MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Dudák

Jordanova věta o kružnici

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Jordanova věta o kružnici

Autor: Jan Dudák

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Stěžejní částí této práce je důkaz Jordanovy věty o kružnici. Za tímto účelem jsou v práci nejdříve definovány potřebné pojmy (např. křivka a oblouk) a jsou ukázány jejich základní vlastnosti. Dále je dokázána Brouwerova věta o pevném bodu (v dimenzi 2) a některé její důsledky, které jsou následně využity (společně s několika dalšími dokázanými tvrzeními) v důkazu samotné Jordanovy věty o kružnici. Poslední kapitola této práce stručně informuje o možnostech, jak Jordanovu větu o kružnici zobecnit, přičemž odkazuje na vhodnou literaturu.

Klíčová slova: Jordanova křivka, oblouk, rovina, komponenta souvislosti

Title: The Jordan Curve Theorem

Author: Jan Dudák

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The crucial part of this work is the proof of the Jordan curve theorem. To this end, the work starts by introducing necessary notions (e.g. a curve or an arc) and showing their basic properties. Further on, the Brouwer fixed point theorem is proved (in the 2-dimensional case) as well as some of its corollaries which are then used (together with several other proven assertions) in the proof of the Jordan curve theorem. The last chapter of this work briefly informs about possible generalisations of the Jordan curve theorem, referencing to appropriate bibliography.

Keywords: Jordan curve, arc, plane, connected component

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své bakalářské práce, Mgr. Benjaminu Vejnarovi, Ph.D., za mimořádnou ochotu a cenné rady a připomínky k mé práci.

Obsah

Úvod

Jordanova věta o kružnici je typickým příkladem matematického tvrzení, které se na první pohled intuitivně jeví jako očividné, přestože vůbec očividné není. Nikdo nepochybuje o tom, že kružnice dělí rovinu právě na dvě oddělené oblasti, totiž na vnitřek a vnějšek, a zdá se být zřejmé, že tuto vlastnost si kružnice zachová i poté, co je „šetrným způsobem“ (homeomorfismem) zdeformována. Jednou z příčin takto unáhleného úsudku je pravděpodobně neschopnost člověka vizuálně si představit, jak „divoká“ a „ošklivá“ může ta „šetrná“ deformace být. V matematice už bylo objeveno mnoho nepravdivých tvrzení, jejichž pravdivost se zdála být do očí bijící. Je tedy pochopitelné a správné, že přesné důkazy jsou v dnešním matematickém světě považovány za naprostou nezbytnost.

V základních přednáškách z matematické analýzy na MFF UK se posluchač s Jordanovou větou setkává jakožto s podstatnou ingrediencí pro Greenovu větu. Důkaz však pro svou obtížnost a časovou náročnost na samotné přednášce podáván není. Cílem této práce tedy bude důkaz podat. Měl by být detailní, precizní, soběstačný a neměl by se opírat o žádné hlubší poznatky z topologie.

Jordanova věta je pojmenována po francouzském matematiku Camille Jordanovi (*1838; †1921), který jako první publikoval její důkaz. Dnes je již známo mnoho různých důkazů Jordanovy věty. Důkaz, který bude podán v této práci, je založen na důkazu uvedeném v článku [4], kde je klíčovým argumentačním nástrojem slavná Brouwerova věta o pevném bodu. Ta zde bude také dokázána (byť jen v dimenzi 2), přičemž důkaz bude veden podle [5].

Stručný seznam vlastní práce:
Zavedení pro práci důležitých definic, poznámky za definicí 6, formulace a důkaz tvrzení 1, formulace a důkaz tvrzení 2, formulace a důkaz lemmatu 3, formulace a důkaz lemmatu 4, formulace a důkaz lemmatu 5, zavedení vhodného aparátu potřebného k detailnímu důkazu Brouwerovy věty (tj. připomenutí znalostí z komplexní analýzy ve větě 6, formulace a důkaz důsledku 7, definice 9), doplnění důkazu Brouwerovy věty uvedeného v článku [5] (Case n=2) o mnoho detailů (v této práci věta 8), podrobné zdůvodnění, proč zobrazení F definované v článku [4] v důkazu „Lemma 2“ nemá pevný bod (v této práci důsledek 9), formulace a důkaz důsledku 10, formulace a důkaz lemmatu 11, formulace a důkaz lemmatu 12, poznámka za lemmatem 13 (spojité rozšíření bez Tietzeho věty), zavedení definice 10 pro potřeby důkazu Jordanovy věty, doplnění důkazu Jordanovy věty podaného v článku [4] (str. 642, 643) o mnoho detailů (v této práci věta 14) a zdůvodnění úvodního „BÚNO“, poznámka za větou 16.

1. Křivky a oblouky

Ve formulacích a důkazech většiny tvrzení v této práci se bude hojně vyskytovat pojem křivky nebo oblouku. V běžné řeči mají tato slova poměrně jasný, intuitivní význam, ale v matematice se lze setkat s mnoha jejich různými (neekvivalentními) definicemi. Zejména problematika definování pojmu křivka je natolik bohatá, že by snadno vydala na samostatnou práci. Cílem první kapitoly tedy bude zavést pro potřeby této práce jasné a pevné definice těchto základních pojmů (a také pojmu Jordanova křivka a některých dalších souvisejících pojmů). Dále budou v této kapitole ukázány některé jejich vlastnosti, o které se budeme často opírat v dalších kapitolách.

Značení
Buďte $n \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$. *Potom symbolem* $\mathrm{U}(\boldsymbol{p}, R)$ *značíme otevřenou kouli se středem v bodě* $\boldsymbol{p}$ *a poloměrem* R, *tj. množinu* $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}|| < R\}$.

Za stejných předpokladů značíme symbolem $\mathrm{B}(\boldsymbol{p}, R)$ *uzavřenou kouli se středem v bodě* $\boldsymbol{p}$ *a poloměrem* R, *tj. množinu* $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}|| \leq R\}$.

Symbolem $\mathbb{S}$ *značíme jednotkovou kružnici (v rovině* $\mathbb{R}^2$*) se středem v počátku, tj. množinu* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Definice 1
Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a < b$. *Nechť* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *(nebo* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$*) je spojité zobrazení. Pak řekneme, že zobrazení* φ *je křivka.*

Definice 2
Je-li zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *křivka, pak symbolem* $\dot{-}\varphi$ *značíme křivku danou předpisem* $\dot{-}\varphi(t) = \varphi(-t)$ *pro každé* $t \in [-b, -a]$.

Definice 3
Jsou-li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ *křivky takové, že* $\varphi(b) = \psi(c)$, *potom definujeme křivku* $\varphi \dot{+} \psi$ *předpisem* $(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \varphi(t)$ *pro* $t \in [a, b]$ *a předpisem* $(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \psi(t - b + c)$ *pro* $t \in [b,\ b - c + d]$. *Křivku* $\varphi \dot{+} \psi$ *nazýváme spojením křivek* φ *a* ψ.

Definice 4
Jsou-li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ *křivky takové, že* $\varphi(b) = \psi(d)$, *potom definujeme křivku* $\varphi \dot{-} \psi$ *rovností* $\varphi \dot{-} \psi := \varphi \dot{+} (\dot{-}\psi)$.

Definice 5
Buď $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. *Pak řekneme, že množina* A *je oblouk, jestliže* A *je homeomorfní s intervalem* $[0, 1]$, *tj. existuje-li homeomorfismus* $\mathrm{H} : [0, 1] \twoheadrightarrow A$.

Definice 6
Buď $n \in \mathbb{N}$, $J \subseteq \mathbb{R}^n$. *Pak řekneme, že množina* J *je Jordanova křivka, jestliže* J *je homeomorfní s kružnicí* $\mathbb{S}$, *tj. existuje-li homeomorfismus* $\mathrm{H} : \mathbb{S} \twoheadrightarrow J$.

Poznámka: *Z předchozích dvou definic je zřejmé, že Jordanova křivka i oblouk jsou kompaktní množiny (jsou to totiž spojité obrazy kompaktních množin).*

Poznámka: *Z teorie metrických prostorů je známé jednoduché tvrzení, že jsou-li X, Y metrické prostory, X je kompaktní a $f : X \to Y$ je prosté spojité zobrazení, pak f je homeomorfismus X na* $\operatorname{rng}(f)$. *Z tohoto tvrzení snadno plyne, že množina $J \subseteq \mathbb{R}^n$ je Jordanova křivka právě tehdy, když je prostým spojitým obrazem kružnice $\mathbb{S}$. Podobná ekvivalence platí i pro oblouk: množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je oblouk právě tehdy, když je prostým spojitým obrazem intervalu* $[0, 1]$.

Jordanovu větu budeme v kapitole 3 formulovat za použití pojmu Jordanova křivka. Lze se však setkat i s formulacemi, které se opírají o jiný pojem, a sice o pojem jednoduchá uzavřená křivka. Proto zde definujeme také tento pojem a ukážeme, jaká je jeho souvislost s Jordanovou křivkou.

Definice 7
Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a < b$. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení. Pak řekneme, že zobrazení φ je jednoduchá uzavřená křivka, jestliže platí $\varphi(a) = \varphi(b)$ a zobrazení $\varphi\restriction_{[a,b)}$ je prosté.

Tvrzení 1
Buď $n \in \mathbb{N}$ a nechť $J \subseteq \mathbb{R}^n$ je libovolná množina. Pak J je Jordanova křivka právě tehdy, když existuje jednoduchá uzavřená křivka φ taková, že $\operatorname{rng}(\varphi) = J$.

Důkaz: Nejdříve předpokládejme, že J je Jordanova křivka. Pak existuje nějaký homeomorfismus $\mathrm{H} : \mathbb{S} \twoheadrightarrow J$. Uvažme zobrazení $\xi : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}$ dané pro každé $t \in [0, 2\pi]$ předpisem $\xi(t) = (\cos t, \sin t)$ a položme $\varphi := \mathrm{H} \circ \xi$. Jelikož H, ξ jsou spojitá zobrazení a H, $\xi\restriction_{[0,2\pi)}$ jsou prostá zobrazení, je spojité i zobrazení φ a jeho restrikce na interval $[0, 2\pi)$ je prostá. Zřejmě také platí $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. Zobrazení φ je tedy jednoduchá uzavřená křivka a navíc pro ně platí

$$\operatorname{rng}(\varphi) = \mathrm{H}(\operatorname{rng}(\xi)) = \mathrm{H}(\mathbb{S}) = \operatorname{rng}(\mathrm{H}) = J.$$

Nyní naopak nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je jednoduchá uzavřená křivka taková, že $\operatorname{rng}(\varphi) = J$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $[a, b] = [0, 2\pi]$. Kdyby $[a, b] \neq [0, 2\pi]$, provedli bychom lineární reparametrizaci křivky φ.

Položme $\psi := \xi\restriction_{[0,2\pi)}$ a definujme zobrazení $\mathrm{H} : \mathbb{S} \to J$ vztahem $\mathrm{H} := \varphi \circ \psi^{-1}$. Toto zobrazení je jistě dobře definované, prosté a platí pro ně

$$\operatorname{rng}(\mathrm{H}) = \varphi\left(\operatorname{rng}\left(\psi^{-1}\right)\right) = \varphi([0, 2\pi)) = \varphi([0, 2\pi]) = \operatorname{rng}(\varphi) = J.$$

Zobrazení H je tedy bijekce množiny $\mathbb{S}$ na množinu J a podle poznámek za definicí 6 tak stačí dokázat, že zobrazení H je spojité.

Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S} \setminus \{(1, 0)\}$ je libovolný bod. Ukážeme, že zobrazení H je v bodě $\boldsymbol{x}$ spojité (samozřejmě myšleno vzhledem k množině $\mathbb{S}$). Buď tedy $\varepsilon > 0$ libovolné číslo a označme $t_0 := \psi^{-1}(\boldsymbol{x})$. Jelikož $\boldsymbol{x} \neq (1, 0)$, platí $0 < t_0 < 2\pi$. Zobrazení φ je spojité, takže existuje číslo $\Delta > 0$ takové, že $(t_0 - \Delta,\, t_0 + \Delta) \subseteq (0, 2\pi)$ a pro každé $t \in (t_0 - \Delta,\, t_0 + \Delta)$ platí $||\varphi(t_0) - \varphi(t)|| < \varepsilon$.
Jelikož $\psi = \xi\restriction_{[0,2\pi)}$, $\xi(0) = \xi(2\pi)$ a zobrazení ξ je spojité, je množina

$$A := \psi\left([0, 2\pi) \setminus (t_0 - \Delta,\, t_0 + \Delta)\right) = \xi\left([0, 2\pi] \setminus (t_0 - \Delta,\, t_0 + \Delta)\right)$$

kompaktní, a tedy platí $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, A) > 0$. Volme $\delta > 0$ tak, aby $\delta < \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, A)$. Potom pro každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{S} \cap \mathrm{U}(\boldsymbol{x}, \delta)$ platí $\boldsymbol{y} \notin A$, z čehož dostáváme (neboť ψ je bijekce intervalu $[0, 2\pi)$ na kružnici $\mathbb{S}$), že platí $\psi^{-1}(\boldsymbol{y}) \in (t_0 - \Delta,\, t_0 + \Delta)$, a tedy $||\mathrm{H}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{H}(\boldsymbol{y})|| = ||\varphi(t_0) - \varphi(\psi^{-1}(\boldsymbol{y}))|| < \varepsilon$.

Zbývá ukázat spojitost zobrazení H v bodě $(1, 0)$. Volme číslo $\varepsilon > 0$ libovolně. Víme, že zobrazení φ je spojité a platí $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. Existuje tedy kladné číslo $\Delta < \pi$ takové, že pro každé $t \in [0, \Delta) \cup (2\pi - \Delta, 2\pi]$ platí $||\varphi(t) - \varphi(0)|| < \varepsilon$. Zobrazení ψ je spojité, a tak je množina $A := \psi\left([\Delta, 2\pi - \Delta]\right)$ kompaktní. Speciálně, číslo $\operatorname{dist}((1, 0), A)$ je kladné. Volme číslo $\delta > 0$ tak, aby platilo $\delta < \operatorname{dist}((1, 0), A)$. Potom pro každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{S} \cap \mathrm{U}((1, 0), \delta)$ platí $\boldsymbol{y} \notin A$, a tedy platí $\psi^{-1}(\boldsymbol{y}) \in [0, \Delta) \cup (2\pi - \Delta, 2\pi)$, z čehož dostáváme $||\mathrm{H}(\boldsymbol{y}) - \mathrm{H}(1, 0)|| =$
$= ||\varphi(\psi^{-1}(\boldsymbol{y})) - \varphi(0)|| < \varepsilon$.

□

Definice 8

Buď $n \in \mathbb{N}$, nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je oblouk a $\boldsymbol{p} \in A$ je libovolný bod. Pak řekneme, že bod $\boldsymbol{p}$ je krajním bodem oblouku A, jestliže existuje homeomorfismus $\mathrm{H} : [0, 1] \twoheadrightarrow A$ takový, že $\mathrm{H}(0) = \boldsymbol{p}$ nebo $\mathrm{H}(1) = \boldsymbol{p}$.

Tvrzení 2

Každý oblouk má právě dva krajní body.

Důkaz: Buď $n \in \mathbb{N}$ a nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je libovolný oblouk. Pak existuje nějaký homeomorfismus $\mathrm{H} : [0, 1] \twoheadrightarrow A$. Jelikož zobrazení H je prosté, jsou $\mathrm{H}(0)$, $\mathrm{H}(1)$ dva různé krajní body oblouku A. Zbývá ukázat, že žádné další krajní body tento oblouk nemá. Buď $\widetilde{\mathrm{H}} : [0, 1] \twoheadrightarrow A$ libovolný homeomorfismus. Pak zobrazení $\xi := \widetilde{\mathrm{H}}^{-1} \circ \mathrm{H}$ je automorfismus intervalu $[0, 1]$, a tedy platí buď $\xi(0) = 0$ a $\xi(1) = 1$, nebo $\xi(0) = 1$ a $\xi(1) = 0$. V prvním případě dostáváme $\widetilde{\mathrm{H}}(0) = \mathrm{H}(0)$, $\widetilde{\mathrm{H}}(1) = \mathrm{H}(1)$ a ve druhém $\widetilde{\mathrm{H}}(0) = \mathrm{H}(1)$, $\widetilde{\mathrm{H}}(1) = \mathrm{H}(0)$.

□

Lemma 3

Buď $n \in \mathbb{N}$. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je oblouk, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} \in A$, $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$ a ani jeden z bodů $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ není krajním bodem oblouku A. Pak existují reálná čísla $m_1 < m_2$ a křivka $\varphi : [m_1, m_2] \to \mathbb{R}^n$ taková, že $\varphi(m_1) = \boldsymbol{p}$, $\varphi(m_2) = \boldsymbol{q}$, $\operatorname{rng}(\varphi) \subseteq A$ a ani jeden z krajních bodů oblouku A neleží v $\operatorname{rng}(\varphi)$.

Důkaz: A je oblouk, zvolme tedy nějaký homeomorfismus $\mathrm{H} : [0, 1] \twoheadrightarrow A$. Označme $t_1 := \mathrm{H}^{-1}(\boldsymbol{p})$, $t_2 := \mathrm{H}^{-1}(\boldsymbol{q})$. Podle tvrzení 2 má oblouk A právě dva krajní body, a sice body $\mathrm{H}(0)$, $\mathrm{H}(1)$. Proto platí $t_1, t_2 \in (0, 1)$.
Jestliže $t_1 < t_2$, položíme $m_1 := t_1$, $m_2 := t_2$ a definujeme křivku φ předpisem $\varphi(t) = \mathrm{H}(t)$, $t \in [m_1, m_2]$.
Pokud $t_1 > t_2$, položíme $m_1 := -t_1$, $m_2 := -t_2$ a definujeme křivku φ předpisem $\varphi(t) = \mathrm{H}(-t)$, $t \in [m_1, m_2]$.
Zřejmě ani jeden z bodů $\mathrm{H}(0)$, $\mathrm{H}(1)$ neleží v oboru hodnot zobrazení φ.

□

Lemma 4

Buď $n \in \mathbb{N}$. Nechť $J \subseteq \mathbb{R}^n$ je Jordanova křivka a F je její vlastní, neprázdná, uzavřená podmnožina. Pak existuje oblouk $A \subseteq \mathbb{R}^n$ takový, že platí $F \subseteq A \subseteq J$.

Důkaz: Jelikož J je Jordanova křivka, můžeme zvolit nějaký homeomorfismus $\mathrm{H} : \mathbb{S} \twoheadrightarrow J$. Položme $G := J \backslash F$. Pak G je otevřená množina v J, $G \neq \emptyset$, $G \neq J$. Ze spojitosti zobrazení H tak dostáváme, že množina $\mathrm{H}^{-1}(G)$ je otevřená v kružnici $\mathbb{S}$, $\mathrm{H}^{-1}(G) \neq \emptyset$, $\mathrm{H}^{-1}(G) \neq \mathbb{S}$. Zvolíme libovolně bod $\boldsymbol{x} \in \mathrm{H}^{-1}(G)$ a najdeme k němu reálné číslo $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $\mathbb{S} \cap \mathrm{U}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subseteq \mathrm{H}^{-1}(G)$. Jelikož zobrazení H je homeomorfismus a množina $\mathbb{S} \backslash \mathrm{U}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ je (zřejmě) homeomorfní s intervalem $[0, 1]$, je snadné se přesvědčit, že množina $A := \mathrm{H}(\mathbb{S} \backslash \mathrm{U}(\boldsymbol{x}, \varepsilon))$ je oblouk s požadovanými vlastnostmi.

□

Lemma 5

Buď $n \in \mathbb{N}$. Nechť $J \subseteq \mathbb{R}^n$ je Jordanova křivka, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in J$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$. Pak existují oblouky A_1, $A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ takové, že $A_1 \cup A_2 = J$, $A_1 \cap A_2 = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ a body $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou krajními body oblouků A_1, A_2.

Důkaz: Zvolme nějaký homeomorfismus $\mathrm{H} : \mathbb{S} \twoheadrightarrow J$ a položme $\boldsymbol{a} := \mathrm{H}^{-1}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{b} := \mathrm{H}^{-1}(\boldsymbol{v})$. Uvažme zobrazení $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ dané předpisem $\xi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Jelikož body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ leží na kružnici $\mathbb{S}$, existují čísla t_1, $t_2 \in [0, 2\pi)$, pro která platí $\xi(t_1) = \boldsymbol{a}$, $\xi(t_2) = \boldsymbol{b}$.

Jestliže $t_1 < t_2$, definujeme

$$\varphi := (\mathrm{H} \circ \xi) \restriction_{[t_1, t_2]}, \quad \psi := (\mathrm{H} \circ \xi) \restriction_{[t_2, t_1 + 2\pi]}.$$

Pokud naopak $t_1 > t_2$, položíme

$$\varphi := (\mathrm{H} \circ \xi) \restriction_{[t_2, t_1]}, \quad \psi := (\mathrm{H} \circ \xi) \restriction_{[t_1, t_2 + 2\pi]}.$$

V obou případech je snadné se přesvědčit, že množiny $A_1 := \operatorname{rng}(\varphi)$, $A_2 := \operatorname{rng}(\psi)$ jsou oblouky s požadovanými vlastnostmi.

□

2. Brouwerova věta o pevném bodu

Brouwerova věta o pevném bodu v obecnější formulaci říká, že je-li X topologický prostor homeomorfní s nějakou konvexní kompaktní podmnožinou eukleidovského prostoru ($\mathbb{R}^n$), pak má každé spojité zobrazení $f : X \to X$ alespoň jeden pevný bod (tj. bod, který se zobrazí sám na sebe). Pro důkaz Jordanovy věty nám však bude stačit méně obecná verze tohoto tvrzení, a sice verze předpokládající, že prostor X je homeomorfní s uzavřeným jednotkovým kruhem. Hlavním cílem této kapitoly je toto tvrzení dokázat. Ještě před tím je však třeba připomenout jednu známou větu (a její důsledek a na něj následující definici) z komplexní analýzy.

Věta 6

Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která v žádném bodě nenabývá nulové hodnoty. Pak existuje spojitá funkce $L : [a, b] \to \mathbb{C}$ taková, že pro každé $t \in [a, b]$ platí $f(t) = e^{L(t)}$.
Důkaz lze najít v [6] na straně 75.

Důsledek 7

Nechť a, b jsou reálná čísla, $a < b$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je křivka a $g : \operatorname{rng}(\varphi) \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která v žádném bodě nenabývá nulové hodnoty.
Potom existuje spojitá funkce $\operatorname{Arg} : [a, b] \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $t \in [a, b]$ je číslo $\operatorname{Arg}(t)$ argumentem komplexního čísla $g(\varphi(t))$.
Navíc jsou-li $\operatorname{Arg}_1, \operatorname{Arg}_2$ dvě takové funkce, pak existuje číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že pro každé $t \in [a, b]$ platí $\operatorname{Arg}_1(t) - \operatorname{Arg}_2(t) = 2k\pi$.

Důkaz: Definujme funkci $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ vztahem $f := g \circ \varphi$.
Tato funkce je zřejmě spojitá a v žádném bodě nenabývá nulové hodnoty. Podle věty 6 tak existuje spojitá funkce $L : [a, b] \to \mathbb{C}$ taková, že pro každé $t \in [a, b]$ platí $f(t) = e^{L(t)}$. Pak stačí položit $\operatorname{Arg} := \operatorname{Im} L$.
Zbývá ukázat jednoznačnost až na celočíselný násobek 2π.

Položme $h := \frac{1}{2\pi}(\operatorname{Arg}_1 - \operatorname{Arg}_2)$. Pak h je zřejmě spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ nabývající pouze celočíselných hodnot. Potom ale h nutně musí být konstantní funkce, a tedy existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že pro každé $t \in [a, b]$ platí $h(t) = k$, neboli $\operatorname{Arg}_1(t) - \operatorname{Arg}_2(t) = 2k\pi$.

□

Definice 9

Nechť a, b jsou reálná čísla, $a < b$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je křivka a $f : \operatorname{rng}(\varphi) \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která v žádném bodě nenabývá nulové hodnoty.
Nechť $\operatorname{Arg} : [a, b] \to \mathbb{R}$ je libovolná spojitá funkce taková, že pro každé $t \in [a, b]$ je číslo $\operatorname{Arg}(t)$ argumentem komplexního čísla $f(\varphi(t))$. Pak číslo $\operatorname{Arg}(b) - \operatorname{Arg}(a)$ nazýváme přírůstkem argumentu funkce f podél křivky φ.
Díky předchozímu důsledku je přírůstek argumentu funkce f podél křivky φ určen jednoznačně. Budeme jej značit $\arg_\varphi f$.

Věta 8 (Brouwerova)
Označme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Nechť X je libovolný topologický prostor, který je homeomorfní s diskem D. Pak každé spojité zobrazení $f : X \to X$ má alespoň jeden pevný bod.

Důkaz: Označme písmenem K čtverec $\{z \in \mathbb{C};\ -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1,\ -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$. Tento čtverec je jistě homeomorfní s diskem D.
Nejdříve větu dokážeme pro $X = K$ a obecný případ už pak získáme velmi snadno.

Buď $f : K \to K$ libovolná spojitá funkce a pro spor předpokládejme, že f nemá žádný pevný bod. Pak funkce $g : K \to \mathbb{C}$ definovaná pro každé $z \in K$ předpisem $g(z) = z - f(z)$ je spojitá a v žádném bodě nenabývá nulové hodnoty.
Nyní parametrizujeme hranici čtverce K. Pro jednoduchost zvolíme parametrizaci délkou křivky od levého dolního vrcholu v kladném směru, tj. parametrizaci $\varphi : [0,8] \to \mathbb{C}$ danou následujícími vztahy:

$$\varphi(t) = t - 1 - i,\ t \in [0,2) \qquad \varphi(t) = 1 - 3i + ti,\ t \in [2,4)$$

$$\varphi(t) = 5 - t + i,\ t \in [4,6) \qquad \varphi(t) = 7i - 1 - ti,\ t \in [6,8).$$

Jelikož $0 \notin \operatorname{rng}(g)$, plyne z důsledku 7 existence spojité funkce $\operatorname{Arg}_1 : [0,8] \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t \in [0,8]$ je číslo $\operatorname{Arg}_1(t)$ argumentem komplexního čísla $g(\varphi(t))$.
Navíc můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že číslo $\operatorname{Arg}_1(0)$ leží v intervalu $[-\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Kdyby tomu tak nebylo, přešli bychom k funkci
$\widetilde{\operatorname{Arg}_1} := \operatorname{Arg}_1 + 2k\pi$ pro vhodné celé číslo k.

Přírůstek argumentu funkce g podél křivky φ je roven $\arg_\varphi g = \operatorname{Arg}_1(8) - \operatorname{Arg}_1(0)$. Toto číslo musí být celočíselným násobkem 2π, neboť $\varphi(0) = \varphi(8)$.

Nyní položíme $\operatorname{Arg}_2(0) := -\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{Arg}_2(8) := \frac{5\pi}{4}$ a pro každé $t \in (0,8)$ nechť je číslo $\operatorname{Arg}_2(t)$ argument komplexního čísla $\varphi(t)$ volený z intervalu $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$. Pak funkce $\operatorname{Arg}_2 : [0,8] \to \mathbb{R}$ je zřejmě spojitá a přírůstek argumentu identického zobrazení $\operatorname{Id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ podél křivky φ je tedy roven $\arg_\varphi \operatorname{Id} = \operatorname{Arg}_2(8) - \operatorname{Arg}_2(0) = 2\pi$.

Definujme funkci $\Delta : [0,8] \to \mathbb{R}$ rovností $\Delta := \operatorname{Arg}_1 - \operatorname{Arg}_2$. Jelikož jsme předpokládali, že číslo $\operatorname{Arg}_1(0)$ leží v intervalu $[-\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, musí číslo $\Delta(0)$ ležet v intervalu $[-\pi, \pi)$. Nyní ukážeme, že pro každé $t \in [0,8]$ platí $\Delta(t) \in (-\pi, \pi)$:

Kdyby existovalo $t \in [0,8]$ takové, že $\Delta(t) \in \mathbb{R} \setminus (-\pi, \pi)$, pak by ze spojitosti funkce Δ a z toho, že $\Delta(0) \in [-\pi, \pi)$, plynula existence čísla $s \in [0,8]$ splňujícího $\Delta(s) = \pi$ nebo $\Delta(s) = -\pi$. To by z definice funkce Δ znamenalo, že hlavní hodnota argumentu komplexního čísla $g(\varphi(s))$ se od hlavní hodnoty argumentu komplexního čísla $\varphi(s)$ liší o π. Jelikož $g(\varphi(s)) = \varphi(s) - f(\varphi(s))$, muselo by mít číslo $f(\varphi(s))$ stejnou hlavní hodnotu argumentu jako číslo $\varphi(s)$, ale větší absolutní hodnotu. Avšak číslo $\varphi(s)$ leží na hranici čtverce K, a tedy by číslo $f(\varphi(s))$ muselo ležet vně čtverce K, což není možné, neboť f je zobrazení K do K.

Dokázali jsme, že pro každé $t \in [0,8]$ platí $\Delta(t) \in (-\pi, \pi)$.
Speciálně tedy platí $-2\pi < \Delta(8) - \Delta(0) < 2\pi$, z čehož podle definice funkce Δ dostáváme $-2\pi < \operatorname{Arg}_1(8) - \operatorname{Arg}_2(8) - \operatorname{Arg}_1(0) + \operatorname{Arg}_2(0) < 2\pi$, tedy

$-2\pi < (\mathrm{Arg}_1(8) - \mathrm{Arg}_1(0)) - (\mathrm{Arg}_2(8) - \mathrm{Arg}_2(0)) < 2\pi$. Jelikož víme, že platí $\mathrm{Arg}_2(8) - \mathrm{Arg}_2(0) = 2\pi$, můžeme uvedené nerovnosti zjednodušit na tvar $0 < \mathrm{Arg}_1(8) - \mathrm{Arg}_1(0) < 4\pi$. Číslo $\mathrm{Arg}_1(8) - \mathrm{Arg}_1(0)$ je však přírůstek argumentu funkce g podél křivky φ, což je celočíselný násobek 2π. Z toho už nevyhnutelně plyne, že $\arg_\varphi g = 2\pi$.

Funkce $g : K \to \mathbb{C}$ je spojitá a množina K je kompaktní. Množina $g(K)$ je tedy také kompaktní a funkce g je stejnoměrně spojitá. Navíc víme, že množina $g(K)$ neobsahuje nulu, takže $\mathrm{dist}(0, g(K)) > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti pak plyne, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každá dvě komplexní čísla z_1, z_2 splňující nerovnost $|z_1 - z_2| < \delta$ platí $|g(z_1) - g(z_2)| < \mathrm{dist}(0,g(K))$.

Nyní zvolme přirozené číslo n tak, aby délka uhlopříčky čtverce o straně délky $2/n$ byla menší než δ. Rozdělíme čtverec K na n^2 čtverečků s hranou délky $2/n$ a čtverečky označíme (v libovolném pořadí) K_1, K_2, $\ldots$, K_{n^2}. Pro každé $k \in \{1,2,...,n^2\}$ označme φ_k parametrizaci hranice čtverce K_k sestrojenou stejným způsobem, jako byla výše sestrojena parametrizace φ hranice čtverce K.

Není těžké si rozmyslet, že přírůstek argumentu funkce g podél křivky φ je roven součtu přírůstků argumentů funkce g podél křivek φ_k, tj. že platí

$$\arg_\varphi g = \sum_{k=1}^{n^2} \arg_{\varphi_k} g. \tag{$*$}$$

Volme $k \in \{1,2,...,n^2\}$ libovolně. Jelikož je délka uhlopříčky čtverce K_k menší než δ, platí $\mathrm{diam}\,(g\,(K_k)) \leq \mathrm{dist}(0,g(K))$, což speciálně znamená, že existuje číslo $\theta \in \{0,\pi\}$ takové, že θ není argumentem žádného komplexního čísla z množiny $g\,(K_k)$. Kdyby takové θ neexistovalo, pak by existovalo nějaké kladné reálné číslo $\alpha \in g\,(K_k)$ a záporné reálné číslo $\beta \in g\,(K_k)$. Jelikož je však každý prvek množiny $g\,(K_k)$ v absolutní hodnotě větší nebo roven číslu $\mathrm{dist}(0, g(K))$, byla by vzdálenost čísel α, β (tj. $\alpha - \beta$) větší nebo rovna $2\,\mathrm{dist}(0, g(K))$, což by byl spor s tím, že $\mathrm{diam}\,(g\,(K_k)) \leq \mathrm{dist}(0, g(K))$. Proto takové θ musí existovat.

Je-li $\theta = 0$, položíme $I := (0, 2\pi)$. Pokud $\theta = \pi$, zvolíme $I := (0, 2\pi)$. Definujeme funkci $\mathrm{Arg}_3 : [0, \frac{8}{n}] \to \mathbb{R}$ tak, že pro každé $t \in [0, \frac{8}{n}]$ je číslo $\mathrm{Arg}_3(t)$ argument komplexního čísla $g\,(\varphi_k(t))$ volený z intervalu I. Tato funkce je jistě spojitá, takže lze její pomocí počítat přírůstek argumentu funkce g podél křivky φ_k. Dostáváme $\arg_{\varphi_k} g = \mathrm{Arg}_3\left(\frac{8}{n}\right) - \mathrm{Arg}_3(0) \in (-2\pi, 2\pi)$, avšak tento přírůstek musí být celočíselným násobkem 2π. Přírůstek argumentu funkce g podél křivky φ_k je tedy roven nule pro každé $k \in \{1,2,...,n^2\}$. Ze vztahu $(*)$ potom plyne, že také přírůstek argumentu funkce g podél křivky φ je roven nule. My jsme však výše ukázali, že tento přírůstek je roven 2π.

Zbývá odvodit obecný případ:
Nechť X je libovolný topologický prostor, který je homeomorfní s diskem D. Buď $f : X \to X$ libovolné spojité zobrazení. Zvolme nějaké homeomorfismy $\mathrm{H}_1 : X \twoheadrightarrow D$, $\mathrm{H}_2 : D \twoheadrightarrow K$ a položme

$$g := \mathrm{H}_2 \circ \mathrm{H}_1 \circ f \circ {\mathrm{H}_1}^{-1} \circ {\mathrm{H}_2}^{-1}.$$

Jelikož jsou zobrazení H_1, H_2 homeomorfismy, je funkce $g : K \to K$ dobře definovaná a spojitá. Existuje tedy komplexní číslo $z \in K$ takové, že $g(z) = z$. Položme $x := \mathrm{H}_1{}^{-1}\left(\mathrm{H}_2{}^{-1}(z)\right)$. Potom z definice zobrazení g dostáváme, že platí $\mathrm{H}_2\left(\mathrm{H}_1\left(f\left(x\right)\right)\right) = z$, tedy $f\left(x\right) = \mathrm{H}_1{}^{-1}\left(\mathrm{H}_2{}^{-1}(z)\right) = x$. Ukázali jsme, že x je pevný bod zobrazení f, a věta je tedy dokázána. (Důkaz byl veden podle [5].)

□

Na závěr této kapitoly ještě zformulujeme a dokážeme dva důsledky Brouwerovy věty, které později využijeme v důkazu Jordanovy věty.

Nadále budeme používat následující značení: Je-li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ křivka, $k \in \{1,2,...,n\}$, pak φ_k je zobrazení, které každému $t \in [a, b]$ přiřazuje k-tou složku vektoru $\varphi(t)$.

Důsledek 9

Nechť a, b, c, d, v_1, v_2, v_3, v_4 jsou reálná čísla splňující nerovnosti $a < b$, $c < d$, $v_1 < v_2$, $v_3 < v_4$.
Buďte $\varphi : [a, b] \to [v_1, v_2] \times [v_3, v_4]$, $\quad \psi : [c, d] \to [v_1, v_2] \times [v_3, v_4]$ křivky takové, že $\varphi_1(a) = v_1$, $\varphi_1(b) = v_2$, $\psi_2(c) = v_3$, $\psi_2(d) = v_4$.
Pak existuje alespoň jeden bod, ve kterém se křivky φ, ψ setkávají, tj. existují $t \in [a, b]$, $s \in [c, d]$ takové, že platí $\varphi(t) = \psi(s)$.

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $[a, b] = [c, d] = [-1, 1]$. Pro spor nechť pro každé t,$s \in [-1, 1]$ platí $\varphi(t) \neq \psi(s)$. Pak pro každé t, $s \in [-1, 1]$ platí $||\varphi(t) - \psi(s)||_{\max} > 0$. Můžeme tedy definovat spojité zobrazení $F : [-1, 1]^2 \to [-1, 1]^2$ předpisem

$$F(s, t) = \left(\frac{\psi_1(t) - \varphi_1(s)}{||\psi(t) - \varphi(s)||_{\max}}, \frac{\varphi_2(s) - \psi_2(t)}{||\varphi(s) - \psi(t)||_{\max}} \right), \quad (s, t) \in [-1, 1]^2.$$

Ukážeme, že toto zobrazení nemá pevný bod.
Obor hodnot zobrazení F je zřejmě podmnožina hranice čtverce $[-1, 1]^2$. Jedinými kandidáty na pevný bod jsou proto body, jejichž maximová norma je rovna jedné. Volme tedy libovolně bod $(s, t) \in [-1, 1]^2$ splňující $||(s, t)||_{\max} = 1$. Pak máme čtyři možnosti:

Jestliže $s = -1$, pak $\varphi_1(s) = v_1$, takže číslo $\psi_1(t) - \varphi_1(s)$ je nezáporné, tedy první složka vektoru $F(s, t)$ je také nezáporná, a tedy $F(s, t) \neq (-1, t) = (s, t)$.

Jestliže $s = 1$, pak $\varphi_1(s) = v_2$, takže číslo $\psi_1(t) - \varphi_1(s)$ je nekladné, tedy první složka vektoru $F(s, t)$ je také nekladná, a tedy $F(s, t) \neq (1, t) = (s, t)$.

Jestliže $t = -1$, pak $\psi_2(t) = v_3$, takže číslo $\varphi_2(s) - \psi_2(t)$ je nezáporné, tedy druhá složka vektoru $F(s, t)$ je také nezáporná, a tedy $F(s, t) \neq (s, -1) = (s, t)$.

Jestliže $t = 1$, pak $\psi_2(t) = v_4$, takže číslo $\varphi_2(s) - \psi_2(t)$ je nekladné, tedy druhá složka vektoru $F(s, t)$ je také nekladná, a tedy $F(s, t) \neq (s, 1) = (s, t)$.

Ukázali jsme, že zobrazení F nemá pevný bod. To je však v rozporu s Brouwerovou větou, neboť čtverec $[-1, 1]^2$ je homeomorfní s diskem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ a zobrazení $F : [-1, 1]^2 \to [-1, 1]^2$ je spojité. (Důkaz byl veden podle [4].)

□

Důsledek 10

Nechť c, d, v_1, v_2, v_3, v_4 jsou reálná čísla, pro která platí $c < d$, $v_1 < v_2$, $v_3 < v_4$. Buď $\psi : [c, d] \to [v_1, v_2] \times [v_3, v_4]$ křivka taková, že $\psi_2(c) = v_3$, $\psi_2(d) = v_4$. Nechť A je oblouk ležící v obdélníku $[v_1, v_2] \times [v_3, v_4]$ a předpokládejme, že existují body $\boldsymbol{p} = (p_1,p_2)$, $\boldsymbol{q} = (q_1,q_2)$ v oblouku A takové, že $p_1 = v_1$, $q_1 = v_2$. Pak mají množiny A, $\mathrm{rng}(\psi)$ neprázdný průnik.

Důkaz: A je oblouk, můžeme tedy zvolit nějaký homeomorfismus $H : [0, 1] \twoheadrightarrow A$. Označme $t_1 := H^{-1}(\boldsymbol{p})$, $t_2 := H^{-1}(\boldsymbol{q})$.
Jestliže $t_1 < t_2$, položíme $a := t_1$, $b := t_2$ a definujeme $\varphi(t) := H(t)$ pro každé $t \in [a, b]$.
Pokud naopak $t_1 > t_2$, položíme $a := -t_1$, $b := -t_2$ a definujeme $\varphi(t) = H(-t)$, $t \in [a, b]$.
V obou případech je zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ křivka a platí $\mathrm{rng}(\varphi) \subseteq A$. Navíc $\varphi_1(a) = v_1$, $\varphi_1(b) = v_2$, takže podle důsledku 9 mají množiny $\mathrm{rng}(\varphi)$, $\mathrm{rng}(\psi)$ neprázdný průnik. Speciálně tedy platí $A \cap \mathrm{rng}(\psi) \neq \emptyset$.

□

3. Jordanova věta

Nyní máme vše připraveno pro důkaz samotné Jordanovy věty o kružnici. Pro přehlednost však některé její snazší části zformulujeme a dokážeme v samostatných lemmatech a následně je využijeme k důkazu Jordanovy věty v plném znění.

Lemma 11

Je-li $J \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka, pak má množina $\mathbb{R}^2 \backslash J$ právě jednu neomezenou komponentu souvislosti.

Důkaz: Množina J je kompaktní, a tedy omezená. Proto existuje reálné číslo $r > 0$ takové, že $J \subseteq \mathrm{B}(\mathbf{0}, r)$. Jelikož je množina $\mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{B}(\mathbf{0}, r)$ souvislá, neomezená a disjunktní s J, existuje komponenta souvislosti K množiny $\mathbb{R}^2 \backslash J$ taková, že $\mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{B}(\mathbf{0}, r) \subseteq K$. Speciálně je tedy komponenta K neomezená. Každá další případná komponenta souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \backslash J$ však musí být částí omezené množiny $\mathrm{B}(\mathbf{0}, r)$, a tedy musí být sama omezená.

□

Lemma 12

Buď $n \in \mathbb{N}$ a nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená množina, $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$. Potom je každá komponenta souvislosti množiny $\mathbb{R}^n \backslash F$ otevřená v $\mathbb{R}^n$.

Důkaz: Nechť K je libovolná komponenta souvislosti množiny $\mathbb{R}^n \backslash F$ a buď $\boldsymbol{x} \in K$ libovolný bod. Z uzavřenosti množiny F plyne, že existuje reálné číslo $r > 0$ takové, že $\mathrm{U}(\boldsymbol{x}, r) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash F$. Koule $\mathrm{U}(\boldsymbol{x}, r)$ je však souvislá množina mající neprázdný průnik s komponentou K, a tedy musí platit $\mathrm{U}(\boldsymbol{x}, r) \subseteq K$.
Ukázali jsme, že každý bod ležící v množině K je automaticky jejím vnitřním bodem, tedy K je otevřená množina.

□

Lemma 13

Je-li $J \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka a množina $\mathbb{R}^2 \backslash J$ je nesouvislá, pak J je hranicí každé komponenty souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \backslash J$.

Důkaz: Nechť K je libovolná komponenta souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \backslash J$. Každé dvě různé komponenty $\mathbb{R}^2 \backslash J$ jsou disjunktní a podle lemmatu 12 také otevřené. Proto musí být uzávěr komponenty K disjunktní s každou jinou komponentou souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \backslash J$. Vzhledem k otevřenosti množiny K tedy platí $\partial K \subseteq J$.

Pro spor předpokládejme, že $\partial K \neq J$. Protože $\partial K \neq \emptyset$ je uzavřená podmnožina J, existuje podle lemmatu 4 oblouk $A \subseteq \mathbb{R}^2$ takový, že platí $\partial K \subseteq A \subseteq J$.
Z nesouvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \backslash J$ a z lemmatu 11 plyne, že množina $\mathbb{R}^2 \backslash J$ má alespoň jednu omezenou komponentu souvislosti. Zvolme tedy nějakou takovou komponentu a označme ji K_2. Je-li komponenta K sama omezená, zvolíme $K_2 := K$. Nechť $\boldsymbol{x} \in K_2$ je libovolný bod a $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřený kruh se středem v bodě $\boldsymbol{x}$ takový, že platí $J \subseteq \mathrm{Int}(D)$ (takový kruh existuje, protože množina J je kompaktní, a tedy omezená). Potom je zřejmě hranice kruhu D obsažena v neomezené komponentě souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \backslash J$. Uvažme identické zobrazení $\mathrm{Id} : A \to A$. Jelikož

lze kruh D chápat jako Hausdorffův normální topologický prostor a oblouk A jako jeho uzavřenou podmnožinu homeomorfní s intervalem $[0,1]$, existuje podle Tietzeho věty spojité zobrazení $f : D \to A$ rozšiřující zobrazení Id, tj. $f\restriction_A = \mathrm{Id}$. Chceme-li existenci takového zobrazení f dokázat elementárněji, můžeme postupovat například tak, jak je uvedeno v poznámce níže.

Nyní definujeme jisté zobrazení $g : D \to D \backslash \{\boldsymbol{x}\}$.
Jestliže je komponenta K omezená (a tedy $\boldsymbol{x} \in K_2 = K$), definujeme $g(\boldsymbol{z}) := f(\boldsymbol{z})$ pro $\boldsymbol{z} \in \overline{K}$ a $g(\boldsymbol{z}) := \boldsymbol{z}$ pro $\boldsymbol{z} \in D\backslash\overline{K}$.
Pokud komponenta K není omezená (a tedy $\boldsymbol{x} \in K_2$, $K \cap K_2 = \emptyset$), definujeme $g(\boldsymbol{z}) := \boldsymbol{z}$ pro $\boldsymbol{z} \in D \cap \overline{K}$ a $g(\boldsymbol{z}) := f(\boldsymbol{z})$ pro $\boldsymbol{z} \in D\backslash\overline{K}$.

Jelikož je komponenta K otevřená, platí $\overline{K}\backslash K = \partial K$. Zároveň máme $\partial K \subseteq A$, takže pro každé $\boldsymbol{z} \in \partial K$ platí $f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$, neboť f je rozšíření zobrazení Id. Z toho už je zřejmé, že zobrazení g je spojité.

Nechť $p : D\backslash\{\boldsymbol{x}\} \to \partial D$ je projekce na nejbližší bod, tj. zobrazení, které každému bodu množiny $D\backslash\{\boldsymbol{x}\}$ přiřadí právě ten bod množiny (kružnice) ∂D, který je k němu nejblíž. Buď $t : \partial D \to \partial D$ středová souměrnost se středem v bodě $\boldsymbol{x}$. Pak zobrazení $h := t \circ p \circ g$ je zřejmě spojité. Zbývá si uvědomit, že zobrazení h nemá pevný bod:
Pro každé $\boldsymbol{z} \in D$ platí $h(\boldsymbol{z}) \in \partial D$, takže kandidáty na pevný bod jsou pouze body kružnice ∂D. Z definice zobrazení g je vidět, že pro každé $\boldsymbol{z} \in \partial D$ platí $g(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$, takže $p(g(\boldsymbol{z})) = \boldsymbol{z}$, a tedy $h(\boldsymbol{z}) = t(p(g(\boldsymbol{z}))) = t(\boldsymbol{z}) \neq \boldsymbol{z}$. Tím jsme dostali spor s Brouwerovou větou a důkaz je tedy dokončen. (Důkaz byl veden podle [4].)

□

Poznámka: *Elementárně lze zdůvodnit existenci zobrazení f používaného v důkazu lemmatu 13 např. následujícím způsobem:*

Oblouk A je podle definice homeomorfní s intervalem $[0,1]$, nechť tedy $\mathrm{H} : [0,1] \twoheadrightarrow A$ je nějaký homeomorfismus. Definujeme zobrazení $f_1 : D \to [0,1]$ předpisem $f_1(\boldsymbol{z}) := \mathrm{H}^{-1}(\boldsymbol{z})$ pro $\boldsymbol{z} \in A$ a předpisem

$$f_1(\boldsymbol{z}) := 1 + \sup\left\{\mathrm{H}^{-1}(\boldsymbol{a}) - \frac{||\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a}||}{\mathrm{dist}(\boldsymbol{z},A)};\ \boldsymbol{a} \in A\right\} \text{ pro } \boldsymbol{z} \in D\backslash A.$$

Není těžké ověřit, že zobrazení f_1 je dobře definované a spojité. Pak stačí položit $f := \mathrm{H} \circ f_1$.

Definice 10
Buďte $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ dva různé body v rovině $\mathbb{R}^2$. Pak symbolem $[\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}]$ značíme křivku danou předpisem $[\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}]\,(t) = x + t(y - x)$, $t \in [0,1]$ a nazýváme ji základní parametrizací úsečky $\boldsymbol{xy}$.

Nyní už přijde na řadu samotná Jordanova věta. Pro lepší orientaci v jejím důkazu je vhodné průběžně věnovat pozornost obrázkům I, II, III, které se nacházejí na straně 17.

Věta 14 (Jordanova)
Nechť $J \subseteq \mathbb{R}^2$ je Jordanova křivka. Pak má množina $\mathbb{R}^2 \backslash J$ právě dvě komponenty souvislosti, přičemž jedna z nich je omezená, jedna neomezená a množina J je hranicí obou z nich.

Důkaz: Podle lemmatu 11 má množina $\mathbb{R}^2 \backslash J$ právě jednu neomezenou komponentu souvislosti. Vzhledem k tomu, že už máme dokázané lemma 13, tak zbývá dokázat už pouze to, že množina $\mathbb{R}^2 \backslash J$ má právě jednu omezenou komponentu souvislosti.

Uvažme zobrazení $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in J \times J$. Toto zobrazení je zřejmě spojité, takže z kompaktnosti množiny $J \times J$ (neboť J je kompaktní) plyne, že existují body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in J$ takové, že $||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|| = \operatorname{diam}(J)$.

Nyní zdůvodníme, proč lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že pro tyto body platí $\boldsymbol{a} = (-1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0)$.
Transformujeme rovinu $\mathbb{R}^2$ pomocí vhodného posunutí, stejnolehlosti a otočení.
Přesněji: definujeme posunutí $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a stejnolehlost $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ předpisy

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}, \ f_2(\boldsymbol{x}) = \frac{2\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||}, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Potom platí

$$(f_2 \circ f_1)(\boldsymbol{a}) = f_2\left(\frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{2}\right) = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||}, \quad (f_2 \circ f_1)(\boldsymbol{b}) = f_2\left(\frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{2}\right) = \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||}.$$

Speciálně, $(f_2 \circ f_1)(\boldsymbol{b}) = -(f_2 \circ f_1)(\boldsymbol{a})$, $||(f_2 \circ f_1)(\boldsymbol{a})|| = 1$.
Existuje tedy rotace $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (se středem v počátku), která zobrazí bod $(f_2 \circ f_1)(\boldsymbol{a})$ na bod $(-1,0)$. Položíme $f := f_3 \circ f_2 \circ f_1$, $\widetilde{J} := f(J)$.
Pak platí $f(\boldsymbol{a})$, $f(\boldsymbol{b}) \in \widetilde{J}$, $f(\boldsymbol{a}) = (-1, 0)$, $f(\boldsymbol{b}) = (1, 0)$.
Zobrazení f je zřejmě homeomorfismus $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$ a pro všechna $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in R^2$ platí $2 \cdot ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|| \cdot ||f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})||$. Z toho mimo jiné plyne, že množina $\widetilde{J}$ je Jordanova křivka, $\operatorname{diam}(\widetilde{J}) = ||f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{b})|| = 2$ a množina $\mathbb{R}^2 \backslash \widetilde{J}$ má stejný počet omezených komponent souvislosti jako množina $\mathbb{R}^2 \backslash J$.

Nadále tedy skutečně můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že
$\boldsymbol{a} = (-1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0)$.

Jelikož $\operatorname{diam}(J) = ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|| = ||(-2, 0)|| = 2$, musí být Jordanova křivka J částí obdélníku $O := [-1, 1] \times [-2, 2]$ a musí platit $\partial O \cap J = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. Označme $\boldsymbol{c}_H$, $\boldsymbol{c}_D$ středy horní a dolní strany obdélníku O, tj. $\boldsymbol{c}_H = (0, 2)$, $\boldsymbol{c}_D = (0, -2)$. Podle lemmatu 5 můžeme zvolit oblouky A_1, A_2 takové, že $A_1 \cup A_2 = J$, $A_1 \cap A_2 = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ a body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou krajními body oblouků A_1, A_2. Aplikací důsledku 10 na křivku $[\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{c}_H]$ a oblouk A_1 dostáváme, že úsečka $\boldsymbol{c}_D\boldsymbol{c}_H$ má s obloukem A_1 neprázdný průnik (totéž samozřejmě platí i pro oblouk A_2). Speciálně je tedy neprázdný také průnik úsečky $\boldsymbol{c}_D\boldsymbol{c}_H$ s Jordanovou křivkou J. Označme $\boldsymbol{p}_1$ „nejsevernější“ bod tohoto průniku, tj. bod s největší y-ovou souřadnicí (takový bod existuje díky uzavřenosti množiny J). Pak bod $\boldsymbol{p}_1$ leží právě v jednom z oblouků A_1, A_2. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\boldsymbol{p}_1 \in A_1$.

Označme $\boldsymbol{p}_2$ „nejjižnější“ bod průniku úsečky $\boldsymbol{c}_D\boldsymbol{c}_H$ s obloukem A_1.

Pokud $\boldsymbol{p}_1 \neq \boldsymbol{p}_2$, existuje podle lemmatu 3 křivka φ v oblouku A_1 jdoucí z bodu $\boldsymbol{p}_2$ do bodu $\boldsymbol{p}_1$, která neprochází ani jedním z bodů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Potom podle důsledku 10 musí křivka $[\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{p}_2] \dotplus \varphi \dotplus [\boldsymbol{p}_1 \,|\, \boldsymbol{c}_H]$ někde protínat oblouk A_2. Je zřejmé, že křivky φ, $[\boldsymbol{p}_1 \,|\, \boldsymbol{c}_H]$ oblouk A_2 neprotínají, a proto jej musí protínat křivka $[\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{p}_2]$.

Pokud jsou body $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ totožné, pak je křivka $[\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{p}_2] \dotplus [\boldsymbol{p}_1 \,|\, \boldsymbol{c}_H]$ dobře definovaná a podle důsledku 10 musí někde protínat oblouk A_2. Křivka $[\boldsymbol{p}_1 \,|\, \boldsymbol{c}_H]$ však tento oblouk určitě neprotíná, a tak jej musí protínat křivka $[\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{p}_2]$.

V obou případech jsme došli k tomu, že úsečka $\boldsymbol{c}_D\boldsymbol{p}_2$ má s obloukem A_2 neprázdný průnik. Označme $\boldsymbol{p}_3$ „nejsevernější“ bod tohoto průniku a $\boldsymbol{p}_4$ „nejjižnější“. Nechť $\boldsymbol{z}$ je střed úsečky $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3$. Současnou situaci ilustruje obrázek I na straně 17.

Ukážeme, že komponenta (označme ji $K_{\boldsymbol{z}}$) souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \backslash J$, která obsahuje bod $\boldsymbol{z}$, je omezená.
Pro spor předpokládejme, že množina $K_{\boldsymbol{z}}$ je neomezená. Jelikož $J \subseteq O$ a množina $\mathbb{R}^2 \backslash O$ je souvislá a neomezená, musí podle lemmatu 11 platit $\mathbb{R}^2 \backslash O \subseteq K_{\boldsymbol{z}}$. Zvolme libovolně bod $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2 \backslash O$. Množina $K_{\boldsymbol{z}}$ je křivkově souvislá, neboť je souvislá a podle lemmatu 12 také otevřená. Existuje tedy křivka $\psi : [0,1] \to K_{\boldsymbol{z}}$ taková, že $\psi(0) = \boldsymbol{z}$, $\psi(1) = \boldsymbol{w}$. Položme $t_0 := \sup\{t \in [0,1];\ \psi(t) \in O\}$. Pak ze spojitosti zobrazení ψ snadno plyne, že $0 < t_0 < 1$, $\psi(t_0) \in \partial O$. Nechť ξ je restrikce křivky ψ na interval $[0, t_0]$. Označme $\boldsymbol{x} := \psi(t_0)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$. Další postup důkazu rozdělíme podle toho, na které straně hranice obdélníku O se bod $\boldsymbol{x}$ nachází.
K ilustrování důkazu se nyní bude hodit obrázek II na straně 17.

Pokud platí $x_2 = 2$, pak křivka $[\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{z}] \dotplus \xi$ neprotíná oblouk A_1, což je spor s důsledkem 10.

Pokud $x_2 = -2$, pak křivka $\dot{-}\xi \dotplus [\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{p}_2] \dotplus \varphi \dotplus [\boldsymbol{p}_1 \,|\, \boldsymbol{c}_H]$ neprotíná oblouk A_2, což je spor s důsledkem 10 (v případě, že $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$, použijeme křivku $\dot{-}\xi \dotplus [\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{c}_H]$).

Pokud platí $0 \leq x_2 < 2$, pak musí být $x_1 = 1$ nebo $x_1 = -1$. Jelikož body $(-1, 0)$, $(1, 0)$ leží v množině J, musí platit $x_2 > 0$ (jinak by bod $\boldsymbol{x}$ ležel v množině J, což není možné, neboť $\boldsymbol{x} \in \operatorname{rng}(\psi) \subseteq \mathbb{R}^2 \backslash J$).
Jestliže $x_1 = 1$, označíme symbolem $\boldsymbol{v}$ pravý horní vrchol obdélníku O, tedy $\boldsymbol{v} := (1, 2)$. V opačném případě nechť $\boldsymbol{v}$ značí levý horní vrchol obdélníku O, tedy $\boldsymbol{v} := (-1, 2)$.
Pak ani v jedné z těchto dvou situací křivka $[\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{z}] \dotplus \xi \dotplus [\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{v}]$ neprotíná oblouk A_1, což je spor s důsledkem 10.

Pokud platí $-2 < x_2 < 0$, pak musí být $x_1 = 1$ nebo $x_1 = -1$.
V prvním případě označíme symbolem $\boldsymbol{v}$ pravý dolní vrchol obdélníku O, tedy $\boldsymbol{v} := (1, -2)$. Ve druhém případě nechť $\boldsymbol{v}$ značí levý dolní vrchol obdélníku O, tedy $\boldsymbol{v} := (-1, -2)$.
Pak bez ohledu na to, která z těchto dvou situací nastává, neprotíná křivka $[\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{x}] \dot{-} \xi \dotplus [\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{p}_2] \dotplus \varphi \dotplus [\boldsymbol{p}_1 \,|\, \boldsymbol{c}_H]$ oblouk A_2, což je opět spor s důsledkem 10 (v případě, že $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$, použijeme křivku $[\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{x}] \dot{-} \xi \dotplus [\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{c}_H]$).

Ve všech případech jsme došli ke sporu, a tak musí být množina $K_{\boldsymbol{z}}$ omezená. Zbývá ukázat, že $K_{\boldsymbol{z}}$ je jediná omezená komponenta souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \backslash J$. K ilustraci důkazu tohoto tvrzení slouží obrázek III na straně 17.

Pro spor nechť L je omezená komponenta souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \backslash J$ taková, že $L \neq K_{\boldsymbol{z}}$. Pokud $\boldsymbol{p}_3 \neq \boldsymbol{p}_4$, existuje podle lemmatu 3 křivka ζ v oblouku A_2 jdoucí z bodu $\boldsymbol{p}_4$ do bodu $\boldsymbol{p}_3$, která neprochází ani jedním z bodů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.
Nyní v závislosti na tom, zda body $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ nebo $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$ splývají, definujeme jistou křivku α.

Pokud $\boldsymbol{p}_1 \neq \boldsymbol{p}_2$ a $\boldsymbol{p}_3 \neq \boldsymbol{p}_4$, definujeme $\alpha := [\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{p}_4] \dot{+} \zeta \dot{+} [\boldsymbol{p}_3 \,|\, \boldsymbol{p}_2] \dot{+} \varphi \dot{+} [\boldsymbol{p}_1 \,|\, \boldsymbol{c}_H]$.

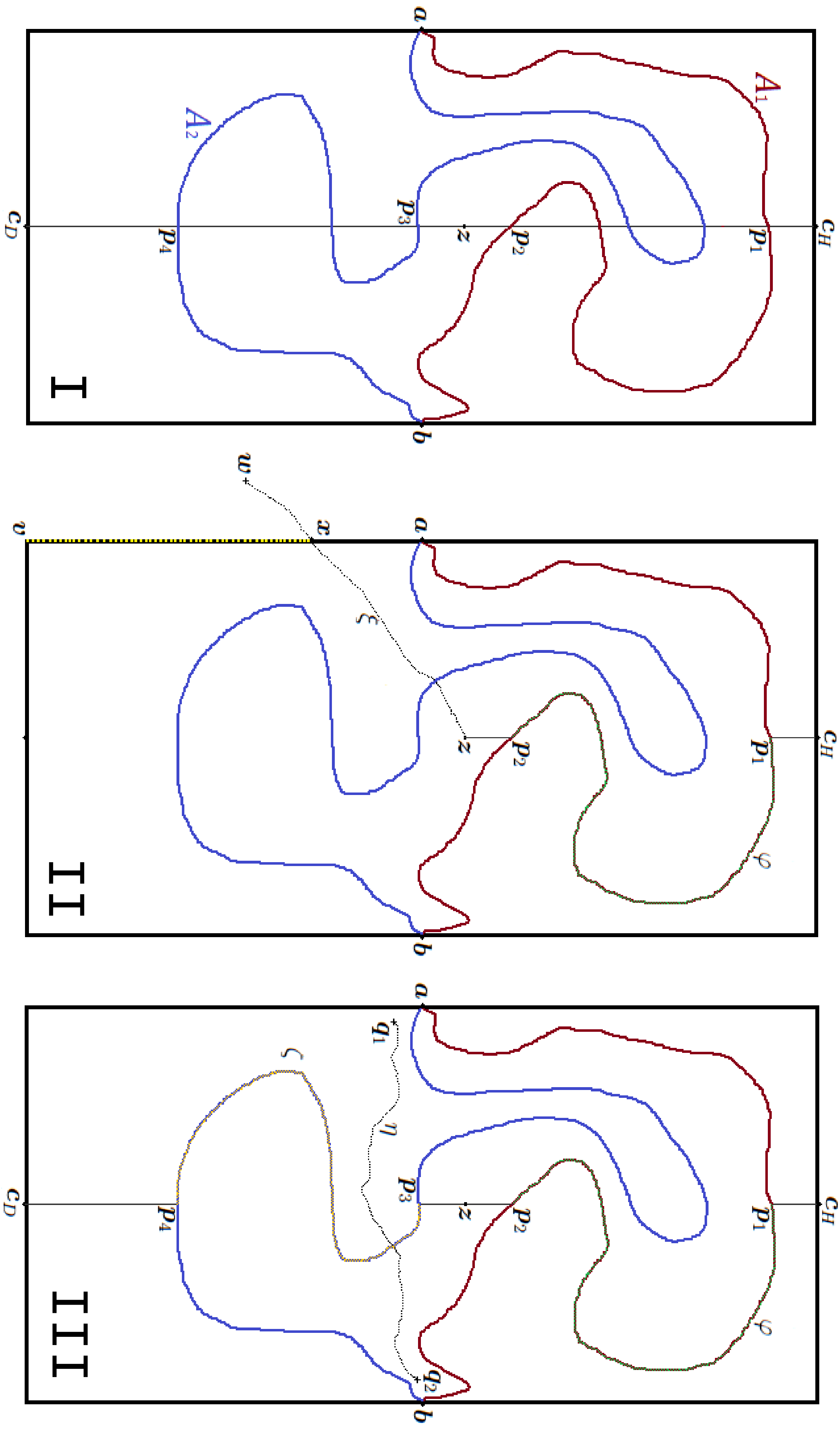
Pokud $\boldsymbol{p}_1 \neq \boldsymbol{p}_2$ a $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_4$, definujeme $\alpha := [\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{p}_2] \dot{+} \varphi \dot{+} [\boldsymbol{p}_1 \,|\, \boldsymbol{c}_H]$.

Pokud $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$ a $\boldsymbol{p}_3 \neq \boldsymbol{p}_4$, definujeme $\alpha := [\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{p}_4] \dot{+} \zeta \dot{+} [\boldsymbol{p}_3 \,|\, \boldsymbol{c}_H]$.

Pokud $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$ a $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_4$, definujeme $\alpha := [\boldsymbol{c}_D \,|\, \boldsymbol{c}_H]$.

Bez ohledu na to, která z těchto čtyř možností nastává, nezasahuje zřejmě ani jedna z křivek, jejichž spojením křivka α vznikla, do komponenty L, a tak do ní nezasahuje ani samotná křivka α. Jelikož $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \notin \operatorname{rng}(\alpha)$, existuje díky uzavřenosti množiny $\operatorname{rng}(\alpha)$ reálné číslo $\varepsilon > 0$ takové, že $\operatorname{rng}(\alpha) \cap U(\boldsymbol{a}, \varepsilon) = \emptyset$, $\operatorname{rng}(\alpha) \cap U(\boldsymbol{b}, \varepsilon) = \emptyset$. Podle lemmatu 13 je množina J hranicí komponenty L, a tak můžeme najít nějaké body $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2 \in L$ takové, že $\boldsymbol{q}_1 \in U(\boldsymbol{a}, \varepsilon)$, $\boldsymbol{q}_2 \in U(\boldsymbol{b}, \varepsilon)$. Komponenta L je podle lemmatu 12 otevřená, a tedy také křivkově souvislá. Proto musí existovat nějaká křivka η v komponentě L jdoucí z bodu $\boldsymbol{q}_1$ do bodu $\boldsymbol{q}_2$. Definujeme křivku $\beta := [\boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{q}_1] \dot{+} \eta \dot{+} [\boldsymbol{q}_2 \,|\, \boldsymbol{b}]$. Jelikož křivka α nezasahuje do komponenty L, nemůže se nikde setkat s křivkou η. Také platí $\operatorname{rng}([\boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{q}_1]) \subseteq U(\boldsymbol{a}, \varepsilon)$, $\operatorname{rng}([\boldsymbol{q}_2 \,|\, \boldsymbol{b}]) \subseteq U(\boldsymbol{b}, \varepsilon)$. Celkem tak docházíme k tomu, že křivky α, β se v žádném bodě nesetkávají, což je spor s důsledkem 9. Komponenta L tedy neexistuje a Jordanova věta je dokázána. (Důkaz byl veden podle [4].)

$\square$


I
II
III
a
b
c_D
c_H
p_1
p_2
p_3
p_4
z
A_1
A_2
x
w
v
ξ
φ
ζ
η
q_1
q_2

4. Zobecnění Jordanovy věty

V poslední kapitole se stručně a bez důkazů zmíníme o známých zobecněních či zesíleních Jordanovy věty o kružnici. Přirozenou otázkou po dokázání Jordanovy věty je, zda podobné tvrzení neplatí obecně v $\mathbb{R}^n$, kde bychom místo Jordanovy křivky uvažovali „Jordanovu sféru“. Přesněji, nabízí se zkoumat, zda platí následující věta:

Věta 15

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ a $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina, která je homeomorfní s jednotkovou sférou $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ ||\boldsymbol{x}|| = 1\}$. Potom má množina $\mathbb{R}^n \backslash S$ právě dvě komponenty souvislosti, přičemž jedna z nich je omezená, jedna je neomezená a množina S je hranicí obou z nich.

Tato věta skutečně platí. Pro více informací a důkaz viz [3], zejména Corollary 9.8.7.

Namísto zobecňování Jordanovy věty do vyšších dimenzí se můžeme snažit zesílit závěr původní Jordanovy věty. V tomto směru je úspěšná následující věta:

Věta 16 (Jordanova-Schoenfliesova)

Nechť $J \subseteq \mathbb{R}^2$ je Jordanova křivka. Pak existuje homeomorfismus $\mathrm{H} : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2$ takový, že $\mathrm{H}(\mathbb{S}) = J$.

Důkaz lze najít v [1].

Poznámka: *Je snadné si uvědomit, že závěr Jordanovy-Schoenfliesovy věty skutečně říká více než závěr Jordanovy věty:*

Množiny $G_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$, $G_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 > 1\}$ jsou otevřené a souvislé. Proto jsou také množiny $\mathrm{H}(G_1)$, $\mathrm{H}(G_2)$ otevřené a souvislé a zřejmě pro ně platí $\mathrm{H}(G_1) \cap \mathrm{H}(G_2) = \emptyset$, $\mathrm{H}(G_1) \cup \mathrm{H}(G_2) = \mathbb{R}^2 \backslash J$.
Množina $\mathbb{R}^2 \backslash J$ je tedy nesouvislá a má právě dvě komponenty souvislosti, totiž množiny $\mathrm{H}(G_1)$, $\mathrm{H}(G_2)$. Díky lemmatu 11 navíc víme, že právě jedna z těchto dvou komponent je neomezená.
Jelikož $\partial G_1 = \partial G_2 = \mathbb{S}$, platí také $\partial \mathrm{H}(G_1) = \partial \mathrm{H}(G_2) = \mathrm{H}(\mathbb{S}) = J$.

Samozřejmě nyní vyvstává otázka, zda je možné Jordanovu-Schoenfliesovu větu přímo (bez dodatečných předpokladů) zobecnit i do vyšších dimenzí, tj. zda pro každé $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ a pro každou množinu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ takovou, že S je homeomorfní s jednotkovou sférou $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ ||\boldsymbol{x}|| = 1\} =: \mathbb{S}^{n-1}$, existuje homeomorfismus $\mathrm{H} : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ takový, že $\mathrm{H}(\mathbb{S}^{n-1}) = S$.
Ukázalo se, že tomu tak není. Podrobnosti se lze dozvědět např. v knize [2], zejména na stranách 170, 171.

Literatura

[1] Cairns, Stewart S. An Elementary Proof of the Jordan-Schoenflies Theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1951, 2(6), 860–867. ISSN 0002-9939.

[2] Hatcher, Allen. Algebraic Topology [online]. Cambridge University Press, 2001 [cit. 13. 5. 2017].
Dostupné z: `https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`

[3] Jeffrey, Lisa. Jordan-Brouwer Separation Theorems [online]. University of Toronto Scarborough, 2016 [cit. 13. 5. 2017].
Dostupné z:
`http://www.math.utsc.utoronto.ca/c27/notes/jordan-curve.pdf`

[4] Maehara, Ryuji. The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem. *The American Mathematical Monthly*. Menasha, Wisc.: Mathematical Association of America, 1984, 91(10), 641–643. ISSN 0002-9890.

[5] Seki, Takejiro. An elementary proof of Brouwer's fixed point theorem. *Tohoku Math. J.* (2) 9 (1957), no. 2, 105–109. doi:10.2748/tmj/1178244835. `http://projecteuclid.org/euclid.tmj/1178244835`.

[6] Veselý, Jiří. *Komplexní analýza pro učitele*. Praha: Karolinum, 2000. ISBN 80–246–0202–4.