodu neúplných dat vypuštěna.

metodě zpětného střílení paprsků je, že ač byly kořeny rovnice (6.1) zjištěny numericky, nejde o pravděpodobnostní metodu, a tedy je vypočtený profil daleko přesnější.

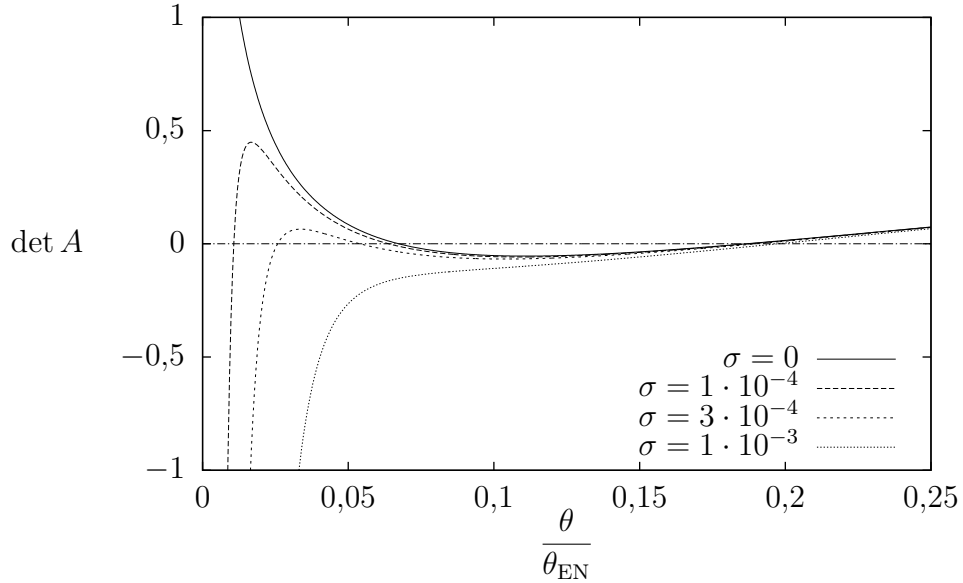
Pro úspěch této metody je nutné zajistit, aby byly detekovány všechny obrazy. Důležitým vodítkem je, že počet obrazů se mění pouze při překročení kaustiky, a to vždy o dva. Tvrzení vyplývá ze spojitosti funkce  $\beta(\theta)$ .

Nejprve se ale podívejme na situaci z hlediska kritických křivek. Z Obrázku 6.2 je patrné, že pro  $\sigma = 0$  vymizí účinek hmotného bodu a zkoumaný model přechází v NFW model, který má dvě kritické křivky. Nicméně ukazuje se, že už pro libovolně malou relativní hmotnost bodu  $\sigma$  má model kritické křivky tři. Toto tvrzení lze podpořit faktem, že pro  $\sigma > 0$  platí

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \det A(\theta) = -\infty.$$

Pokud dále zvětšujeme hmotnost bodu, dosáhneme v určitém okamžiku kritického bodu, kdy dvě kritické křivky splynou do jedné, která následně zmizí. Model má tedy nadále již jen jednu kritickou křivku. Půlením intervalu jsme určili, že pro parametry  $c = 3,5$  a  $r_s = 1,2$  je touto kritickou hodnotou  $\sigma \doteq 3,9 \cdot 10^{-4}$ . Je zajímavé, že i takto slabá perturbace NFW modelu hmotným bodem dokáže zásadním způsobem ovlivnit vlastnosti výsledné čočky. Protože je rozumné předpokládat, že nejzajímavější jevy se objeví právě kolem této hodnoty, zaměříme se dále na interval  $\sigma \in \langle 1 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-3} \rangle$ .

Nyní se na situaci podívejme z hlediska profilu mapy zjasnění v čočkové rovině. Jak je patrné z Obrázků 6.3, 6.4 a 6.5, model má jednu bodovou kaustiku ve středu a dvě kruhové, které se s rostoucím  $\sigma$  k sobě přibližují, až při dosažení kritické meze splynou a zmizí. Také je při pozornějším pohledu patrné, že peaky zjasnění kolem kaustik se s rostoucím  $\sigma$  zužují, přičemž peak kolem kaustiky blíže ke středu je užší než kolem kaustiky vzdálenější. To je nutné vzít v potaz při analýze pomocí zpětného střílení paprsků, neboť paprsky chytáme do nebodových

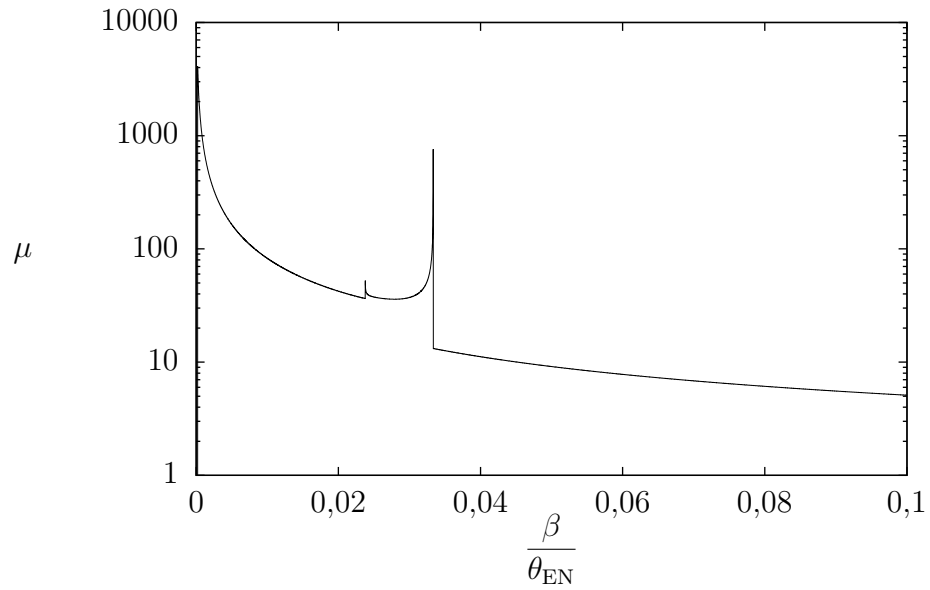


Obrázek 6.2: Hodnoty  $\det A$  kombinovaného modelu pro různé hodnoty  $\sigma$  při  $c = 3,5$  a  $r_s = 1,2$ .

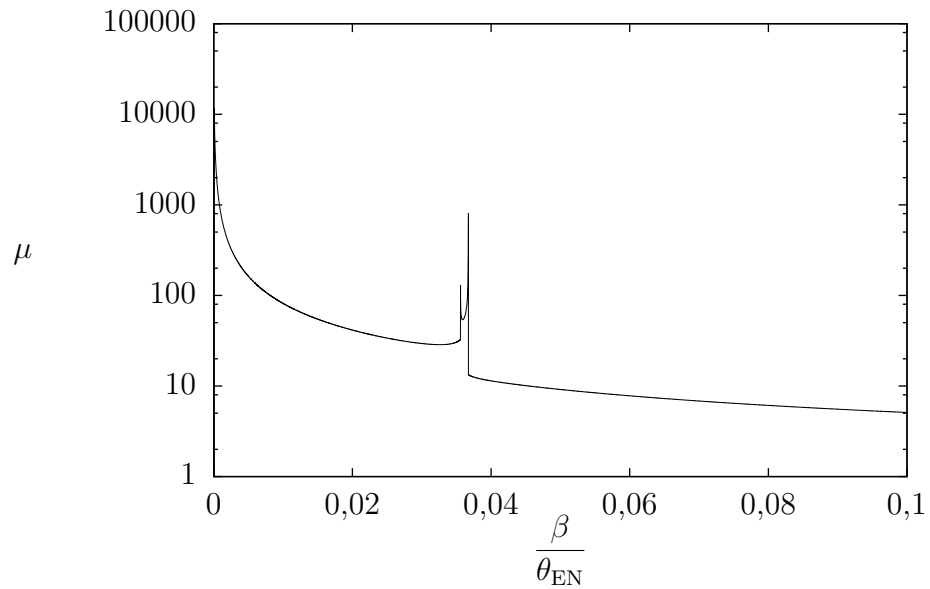
pixelů a tedy zachycení vnitřní kaustiky může působit potíže. Poslední věcí, na kterou bychom chtěli upozornit v souvislosti s Obrázkem 6.5 je, že i po zmizení kruhových kaustik zůstalo jakési plato, které se svažuje strměji v místech, kde se při malých hodnotách  $\sigma$  nacházely kaustiky. Ač má tedy kombinovaný model při nadkritických hodnotách  $\sigma$  stejný počet kaustik jako bodová čočka, profil zjasnění je v tomto režimu odlišný.

Nakonec se zaměříme na počet obrazů. Protože vnitřní kruhová kaustika při zmenšování  $\sigma$  zmenšuje svůj poloměr, zatímco poloměr vnější kaustiky se mění daleko pomaleji, je důvod se domnívat, že vnější kaustika je kruhovou kaustikou NFW modelu. Díky tomu bychom očekávali, že pokud půjdeme směrem ke středu přes vnější kaustiku, další dva obrazy se objeví, neboť tak se chová i kruhová kaustika v NFW modelu. Je ale otázka, pokud přejdeme přes vnitřní kaustiku směrem ke středu, jestli se objeví další dva obrazy, nebo dva obrazy zmizí. Spíše bychom očekávali, že v tomto případě zmizí, neboť pro nadkritickou hodnotu  $\sigma$  žádné kruhové kaustiky nemáme, a tedy i ve vnitřní oblasti máme stejný počet obrazů. Odpověď dostaneme, pokud si vyneseme závislost počtu obrazů na úhlu  $\beta$  při podkritické hodnotě  $\sigma$ , například  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ , viz Obrázek 6.6. Nyní můžeme potvrdit naši domněnku, že oblasti pod vnitřní kaustikou a nad vnější kaustikou se shodně promítají do dvou obrazů. Vnitřní a vnější kruhová kaustika tedy z tohoto pohledu nejsou dvě nezávislé kaustiky, ale spíše dvě části jedné kaustiky ohraničující prstencovou oblast.

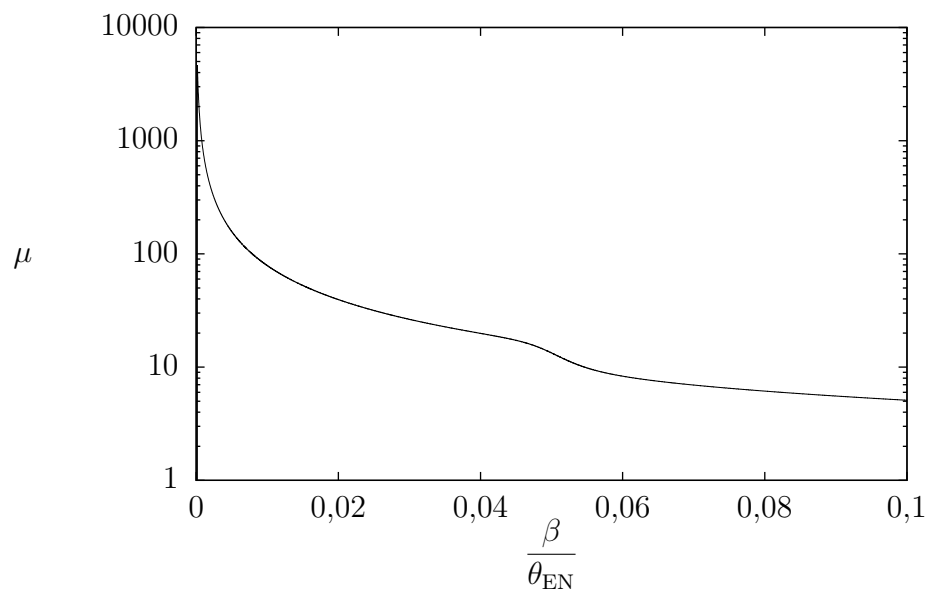




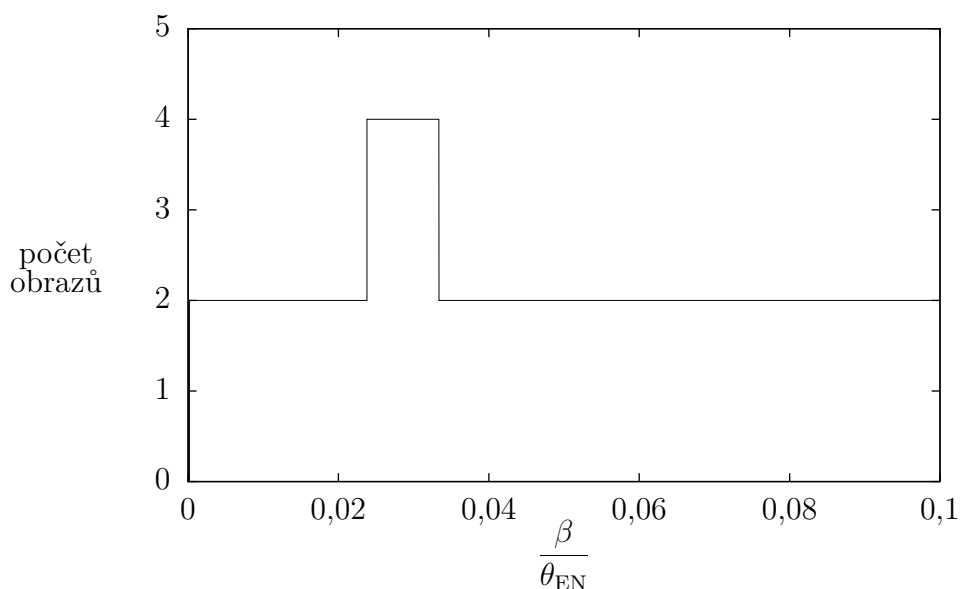
Obrázek 6.3: Profil mapy zjasnění kombinovaného modelu při  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ ,  $c = 3,5$  a  $r_s = 1,2$ .



Obrázek 6.4: Profil mapy zjasnění kombinovaného modelu při  $\sigma = 3 \cdot 10^{-4}$ ,  $c = 3,5$  a  $r_s = 1,2$ .



Obrázek 6.5: Profil mapy zjasnění kombinovaného modelu při  $\sigma = 1 \cdot 10^{-3}$ ,  $c = 3,5$  a  $r_s = 1,2$ .



Obrázek 6.6: Závislost počtu obrazů kombinovaného modelu na  $\beta$  při parametrech  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ ,  $c = 3,5$  a  $r_s = 1,2$ .

## 6.3 Mapa kaustických přechodů

Na Obrázku 6.7 vidíme přehled vývoje kaustik při změně parametrů. Je zde patrná hranice kritické  $\sigma$ , nad kterou v centrálním případě vymizí kruhové kaustiky. Popíšme nyní děje probíhající v kaustické mapě při rostoucím  $\theta_P$ . Nejprve se ve středu z bodové kaustiky vyvine čtyřcípá kaustika. Zároveň se pro podkritickou hmotnost vnitřní kruhová kaustika spojí s vnější za vzniku kaustiky o dvou foldech a dvou cuspech. Pro nadkritickou hmotnost se tato kaustika v jistém okamžiku objeví, tímto jevem se budeme zabývat později.

Dále se blízko cuspů vnější kaustiky objeví swallowtaily. Z nich se poté stanou trojcípé kaustiky, které se oddělí od vnější, nyní již opět kruhové, kaustiky a připojí se k čtyřcípé kaustice, ze které se stane šesticípá.

Odtud se šesticípá kaustika chová kvalitativně jako dvojčočka, tedy se rozdělí na dvě čtyřcípé kaustiky, které se postupně zmenšují do bodu. Jedna z nich půjde ke středu kruhové kaustiky, zatímco druhá k poloze hmotného bodu. V limitě  $\theta_P \rightarrow \infty$  tedy dostaneme zvlášť NFW model a bodovou čočku, jak bychom očekávali.

Situaci je možné také nahlédnout z Obrázku 6.8, který znázorňuje mapu typů kaustik a rozhraní mezi nimi. Na Obrázku nejsou vyznačeny přechody typu swallowtail, neboť jsme nebyli schopni určit jejich polohu s dostatečnou přesností. Na Obrázku si dále všimněme vyznačených bodů  $C1$ ,  $C2$  a  $X$ , ke kterým v limitním případě  $\sigma = 0$ , resp.  $\theta_P = 0$  jednotlivá rozhraní konvergují. Body  $C1$  a  $C2$  značí poloměry kritických křivek v čistém NFW modelu o námi zvolených parametrech  $r_S$  a  $c$ . Bod  $X$  pak značí kritickou  $\sigma$ . Dále se v textu budeme zabývat rozbořem jednotlivých typů.

## 6.4 Teoretická předpověď dvojčočkových přechodů

V modelu dvojčočky existují tři různé topologie kaustik, mezi kterými jsou dva přechody. V následující kapitole ukážeme, že oba tyto přechody odpovídají přechodům ve zkoumaném kombinovaném modelu.

Prvním přechodem, který podrobíme analýze, je rozdělení šesticípé kaustiky na dvě trojcípé, které dle Obrázku 6.8 nastává pro námi zkoumaný rozsah  $\sigma$  zhruba při  $\theta_P \doteq 0,3$ . Jak už bylo zmíněno, tento přechod kvalitativně připomíná chování dvojčočky. Nyní si ukážeme, že dvojčočce v jistém smyslu odpovídá i kvantitativně.

Dle (Schneider a kol., 1992, kap. 8.3.2) nastane dvojčočkový přechod ve chvíli, kdy je splněna rovnost

$$d^2 = \left( \sqrt[3]{1 - \mu} + \sqrt[3]{\mu} \right)^3 ,$$

kde  $d$  je vzdálenost hmotných bodů v jednotkách Einsteinova poloměru celé čočky a  $\mu$  je poměr hmotnosti jednoho bodu a celkové hmotnosti.

Pokud se pokusíme použít tuto analogii v případě našeho kombinovaného modelu, pak přímočaře

$$\mu = \frac{\sigma}{\sigma + 1} \tag{6.2}$$

a

$$\theta_P \theta_{\text{EN}} = d \theta_{\text{ET}}, \quad \frac{d}{\theta_P} = \frac{\theta_{\text{EN}}}{\theta_{\text{ET}}} = \sqrt{\frac{M_{\text{NFW}}}{M_{\text{T}}}},$$

kde  $\theta_{\text{ET}}$  je určitý Einsteinův poloměr kombinovaného modelu,  $M_{\text{NFW}}$  hmotnost NFW modelu a  $M_{\text{T}}$  určitá hmotnost kombinovaného modelu. Ukazuje se, že tato předpověď sedí, pokud

$$M_{\text{T}} = M_{\text{P}} + M_{\text{NFW}_{\text{cyl}}},$$

kde  $M_{\text{NFW}_{\text{cyl}}}$  je hmotnost NFW modelu ve válci o poloměru  $\theta$ .

Určitý náhled, proč by tomu tak mohlo být, nám dává rovnice (2.4), ze které je patrné, že ohyb paprsku je v symetrickém případě ovlivněn pouze hmotou pod daným poloměrem. Méně jasné je ovšem to, proč v rovnici (6.2) vystupuje  $\sigma$  jako poměr hmotnosti bodu ku hmotnosti celého NFW modelu, a ne jen ku hmotnosti pod poloměrem.

Dosazením rovnice (4.1) do vztahu (2.4) pak dostaneme

$$M_{\text{NFW}_{\text{cyl}}}(\theta) = M_{\text{NFW}} \frac{\ln \frac{x}{2} + F(x)}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}},$$

což po dosazení do výše uvedených vztahů dává rovnici

$$\theta_{\text{P}}^2 = \left( \sqrt[3]{\frac{1}{\sigma+1}} + \sqrt[3]{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \right)^3 \left( \sigma + \frac{\ln \frac{\theta_{\text{P}}}{2r_{\text{s}}} + F\left(\frac{\theta_{\text{P}}}{r_{\text{s}}}\right)}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \right).$$

Numerické řešení této rovnice je znázorněno v Obrázku 6.8.

Druhým přechodem, kterým se budeme zabývat, je připojení dvou trojcípých kaustik ke čtyřcípé kaustice za vzniku šesticípé kaustiky. Podobnost tohoto přechodu s přechodem ve dvojčočce není tak intuitivní jako v předchozím případě. Narozdíl od naší situace, kdy trojcípé kaustiky vzniknou odpojením z jiné kaustiky, ve dvojčočce trojcípé kaustiky přiletí z nekonečna. Také zde oproti předchozímu případu nelze argumentovat tím, že se jedná o poslední kaustický přechod, dále by se tedy měl systém chovat díky limitě jako dvojčočka. Přesto se ukazuje, že, podobně jako v předchozím případě, tento přechod odpovídá dvojčočkovému i kvantitativně.

Dle (Schneider a kol., 1992, kap. 8.3.2) nastane tento dvojčočkový přechod, pokud je splněna rovnost

$$\mu(1-\mu) = \frac{(1-d^4)^3}{27d^8},$$

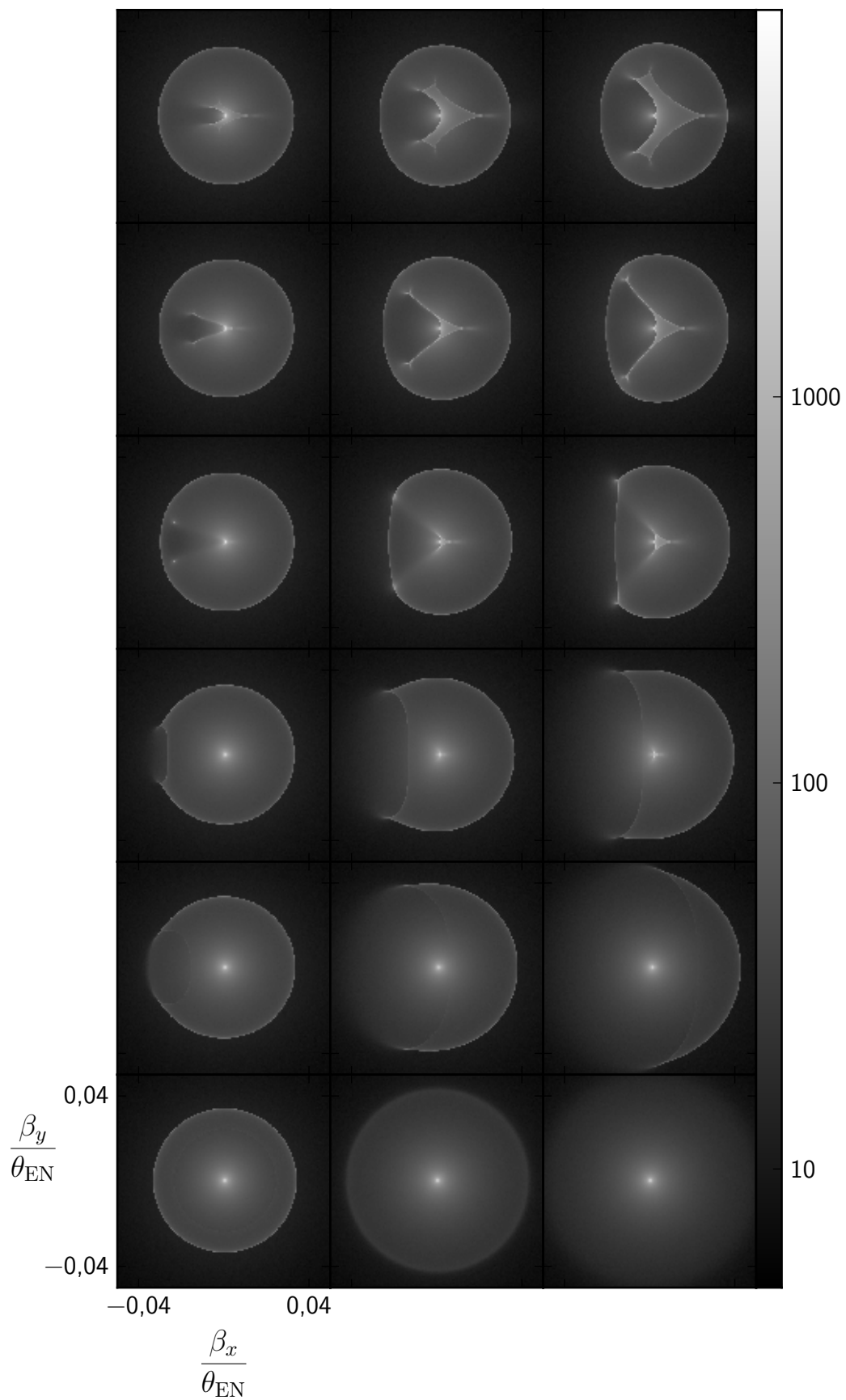
kterou lze dle (Daněk a Heyrovský, 2015) přepsat do tvaru

$$d = (\sqrt[3]{\mu} + \sqrt[3]{1-\mu})^{-\frac{3}{4}}.$$

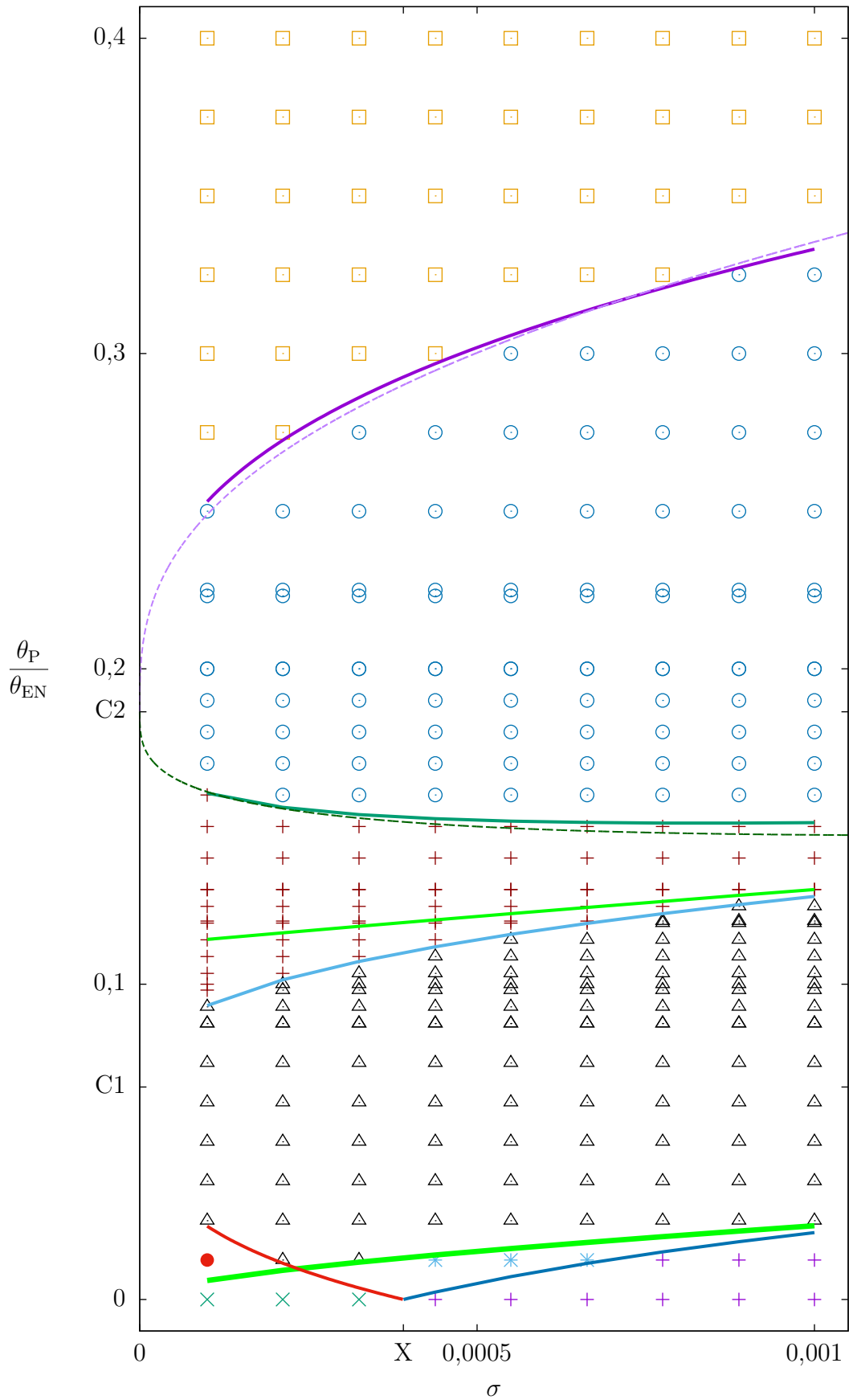
Pokud do ní dosadíme za  $\mu$  a  $d$  obdobně jako v případě prvního přechodu, dostaneme rovnici

$$\sigma + \frac{\ln \frac{\theta_{\text{P}}}{2r_{\text{s}}} + F\left(\frac{\theta_{\text{P}}}{r_{\text{s}}}\right)}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} = \theta_{\text{P}}^2 \left( \sqrt[3]{\frac{1}{\sigma+1}} + \sqrt[3]{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \right)^{\frac{3}{2}},$$

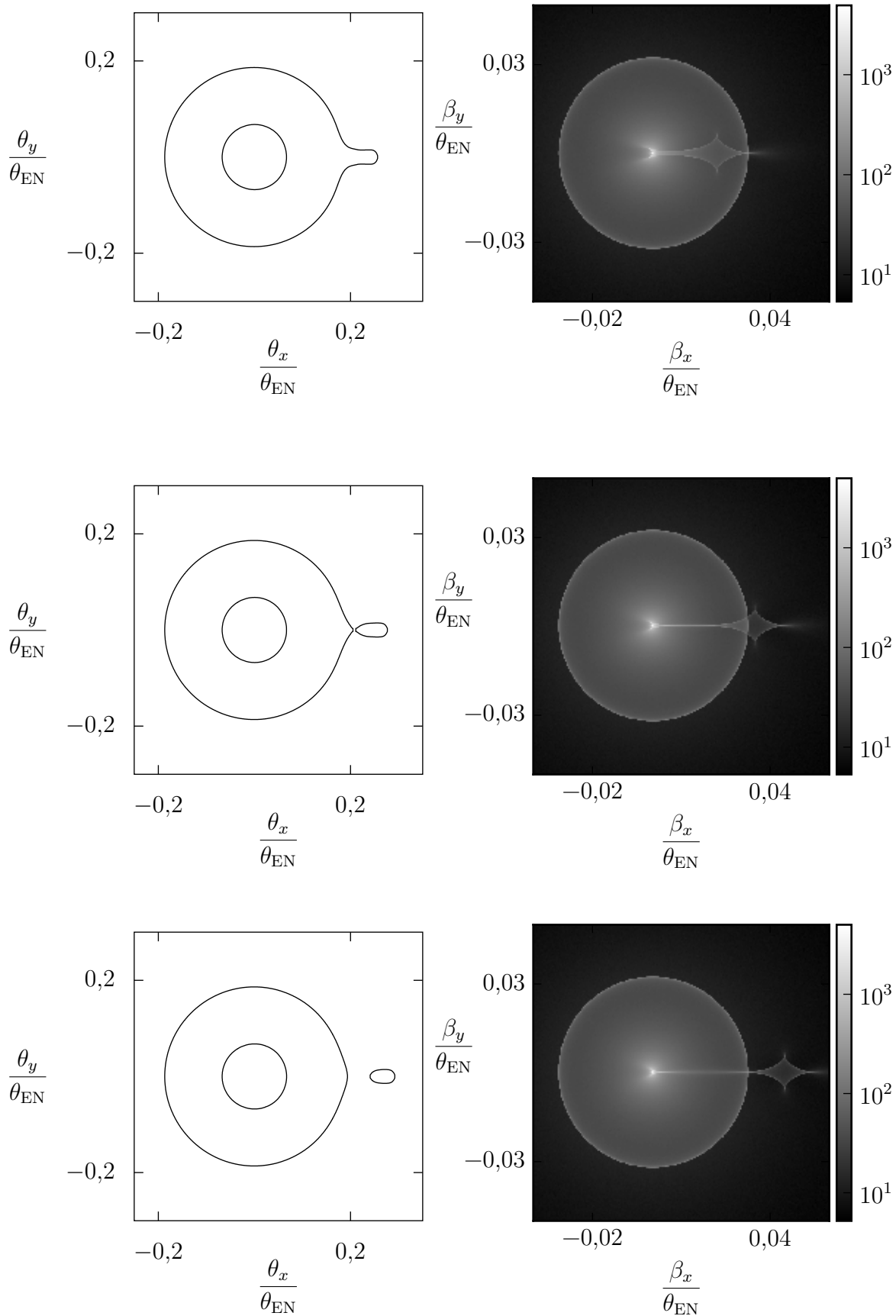
jejíž numerické řešení je znázorněno v Obrázku 6.8.



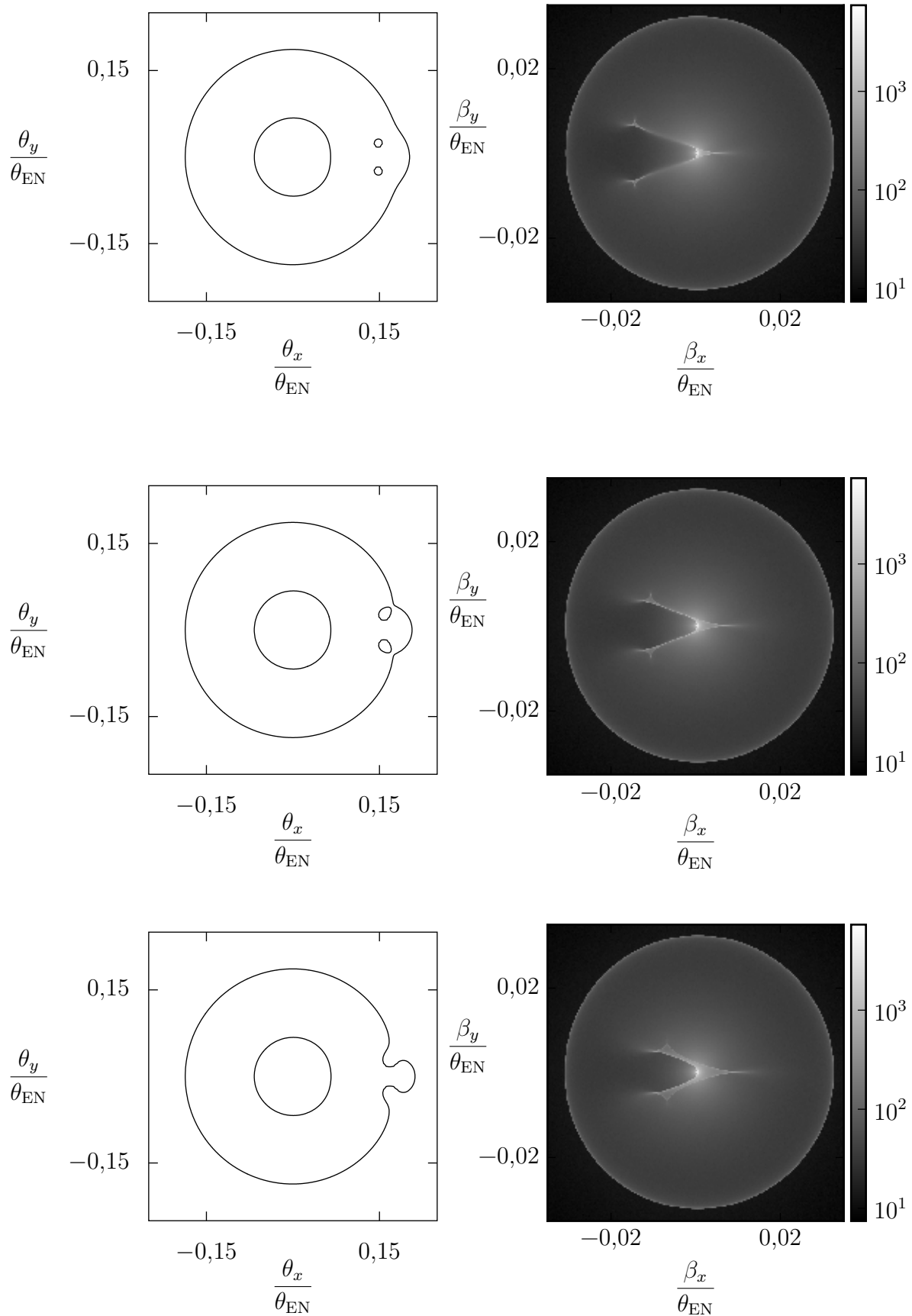
Obrázek 6.7: Přehled vybraných map zjasnění. Směrem doprava roste  $\sigma \in \{1,0 \cdot 10^{-4}; 5,5 \cdot 10^{-4}; 1,0 \cdot 10^{-3}\}$ , směrem nahoru pak  $\theta_P \in \{0; 0,0375; 0,075; 0,12; 0,15; 0,18\}\theta_{EN}$ .



Obrázek 6.8: Mapa typů kaustik a přechodů mezi nimi. Čárkovaně jsou vyznačeny teoretické předpovědi dvojčočkových přechodů. Popis jednotlivých přechodů je v kapitolách 6.3 až 6.6.



Obrázek 6.9: Kritické křivky a mapy zjasnění vzdálenějšího dvojčočkového přechodu pro  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ . Hmotný bod je ve vzdálenosti (shora)  $\theta_P \in \{0,23; 0,253; 0,27\}\theta_{\text{EN}}$ . Všimněme si, že na spodním obrázku již kaustiky nejsou propojeny.



Obrázek 6.10: Kritické křivky a mapy zjasnění bližšího dvojčočkového přechodu pro  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ . Hmotný bod je ve vzdálenosti (shora)  $\theta_P \in \{0,15; 0,16; 0,17\}\theta_{\text{EN}}$ . Všimněte si, že na vrchním obrázku nejsou kaustiky propojeny.

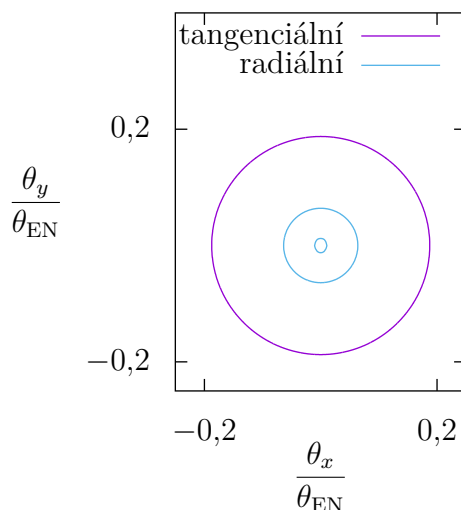


## 6.5 Eliptická umbilika a trojcípé kaustiky

Pokud půjdeme s parametrem  $\theta_P$  dále k nule, narazíme na eliptickou umbiliku, kdy se trojcípé kaustiky zmenší do bodu a poté se opět objeví. Je zajímavé, že tento typ přechodu nastává i v našem rovinném modelu kombinované hmoty, neboť tento typ přechodu byl doposud pozorován spíše v modelech čočkování ve více rovinách.

Další zajímavý jev na tomto typu přechodu můžeme pozorovat, pokud si zvlášť vyneseme radiální a tangenciální kritické křivky, jak je provedeno v Obrázku 6.11. Je vidět, že kombinovaný model má jednu tangenciální kritickou křivku odpovídající kaustice uprostřed a dvě radiální kritické křivky. Při zvětšování parametru  $\theta_P$  se odpojí radiální kritické křivky odpovídající trojcípým kaustikám od vnější radiální kritické křivky, připojit se ale mají k tangenciální kaustice, měly by tedy být také tangenciální. Tato změna z radiální na tangenciální kritickou křivku proběhne právě při umbilice, jak je patrné z Obrázku 6.12.

Dalším přechodem, na který narazíme, pokud s hmotným bodem půjdeme blíže středu, je tvorba a odtržení trojcípých kaustik. Nejprve se vytvoří swallowtaily, které dále rostou. Ve chvíli, kdy se cuspy na swallowtailech dotknou kaustiky, dojde k dalšímu přechodu, kdy se vytvoří a odtrhnou trojcípé kaustiky. Detail tohoto okamžiku je zachycen na Obrázku 6.13. Lokálním chováním tento přechod připomíná hyperbolickou umbiliku. Ověření, jestli nejde o nějaký vzácnější typ přechodu, by vyžadovalo podrobnější algebraický rozbor.



Obrázek 6.11: Radiální a tangenciální kritické křivky kombinovaného modelu pro  $\theta_P = 0$  a  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ .

## 6.6 Přechody při malém $\theta_P$

Pro malá  $\theta_P$  nastávají při téměř každé  $\sigma$  tři přechody. Charakter těchto přechodů ovšem závisí na tom, jestli je  $\sigma$  podkritická nebo nadkritická, což je zásadní

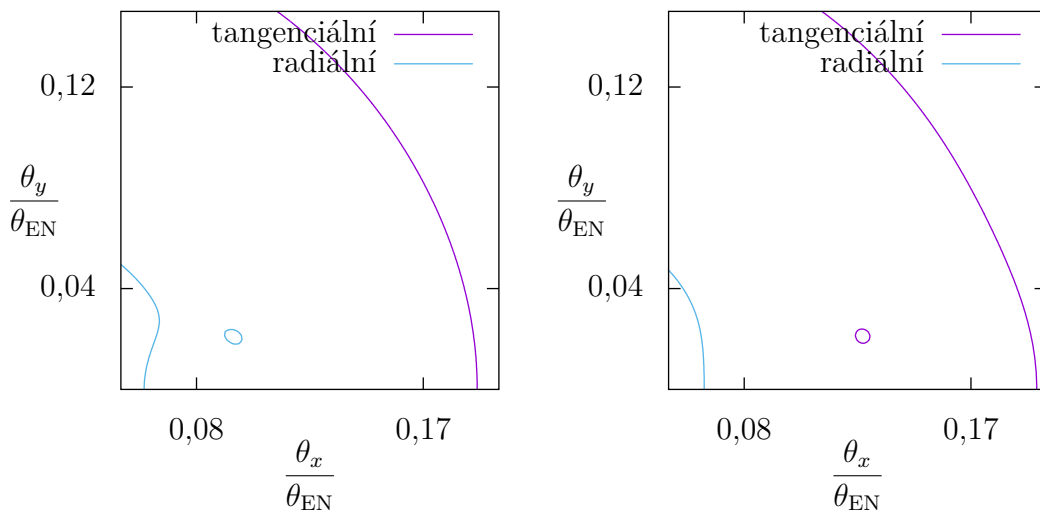
rozdíl oproti ostatním přechodům.

Nejprve se zaměříme na přechod táhnoucí se mezi body  $C1$  a  $X$ , tedy odehrávající se pouze pro podkritickou  $\sigma$ . Tento přechod je beak-to-beak přechodem, při kterém se dvě kruhové kaustiky spojí v jednu o dvou foldech a dvou cuspech, jak je znázorněno na Obrázku 6.17.

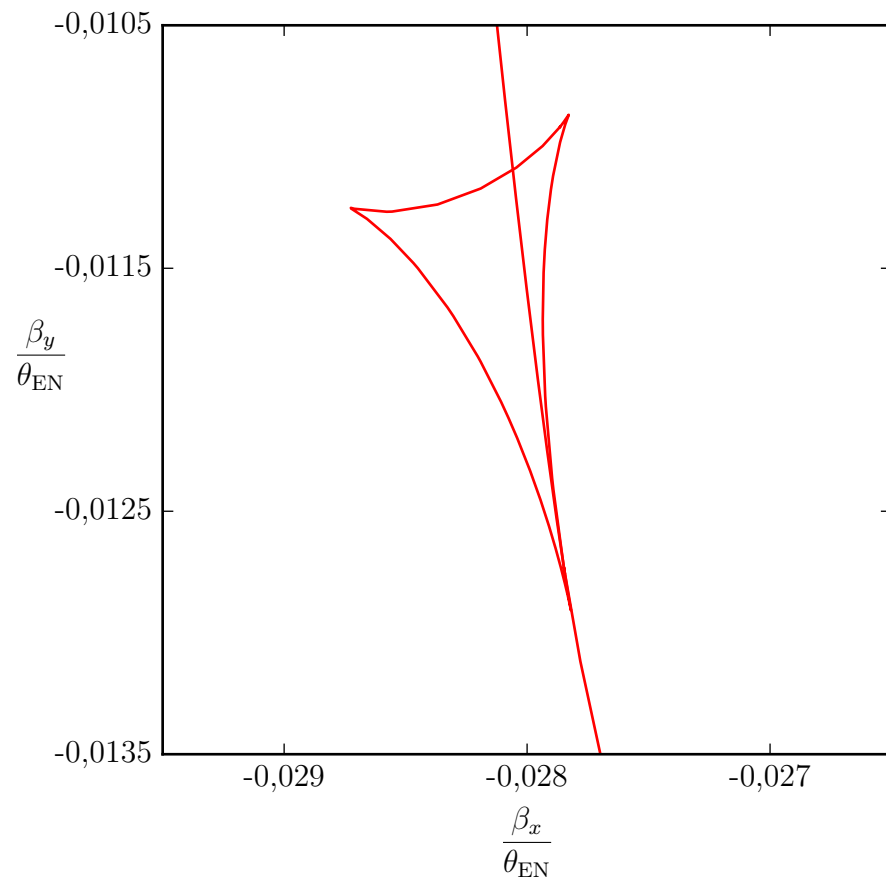
Zbylé přechody již spolu velmi úzce souvisí, neboť se týkají změn na stejných oblastech kaustik. Nejprve se s klesajícím  $\theta_P$  objeví lips a dva swallowtaily na nevnitřnější kaustice. Poté proběhne beak-to-beak mezi cuspy na lips kaustice a cuspy na swallowtailech. Přechody lips a beak-to-beak jsou v Obrázku 6.8 znázorněny jednou tlustou čarou, neboť nastávají záhy po sobě. Vzdálenost mezi nimi v prostoru parametrů  $\theta_P$  a  $\sigma$  se zdá být konstantní, nebo se mění jen velmi pomalu a tuto změnu jsme neodhalili. Zmíněný beak-to-beak přechod je znázorněn v Obrázku 6.18 pro podkritickou  $\sigma$ , resp. v Obrázku 6.19 pro nadkritickou  $\sigma$ . Kaustiky byly na těchto Obrázcích sestrojeny zobrazením kritických křivek čočkovací rovnici, protože mapy zjasnění získané metodou zpětného střílení paprsků byly značně zašumělé.

Po beak-to-beak přechodu následuje další lips přechod, ve kterém zanikne jedna z kaustik vzniklá při beak-to-beak přechodu. Na Obrázcích 6.18 a 6.19 nahoře jde o menší ze dvou kaustik. Podívejme se ale na závislost charakteristické velikosti příslušné kritické křivky na  $\theta_P$ , která je na Obrázku 6.15. Vidíme, že kritická křivka se nejprve rychle zmenší, dále ale zaniká velmi pomalu, z toho usuzujeme, že pravděpodobně zanikne až při  $\theta_P = 0$ . Tuto domněnku by ale potvrdilo až algebraické určení poloh a vlastností jednotlivých přechodů.

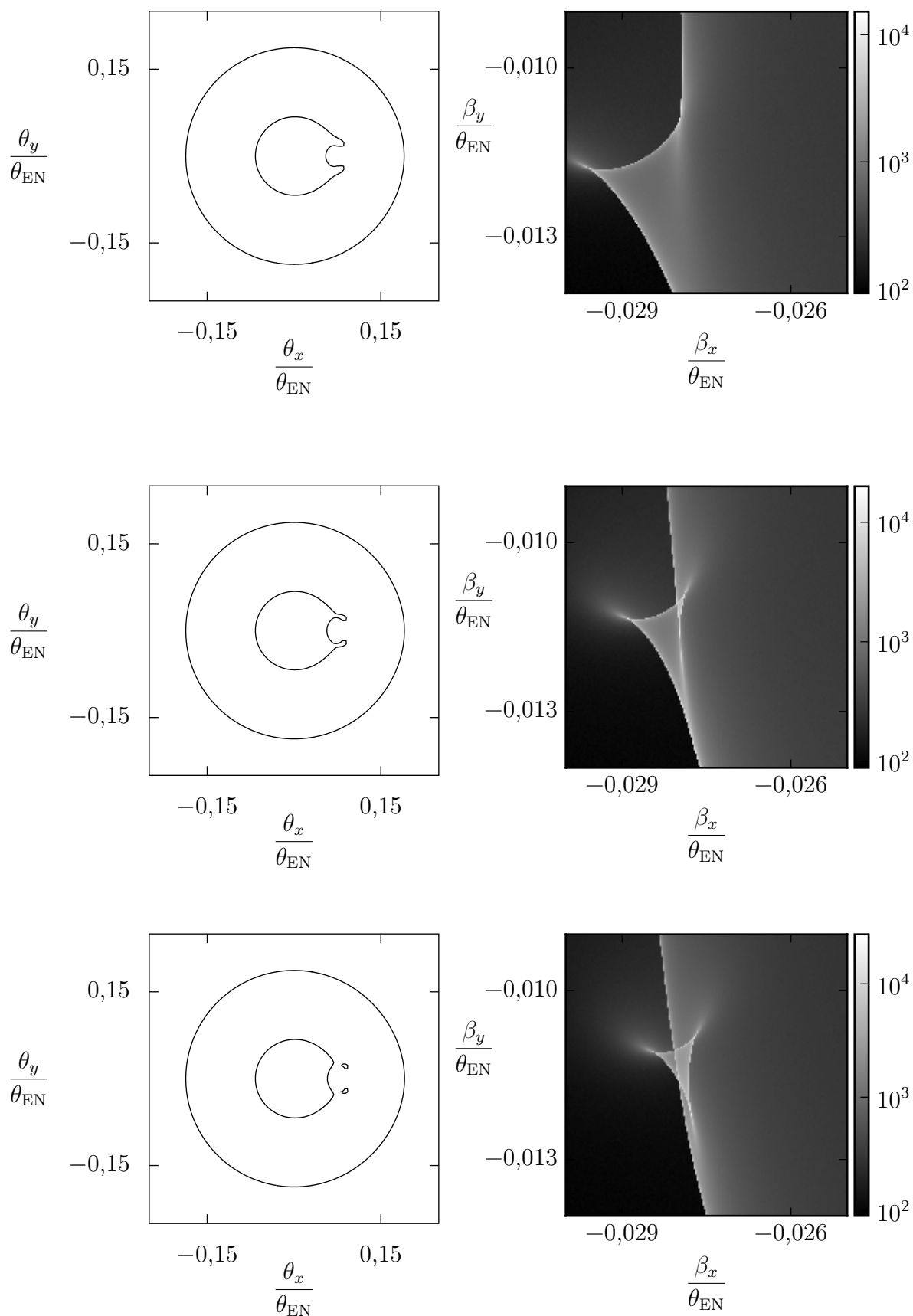
Při nadkritické  $\sigma$  pak zanikne i druhá z kaustik vzniklých při beak-to-beak přechodu, a to pomocí přechodu lips. Narozdíl od předchozího případu, tato kaustika zaniká rychle, jak je vidět v Obrázku 6.16. Tím je možné poměrně přesně numericky určit okamžik zániku. Obdobný průběh má i první zmíněný lips přechod.



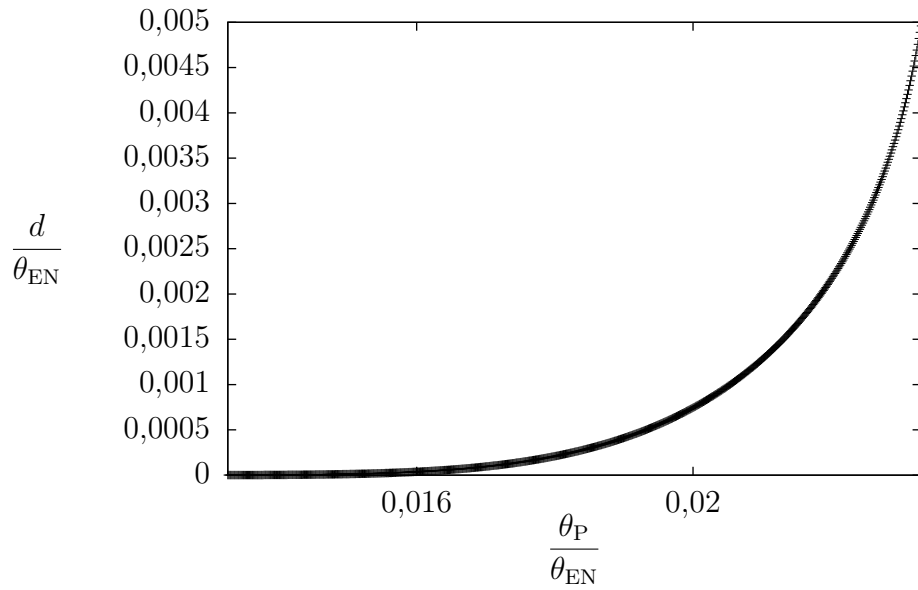
Obrázek 6.12: Kritické křivky kombinovaného modelu před umbilikou a po ní pro  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ . Hmotný bod je ve vzdálenosti  $\theta_P \in \{0,10; 0,13\}\theta_{EN}$ .



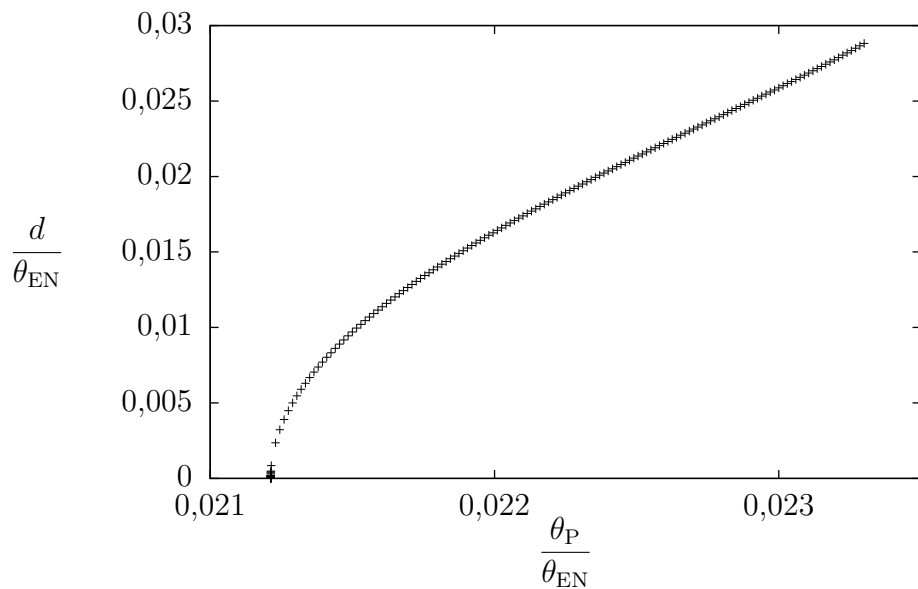
Obrázek 6.13: Detail trojcípé kaustiky při jejím odtržení pro  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ .



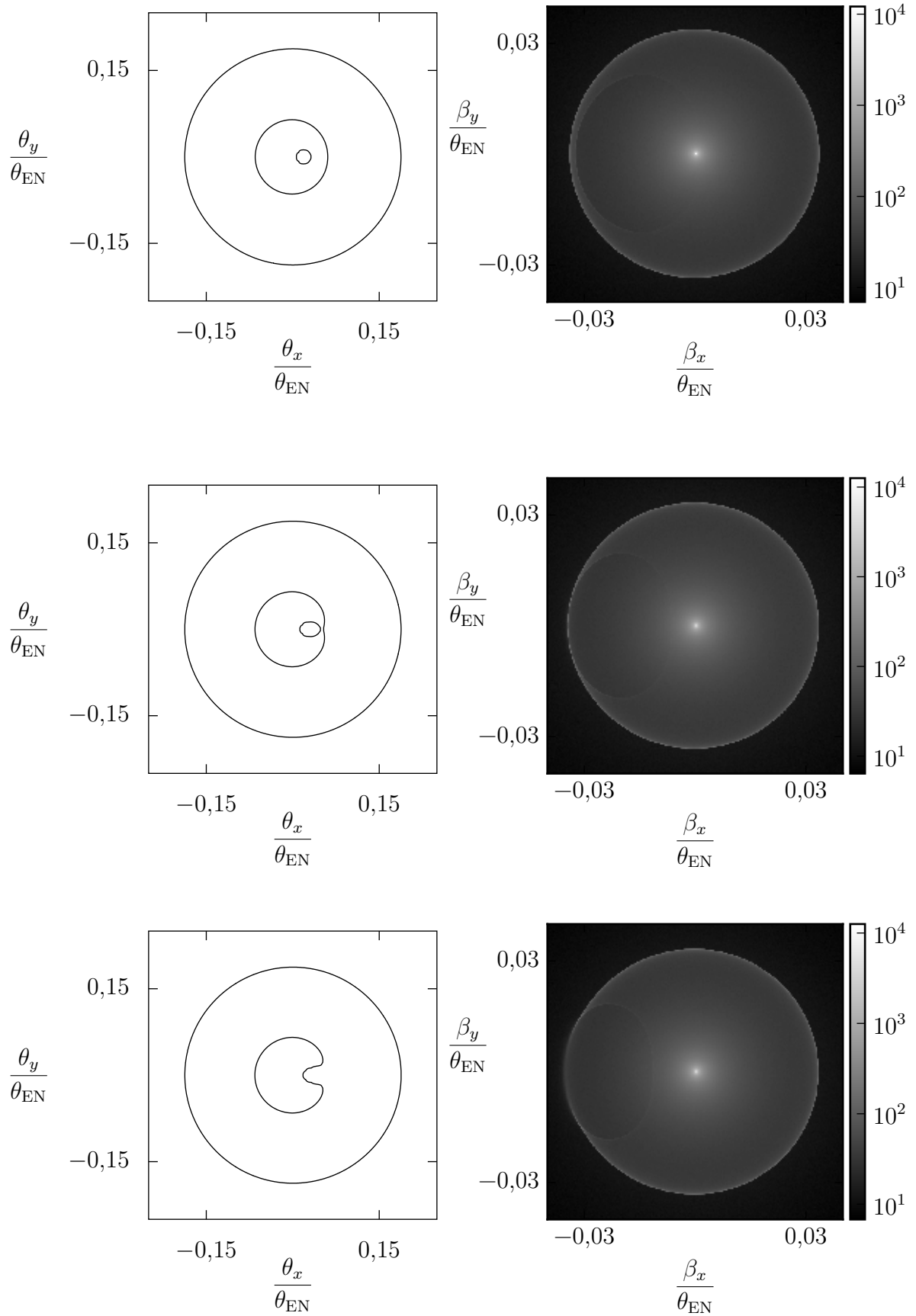
Obrázek 6.14: Kritické křivky a mapy zjasnění okolo tvorby swallowtailu a troj-  
cípé kaustiky pro  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ . Hmotný bod je ve vzdálenosti (shora)  
 $\theta_P \in \{0,087; 0,092; 0,095\}\theta_{EN}$ .



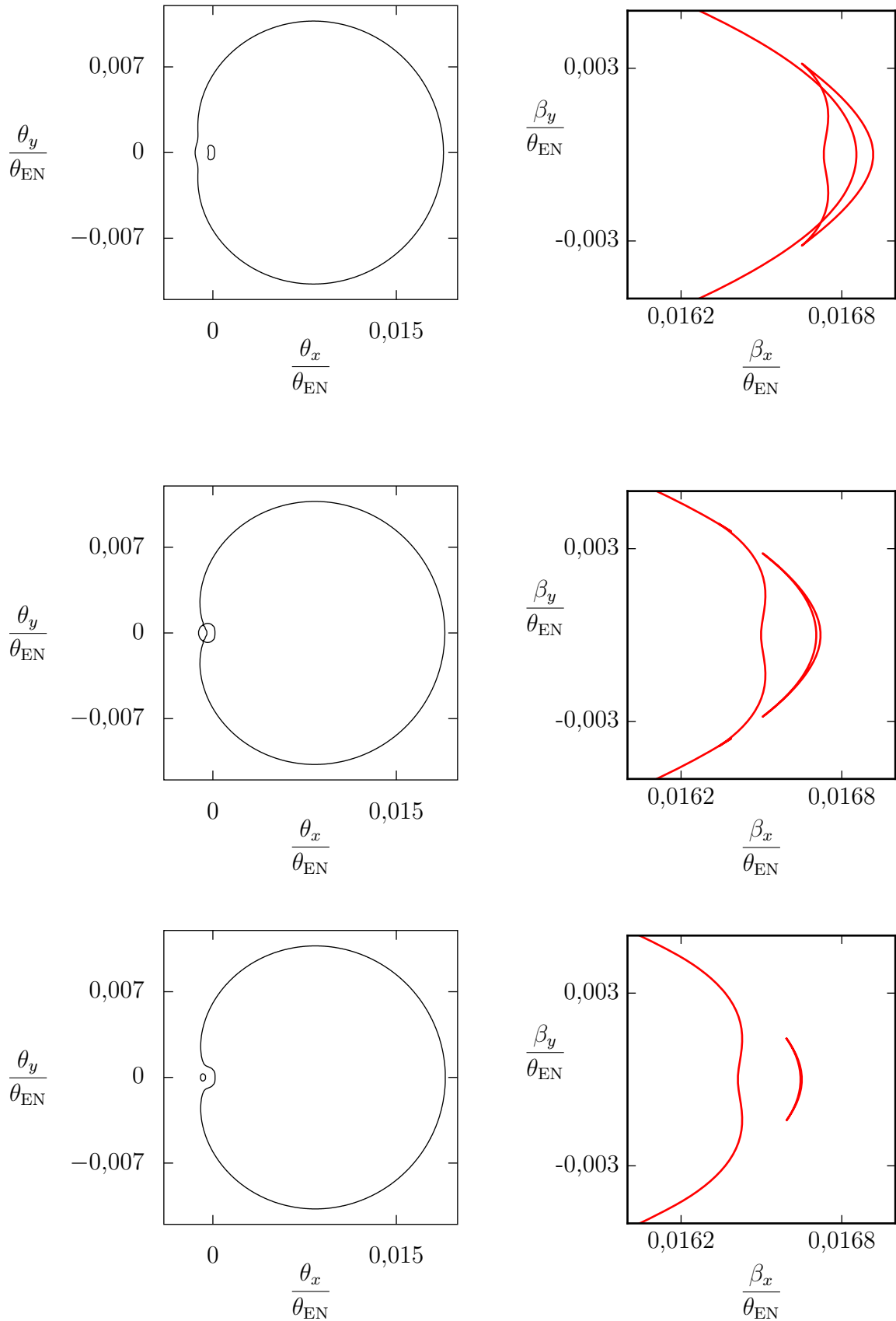
Obrázek 6.15: Závislost charakteristického rozměru kritické křivky před pomalu konvergujícím přechodem lips na  $\theta_P$  při  $\sigma = 1 \cdot 10^{-3}$ .



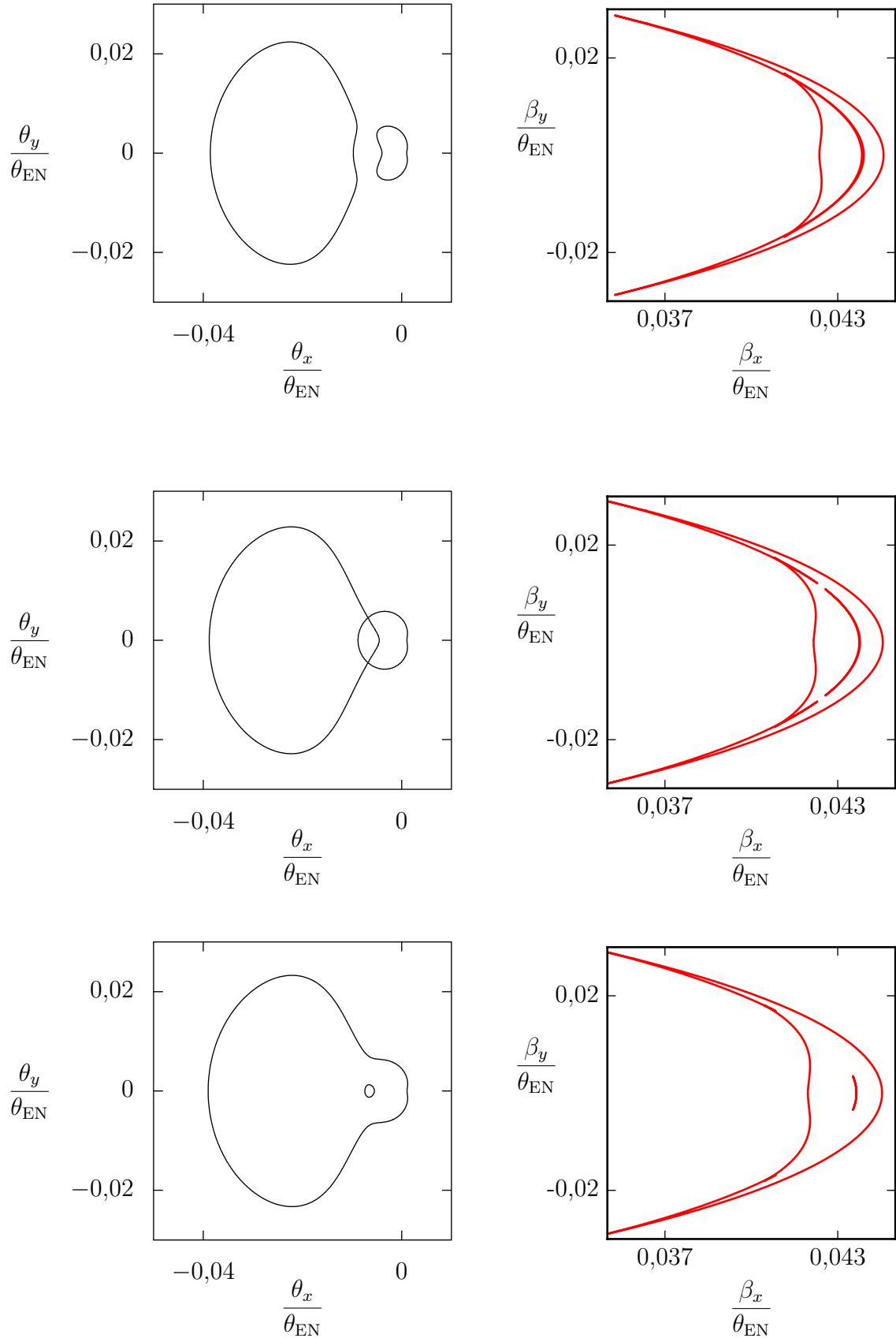
Obrázek 6.16: Závislost charakteristického rozměru kritické křivky před rychle konvergujícím přechodem lips na  $\theta_P$  při  $\sigma = 1 \cdot 10^{-3}$ .



Obrázek 6.17: Kritické křivky a mapy zjasnění kolem přechodu mezi body  $C1$  a  $X$ , kdy probíhá spojení dvou kruhových kaustik v jednu „srpkovitou“, pro  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ . Hmotný bod je ve vzdálenosti (shora)  $\theta_P \in \{0,015; 0,023; 0,030\}\theta_{EN}$ .



Obrázek 6.18: Výřez kritických křivek a kaustik kolem beak-to-beak přechodu pro  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$ . Hmotný bod je ve vzdálenosti (shora)  $\theta_P \in \{5,95; 6,03; 6,06\} \cdot 10^{-3} \theta_{EN}$ . U prostředního obrázku si všimněme výčnělků – swallowtailů na levé kaustice. Obrázky kaustik nemají na osách stejné měřítko!



Obrázek 6.19: Výřez kritických křivek a kaustik kolem beak-to-beak přechodu pro  $\sigma = 1 \cdot 10^{-3}$ . Hmotný bod je ve vzdálenosti (shora)  $\theta_P \in \{0,0233; 0,0234; 0,0235\}\theta_{\text{EN}}$ . U prostředního a spodního obrázku si všimněme výčnělků – swallowtailů na vnější kaustice. Obrázky kaustik nemají na osách stejné měřítko!



## 7. Diskuse

Pojďme se nyní zabývat otázkou výskytu reálných objektů, které by odpovídaly námi zkoumanému kombinovanému modelu, a jejich pozorovatelnosti. Poměr hmot  $\approx 10^{-4}$ , který je na spodní hranici námi zkoumaného intervalu, nacházíme u řady dvojic nebeských těles. Nejslibnější pro případné pozorování se zřejmě jeví kupa galaxií o typické hmotnosti  $\approx 10^{45}$  kg s velkými galaxiemi jako aproximací hmotných bodů o hmotnostech  $\approx 10^{40} - 10^{41}$  kg. Tyto objekty jsou dle názoru autora vhodné pro hledání výskytu tohoto jevu ze tří důvodů.

Prvním důvodem je, že spojitá hmota, reprezentovaná temnou hmotou, je popisována NFW modelem, kterým se tato práce zabývala. Nelze ale vyloučit, že podobné chování při perturbaci bude popsáno i u jiných modelů spojitě hmoty. Druhým důvodem je, že tyto objekty jsou již v současnosti zkoumány jako gravitační čočky při mapování temné hmoty. Při hledání tohoto jevu lze tedy použít již jednou naměřená data. Třetím důvodem pak je, že kupy galaxií jsou velmi hmotné, perturbace v silném čočkování by zde tedy měly být nejsnáze patrné. Pro kupy galaxií z článku (Merten a kol., 2015) vychází velikost Einsteinova poloměru v rozmezí  $1,0' - 2,5'$ . Typický rozměr kaustik tedy je řádově desítky úhlové vteřiny, rozměr kritických křivek pak o řád větší. Jev by tedy měl být pozorovatelný dnešními přístroji za předpokladu, že takovou vhodnou konstelaci objevíme.

Kupy galaxií ale nejsou jediným objektem s příhodným poměrem hmotností. Například galaxie M87 má uprostřed černou díru o hmotnosti  $\approx 10^{39}$  kg, tedy velké galaxie se supermasivní černou dírou by mohly být dalším kandidátem. Podobnou hmotnost, jako zmíněná supermasivní černá díra, pak mají například některé trpasličí galaxie, které jsou častými souputníky velkých galaxií. Podobné poměry hmot bychom pak mohli najít i u dalších objektů, nicméně dvojice kupa galaxií-galaxie, případně galaxie-černá díra nebo galaxie-trpasličí galaxie jsou díky své velké hmotnosti pravděpodobně nejslibnějšími kandidáty k pozorování. K realističtějším modelování by bylo vhodné studii rozšířit na větší počet hmotných bodů.

Jak již bylo řečeno, v této práci byla zkoumána závislost kombinovaného modelu pouze na dvou ze čtyř parametrů modelu. Bylo by jistě zajímavé zjistit chování modelu i při změně parametrů  $c$  a  $r_s$ . Protože tyto parametry kódují převážně strmost modelu Navarra, Frenka a Whitea, docházelo by pravděpodobně se zvětšujícím se  $r_s$ , resp. se zmenšujícím se  $c$  k posilování vlivu spojitě hmoty na úkor hmotného bodu. Jde ale pouze o ničím nepodložený odhad, je tedy možné, že by se model choval jiným způsobem, či se zde dokonce objevily nové jevy. Při pohledu na Obrázek 6.1 navíc zjistíme, že žádná z odkazovaných kup galaxií nemá hodnoty parametrů  $c$  a  $r_s$  přesně takové, jaké byly použity v této práci. Bylo by tedy zajímavé zjistit, jak moc lze výsledky naší práce přenést na tyto kupy galaxií.

I v parametrech, které byly měněny, jsme se omezili pouze na určitou malou oblast. Její volba byla odůvodněná, nicméně i mimo ni by se mohly vyskytovat nové jevy. Například pokud se podíváme na bližší dvojčočkový přechod, umbiliku a odtržení trojcípých kaustik, zjistíme, že s rostoucím  $\sigma$  se tyto přechody k sobě přibližují. Je otázkou, jestli se toto chování pro vyšší  $\sigma$  změní a přechody

se od sebe začnou vzdalovat, nebo jestli se potkají pro nějaké konečné  $\sigma$ . Tento bod, pokud existuje, by byl nesmírně zajímavý, neboť všechny tři přechody obsahují interakci s trojcípyými kaustikami, v tomto bodě by tedy pravděpodobně docházelo k nějakému složitému a vzácnému přechodu. Naopak pro vyšší  $\theta_P$  již pravděpodobně žádné nové jevy nenastanou, neboť jsme v tomto směru prozkoumali prostor parametrů až do oblasti, kde se kombinovaný model již chová jako dva téměř neinteragující modely diskrétního hmotného bodu a spojitého Navarra, Frenka a Whitea.

V kombinovaném modelu bylo pozorováno mnoho přechodů, u většiny z nich jsme jejich typ určili na základě podobnosti vzhledu a chování s některým ze základních typů. Je nicméně možné, ač nepravděpodobné, že by se ve skutečnosti jednalo o nějaké vzácnější přechody vyššího řádu. Jistotu u všech těchto přechodů bychom získali až klasifikací na základě algebraických vlastností těchto přechodů.

## 8. Závěr

Cílem této práce bylo zkoumat vliv perturbace hmotným bodem na kaustickou strukturu modelu spojitě hmoty, konkrétně modelu Navarra, Frenka a Whitea. Tento model byl vybrán, protože jde o jednoduchý sféricky symetrický model spojitě hmoty, pro který známe analytický vztah pro úhel odklonu paprsku. Zároveň je ale realistický a skutečně se pomocí něj popisuje rozložení temné hmoty v halech kup galaxií. Z důvodu jednoduchosti byl NFW model perturbován pouze jedním hmotným bodem. Výsledný kombinovaný model spojitě a diskrétní hmoty pak má čtyři parametry, z toho dva parametry, týkající se spojitě části modelu, byly pro potřeby této práce pevně zvoleny dle hodnot typických pro hala kup galaxií.

Zbývající dva parametry, poloha hmotného bodu a poměr hmotností diskrétní a spojitě části, byly ponechány volné a byla zkoumána podoba kaustik a kritických křivek v závislosti na nich. Poměr hmotností diskrétní a spojitě části byl ale měněn pouze v rozsahu  $10^{-4} - 10^{-3}$ , kdy model při poloze hmotného bodu blízko středu spojitě části výrazně mění svoje vlastnosti. Shodou okolností tento poměr hmotností odpovídá několika reálným astrofyzikálním situacím, jako je např. poměr hmotnosti velké galaxie ku hmotnosti kupy galaxií. Ke zkoumání modelu bylo použito několik různých numerických i semianalytických metod, z nichž byla nejčastěji použita metoda zpětného střílení paprsků. Ta totiž jako jediná z použitých metod dokáže zobrazit nejen kaustiky, ale kompletní mapu zjasnění.

Bylo zjištěno, že v rámci zkoumaného rozsahu parametrů se kombinovaný model může vyskytovat minimálně v osmi různých kaustických topologiích, mezi kterými existuje sedm přechodů. Navíc v tomto výčtu nejsou zahrnuty přechody typu swallowtail a eliptická umbilika a topologie jimi se lišící a přechody způsobené překryvem několika neinteragujících kusů kaustik. V jedné z těchto topologií se pak vyskytují čtyři kusy kaustik s celkem jedenácti foldy a deseti cuspy, zatímco neperturovaný model Navarra, Frenka a Whitea obsahuje pouze jednu bodovou a jednu kruhovou kaustiku.

Na přechodech v kombinovaném modelu také zaujme bohatost jejich typů. Vyskytují se zde nejen přechody typu beak-to-beak a swallowtail, které najdeme i u rovinných čoček složených pouze z hmotných bodů, ale i vzácnější přechody typu lips a eliptická, či hyperbolická umbilika. Poslední zmíněný přechod byl přitom doposud pozorován hlavně ve složitějších modelech čočkování ve více rovinách. Potvrzení charakteru těchto vzácnějších přechodů by však poskytl až algebraický rozbor.

V kombinovaném modelu se také vyskytují dva beak-to-beak přechody, které svým chováním připomínají beak-to-beak přechody v modelu dvojčočky, tedy dvou hmotných bodů. Bylo ukázáno, že při vhodné interpretaci parametrů kombinovaného modelu existuje i kvantitativní shoda v poloze přechodů v prostoru parametrů.

Velmi zajímavým jevem v kombinovaném modelu pak je, že i takto malá perturbace modelu spojitě hmoty dokáže způsobit změny v kaustické struktuře a struktuře kritických křivek, které jsou velikostně srovnatelné s kaustikami a kritickými křivkami původního neperturovaného modelu spojitě hmoty. Tato

vlastnost spolu s příhodným poměrem hmotností, který odpovídá reálným astrofyzikálním situacím, dává jistou naději na pozorování jevů způsobených takovouto perturbací.

# Literatura

- BOHÁČEK, I. (1997). Gravitační čočky a Rudi W. Mandl. *Vesmír*, **76**, 174.
- DANĚK, K. a HEYROVSKÝ, D. (2015). Critical curves and caustics of triple-lens models. *The Astrophysical Journal*, **806**, 99. ISSN 1538-4357. doi: 10.1088/0004-637x/806/1/99.
- EINSTEIN, A. (1915). Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, page 831.
- EINSTEIN, A. (1936). Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field. *Science*, **84**, 506. doi: 10.1126/science.84.2188.506.
- KEETON, C. R. (2001). A catalog of mass models for gravitational lensing. *arXiv preprint astro-ph/0102341*.
- MERTEN, J., MENEGHETTI, M., POSTMAN, M., UMETSU, K., ZITRIN, A., MEDEZINSKI, E., NONINO, M., KOEKEMOER, A., MELCHIOR, P., GRUEN, D. a ET AL. (2015). CLASH: the concentration-mass relation of galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, **806**, 4.
- NARAYAN, R. a BARTELMANN, M. (1999). Gravitational lensing. In DEKEL, A. a OSTRIKER, J. P., editors, *Formation of Structure in the Universe*, page 360.
- NAVARRO, J. F., FRENK, C. S. a WHITE, S. D. M. (1996). The structure of cold dark matter halos. *The Astrophysical Journal*, **462**, 563.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. a FLANNERY, B. P. (2007). *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 3 edition. ISBN 9780521880688.
- SCHNEIDER, P. (2014). *Extragalactic astronomy and cosmology: an introduction*. Springer.
- SCHNEIDER, P., EHLERS, J. a FALCO, E. E. (1992). *Gravitational Lenses*. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 9783662037584. doi: 10.1007/978-3-662-03758-4.
- WALSH, D., CARSWELL, R. F. a WEYMANN, R. J. (1979). 0957 + 561 A, B - Twin quasistellar objects or gravitational lens. *Nature*, **279**, 381. doi: 10.1038/279381a0.
- WAMBSGANSS, J. (1998). Gravitational lensing in astronomy. *Living Rev. Relativity*, **1**, 12.
- ZWICKY, F. (1937). On the Probability of Detecting Nebulae Which Act as Gravitational Lenses. *Physical Review*, **51**, 679. doi: 10.1103/PhysRev.51.679.