



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vojtěch Kubáč

**Přítokové a výtokové okrajové
podmínky na umělých hranicích**

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Martin Lanzendörfer, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Přítokové a výtokové okrajové podmínky na umělých hranicích

Autor: Vojtěch Kubáč

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Martin Lanzendörfer, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Tato práce nejdříve odvodí základní vztahy mechaniky tekutin, zejména pro ustálené nestlačitelné proudění. V další části ukáže slabou formulaci odvozených rovnic a některé okrajové podmínky. Konečně největší díl zaujmají numerické experimenty s jednoduchými rovinnými prouděními za účelem nalezení vhodných přítokových a výtokových podmínek na umělé hranici pro úlohu výtoku z dlouhého kanálu, nebo naopak přítoku do něj.

Klíčová slova: nestlačitelné tekutiny, slabá formulace, okrajové podmínky, umělá hranice, Navierovy-Stokesovy rovnice

Title: Inflow and outflow boundary conditions on artificial boundaries

Author: Vojtěch Kubáč

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: Mgr. Martin Lanzendörfer, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: In the beginning of this thesis we introduce the basic properties of the fluid mechanics, mainly for stationary incompressible flow. In the next section we show the weak formulation of derived (Navier-Stokes) equations and some of the boundary conditions. Finally, the biggest part of this thesis is occupied by numerical experiments with simple planar flows. We seek for suitable inflow and outflow boundary conditions on an artificial boundary for the problem of outflow from a long channel or inflow to that channel.

Keywords: incompressible fluids, weak solution, boundary conditions, artificial boundaries, Navier-Stokes equations

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Martinu Lanzendörferovi, Ph.D. za čas, který mi věnoval, za rady, jež mi udělil, a že mi byl ve všem nápomocen. Také bych rád poděkoval své rodině za všemožnou podporu při mém studiu.

Obsah

Úvod	2
1 Základní vztahy mechaniky tekutin	3
1.1 Pohyb a jeho popis	3
1.2 Operace v Eulerově popisu	4
1.3 Síly, princip tlaku	4
1.4 Odvození rovnic	5
2 Okrajové podmínky a slabá formulace	9
2.1 Okrajové podmínky na stěnách	9
2.2 Odvození slabé formulace	9
2.3 Okrajové podmínky na umělé hranici I	11
2.4 Energetický odhad	12
2.5 Okrajové podmínky na umělé hranici II	13
3 Numerické simulace	14
3.1 Zavedení výpočetních oblastí	14
3.2 Definice problémů	15
3.2.1 Poiseuilleovo proudění	16
3.2.2 Couetteovo proudění	17
3.2.3 Couetteovo proudění s tlakovým gradientem	17
3.3 Numerická simulace proudění v Ω	18
3.3.1 Diskuze nad řešeními problémů a vliv volby Γ_N	18
3.3.2 Výpočty na prodloužené množině Ω_L a Bernoulliho princip	25
3.4 Výpočty v oblasti Ω_{out} (v kanálu)	29
3.4.1 Konstantní trakce	29
3.4.2 Podmínka typu do-nothing	30
3.4.3 Podmínky splňující (2.14)	30
3.5 Výpočty Couetteovy úlohy s tlakovým gradientem	32
Závěr	34
Seznam použité literatury	35
Seznam obrázků	36
Seznam tabulek	38
Přílohy	39

Úvod

Mechanika kontinua je hojně studované téma, dá se pomocí ní totiž modelovat velké množství jevů projevujících se v přírodě, či technice. V případě stacionárního, nestlačitelného proudění (jímž se zde budeme zabývat) je to především mechanika tekutin, kde se dají tyto modely využít. My se zde budeme zabývat volbou okrajových podmínek na umělé hranici (tedy takové, za kterou proudění dále pokračuje) a jejich vlivem na řešení Navierových-Stokesových rovnic popisujících toto proudění.

Volba okrajových podmínek na umělé hranici je ve většině případů otevřený problém, neboť jejich volbou zadáváme vlastnosti hledaného proudění, které ale dopředu neznáme. Volbou nesprávné okrajové podmínky tak můžeme dostat řešení problému, který s naším zadáním souvisí jen velmi vzdáleně nebo vůbec. Vhodnost okrajové podmínky navíc záleží na úloze, pro jednu úlohu může daná okrajová podmínka fungovat poměrně dobře, pro mírné pozměnění zadání či dat již může být nevyhovující a naopak. Neexistuje nic jako ideální okrajová podmínka.

My zde budeme zkoumat jednoduchá rovinná proudění Poiseuilleovo a Couetteovo a budeme hledat vhodné přítokové a výtokové podmínky na umělé hranici pro úlohu přítoku tekutiny do kanálu nebo naopak výtoku z něj. Jak už bylo řečeno výše, proudění budeme uvažovat stacionární, rovinné a naši tekutinu nestlačitelnou a navíc homogenní.

Abychom věděli, jaké chování tekutiny u výtoku z kanálu požadujeme, zavedeme si nejprve jednoduchou polygonální oblast, která bude reprezentovat část kanálu u ústí do nějakého rozlehlého rezervoáru a část tohoto rezervoáru.

Před tím, než se pustíme do těchto úvah, představíme a většinou i odvodíme základní vztahy mechaniky kontinua, zejména pro případ stacionárního (nezávislého na čase) proudění nestlačitelné, homogenní kapaliny. V druhé části potom odvodíme slabou formulaci Navierových-Stokesových rovnic a představíme nejběžnější okrajové podmínky na umělé hranici. V této kapitole odvodíme předpoklady pro existenci slabých řešení Navierových-Stokesových rovnic. Ve třetí a poslední kapitole pak provedeme výše zmíněné numerické experimenty. Budeme je provádět metodou konečných prvků v softwaru *FEniCS* a pomocí nich se budeme snažit odvodit vhodné přítokové a výtokové okrajové podmínky uvedených úloh. Položíme si při tom otázku, zda se námi studované úlohy řídí Bernoulliho principem. V příloze navíc prezentujeme obrázky proudění, které vznikne řešením uvažovaných úloh.

1. Základní vztahy mechaniky tekutin

1.1 Pohyb a jeho popis

Tekutinu, jejímž pohybem se budeme zabývat, můžeme chápat jako množinu *hmotných bodů* \mathcal{B} . Její *pohyb* pak popíšeme pomocí zobrazení $\chi : \mathcal{B} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde $I = (\tau_1, \tau_2)$ je časový interval a \mathbb{R}^3 je euklidovský prostor. Zobrazení hmotnému bodu $X \in \mathcal{B}$ v čase $t \in I$ přiřadí polohový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x} = \chi(X, t).$$

Zápisem $\mathcal{B}_{\chi,t}$, $\mathcal{P}_{\chi,t}$ budeme značit konfigurace množiny hmotných bodů \mathcal{B} a \mathcal{P} v čase t , kde \mathcal{P} je borelovská podmnožina \mathcal{B} ,

$$\mathcal{B}_{\chi,t} = \chi(\mathcal{B}, t).$$

Pohyb χ budeme pro jednoduchost uvažovat dostatečně hladký, aby existovaly derivace podle X a t takového řádu, který bude potřeba.

Mezi všemi možnými konfiguracemi \mathcal{B} můžeme zvolit jednu *referenční konfiguraci* a můžeme zadefinovat prosté zobrazení κ z abstraktního tělesa \mathcal{B} na tuto jeho konfiguraci, což je podmnožina euklidovského prostoru. Body této konfigurace budeme značit \mathbf{X} ,

$$\mathbf{X} = \kappa(X).$$

Můžeme tak pohyb psát bez uvádění abstraktního tělesa \mathcal{B} jako

$$\mathbf{x} = \chi[\kappa^{-1}(\mathbf{X}), t] \equiv \chi_{\kappa}(\mathbf{X}, t).$$

Pohyb lze tedy chápat v každém čase jako zobrazení referenční konfigurace na aktuální konfiguraci $\chi(\mathcal{B}, t)$, jde o zobrazení z prostoru do prostoru. Volba referenční konfigurace je libovolná podobně jako volba souřadného systému a pro každou referenční konfiguraci se funkce χ_{κ} navzájem liší.

Před tím, než se zaměříme na možnosti popisu pohybu tekutiny, zadefinujeme pojmy *rychlost* $\dot{\mathbf{x}}$ a *zrychlení* $\ddot{\mathbf{x}}$ jako časové derivace pohybu,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &:= \partial_t \chi(X, t), \\ \ddot{\mathbf{x}} &:= \partial_{tt}^2 \chi(X, t).\end{aligned}$$

Jednou možností jak popsat pohyb tekutiny je užití *referenčního (Lagrangeova) popisu*, kdy hmotnému bodu X přiřadíme jeho pozici \mathbf{X} v čase $t = 0$. Užíváme tedy referenční konfiguraci a κ klademe rovno $\chi(\cdot, 0)$. Jako nezávislé proměnné jsou chápány \mathbf{X} a t .

Pro proudění tekutiny použijeme *prostorový (Eulerův) popis*. Zde je pozornost zaměřena na současnou konfiguraci tělesa a jako nezávislé proměnné jsou chápány \mathbf{x} a t . Každou funkci $f(X, t)$ lze nahradit funkcí $F(\mathbf{x}, t)$:

$$f(X, t) = f[\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t] \equiv F(\mathbf{x}, t).$$

Eulerův popis se tedy využívá ke zkoumání dané části prostoru v průběhu času.

Z výše uvedeného vyplývá, že hodnota každé funkce hmotných bodů z \mathcal{B} v čase t je zároveň dána polem definovaným na konfiguraci $\mathcal{B}_{\chi,t}$. Tím dostáváme pole rychlosti a pole zrychlení:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t).$$

Značíme zde pomocí $\dot{\mathbf{x}}$ a $\ddot{\mathbf{x}}$ pole a zároveň jejich hodnotu. Rychlost budeme také značit jako \mathbf{u} . Tedy $\mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{x}}$.

Zavedme ještě *hmotnost* množiny hmotných bodů umístěných v prostoru jako míru M absolutně spojitou vzhledem ke standardní lebesgueově míře. Potom v každém čase t existuje podle Radon-Nikodymovy věty *hustota* $\rho(\cdot, t)$ splňující

$$M(\mathcal{P}_{\chi,t}) = \int_{\mathcal{P}_{\chi,t}} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}.$$

1.2 Operace v Eulerově popisu

V mechanice kontinua je často pro hodnotu popisované veličiny používán zkrácený zápis nerozlišující hodnotu funkce f od příslušných funkcí v referenčním či prostorovém popisu. Je-li tedy $f = \tilde{f}(\mathbf{X}, t) = \hat{f}(\mathbf{x}, t)$, pak při derivování není patrné, která z funkcí \tilde{f} , \hat{f} je myšlena. Zavedeme proto odlišné značení příslušných derivací:

- \dot{f} , $\nabla_{\mathbf{X}}f$ a $\operatorname{div}_{\mathbf{X}}f$ budou označovat derivaci podle času, prostorový gradient a divergenci funkce \tilde{f} (\dot{f} se často označuje jako „materiálová“ časová derivace),
- zatímco $\partial_t f$ spolu s $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}f \equiv \operatorname{div} f$ a $\nabla_{\mathbf{x}}f \equiv \nabla f$ budou označovat derivace funkce \hat{f} .

Jelikož $\mathbf{x} = \chi_{\kappa}(\mathbf{X}, t)$, tak aplikací řetězkového pravidla dostáváme:

$$\dot{f} = \partial_t f + (\nabla f)\dot{\mathbf{x}}.$$

Speciálně pro zrychlení platí

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \partial_t \dot{\mathbf{x}} + (\nabla \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} \\ &= \partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}. \end{aligned}$$

1.3 Síly, princip tlaku

Na části \mathcal{P} tělesa \mathcal{B} působí v čase t síly. Budeme rozlišovat dva druhy sil: *objemové síly* (*body force*) $\mathbf{F}_b(\mathcal{P}, t)$, chápané jako absolutně spojitá funkce vnitřku $\mathcal{P}_{\chi,t}$, a *plošné síly* (*contact force*) $\mathbf{F}_c(\mathcal{P}, t)$, absolutně spojitá funkce hranice $\partial\mathcal{P}_{\chi,t}$.

Výsledná síla \mathbf{F} působící na \mathcal{P} v čase t je potom dána

$$\mathbf{F}(\mathcal{P}, t) = \mathbf{F}_b(\mathcal{P}, t) + \mathbf{F}_c(\mathcal{P}, t),$$

kde

$$\mathbf{F}_b(\mathcal{P}, t) = \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{F}_c(\mathcal{P}, t) = \int_{\partial\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} \mathbf{t} \, d\sigma.$$

Funkci $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ budeme nazývat *hustota vnějších sil* a $\mathbf{t} = \mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n})$ budeme nazývat *trakce (traction)*, či *vektor napětí (stress vector)*.

Vektor napětí obecně závisí na orientaci plošky $d\sigma$ povrchu $\partial\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}$, to jest na vnějším jednotkovém vektoru $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ (viz Euler-Cauchy stress principle, např. v [1]). Za platnosti zákona zachování hybnosti a za předpokladu, že v materiálu nepůsobí dvojice sil (lokální působení, které by mělo otáčivý účinek), lze odvodit (viz [2]), že závislost $\mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n})$ na \mathbf{n} lze popsat pomocí *Cauchyho tenzoru napětí* $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbf{x}, t)$ následujícím vztahem

$$\mathbf{t} = \mathbb{T} \cdot \mathbf{n}.$$

V tomto případě zákon zachování momentu hybnosti odpovídá požadavku, aby Cauchyho tenzor napětí byl symetrický, $\mathbb{T} = \mathbb{T}^\top$.

1.4 Odvození rovnic

V této části odvodíme základní rovnice mechaniky kontinua, rovnici kontinuity a rovnici hybnosti (někdy též pohybová rovnice). Při jejich odvozování se nám bude hodit následující lemma.

Lemma 1.1. *Nechť χ_κ je zobrazení definované výše a \mathbf{u} je rychlost. Označme dále λ Jacobiho matici zobrazení χ_κ a jako \mathbf{J} determinant matice λ . Pak platí následující rovnost:*

$$\dot{\mathbf{J}} = \operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbf{J}.$$

Důkaz. Nejprve s užitím Einsteinovy sumační konvence počítejme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda_{ij} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi_{\kappa_i}}{\partial \mathbf{X}_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \chi_{\kappa_i}}{\partial X_k} \right) \frac{\partial \kappa_k^{-1}}{\partial \mathbf{X}_j} + \frac{\partial \chi_{\kappa_i}}{\partial X_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \kappa_k^{-1}}{\partial \mathbf{X}_j} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial X_k} \frac{\partial \kappa_k^{-1}}{\partial \mathbf{X}_j} = \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_l} \frac{\partial \chi_{\kappa_l}}{\partial X_k} \frac{\partial \kappa_k^{-1}}{\partial \mathbf{X}_j} = \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_l} \frac{\partial \chi_{\kappa_l}}{\partial \mathbf{X}_j}. \end{aligned}$$

Dále můžeme označit jako Φ_{ij} matici \mathbf{J} , která má i -tý řádek nulový, pouze na pozici (i, j) má jedničku. Potom časovou derivaci jakobiánu můžeme spočítat:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{J}}{dt} &= \sum_i \det \left[\sum_j \Phi_{ij} \frac{d}{dt} \lambda_{ij} \right] = \sum_i \det \left[\sum_j \Phi_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_l} \frac{\partial \chi_{\kappa_l}}{\partial \mathbf{X}_j} \right] \\ &= \sum_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{J} = \operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbf{J}, \end{aligned}$$

kde ve třetí rovnosti využíváme, že přičtením násobku jednoho řádku ke druhému se determinant nemění. □

Rovnice kontinuity (equation of continuity). Vyjdeme ze zákona zachování hmotnosti:

$$M(\mathcal{P}_{\mathbf{x},t_1}) = \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t_1}} \rho(\mathbf{x}, t_1) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t_2}} \rho(\mathbf{x}, t_2) \, d\mathbf{x} = M(\mathcal{P}_{\mathbf{x},t_2}),$$

což se dá přepsat jako

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Pro další úpravy zvolme $\kappa(\mathcal{P})$ referenční konfiguraci \mathcal{P} , čímž se zbavíme závislosti na čase a můžeme počítat:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} \rho \, d\mathbf{x} &= \frac{d}{dt} \int_{\kappa(\mathcal{P})} \rho \mathbf{J} \, d\mathbf{X} = \int_{\kappa(\mathcal{P})} \dot{\rho} \mathbf{J} \, d\mathbf{X} + \int_{\kappa(\mathcal{P})} \rho \dot{\mathbf{J}} \, d\mathbf{X} \\ &= \int_{\kappa(\mathcal{P})} [\partial_t \rho + (\nabla \rho_{\chi}) \cdot \mathbf{u}] \mathbf{J} \, d\mathbf{X} + \int_{\kappa(\mathcal{P})} \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) \mathbf{J} \, d\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Vztah platí pro každou borelovskou $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ a každé $t \in I$. Tedy $\partial_t \rho + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho \mathbf{u}) = 0$ skoro všude. My ale uvažujeme hustotu i rychlost spojitě diferencovatelné, vztah tedy platí pro všechna $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ a v každém čase $t \in I$. Tím jsme odvodili následující rovnici známou jako rovnice kontinuity:

$$\boxed{\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \forall t \in I.} \quad (1.1)$$

Rovnice hybnosti (Momentum equation). Nyní použijeme zákon zachování hybnosti, který říká, že

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} (\rho \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathcal{P}).$$

Což podle výše uvedené diskuze o silách můžeme přepsat jako

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} (\rho \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial \mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (1.2)$$

Potom opět zvolme vhodnou referenční konfiguraci $\kappa(\mathcal{P})$ a počítejme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} (\rho \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} &= \frac{d}{dt} \int_{\kappa(\mathcal{P})} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{J} \, d\mathbf{X} = \int_{\kappa(\mathcal{P})} (\dot{\rho} \mathbf{u}) \mathbf{J} \, d\mathbf{X} + \int_{\kappa(\mathcal{P})} (\rho \mathbf{u}) \dot{\mathbf{J}} \, d\mathbf{X} \\ &= \int_{\kappa(\mathcal{P})} (\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u}) \mathbf{u}) \mathbf{J} \, d\mathbf{X} + \int_{\kappa(\mathcal{P})} (\rho \mathbf{u}) \operatorname{div}(\mathbf{u}) \mathbf{J} \, d\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Z Gaussovy věty dále plyne vztah:

$$\int_{\partial \mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\mathcal{P}_{\mathbf{x},t}} \operatorname{div} \mathbb{T} \, d\mathbf{x}. \quad (1.4)$$

Dosadíme-li do (1.2) vztahy (1.3) a (1.4), dostáváme:

$$\int_{\mathcal{P}_{x,t}} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{P}_{x,t}} \operatorname{div} \mathbb{T} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{P}_{x,t}} \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x}.$$

Vztah opět platí pro každou $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ v každém čase t . Tedy jsme získali následující rovnici zvanou rovnice hybnosti:

$$\boxed{\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbb{T} = \rho \mathbf{f}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \forall t \in I.} \quad (1.5)$$

Nestlačitelná homogenní kapalina. Uvážíme-li nestlačitelnou kapalinu, pak množina hmotných bodů $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ s časem nemění objem, tedy

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{x,t}} d\mathbf{x} = 0.$$

Tento vztah můžeme pomocí lemmatu (1.1) takto upravovat:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{x,t}} d\mathbf{x} = \int_{\kappa(\mathcal{P})} \dot{\mathbf{J}} \, d\mathbf{X} = \int_{\kappa(\mathcal{P})} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \mathbf{J} \, d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{P}_{x,t}} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}.$$

Tedy pro nestlačitelnou kapalinu platí

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \forall t \in I. \quad (1.6)$$

My budeme navíc uvažovat homogenní kapalinu, tedy $\rho > 0$ je konstantní. Díky tomu se rovnice kontinuity (1.1) redukuje na (1.6).

Za předpokladu platnosti takzvaných *Stokesových postulátů* (viz [3], Theorem 1.8.7) lze odvodit tvar Cauchyho tenzoru napětí

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}, \quad (1.7)$$

kde μ je *konstanta viskozity*, \mathbb{I} je jednotková matice a \mathbb{D} je symetrická část gradientu \mathbf{u} ,

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top).$$

Stokesovy postuláty jsou:

1. $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$.
2. Tenzor \mathbb{S} je spojitou funkcí *tenzoru rychlosti deformace*

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top).$$

3. Tekutina je *izotropní*.
4. Je-li tenzor rychlosti deformace nulový, pak na tekutinu působí pouze tlakové síly.
5. Vztah mezi \mathbb{T} a \mathbb{S} je lineární.

Této uvažované nestlačitelné kapalině se říká *Newtonovská* a soustavě rovnic (1.6) a (1.5) se po dosazení (1.7) říká *(nestlačitelné) Navier-Stokesovy rovnice*.

Bezrozměrná formulace. V následujícím zavedeme nenulové konstanty *charakteristický rozměr* X^* , *charakteristickou rychlost* U^* , *charakteristický tlak* P^* , *charakteristický čas* T^* a *charakteristickou hustotu vnějších sil* F^* . Jsou to konstanty o rozměrech příslušných veličin. Dále zadefinujeme bezrozměrné veličiny $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{u}}$, \bar{p} , \bar{t} a $\bar{\mathbf{f}}$ vztahy

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{X^*}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U^*}, \quad \bar{p} = \frac{p}{P^*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T^*}, \quad \bar{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}}{F^*}.$$

Pomocí těchto vztahů a vztahu (1.7) můžeme rovnici hybnosti (1.5) psát v následujícím tvaru:

$$\frac{\rho U^*}{T^*} \partial_{\bar{t}} \bar{\mathbf{u}} + \frac{\rho (U^*)^2}{X^*} \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{x}}} (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) + \frac{P^*}{X^*} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{p} - \frac{\mu U^*}{(X^*)^2} \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{x}}} (\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{u}} + (\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{u}})^\top) = \rho F^* \bar{\mathbf{f}}. \quad (1.8)$$

Položme nyní charakteristický čas roven podílu charakteristického rozměru a charakteristické rychlosti, $T^* = \frac{X^*}{U^*}$. Dále položme charakteristický tlak roven podílu charakteristické rychlosti a charakteristického rozměru přenásobeného konstantou viskozity, $P^* = \frac{\mu U^*}{X^*}$. Potom přenásobením rovnice (1.8) členem $\frac{(X^*)}{\rho (U^*)^2}$ získáváme

$$\partial_{\bar{t}} \bar{\mathbf{u}} + \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{x}}} (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{Re} (\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{p} - \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{x}}} (\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{u}} + (\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{u}})^\top)) = \frac{1}{Fr^2} \bar{\mathbf{f}}, \quad (1.9)$$

kde $Re = \frac{\rho U^* X^*}{\mu}$ se nazývá *Reynoldsovo číslo* a $Fr = \frac{U^*}{\sqrt{X^* F^*}}$ se nazývá *Froudovo číslo*. Rovnice kontinuity v bezrozměrné formulaci má tvar

$$\operatorname{div}_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{u}} = 0.$$

Popis proudění nestlačitelné homogenní kapaliny je tedy charakterizován dvěma konstantami Re , Fr . Různá proudění, která mají tyto konstanty stejné, nazveme *dynamicky podobná*. Podobně pro *bezrozměrný Cauchyho tenzor napětí* platí

$$\bar{\mathbb{T}} = -\bar{p}\mathbb{I} + \bar{\mathbb{S}} = -\bar{p}\mathbb{I} + \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{u}} + (\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{u}})^\top = \frac{1}{P^*} \mathbb{T}. \quad (1.10)$$

Nadále budeme rovnici hybnosti a rovnici kontinuity uvažovat v bezrozměrné formulaci, přeznačíme však veličiny a proměnné s čárkou na nečárkované. Pro zjednodušení dalšího textu zvolme dále $F^* = \frac{\mu U^*}{\rho (X^*)^2}$, z čehož plyne $\frac{Re}{Fr^2} = 1$. S využitím vztahu (1.10) můžeme po přeznačení a přenásobení rovnice (1.9) Reynoldsovým číslem rovnici hybnosti uvažovat ve tvaru

$$Re (\partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) - \operatorname{div} \mathbb{T} = \mathbf{f}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \forall t \in I. \quad (1.11)$$

Rovnice kontinuity po přeznačení je totožná s rovnicí (1.6).

Stacionární systém. Od této chvíle nadále budeme uvažovat proudění, které se s časem nemění, říkáme mu *stacionární* nebo *ustálené*. Derivace tlaku i rychlosti podle času jsou potom nulové, z čehož nám plyne následující tvar rovnice hybnosti:

$$Re \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbb{T} = \mathbf{f}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \forall t \in I. \quad (1.12)$$

2. Okrajové podmínky a slabá formulace

2.1 Okrajové podmínky na stěnách

Nás typicky zajímá proudění pouze na nějaké oblasti v prostoru, tedy podmnožině $\chi(\mathcal{B}, t)$. Tu budeme nadále značit Ω . Tvoří-li část $\partial\Omega$ nějaká pevná nepropustná stěna, pak okrajovou podmínku určují fyzikální předpoklady o chování kapaliny na rozhoraní s danou pevnou stěnou. Často uvažujeme, že kapalina na této stěně ulpívá, což odpovídá okrajové podmínce předepisující nulovou rychlost vzhledem k této stěně. Je-li tedy stěna v pohybu a má rychlost \mathbf{v} , pak předepisujeme na této hranici kapalině stejnou rychlost jako má tato stěna,

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{na } \Gamma_0, \quad (2.1)$$

kde $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ je výše zmíněná hranice. Tato podmínka je známa jako *no-slip* (viz [3]) a je to speciální případ takzvaných *Dirichletových okrajových podmínek* pro rychlost. Dirichletovou okrajovou podmínkou rozumíme takovou podmínku, kdy předepíšeme hodnotu hledané veličiny na uvažované části hranice.

Jindy můžeme nechat kapalinu po stěně volně klouzat, tomu odpovídá podmínka, která klade normálovou část rychlosti rovnou nule a tečnou část vektoru napětí rovněž předepisuje nulovou. V tomto případě hovoříme o *free-slip* a část hranice, kde zadáme tuto podmínku, označme Γ_1 .

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbb{T}\mathbf{n})_\tau = 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \quad (2.2)$$

kde $(\cdot)_\tau$ značí tečnou část vektoru vzhledem k $\partial\Omega$, $v_\tau = v - (v \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. Uvažujeme-li na hranici $\Gamma_2 \subset \Omega$ tření mezi kapalinou a stěnou, tak *free-slip* nahradí např. *Navier-slip* (viz [4]).

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbb{T}\mathbf{n} + \alpha\mathbf{u})_\tau = 0 \quad \text{na } \Gamma_2, \quad (2.3)$$

kde $\alpha > 0$ je *koefficient tření*. Tuto podmínku v dalším používat nebudeme.

Vzhledem k tomu, že normálový a tečný vektor jsou na sebe kolmé, tak podmínky (2.2) a (2.3) nezávisí na tlaku a \mathbb{T} můžeme nahradit $\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^\top$.

2.2 Odvození slabé formulace

Funce \mathbf{u} a p budeme hledat jako *slabá řešení* rovnic (1.6) a (1.11), která zdefinuujeme v této části. Pro přehlednost nejprve zavedme následující značení. Nechtě $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ jsou vektorové funkce na Ω a $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ maticové funkce na Ω . Potom značením $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)_\Omega, (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)_{\partial\Omega}, (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)_\Omega$ a $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)_{\partial\Omega}$ rozumíme následující operace:

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)_\Omega &= \int_\Omega \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \, d\mathbf{x}, & (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)_{\partial\Omega} &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \, d\sigma, \\ (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)_\Omega &= \int_\Omega \mathbb{A}_1 : \mathbb{A}_2 \, d\mathbf{x}, & (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)_{\partial\Omega} &= \int_{\partial\Omega} \mathbb{A}_1 : \mathbb{A}_2 \, d\sigma. \end{aligned}$$

Pro odvození slabých formulací je třeba zavést prostory funkcí $\mathbf{Q} = \{q \in L^2(\Omega)\}$, $\mathbf{V} = \{\mathbf{w} \in W^{1,2}(\Omega)^d : d = 2,3; \mathbf{w}|_{\Gamma_0} = 0\}$, kde $W^{1,2}(\Omega)^d$ značí *Sobolevův prostor* $L^2(\Omega)^d$ funkcí, které mají všechny první derivace v $L^2(\Omega)$. Přenásobením rovnice hybnosti (1.12) libovolnou testovací funkcí $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ a přeintegrováním přes celou Ω dostáváme:

$$Re(\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}), \mathbf{w})_\Omega - (\operatorname{div} \mathbb{T}, \mathbf{w})_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{w})_\Omega. \quad (2.4)$$

Užitím Gaussovy věty na člen $\operatorname{div} \mathbb{T} \cdot \mathbf{w}$ dostáváme rovnost

$$(\operatorname{div} \mathbb{T}, \mathbf{w})_\Omega = (\mathbb{T} \mathbf{n}, \mathbf{w})_{\partial\Omega} - (\mathbb{T}, \nabla \mathbf{w})_\Omega. \quad (2.5)$$

Jejím dosazením do rovnice (2.4) a následným vyjádřením Cauchyho tenzoru napětí podle (1.10) dostáváme:

$$\begin{aligned} Re(\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}), \mathbf{w})_\Omega - (p, \operatorname{div} \mathbf{w})_\Omega + (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top, \nabla \mathbf{w})_\Omega - (\mathbb{T} \mathbf{n}, \mathbf{w})_{\partial\Omega} = \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{w})_\Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Všimněme si, že pro $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_b$ je

$$(\mathbb{T} \mathbf{n}, \mathbf{w})_{\partial\Omega} = (\mathbb{T} \mathbf{n}, \mathbf{w})_{\Gamma_0} + (\mathbb{T} \mathbf{n}, \mathbf{w})_{\Gamma_1} + (\mathbb{T} \mathbf{n}, \mathbf{w})_{\Gamma_b} \quad (2.7)$$

a že tedy použitím $\mathbf{w} = 0$ na Γ_0 , $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ na Γ_1 a $(\mathbb{T} \mathbf{n})_\tau = 0$ na Γ_1 , můžeme psát

$$(\mathbb{T} \mathbf{n}, \mathbf{w})_{\partial\Omega} = (\mathbb{T} \mathbf{n}, \mathbf{w})_{\Gamma_b}. \quad (2.8)$$

Nyní můžeme zadefinovat první variantu slabé formulace.

Definice 1. *Nechť $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_b$ a $\mathbf{b} \in L^2(\Gamma_b)$ bude specifikováno později, potom slabou formulací rovnic (1.6) a (1.12) za podmínky*

$$-\mathbb{T} \mathbf{n} = \mathbf{b} \quad \text{na } \Gamma_b \quad (2.9)$$

rozumíme následující.

Hledejme $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times \mathbf{Q}$ splňující

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q \in \mathbf{Q}$$

a

$$\begin{aligned} Re(\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}), \mathbf{w})_\Omega - (p, \operatorname{div} \mathbf{w})_\Omega + (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top, \nabla \mathbf{w})_\Omega = \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{w})_\Omega - (\mathbf{b}, \mathbf{w})_{\Gamma_b}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Tuto slabou formulaci budeme značit \mathbf{P} .

Druhou možností jak odvodit slabou formulaci rovnice hybnosti je použít nejprve vztah

$$\operatorname{div}((\nabla \mathbf{u})^\top) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = 0,$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili rovnici kontinuity (1.6). Pomocí něho můžeme místo rovnosti (2.5) uvažovat

$$(\operatorname{div} \mathbb{T}, \mathbf{w})_\Omega = -(\nabla p, \mathbf{w})_\Omega + (\operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}), \mathbf{w})_\Omega = (p, \operatorname{div} \mathbf{w})_\Omega - (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w})_\Omega + (\hat{\mathbb{T}} \mathbf{n}, \mathbf{w})_{\partial\Omega},$$

kde $\hat{\mathbb{T}} = -p\mathbb{I} + \nabla \mathbf{u}$. Na základě rovnice (2.4) a tohoto vztahu můžeme zadefinovat alternativní slabou formulaci.

Definice 2. Necht $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_{\hat{b}}$ a $\hat{\mathbf{b}} \in L^2(\Gamma_{\hat{b}})$ bude specifikováno později, potom slabou formulací rovnic (1.6) a (1.12) za podmínky

$$-\hat{\mathbb{T}}\mathbf{n} = \hat{\mathbf{b}} \quad \text{na } \Gamma_{\hat{b}}$$

rozumíme následující.

Hledejme $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times \mathbf{Q}$ splňující

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q \in \mathbf{Q}$$

a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}), \mathbf{w})_{\Omega} - (p, \operatorname{div} \mathbf{w})_{\Omega} + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w})_{\Omega} = \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{w})_{\Omega} - (\hat{\mathbf{b}}, \mathbf{w})_{\Gamma_{\hat{b}}}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Tuto formulaci budeme značit $\hat{\mathbf{P}}$.

Volbou \mathbf{b} a $\hat{\mathbf{b}}$ se budeme zabývat v následující kapitole.

2.3 Okrajové podmínky na umělé hranici I

Zde se zaměříme na okrajové podmínky na *umělé hranici*. Tím rozumíme hranici, kterou netvoří žádná pevná stěna a kterou jsme zvolili proto, abychom nehledali řešení na celé rozsáhlé oblasti $\chi(\mathcal{B}, t)$. Nyní ukážeme některé konkrétní volby okrajových podmínek na umělé hranici. Při jejich odvozování budeme pracovat se členem \mathbf{b} ze slabé formulace \mathbf{P} a se členem $\hat{\mathbf{b}}$ ze slabé formulace $\hat{\mathbf{P}}$.

Konstantní trakce. Tato podmínka vychází ze slabé formulace \mathbf{P} a na umělé hranici jednoduše klade trakci $-\mathbb{T}\mathbf{n}$ rovnou konstantnímu násobku normálového vektoru hranice

$$-\mathbb{T}\mathbf{n} = P_0 \mathbf{n}, \tag{2.10}$$

kde $P_0 \in \mathbb{R}$ je konstanta. Jinými slovy zde klademe $-\mathbb{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = P_0$ a $(-\mathbb{T}\mathbf{n})_{\tau} = 0$. V definici 1 je tedy $\mathbf{b} = P_0 \mathbf{n}$.

Podmínka typu do-nothing. Tato podmínka uplatňuje podobný přístup jako předchozí, nevychází ze slabé formulace podle definice 1, ale ze slabé formulace podle definice 2. Pro $P_0 \in \mathbb{R}$ konstantní tedy volíme okrajovou podmínku

$$-\hat{\mathbb{T}}\mathbf{n} = p\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{u})\mathbf{n} = P_0 \mathbf{n}. \tag{2.11}$$

Toto odpovídá volbě $\hat{\mathbf{b}} = P_0 \mathbf{n}$ ve slabé formulaci v definici 2.

Konstanta P_0 se často klade rovna nule, jiné volby pouze posunou vypočtený tlak o tuto konstantu, jak se lze dočíst v [5], kde jsou tyto podmínky diskutovány více.

2.4 Energetický odhad

Důležitou informaci o hledaném řešení obdržíme dosazením $\mathbf{w} := \mathbf{u}$ do slabé formulace rovnice hybnosti

$$Re(\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}), \mathbf{u})_\Omega - (p, \operatorname{div} \mathbf{u})_\Omega + (\tilde{\mathbb{S}}, \nabla \mathbf{u})_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_\Omega - (\tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{u})_{\Gamma_{\tilde{\mathbf{b}}}}, \quad (2.12)$$

kde buď $\tilde{\mathbb{S}} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top$, $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ na $\Gamma_{\tilde{\mathbf{b}}} = \Gamma_{\mathbf{b}}$, nebo $\tilde{\mathbb{S}} = \nabla \mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}$ na $\Gamma_{\tilde{\mathbf{b}}} = \Gamma_{\hat{\mathbf{b}}}$. Nyní s využitím nulovosti divergence rychlosti počítejme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u}|\mathbf{u}|^2) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |\mathbf{u}|^2 \, d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\tilde{\mathbf{b}}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |\mathbf{u}|^2 \, d\sigma. \end{aligned}$$

Všimněme si dále, že $\|\tilde{\mathbb{S}}\|_{2,\Omega}^2 \leq 2(\tilde{\mathbb{S}}, \nabla \mathbf{u})_\Omega$, kde $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ značí klasickou L^2 -normu na množině Ω . Tím jsme získali následující odhad

$$\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbb{S}}\|_{2,\Omega}^2 \leq \left((\mathbf{f}, \mathbf{u})_\Omega - (\tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{u})_{\partial\Omega} \right) - \frac{Re}{2} \int_{\Gamma_{\tilde{\mathbf{b}}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |\mathbf{u}|^2 \, d\sigma. \quad (2.13)$$

Kubický člen na pravé straně má při přítoku ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$) záporné znaménko a $\|\tilde{\mathbb{S}}\|_{2,\Omega}^2$ potom může obecně nekontrolovatelně růst. Nelze tedy takto odhadnout velikost rychlosti a nemáme k dispozici výsledky zaručující existenci řešení. Tomuto růstu můžeme zamezit zvolením okrajové podmínky $-\tilde{\mathbb{T}}\mathbf{n}|_{\Gamma_{\tilde{\mathbf{b}}}} = \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{u})$ splňující

$$(\tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{u})_{\Gamma_{\tilde{\mathbf{b}}}} \geq -\frac{Re}{2} \int_{\Gamma_{\tilde{\mathbf{b}}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |\mathbf{u}|^2 \, d\sigma - C_{\tilde{\mathbf{b}}} \|\mathbf{u}\|_{2,\Gamma_{\tilde{\mathbf{b}}}}, \quad (2.14)$$

kde $C_{\tilde{\mathbf{b}}}$ je konstanta závislá na volbě $\tilde{\mathbf{b}}$. Za tohoto předpokladu platí následující lemma.

Lemma 2.1. *Nechť (\mathbf{u}, p) je řešení problému \mathbf{P} nebo $\hat{\mathbf{P}}$ a $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ má kladnou míru, potom za platnosti podmínky (2.14) je \mathbf{u} omezená v $W^{1,2}(\Omega)$. Normou na $W^{1,2}(\Omega)$ rozumíme:*

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \equiv \left(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Důkaz. Použijme nejprve *Kornovu nerovnost* (důkaz lze najít v [6]), která říká

$$C(\Omega) \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq \|\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top\|_{2,\Omega}^2, \quad (2.15)$$

kde $C(\Omega)$ je kladná konstanta závislá na Ω a na Γ_0 . Dosazením (2.15) a (2.14) do (2.13) a následným užitím *Hölderovy nerovnosti* na člen $(\mathbf{f}, \mathbf{u})_\Omega$ dostáváme

$$\frac{1}{2} C_{\tilde{\mathbb{S}}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq C_{\tilde{\mathbf{b}}} \|\mathbf{u}\|_{2,\Gamma_{\tilde{\mathbf{b}}}} + \|\mathbf{f}\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}, \quad (2.16)$$

kde $C_{\mathbb{S}}$ je v závislosti na formulaci $\tilde{\mathbb{S}}$ buď 1 nebo $C(\Omega)$ z (2.15). Nyní použijeme *Sobolevovy nerovnosti*, které podle [7] říkají

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\partial\Omega} \leq C_2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}.$$

Jejich dosazením do (2.16) dostáváme:

$$\frac{1}{2} C_{\mathbb{S}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq (C_{\tilde{\mathbf{b}}} C_2 + \|\mathbf{f}\|_{2,\Omega} C_1) \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}. \quad (2.17)$$

Pokrácením $\|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}$ a následným vydělením $\frac{C_{\mathbb{S}}}{2}$ dostaneme

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq \frac{2}{C_{\mathbb{S}}} (C_{\tilde{\mathbf{b}}} C_1 + 2\|\mathbf{f}\|_{2,\Omega} C_2). \quad (2.18)$$

Tím jsme ukázali omezenost gradientu rychlosti, protože pravá strana je konstanta závislá na zadání úlohy. Naše odhady zakončíme *Friedrichsovou nerovností* (viz [7]):

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega},$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je nějaká kladná konstanta, odtud plyne omezenost \mathbf{u} ve $W^{1,2}(\Omega)$ a tím je lemma dokázáno. \square

Na základě tohoto lemmatu lze dokázat existenci řešení (podobným způsobem jako v [8], Theorem 3.1) soustavy rovnic (\mathbf{P}) a $(\hat{\mathbf{P}})$. Podle [8] je navíc řešení jednoznačné pro $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

2.5 Okrajové podmínky na umělé hranici II

Uveďme nyní příklady podmínek splňující (2.14):

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = P_0 \mathbf{n} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{n}, \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = P_0 \mathbf{n} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}, \quad (2.19b)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = P_0 \mathbf{n} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- \mathbf{u}, \quad (2.19c)$$

kde $P_0 \in \mathbb{R}$ je konstanta a

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- = \begin{cases} 0 & \text{pokud } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \geq 0, \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) & \text{pokud } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) < 0. \end{cases}$$

Podmínka (2.19c) je v případě, že uvažujeme problém $\hat{\mathbf{P}}$ známá jako *directional do-nothing* (viz [8]). Dochází-li na hranici k výtoku, je totožná s klasickou výše představenou do-nothing podmínkou, při přítoku přibývá kvadratický člen v rychlosti. Jak bylo ukázáno výše, při výtoku není třeba klasickou do-nothing modifikovat. Rovnice hybnosti za podmínky directional do-nothing s $P_0 = 0$ má tvar:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}), \mathbf{w})_{\Omega} - (p, \operatorname{div} \mathbf{w})_{\Omega} + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w})_{\Omega} - \frac{1}{2} \operatorname{Re}((\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- \mathbf{u}, \mathbf{w})_{\partial\Omega} = \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{w})_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \mathbf{u} \in \mathbf{V}, p \in \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

3. Numerické simulace

Výše uvedené úvahy jsme prováděli v trojrozměrném prostoru, nyní však třetí rozměr zanedbáme a omezíme se pro jednoduchost na *rovinná proudění*. Budeme se zabývat úlohami, ve kterých je možno zvolit takový systém souřadných os x , y a z , že všechny veličiny jsou nezávislé na proměnné z . Proudění má tedy stejné vlastnosti ve všech rovinách kolmých na osu z a veličiny lze uvažovat v proměnných x a y . Pole rychlosti \mathbf{u} budeme chápat jako dvourozměrné $\mathbf{u}(x,y) = (\mathbf{u}_1(x,y), \mathbf{u}_2(x,y))$ (viz [3]).

Naším cílem bude hledat vhodné přítokové a výtokové okrajové podmínky pro úlohy výtoku kapaliny z dlouhého kanálu, nebo naopak přítoku kapaliny do něj. Proudění budeme uvažovat stacionární a naše kapalina bude nestlačitelná a homogenní. Nejprve budeme uvažovat jednoduchou polygonální oblast, která bude reprezentovat část kanálu u výtoku do nějakého velkého rezervoáru a část tohoto rezervoáru. Výsledky získané na této oblasti budeme považovat za hodnoty, kterých chceme volbou okrajových podmínek v kanále dosáhnout.

Výpočty zde prezentované byly provedeny metodou konečných prvků pomocí softwaru *FEniCS*¹ (více o projektu *FEniCS* se lze dočíst v [9]).

3.1 Zavedení výpočetních oblastí

Výpočty budeme provádět na množině Ω definované vztahem (3.1) a znázorněné na obrázku 3.1 světle šedou barvou. Na této množině budeme uvažovat dvě různé úlohy a její interpretace se bude v závislosti na těchto úlohách lišit, vždy však půjde o část rozlehlého rezervoáru a část kanálu, jímž přitéká nebo vytéká kapalina.

$$\Omega = ((0, 20) \times (0, 8)) \setminus ([0, 3] \times [1, 8]). \quad (3.1)$$

$\partial\Omega$ rozdělíme následujícím způsobem

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_S \cup N, \quad (3.2)$$

kde N je množina míry nula (jde o množinu krajních bodů částí hranice) a

$$\Gamma_0 = ((0, 3) \times \{1\}) \cup (\{3\} \times (1, 8)), \quad (3.3)$$

$$\Gamma_D = \{0\} \times (0, 1), \quad (3.4)$$

$$\Gamma_N = (\{20\} \times (0, 8)) \cup ((3, 20) \times \{8\}), \quad (3.5)$$

$$\Gamma_S = ((0, 20) \times \{0\}). \quad (3.6)$$

Γ_0 je na obrázku znázorněna červenou barvou a odpovídá pevné stěně, kterou tvoří stěna kanálu a stěna rezervoáru. Na ní předepíšeme no-slip podmínku (2.1).

Γ_D je na obrázku označena modrou barvou a budeme na ni zadávat Dirichletova data pro rychlost, ta se budou v různých úlohách lišit. Touto podmínkou budeme volit způsob přítoku resp. výtoku kanálem a velikost průtoku.

Γ_N , která je označena zelenou barvou, je umělá hranice, za kterou rezervoár dál pokračuje. Zde budeme volit okrajovou podmínku zaručující předepsaný (nulový)

¹Kód lze nalézt v elektronické příloze.

tlak v místě, kde je proudění již zanedbatelné. Je tedy potřeba volit Γ_N dostatečně daleko od ústí kanálu.

Γ_S , která je označena žlutou barvou, znázorňuje hranici, jejíž interpretace, a tedy i podmínka na ni, se bude lišit v závislosti na úloze. Buď půjde o osu symetrie uvažované oblasti, nebo se bude jednat o pevnou pohybuující se stěnu.

Budeme studovat chování proudění v kanálu a budeme se zabývat otázkou, jakou podmínku zvolit při ústí do rezervoáru, aby toto proudění odpovídalo výsledkům získaným výpočty na celé Ω . Tyto výsledky budeme požadovat podobné jenom do nějaké vzdálenosti od ústí ($x = 2.4$), protože pak se začne projevovat tvar rezervoáru. Kanálem rozumíme následující množinu (viz obrázek 3.2)

$$\Omega_{out} = \Omega \cap \{x < 2.4\} = (0, 2.4) \times (0, 1). \quad (3.7)$$

S $\partial\Omega_{out}$ naložíme podobně, jako s $\partial\Omega$,

$$\partial\Omega_{out} = \Gamma_D \cup \Gamma_{0,out} \cup \Gamma_{S,out} \cup \Gamma_{out} \cup N^0, \quad (3.8)$$

kde Γ_D je definována výše, N^0 je opět množina krajních bodů míry nula a

$$\Gamma_{0,out} = \Gamma_0 \cap \partial\Omega_{out}, \quad (3.9)$$

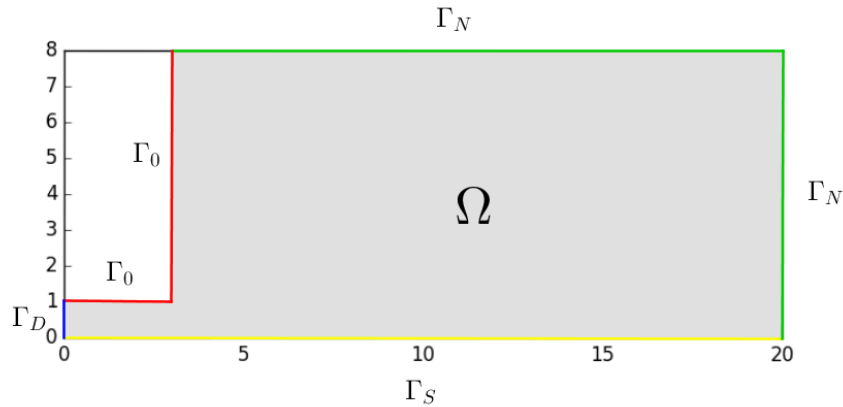
$$\Gamma_{S,out} = \Gamma_S \cap \partial\Omega_{out}, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{out} = \{2.4\} \times (0, 1). \quad (3.11)$$

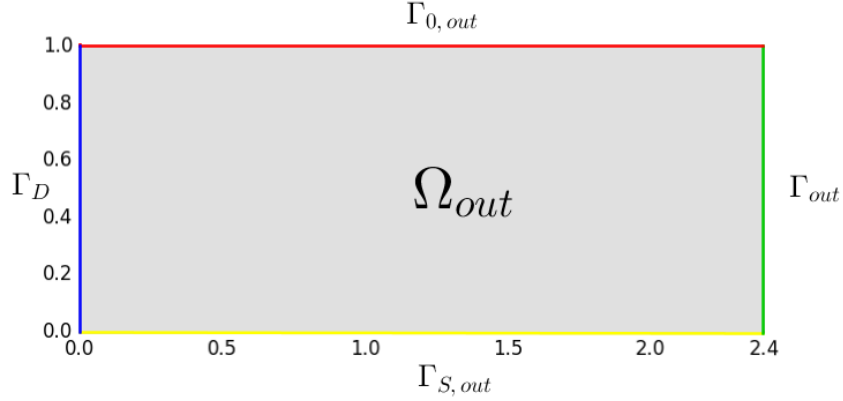
Na částech hranice, které jsou součástí $\partial\Omega$, budeme předepisovat podmínky odpovídající této hranici a zadané úloze. Na Γ_{out} budeme vhodnou okrajovou podmínku hledat ve zbytku textu.

3.2 Definice problémů

Jak bylo uvedeno výše, na množině Ω budeme uvažovat dvě úlohy, a to podle typu proudění v uvažovaném kanálu. V kanálu budeme uvažovat *Poiseuilleovo* nebo *Couetteovo proudění*. Co těmito pojmy rozumíme, vysvětlíme níže. V obou případech budeme uvažovat jak přítok, tak výtok.



Obrázek 3.1: Oblast, na které budeme provádět výpočty.



Obrázek 3.2: Kanál, na kterém budeme zkoumat přítokové a výtokové podmínky.

3.2.1 Poiseuilleovo proudění

Rovinné Poiseuilleovo proudění je proudění, které se ustálí v dlouhém kanálu na základě konstantního rozdílu tlaku na koncích tohoto kanálu. Předpokládáme při tom, že kapalina na stěnách ulpívá, má zde tedy nulovou rychlost a za okrajovou podmínku na stěnách volíme podmínku no-slip (2.1). Rychlostní profil tohoto proudění je parabolický (viz [10]).

Tohoto výsledku uijeme v naší první úloze k zadání podmínky na Γ_D , kde budeme uvažovat vtékání kapaliny kanálem do nějakého rozlehlého rezervoáru resp. vytékání tímto kanálem z něj. Oblast budeme v tomto případě uvažovat symetrickou podle osy kanálu, místo Ω tedy tedy reálné úloze odpovídá větší množinu

$$\Omega^0 = \Omega \cup \hat{\Omega} \cup \Gamma_S, \quad (3.12)$$

kde $\hat{\Omega} = \{(x, -y) : (x, y) \in \Omega\}$. Části hranice Ω^0 mají stejnou roli jako bylo popsáno u analýzy $\partial\Omega$, což je naznačeno i stejným barevným odlišením na obrázku 3.3, kde je Ω^0 znázorněna.

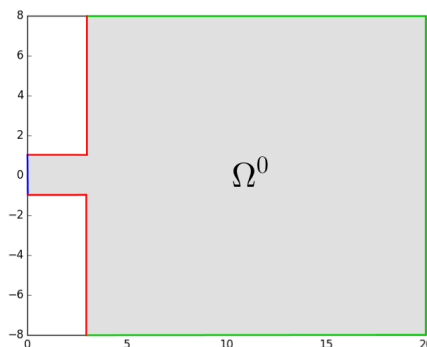
Přítok resp. výtok uvažujeme formou Poiseuilleova proudění představeného výše. Úloha je tím pádem plně symetrická podle osy x , její symetrické řešení lze tedy hledat na horní polovině Ω^0 , která odpovídá množině Ω . K tomu je potřeba předepsat vhodnou okrajovou podmínku, která je totožná s free-slip podmínkou (2.2)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (-\mathbb{T}\mathbf{n})_\tau = 0 \quad \text{na } \Gamma_S. \quad (3.13)$$

V případě, že uvažujeme problém $\hat{\mathbf{P}}$, tak místo \mathbb{T} píšeme $\hat{\mathbb{T}}$. Uvedená přítoková resp. výtoková podmínka potom vypadá takto

$$\mathbf{u} = \pm(1 - y^2, 0) \quad \text{na } \Gamma_D, \quad (3.14)$$

kde znaménko určuje, zda uvažujeme přítok nebo výtok. Připomeňme, že pracujeme s bezrozměrnými veličinami. Charakteristická rychlost zahrnutá v definici Reynoldsova čísla tedy odpovídá velikosti rychlosti ve středu kanálu. Této úloze budeme pro účely této práce říkat Poiseuilleova úloha.



Obrázek 3.3: Celá oblast pro Poiseuille.

3.2.2 Couetteovo proudění

Couetteovo proudění je jednoduché ustálené proudění kapaliny mezi dvěma deskami, kde jedna zůstává v klidu, zatímco druhá se pohybuje rovnoběžně vzhledem k první. Uvažujeme přitom opět, že kapalina na deskách ulpívá, zadáme tedy jako v předchozím podmínku no-slip (2.1). V rovině, která má jednu souřadnou osu orientovanou ve směru pohybu pohybující se desky a druhou kolmou na obě desky, tak vzniká rovinné proudění s lineárním rychlostním profilem (viz [10]).

Nechť Ω reprezentuje část rezervoáru a část kanálu vedoucího z něj a necht' Γ_S představuje pevnou stěnu, která se rovnoměrně pohybuje ve směru osy x . Potom dostáváme podmínku

$$\mathbf{u} = (\pm 1, 0) \quad \text{na } \Gamma_S, \quad (3.15)$$

kde opět znaménko určuje, zda uvažujeme přítok nebo výtok. Na Γ_D předepíšeme lineární Couetteův profil představený výše, tedy

$$\mathbf{u} = \pm(1 - y, 0) \quad \text{na } \Gamma_D. \quad (3.16)$$

Zde podobně jako v Poiseuilleově úloze charakteristická rychlost udává velikost rychlosti na Γ_S . O této úloze budeme (trochu nepřesně, pro účely této práce) mluvit jako o Couetteově.

3.2.3 Couetteovo proudění s tlakovým gradientem

Obě výše uvedené úlohy můžeme zkombinovat do jedné, oblast Ω a její hranice tedy budou mít stejnou interpretaci jako v Couetteově úloze, jen pohyb tekutiny v kanálu bude vedle pohybu stěny Γ_S vyprovokován také rozdílem tlaku mezi u-mělou hranicí Γ_N a Γ_D . Podmínka udávající přítok resp. výtok bude kombinací Couetteova a Poiseuilleova proudění,

$$\mathbf{u} = \pm(1 - y, 0) \pm a(y - y^2, 0) \quad \text{na } \Gamma_D, \quad (3.17)$$

kde $(y - y^2, 0)$ odpovídá Poiseuilleovu proudění v kanálu a $a \in \mathbb{R}$ udává podíl Poiseuilleova proudění v kanálu vůči Couetteovu proudění. Podmínka na Γ_S zůstává (3.15).

3.3 Numerická simulace proudění v Ω

Naše numerické experimenty zahájíme výpočty na oblasti s rezervoárem Ω , tyto výsledky budeme později porovnávat s výsledky získanými na kanálu Ω_{out} za použití různých okrajových podmínek na Γ_{out} . Na hranici Γ_N zadáme podmínku do-nothing, tedy (2.11) s $P_0 = 0$, viz diskuze u definice Γ_N . Výpočty budeme provádět pro různá Reynoldsova čísla, nejprve v rozmezí 0 až 50.

3.3.1 Diskuze nad řešeními problémů a vliv volby Γ_N

Nyní prezentujeme výsledky získané výpočty na této Ω . Pro všechny výše uvedené úlohy na obrázcích 3.5 - 3.8 zobrazíme hodnoty tlaku, $-\mathbb{T}\mathbf{n}$, $-\hat{\mathbb{T}}\mathbf{n}$ a rychlosti podél příčného řezu kanálem v $x = 0.0$ a $x = 2.4$. Za vektor \mathbf{n} zde bereme vektor $(1, 0)$, trakce $-\mathbb{T}\mathbf{n}$ tak má tvar $(p - 2\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}, -(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x}))$, zatímco $-\hat{\mathbb{T}}\mathbf{n}$ je rovno $(p - \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}, -\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x})$. Tyto hodnoty zobrazujeme pro různá Reynoldsova čísla v rozmezí 0 až 50^2 .

Dále v tabulkách ukážeme některé hodnoty tlaku pro různá Reynoldsova čísla. V tabulce 3.1 zvidíme pro Poiseuilleovu úlohu průměrné hodnoty tlaku podél příčného řezu kanálem v $x = 0.0$ a $x = 2.4$ a to jak pro přítok, tak pro výtok. Podél řezu $x = 0.0$ je tlak konstantní a ani v $x = 2.4$ nedochází k výrazným změnám tlaku. V tabulce 3.2 ukážeme hodnoty tlaku pro Couetteovu úlohu, zde však pro každé Reynoldsovo číslo vypíšeme jen dvě hodnoty, jednu pro přítok a druhou pro výtok, to proto, že tlak se v celém kanálu výrazně nemění a některé níže použité podmínky budou pro Couetteovu úlohu zachovávat v celém kanálu konstantní tlak. Hodnoty z tabulek 3.1 a 3.2 navíc neodpovídají jen tlaku, ale i prvním složkám vektorů $-\mathbb{T}\mathbf{n}$ a $-\hat{\mathbb{T}}\mathbf{n}$ (průměrná hodnota $\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}$ je nulová s přesností na dvě desetinná místa).

Pole rychlosti a tlaku jsou schematicky znázorněna v příloze. Pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok to jsou obrázky 3.15 pro $Re = 0$ a 3.16 pro $Re = 50$. Pro Poiseuilleovu úlohu pro výtok 3.17 a 3.18. Couetteovy úlohy jsou pak znázorněny na obrázcích 3.19 a 3.20 pro přítok na 3.21 a 3.22 pro výtok.

Ověřme nyní, zda-li jsme dostali výsledky odpovídající našim požadavkům. Množinu Ω jsme chtěli volit tak, aby na Γ_N bylo proudění již zanedbatelné (viz

²Světle modrá čára odpovídá Reynoldsovu číslu 0, tmavě modrá Reynoldsovu číslu 1, světle zelená 5, tmavě zelená 10, růžová 20, červená 35 a světle oranžová 50.

Re	x=0.0		x=2.4	
	přítok	výtok	přítok	výtok
0	7.61	-7.61	2.83	-2.83
1	7.28	-7.96	2.49	-3.17
5	6.23	-9.41	1.44	-4.46
10	5.60	-11.29	0.81	-6.55
20	5.17	-15.13	0.39	-10.32
35	4.93	-21.04	0.17	-16.00
50	4.82	-26.85	0.06	-21.51

Tabulka 3.1: Hodnoty tlaku na množině Ω pro Poiseuilleovu úlohu.

Re	přítok	výtok
0	-1.69	1.69
1	-1.41	2.29
5	-1.09	4.50
10	-0.98	6.74
20	-0.94	10.53
35	-0.94	15.42
50	-0.95	19.88

Tabulka 3.2: Hodnoty tlaku na množině Ω pro Couetteovu úlohu.

definice Γ_N), prodloužením Ω dál za hranici Γ_N bychom tedy neměli výsledky příliš změnit. Z tohoto důvodu zdefinujeme pro $L > 3$ množinu Ω_L následujícím způsobem

$$\Omega_L = ((0, L) \times (0, 8)) \setminus ([0, 3] \times [1, 8]). \quad (3.18)$$

Hranici množiny Ω_L rozdělíme zcela analogicky jako $\partial\Omega$ a okrajové podmínky na části $\partial\Omega_L$ budou pro danou úlohu stejné jako pro odpovídající části $\partial\Omega$.

Ukážeme zde hodnoty, které dostaneme prodloužením množiny Ω ($= \Omega_{20}$) na Ω_{40} . Dostaneme-li výrazně odlišné hodnoty, tak jsme množinu Ω volili příliš krátkou a výsledky nežádoucím způsobem ovlivňuje okrajová podmínka na Γ_N . Zde opět zobrazíme tabulky 3.3 a 3.4 průměrných hodnot tlaku v řezech $x = 0.0$ a $x = 2.4$ a porovnejme je s tabulkami 3.1 a 3.2.

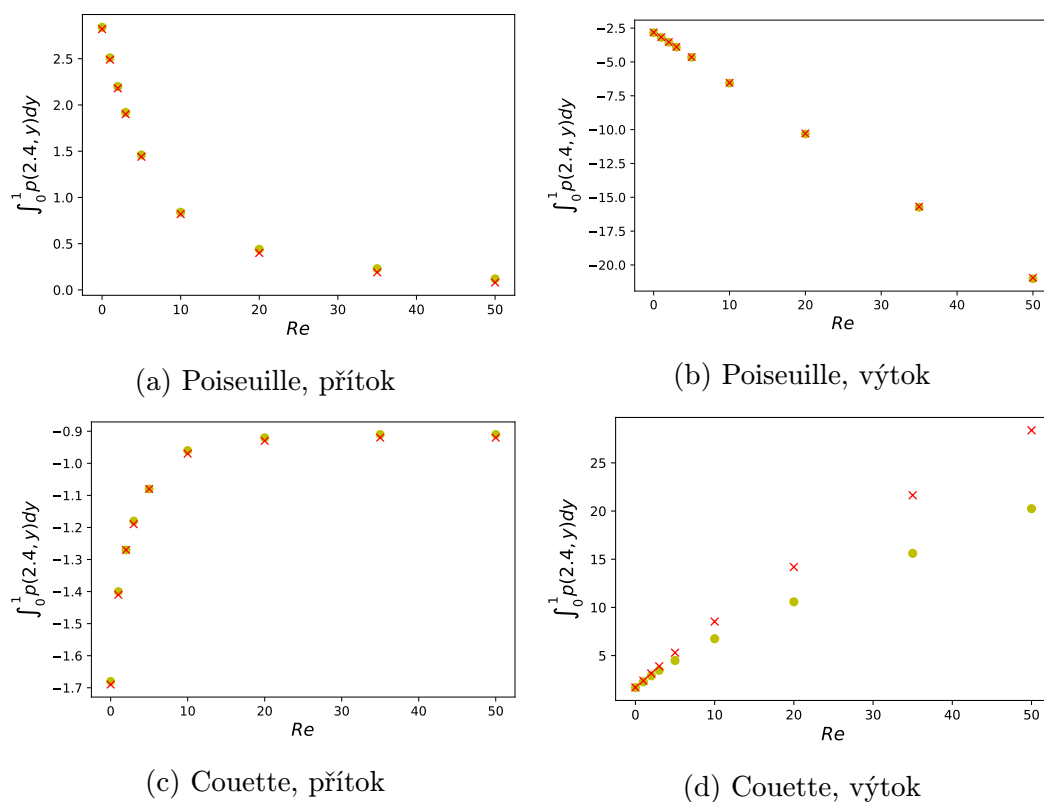
Vidíme, že pro Poiseuilleovu úlohu pro výtok dostáváme velmi podobné výsledky, což interpretujeme tak, že v obou případech je hranice Γ_N dostatečně daleko od ústí kanálu a řešení neovlivňuje. Pro Couetteovu úlohu pro výtok dostaneme s prodlouženou oblastí pro Reynoldsova čísla větší než deset výrazně vyšší hodnoty, okrajová podmínka na Γ_N tedy ovlivňuje řešení. Pro přítokové úlohy dostáváme výpočty na Ω_{40} podobné výsledky, jako na Ω_{20} . Dále se budeme snažit odvodit závislost tlaku na Reynoldsově čísla, ukážeme, pro vyšší Reynoldsova čísla je jiná než pro nižší.

Re	x=0.0		x=2.4	
	přítok	výtok	přítok	výtok
0	7.62	-7.62	2.82	-2.83
1	7.29	-7.96	2.49	-3.17
5	6.24	-9.41	1.44	-4.64
10	5.61	-11.29	0.82	-6.54
20	5.18	-15.12	0.40	-10.29
35	4.95	-20.83	0.19	-15.69
50	4.84	-26.44	0.08	-20.95

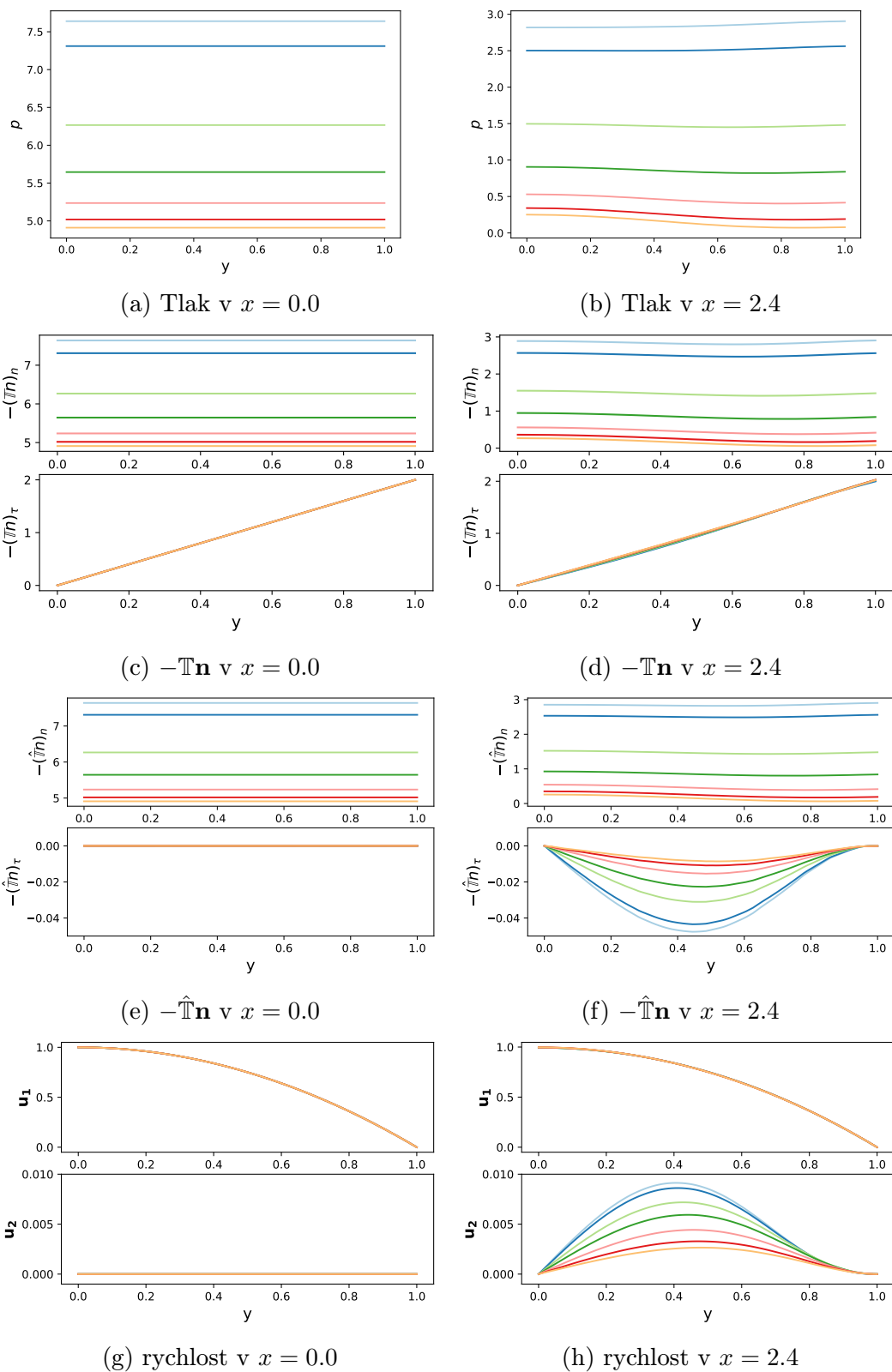
Tabulka 3.3: Hodnoty tlaku na **prodloužené** množině Ω_{40} pro Poiseuilleovy úlohy.

Re	přítok	výtok
0	-1.69	1.69
1	-1.41	2.39
5	-1.09	5.30
10	-0.97	8.52
20	-0.93	14.15
35	-0.93	21.45
50	-0.93	28.03

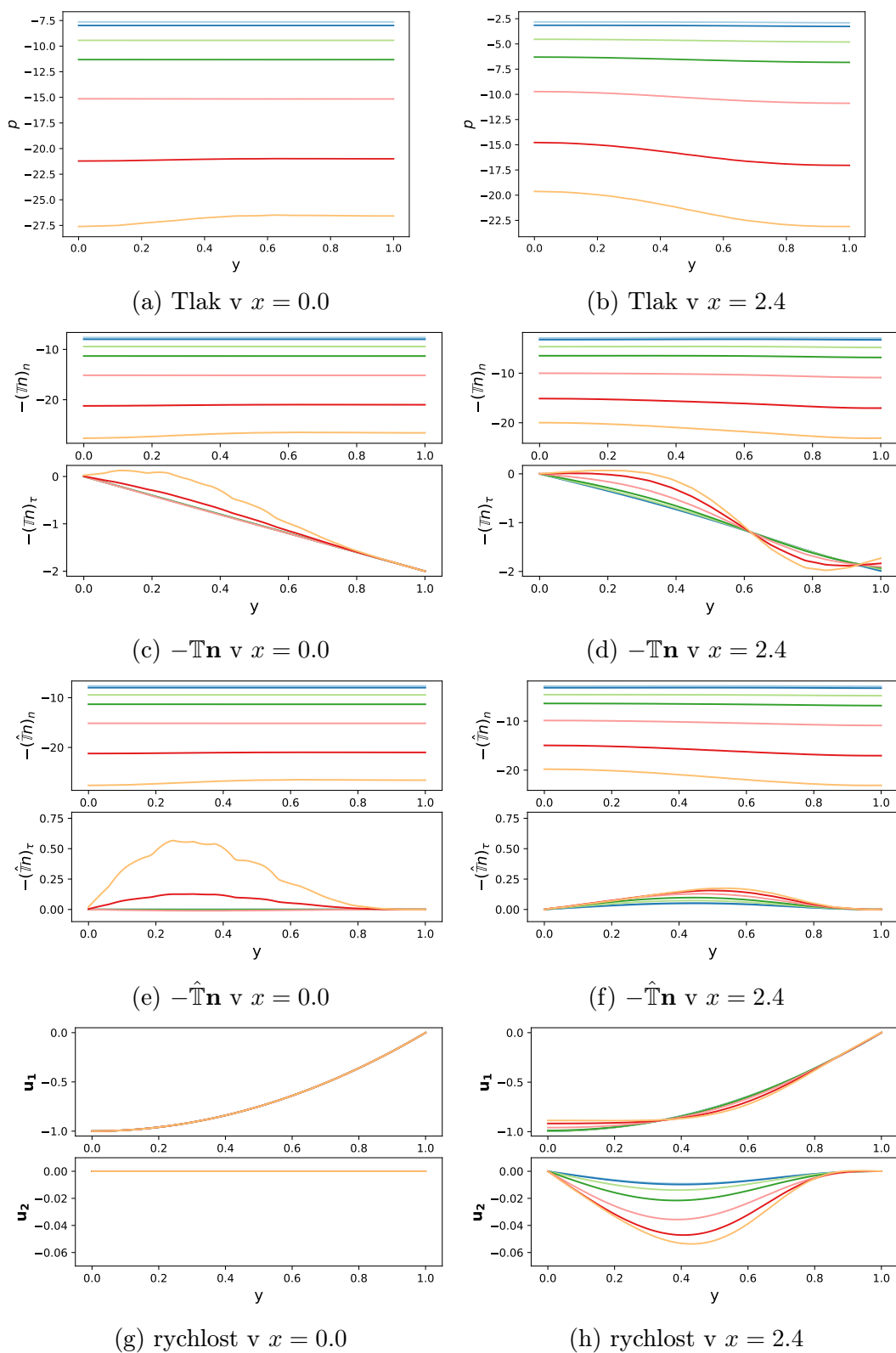
Tabulka 3.4: Hodnoty tlaku na **prodloužené** množině Ω_{40} pro Couetteovy úlohy.



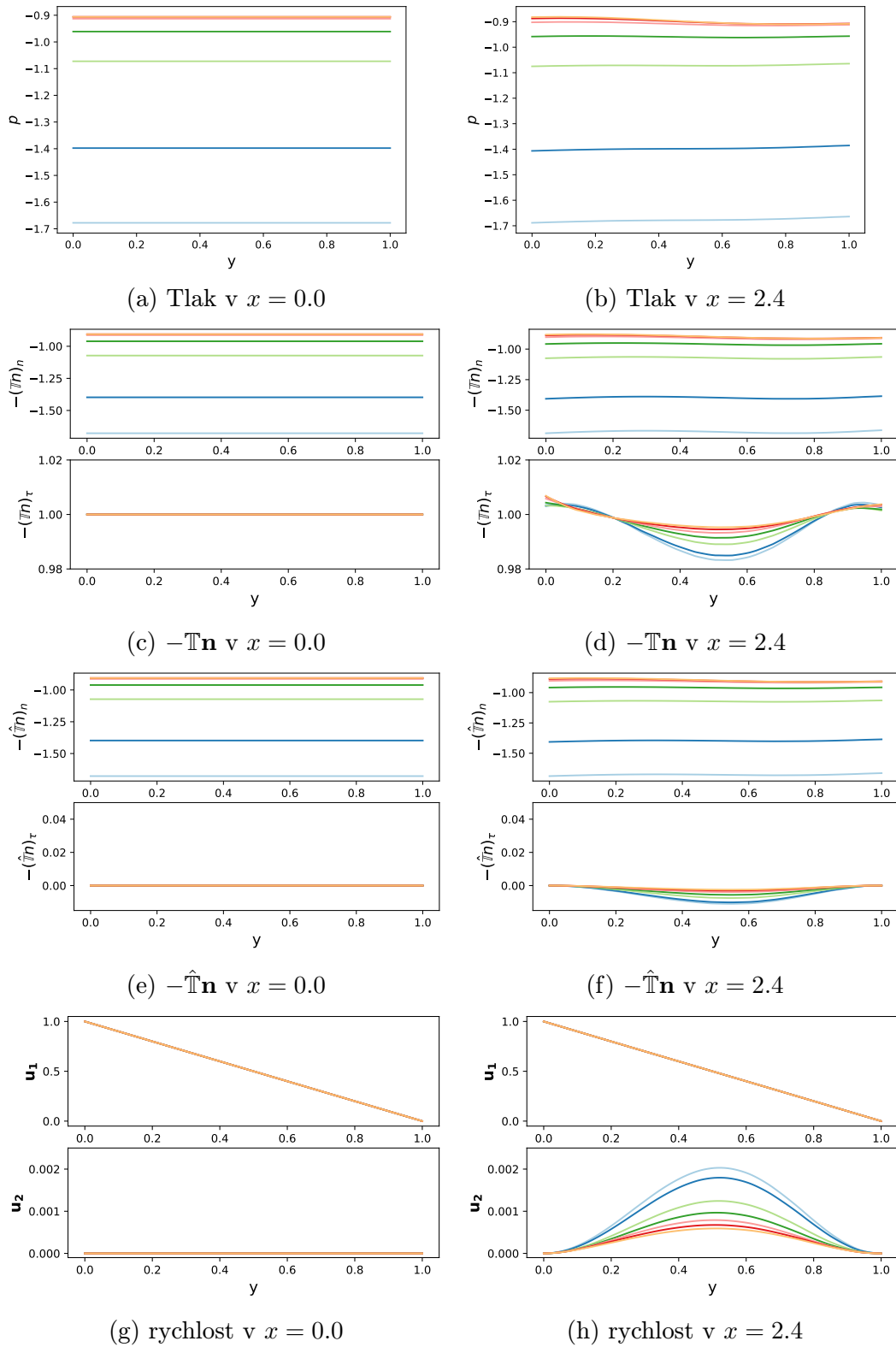
Obrázek 3.4: Hodnoty tlaku v $x = 2.4$ pro množiny Ω a Ω_{40} .



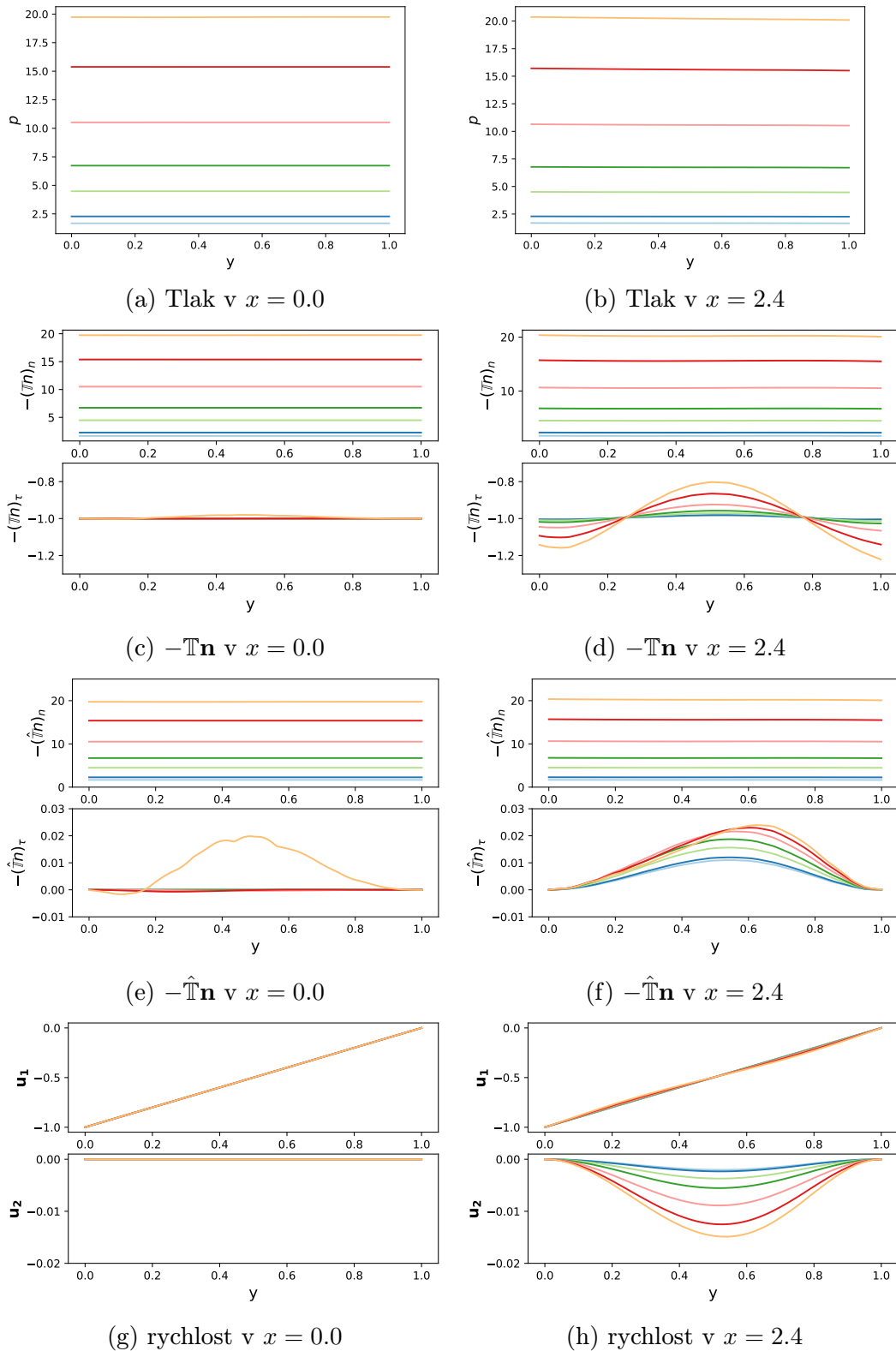
Obrázek 3.5: Hodnoty různých veličin pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).



Obrázek 3.6: Hodnoty různých veličin pro **Poiseuilleovu úlohu pro výtok** spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).



Obrázek 3.7: Hodnoty různých veličin pro **Couetteovu úlohu pro přítok** spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).



Obrázek 3.8: Hodnoty různých veličin pro **Couetteovu úlohu pro výtok** spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).

3.3.2 Výpočty na prodloužené množině Ω_L a Bernoulliho princip

Podívejme se nyní, zda se hodnoty tlaku řídí *Bernoulliho principem*, který podle [11] popisuje následující věta.

Věta 3.1 (Bernoulliho princip). *Při stacionárním proudění nevazké, nestlačitelné, homogenní kapaliny za nepřítomnosti vnějších sil je veličina*

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\rho}$$

konstantní podél proudnic.

Proudnicemi rozumíme následující pojem.

Definice 3. Proudnice je křivka $x(s)$, pro kterou platí

$$\frac{dx(s)}{ds} = \mathbf{u}(x(s)).$$

Bernoulliho princip jsme nevyslovili pro bezrozměrné veličiny, jeho převedením do bezrozměrných veličin dostáváme pro vazké kapaliny

$$\frac{(U^*)^2}{2} \bar{\mathbf{u}}^2 + \frac{P^*}{\rho} \bar{p} = \bar{B}(U^*)^2, \quad (3.19)$$

kde \bar{B} je konstanta příslušející dané proudnici. Vztah (3.19) můžeme po přenásobení $\frac{\rho}{P^*}$, dosazení Reynoldsova čísla a opětovném přeznačení na nečárkované veličiny převést na rovnost

$$p = \left(B - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) Re. \quad (3.20)$$

V Poiseuilleově úloze procházejí všechny proudnice hranicí Γ_N , která je volena tak, že rychlost proudění je zde již malá. Na této hranici předepisujeme $-\mathbb{T}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, jak jsme ale uvedli, na Γ_N uvažujeme zanedbatelnou rychlost proudění, tedy i derivace rychlosti jsou malé. Tudíž na Γ_N volíme tlak blízký nule. Z této diskuze a rovnice (3.20) tedy plyne, že $B \doteq 0$ pro všechny proudnice.

Podívejme se nyní, jestli zvětšením výpočetní oblasti nedostaneme pro vyšší Reynoldsova čísla (kdy se proudění více podobá nevazkému) pro všechny úlohy lineární závislosti typu

$$p \doteq -\frac{\mathbf{u}^2}{2} Re. \quad (3.21)$$

Bude nás při tom zajímat průměrná hodnota tlaku na $x = 2.4$, tu budeme značit Q . Budeme-li hovořit o malých Reynoldsových číslech ($Re \leq 3$), tak tuto hodnotu budeme pro přehlednost značit Q_{low} a pro vyšší Reynoldsova čísla ($Re \geq 70$) Q_{high} .

Pro Poiseuilleovu úlohu pro výtok je lineární závislost patrná už z obrázku 3.4b.

$$Q_{low} \doteq -2.84 - 0.36Re, \quad (3.22a)$$

$$Q_{high} \doteq -2.45 - 0.37Re. \quad (3.22b)$$

Podobně pro Couetteovu úlohu pro výtok se lineární závislost podbízí již při pohledu na obrázek 3.4d. Hezkou lineární závislost pozorujeme ale až pro vyšší Reynoldsova čísla, konkrétně

$$Q_{low} \doteq 1.69 + 0.596Re, \quad (3.23a)$$

$$Q_{high} \doteq 9.25 + 0.426Re. \quad (3.23b)$$

S přítokovými úlohami se dostáváme do složitější situace, zde totiž přetrvává proudění poměrně výrazné i daleko od ústí kanálu. Chceme-li získat výsledky neovlivněné podmínkou na Γ_N , musíme zvolit vysoké L (ustálené výsledky pro Reynoldsovo číslo 100 dostáváme až pro L kolem 400). Pro Poiseuilleovu přítokovou úlohu tak dostáváme tyto závislosti

$$Q_{low} \doteq 2.83 - 0.307Re, \quad (3.24a)$$

$$Q_{high} \doteq 0.11 + 0.0012Re. \quad (3.24b)$$

Pro Couetteovu přítokovou úlohu můžeme znovu hodnotami pro vyšší Reynoldsova čísla proložit přímkou, růst je zde opět velmi malý,

$$Q_{low} \doteq -1.63 + 0.164Re, \quad (3.25a)$$

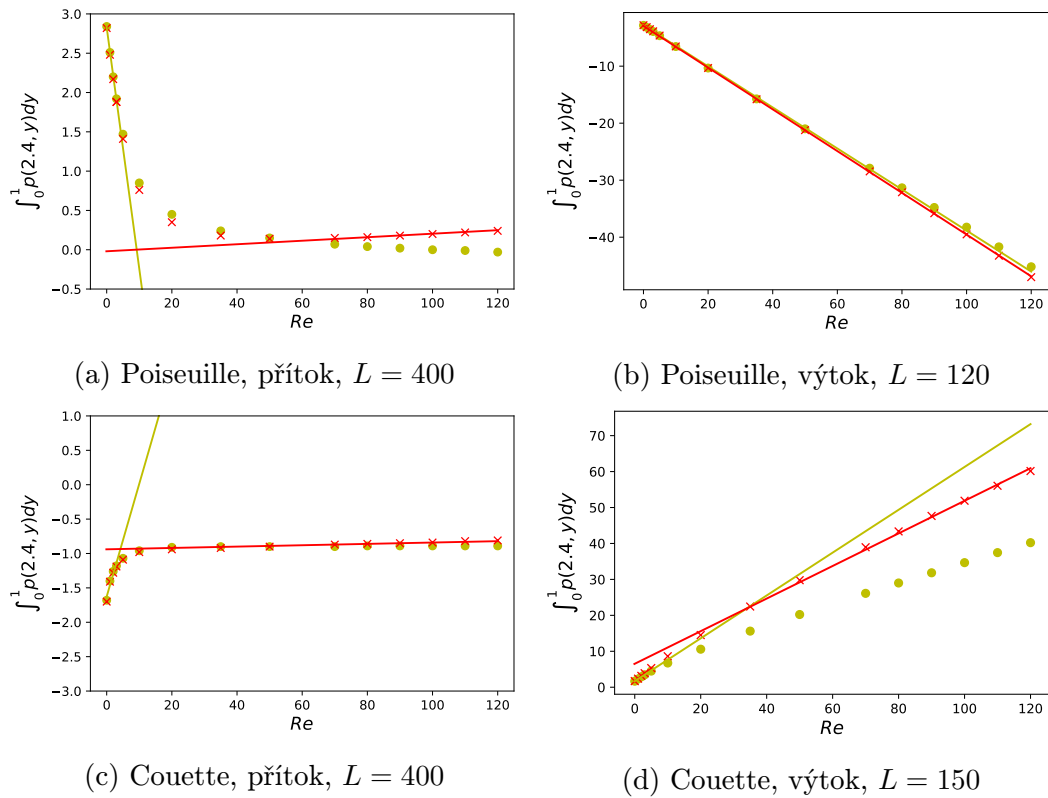
$$Q_{high} \doteq -0.92 + 0.001Re. \quad (3.25b)$$

Vidíme, že nalezené závislosti pro přítokové úlohy se od závislostí pro výtokové úlohy výrazně liší. U Poiseuilleovy úlohy pro výtok hodnota Q_{high} s rostoucím Reynoldsovým číslem klesá, kdežto pro přítok velmi pomalu roste. U Couetteovy přítokové úlohy pak Q_{high} s rostoucím Reynoldsovým roste výrazně pomaleji než u výtokové úlohy.

Na závěr této diskuze doložíme naše úvahy grafy 3.9 a tabulkami 3.5 - 3.8. Na grafech je žlutými kolečky zobrazena hodnota Q spočítaná na množině Ω_{20} a červenými křížky hodnota Q spočítaná na množině Ω_L , volba L je specifikována u každého grafu. Dále v grafech zobrazíme žlutou čarou odvozenou závislost pro malá Reynoldsova čísla a červenou čarou odvozenou závislost pro vysoká Reynoldsova čísla. V tabulkách jsou potom pro každou úlohu tyto hodnoty přehledně vypsány. Lineární závislosti zde uvedené jsme hledali pomocí metody nejmenších čtverců.

Můžeme se zde ještě ptát, dokážeme-li koeficienty v odvozených lineárních závislostech nějak odůvodnit. Podívejme se, jestli je nemůžeme interpretovat pomocí Bernoulliho principu. Spočítejme tedy integrál $\frac{Re}{2} \int_0^1 \mathbf{u}^2(0,y)dy$, vzhledem k tomu, že známe rychlosti na Γ_D , to můžeme snadno udělat. Pro Poiseuilleovy úlohy vyčíslením integrálu dostaneme $\frac{4Re}{15} \doteq 0.267Re$, tato hodnota se ale nepodobá ani hodnotám ze vzorců pro přítok ani pro výtok. Ještě můžeme prozkoumat podobnost s hodnotou $\frac{Re}{2} (\int_0^1 \mathbf{u}(0,y)dy)^2$, ta pro Poiseuilleovu úlohu vychází $\frac{4Re}{9} \doteq 0.444Re$. Ani toto se nepodobá žádným nám odvozeným koeficientům z Poiseuilleových úloh.

Podobnost s Bernoulliho principem tedy v námi studovaných případech nepozorujeme.



Obrázek 3.9: Lineární závislosti tlaku na Reynoldsově čísle.

Re	L=20	L=150	L=180	vzorec malá Re	vzorec vysoká Re
0	-2.84	-2.83	-2.82	-2.84	-2.93
1	-3.19	-3.18	-3.16	-3.20	-3.29
2	-3.55	-3.54	-3.52	-3.56	-3.66
3	-3.92	-3.90	-3.89	-3.92	-4.03
5	-4.66	-4.65	-4.63	-4.64	-4.76
10	-6.56	-6.55	-6.54	-6.44	-6.59
20	-10.33	-10.31	-10.32	-10.04	-10.25
35	-15.74	-15.73	-15.81	-15.44	-15.74
50	-20.99	-21.01	-21.22	-20.84	-21.24
70	-27.89	-28.00	-28.46	-28.04	-28.56
80	-31.33	-31.51	-32.12	-31.64	-32.22
90	-34.78	-35.03	-35.80	-35.24	-35.88
100	-38.23	-38.58	-39.51	-38.84	-39.54
110	-41.69	-42.14	-43.25	-42.44	-43.20
120	-45.18	-45.73	-47.01	-46.04	-46.87

Tabulka 3.5: Odchylka volby P_0 pro Poiseuilleovu úlohu pro výtok.

Re	L=20	L=150	L=180	vzorec malá Re	vzorec vysoká Re
0	1.68	1.70	1.70	1.69	6.53
1	2.28	2.39	2.40	2.28	6.98
2	2.90	3.16	3.17	2.88	7.43
3	3.46	3.90	3.91	3.47	7.89
5	4.49	5.33	5.33	4.67	8.79
10	6.74	8.62	8.62	7.65	11.06
20	10.58	14.51	14.51	13.61	15.59
35	15.61	22.45	22.45	22.55	22.40
50	20.23	29.78	29.78	31.49	29.20
70	26.12	38.95	38.96	43.41	38.27
80	29.00	43.35	43.37	49.37	42.80
90	31.84	47.66	47.70	55.33	47.33
100	34.66	51.89	51.95	61.29	51.87
110	37.45	56.05	56.14	67.25	56.40
120	40.22	60.15	60.28	73.21	60.94

Tabulka 3.6: Odchylka volby P_0 pro Couetteovu úlohu pro výtok.

Re	L=20	L=400	L=800	vzorec malá Re	vzorec vysoká Re
0	2.84	2.82	2.80	2.83	-0.02
1	2.51	2.48	2.46	2.52	-0.02
2	2.20	2.17	2.16	2.21	-0.02
3	1.92	1.88	1.86	1.91	-0.01
5	1.47	1.41	1.41	1.29	-0.01
10	0.85	0.76	0.71	-0.24	0.00
20	0.45	0.35	0.31	-3.31	0.03
35	0.24	0.18	0.17	-7.92	0.06
50	0.15	0.14	0.14	-12.52	0.09
70	0.07	0.15	0.15	-18.66	0.14
80	0.04	0.16	0.16	-21.73	0.16
90	0.02	0.18	0.18	-24.80	0.18
100	0.00	0.20	0.20	-27.87	0.20
110	-0.01	0.22	0.22	-30.94	0.23
120	-0.03	0.24	0.24	-34.01	0.25

Tabulka 3.7: Odchylka volby P_0 pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok.

Re	L=20	L=400	L=800	vzorec malá Re	vzorec vysoká Re
0	-1.68	-1.70	-1.70	-1.63	-0.94
1	-1.40	-1.41	-1.41	-1.46	-0.94
2	-1.26	-1.28	-1.28	-1.30	-0.94
3	-1.18	-1.19	-1.19	-1.13	-0.94
5	-1.07	-1.09	-1.09	-0.81	-0.93
10	-0.96	-0.98	-0.98	0.01	-0.93
20	-0.91	-0.94	-0.94	1.65	-0.92
35	-0.90	-0.92	-0.92	4.11	-0.90
50	-0.90	-0.90	-0.90	6.57	-0.89
70	-0.90	-0.87	-0.87	9.85	-0.87
80	-0.89	-0.86	-0.86	11.49	-0.86
90	-0.89	-0.85	-0.85	13.13	-0.85
100	-0.89	-0.84	-0.37	14.77	-0.84
110	-0.89	-0.82	-0.82	16.41	-0.83
120	-0.89	-0.81	-0.81	18.05	-0.82

Tabulka 3.8: Odchylka volby P_0 pro Couetteovu úlohu pro přítok.

3.4 Výpočty v oblasti Ω_{out} (v kanálu)

V této části budeme diskutovat různé okrajové podmínky na pravé hranici kanálu Γ_{out} a porovnávat výsledná řešení s řešeními získanými výpočty na Ω .

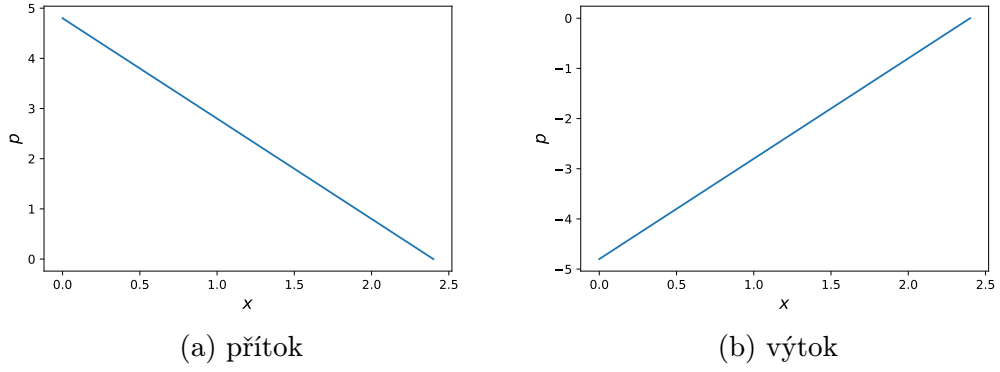
3.4.1 Konstantní trakce

Nejprve budeme zkoumat podmínku konstantní trakce představenou vztahem (2.10), ta zadá na hranici Γ_{out} následující rovnost

$$-\mathbb{T}\mathbf{n} = P_0\mathbf{n} = \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Tato podmínka tedy klade druhou složku vektoru $-\mathbb{T}\mathbf{n}$ po celé délce Γ_{out} rovnou nule, což podle obrázků 3.5d, 3.6d, 3.7d a 3.8d neodpovídá výsledkům získaným výpočty na Ω . Dále vidíme, že v Poiseuilleově úloze pro výtok tlak kolem bodu (2.4, 1.0) prudce poklesne (oproti hodnotě v (2.4, 0.0) o 7 až 21 jednotek). Pro Couetteovu úlohu pro výtok potom tlak v bodě (2.4, 0.0) prudce vzroste a v bodě (2.4, 1.0) naopak prudce poklesne, rozdíl mezi těmito hodnotami je (14 až 42 jednotek), zatímco výpočty na Ω dostáváme v kanálu konstantní tlak. Podobné jevy dostáváme i pro přítokové úlohy.

Těmto odlišnostem od výsledků získaných výpočty na Ω se lze vyhnout například použitím následující podmínky typu do-nothing. Podmínkou konstantní trakce se tedy už více zabývat nebudeme (taktéž v literatuře je méně často používána než následující podmínka typu do-nothing).



Obrázek 3.10: Kanál pro Poiseuille do-nothing s nulovým tlakem na pravém okraji.

3.4.2 Podmínka typu do-nothing

Tato podmínka byla představena v rovnosti (2.11) a v našem případě na Γ_{out} zadává

$$-\hat{\mathbb{T}}\mathbf{n} = P_0\mathbf{n} = \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Zde se položením druhé složky vektoru $-\hat{\mathbb{T}}\mathbf{n}$ rovno nule příliš neodchýlíme od výsledků získaných výpočty na Ω (tlak zde dosahuje hodnoty nejvýše 0.2), ani zadáním konstantní první složky podél Γ_{out} se od spočítaných dat příliš nevzdálíme. Podívejme se tedy, jaké výsledky nám tato podmínka dává.

Začněme analýzou chování pole rychlosti, to v obou úlohách, Poiseuilleově i Couetteově, zůstává po celé délce kanálu neměnné, stejné jako je zadané podmínkou na Γ_D .

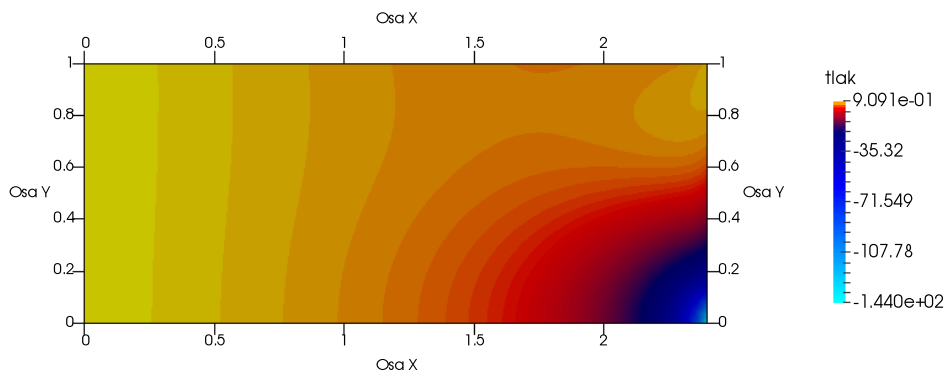
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = (0, 0).$$

Příjemným způsobem se za podmínky typu do-nothing chová i tlak. V Poiseuilleově úloze zůstává ve směru osy y konstantní a navíc je jeho hodnota v kanálu stejná pro všechna Reynoldsova čísla. Pro všechny volby P_0 tlak lineárně klesá resp. stoupá po celé délce kanálu se směrnici -2 resp. 2 , uvažujeme-li přítok resp. výtok. Pro $P_0 = 0$ vypadá profil tlaku podél kanálu jako na obrázku 3.10. V Couetteově úloze je potom tlak konstantní na celé Ω_{out} . Z této diskuze tedy plyne, že volbou P_0 zadáme přímo hodnotu tlaku na Γ_{out} a nic jiného se nezmění. Tímto jsme zároveň ukázali, že v těchto úlohách dává podmínka typu do-nothing přesné řešení ve formě Poiseuilleova resp. Couetteova proudění.

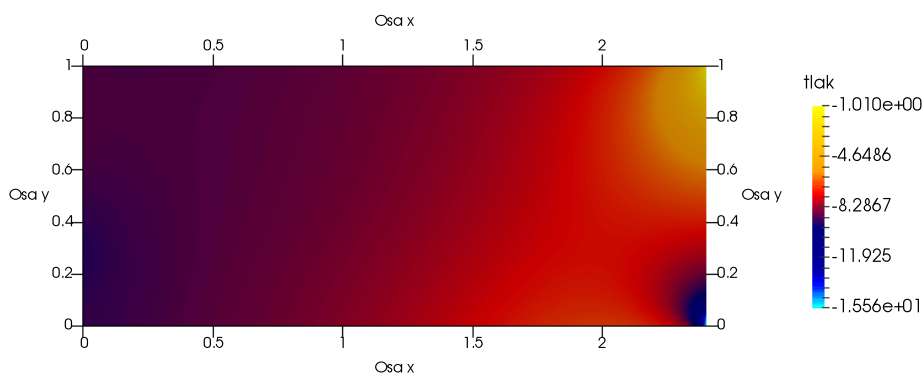
Vidíme tedy, že tato podmínka dává řešení s podobnými vlastnostmi, jako řešení úloh na množině Ω .

3.4.3 Podmínky splňující (2.14)

Zde budeme zkoumat chování naší úlohy pro kanál za podmínek (2.19a) a (2.19b), které zaručují existenci řešení. Tyto podmínky budeme dosazovat jak do problému \mathbf{P} , tak do problému $\hat{\mathbf{P}}$. Výsledky takto získané jsou velmi podobné, budeme je tedy prezentovat najednou.



Obrázek 3.11: Tlak pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok pro $Re = 50$ za podmínky (2.19b).



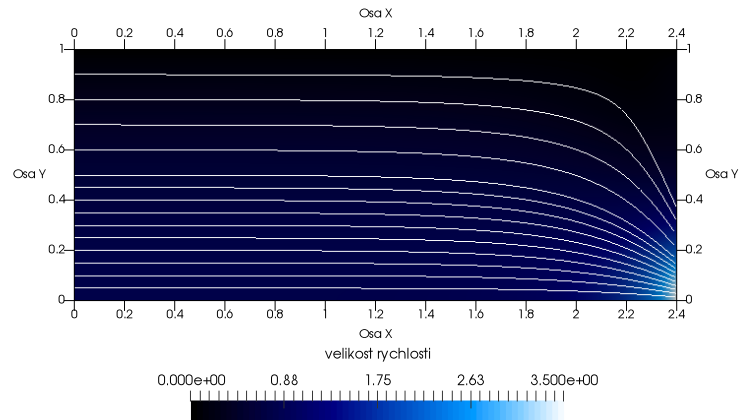
Obrázek 3.12: Tlak pro Couetteovu úlohu pro výtok pro $Re = 50$ za podmínky (2.19b).

Nevýhodou těchto podmínek je chování řešení u hranice Γ_{out} . Tlak v bodech $(2.4, 0.0)$ a $(2.4, 1.0)$ nabývá velmi malých nebo vysokých hodnot (ilustrováno na obrázcích 3.11 a 3.12), rozdíl těchto hodnot je v některých případech více než 120 jednotek. Pro výtokové úlohy je navíc pole rychlosti stahováno do bodu $(2.4, 0.0)$ (viz obrázek 3.13).

Pozorujeme však, že výše zmíněné výkyvy tlaku se směrem ke Γ_D pomalu vyrovnávají a na Γ_D má tlak o něco stálější hodnoty, stále však není ve směru osy y konstantní (rozdíl je kolem jedné jednotky).

Můžeme se ještě ptát, jestli za užití těchto podmínek průměrná hodnota tlaku na Γ_D odpovídá hodnotám získanými výpočty na Ω , nebo na nějaké větší Ω_L . Odpověď zní, že ne. Ani podmínka (2.19a) ani podmínka (2.19b) s $P_0 = 0$ pro žádná Reynoldsova čísla nedávají hodnoty podobné žádnému zde zkoumanému výsledku

získanému na Ω_L , ani v případě dosazení do \mathbf{P} ani do $\hat{\mathbf{P}}$.



Obrázek 3.13: Rychlost pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok pro $Re = 50$ za podmínky (2.19a).

3.5 Výpočty Couetteovy úlohy s tlakovým gradientem

V této části se pokusíme o analýzu kombinované úlohy (3.17) analogickým způsobem jako u Poiseuilleovy a Couetteovy úlohy. Budeme hledat vhodnou volbu P_0 závislou na Reynoldsově čísle a čísle a pro podmínku typu do-nothing. Ostatními uvažovanými podmínkami se pro tuto úlohu nebudeme zabývat. V této úloze mohou nastat čtyři různé situace v závislosti na znaménku čísla a a na pohybu Γ_S . Při pohybu Γ_S ve směru osy x budeme hovořit o přítokové úloze, v opačném případě o výtokové úloze.

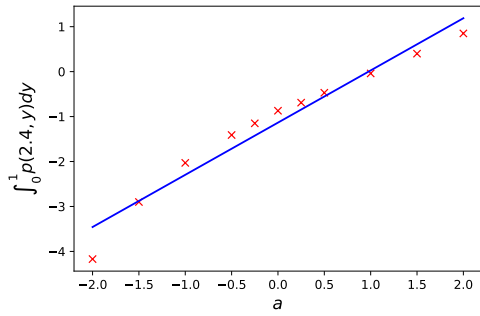
Nejprve si všimneme, že za změnu tlaku v kanálu může jen člen $a(y - y^2, 0)$, a že pro $a = 0$ dostáváme již diskutované Couetteovo proudění, které v kanálu tlak výrazně nemění. V kanálu ve většině případů opět nedochází k výrazným změnám tlaku ve směru osy y a ve směru osy x se mění přibližně lineárně jako v Poiseuilleově úloze.

Podmínka typu do-nothing stejně jako v předchozích případech zachovává pole rychlosti stejné po celé délce kanálu a gradient tlaku zde má následující tvar

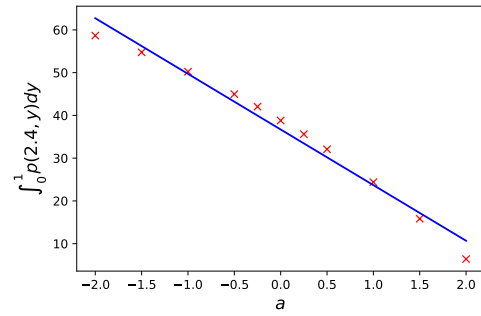
$$\nabla p = \begin{pmatrix} \pm 2a \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

V příloze obrázky 3.23 - 3.26 opět pomocí hodnot rychlosti a tlaku ilustrujeme chování proudění těchto úloh pro číslo $a = 2.0$ a pro $a = -2.0$. Dále jsou v příloze na obrázcích 3.27 - 3.30 k vidění chování různých veličin při příčném řezu v $x = 0.0$ a $x = 2.4$.

Podívejme se nyní na změnu tlaku podél $x = 2.4$ v závislosti na čísle a . Provedli jsme výpočty pro přítokové a výtokové úlohy pro všechna a z množiny $\{-2.0, -1.5, -1.0, -0.5, -0.25, 0.0, 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0\}$, kde pro $a = 0$ máme již výsledky z výpočtů Couetteovy úlohy. Po experimentech s volbou čísla L udávající



(a) přítok



(b) výtok

Obrázek 3.14: Hodnoty tlaku v $x = 2.4$ pro Couetteovu úloh s tlakovým gradientem pro fixované $Re = 70$ a různé volby parametru a .

délku výpočetní oblasti (opět se hodnoty ustálily až kolem $L = 400$) se pro všechny volby parametru a vyjevuje pro vyšší Reynoldsova čísla ($Re \geq 70$) lineární závislost hodnoty Q_{high} na Reynoldsově čísle, podobně jako pro Couetteovu nebo Poiseuilleovu úlohu. Po porovnání těchto závislostí jsme ale nenalezli jednoduše interpretovatelnou závislost hodnoty Q na parametru a . Ukažme zde na obrázcích 3.14a a 3.14b pro názornost, jak se tato hodnota mění v závislosti na parametru a . Do obrázků jsme přímku vložili proto, aby bylo patrné, že se nejedná o lineární závislost.

Závěr

Po odvození základních poznatků mechaniky konitnua jsme v této práci hledali vhodné okrajové podmínky pro přítokové a výtokové úlohy na umělé hranici. Ukázali jsme, že z uvažovaných okrajových podmínek (podmínka konstantní trakce, podmínka typu do-nothing a podmínky zaručující existenci řešení) je pro naše úlohy nejvhodnější podmínka typu do-nothing, která na hranici předepíše výraz $p\mathbf{n} - (\nabla\mathbf{u})\mathbf{n}$ roven normálovému vektoru přenásobeného reálnou konstantou. Odvodili jsme, že v našich úlohách to odpovídá zadání konstantní hodnoty tlaku na této hranici. Naše úlohy zde byly odvozeny od jednoduchých rovinných proudění Poiseuilleova a Couetteova.

Hledali jsme tedy, jakými zákonitostmi se zde hodnota tlaku řídí. Podařilo se nám ukázat, že se neřídí Bernoulliho principem, ale že existuje lineární závislost hodnoty tlaku na Reynoldsově čísle. Tuto závislost se nám podařilo prokázat až pro vyšší Reynoldsova čísla ($Re \geq 70$). Nalezené závislosti se mezi přítokovými a výtokovými úlohami navíc výrazně liší. Zbývá otázka, jaký fyzikální význam mají koeficienty v těchto lineárních vyjádřeních, na kterou tato práce neodpovídá.

Seznam použité literatury

- [1] C. Truesdell and K. R. Rajagopal. *An Introduction to the Mechanics of Fluids*. Springer-Verlag GmbH, 1999.
- [2] Eduard Feireisl. *Dynamics of Viscous Compressible Fluids (Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications)*. Oxford University Press, 2004.
- [3] Miloslav Feistauer. *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Chapman and Hall/CRC, 1993.
- [4] Miroslav Bulíček. *Navier's Slip and Evolutionary Navier-Stokes-Fourier-Like Systems with Pressure, Shear-Rate and Temperature Dependent Viscosity*. PhD thesis, Charles University, 2006.
- [5] John Heywood, Rolf Rannacher, and Stefan Turek. Artificial boundary conditions and flux and pressure equations conditions for the incompressible navier-stokes. *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, 22:325–352, 1996.
- [6] Josef Málek, Jindřich Nečas, Mirko Rokyta, and Michael Růžička. *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs*. Springer Science+Business Media, 1996.
- [7] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations: Second Edition (Graduate Studies in Mathematics)*. American Mathematical Society, 2010.
- [8] Malte Braack and Piotr Boguslaw Mucha. Directional do-nothing condition for the navier-stokes equations. *Journal of Computational Mathematics*, 32(5):507–521, 2014.
- [9] Anders Logg, Kent-Andre Mardal, and Garth N. Wells. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer-Verlag GmbH, 2012.
- [10] Lev Landau and Evgeny Lifshitz. *Course of Theoretical Physics vol.6 Fluid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 1987.
- [11] Alexandre J. Chorin and J. E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer, 2000.

Seznam obrázků

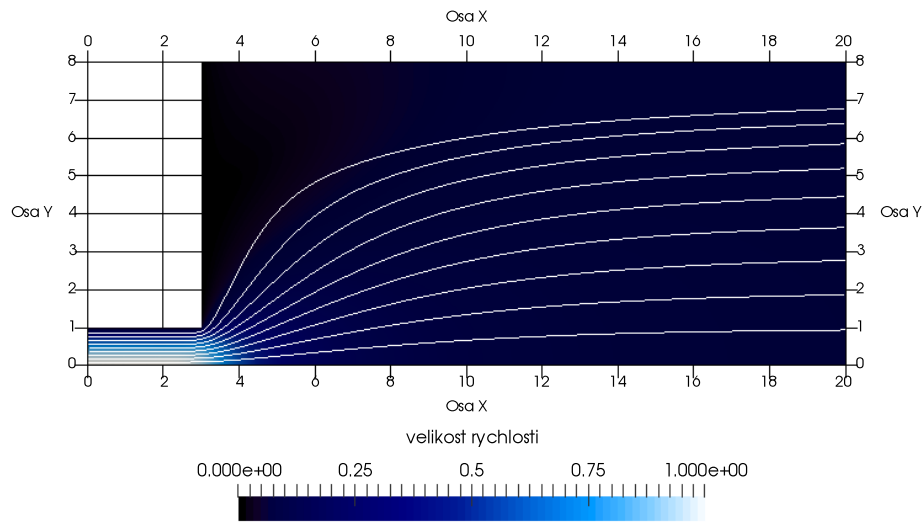
3.1	Oblast, na které budeme provádět výpočty.	15
3.2	Kanál, na kterém budeme zkoumat přítokové a výtokové podmínky.	16
3.3	Celá oblast pro Poiseuille.	17
3.4	Hodnoty tlaku v $x = 2.4$ pro množiny Ω a Ω_{40}	20
3.5	Hodnoty různých veličin pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).	21
3.6	Hodnoty různých veličin pro Poiseuilleovu úlohu pro výtok spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).	22
3.7	Hodnoty různých veličin pro Couetteovu úlohu pro přítok spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).	23
3.8	Hodnoty různých veličin pro Couetteovu úlohu pro výtok spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).	24
3.9	Lineární závislosti tlaku na Reynoldsově čísle.	27
3.10	Kanál pro Poiseuille do-nothing s nulovým tlakem na pravém okraji.	30
3.11	Tlak pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok pro $Re = 50$ za podmínky (2.19b).	31
3.12	Tlak pro Couetteovu úlohu pro výtok pro $Re = 50$ za podmínky (2.19b).	31
3.13	Rychlost pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok pro $Re = 50$ za podmínky (2.19a).	32
3.14	Hodnoty tlaku v $x = 2.4$ pro Couetteovu úlohu s tlakovým gradientem pro fixované $Re = 70$ a různé volby parametru a	33
3.15	Hodnoty rychlosti a tlaku pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok pro $Re = 0$	39
3.16	Hodnoty rychlosti a tlaku pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok pro $Re = 50$	40
3.17	Hodnoty rychlosti a tlaku pro Poiseuilleovu úlohu pro výtok pro $Re = 0$	41
3.18	Hodnoty rychlosti a tlaku pro Poiseuilleovu úlohu pro výtok pro $Re = 50$	42
3.19	Hodnoty rychlosti a tlaku pro Couetteovu úlohu pro přítok pro $Re = 0$	43
3.20	Hodnoty rychlosti a tlaku pro Couetteovu úlohu pro přítok pro $Re = 50$	44
3.21	Hodnoty rychlosti a tlaku pro Couetteovu úlohu pro výtok pro $Re = 0$	45
3.22	Hodnoty rychlosti a tlaku pro Couetteovu úlohu pro výtok pro $Re = 50$	46
3.23	Hodnoty rychlosti a tlaku pro kombinovanou úlohu s $a = 2.0$ pro přítok pro $Re = 35$	47

3.24	Hodnoty rychlosti a tlaku pro kombinovanou úlohu s $a = -2.0$ pro přítok pro $Re = 35$	48
3.25	Hodnoty rychlosti a tlaku pro kombinovanou úlohu s $a = 2.0$ pro výtok pro $Re = 35$	49
3.26	Hodnoty rychlosti a tlaku pro kombinovanou úlohu s $a = -2.0$ pro výtok pro $Re = 35$	50
3.27	Hodnoty různých veličin pro kombinovanou úlohu pro přítok s $a = 2$ spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).	51
3.28	Hodnoty různých veličin pro kombinovanou úlohu pro výtok s $a = 2$ spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).	52
3.29	Hodnoty různých veličin pro kombinovanou úlohu pro přítok s $a = -2$ spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).	53
3.30	Hodnoty různých veličin pro kombinovanou úlohu pro výtok s $a = -2$ spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).	54

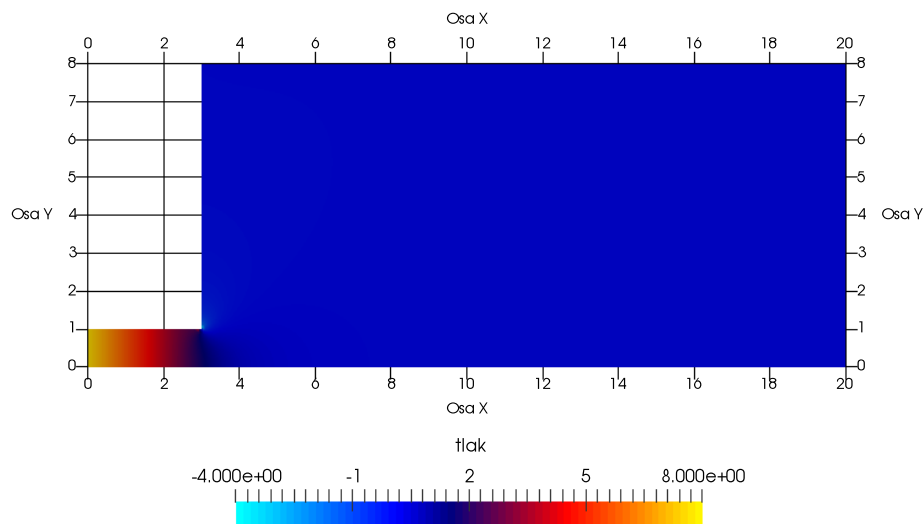
Seznam tabulek

3.1	Hodnoty tlaku na množině Ω pro Poiseuilleovu úlohu.	18
3.2	Hodnoty tlaku na množině Ω pro Couetteovu úlohu.	19
3.3	Hodnoty tlaku na prodloužené množině Ω_{40} pro Poiseuilleovy úlohy.	19
3.4	Hodnoty tlaku na prodloužené množině Ω_{40} pro Couetteovy úlohy.	20
3.5	Odchylka volby P_0 pro Poiseuilleovu úlohu pro výtok.	27
3.6	Odchylka volby P_0 pro Couetteovu úlohu pro výtok.	28
3.7	Odchylka volby P_0 pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok.	28
3.8	Odchylka volby P_0 pro Couetteovu úlohu pro přítok.	29

Přílohy

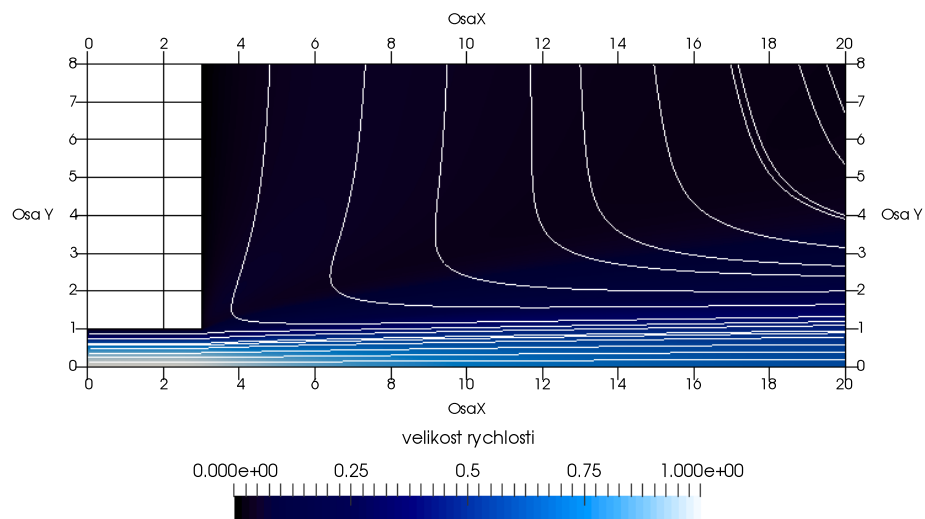


(a) rychlost

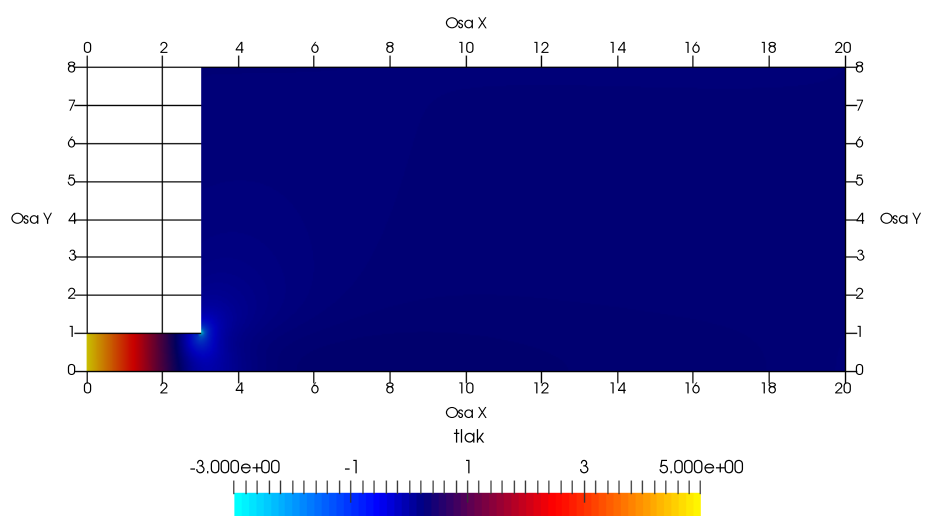


(b) tlak

Obrázek 3.15: Hodnoty rychlosti a tlaku pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok pro $Re = 0$.

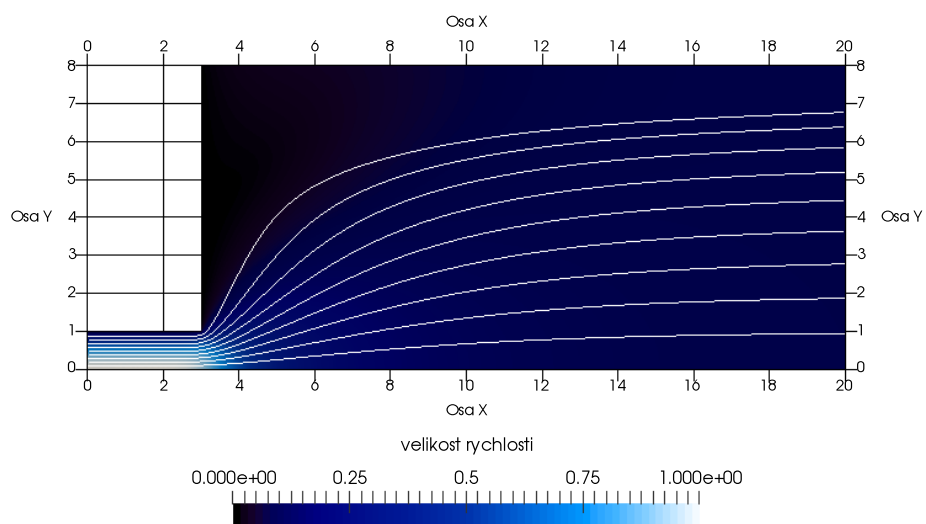


(a) rychlost

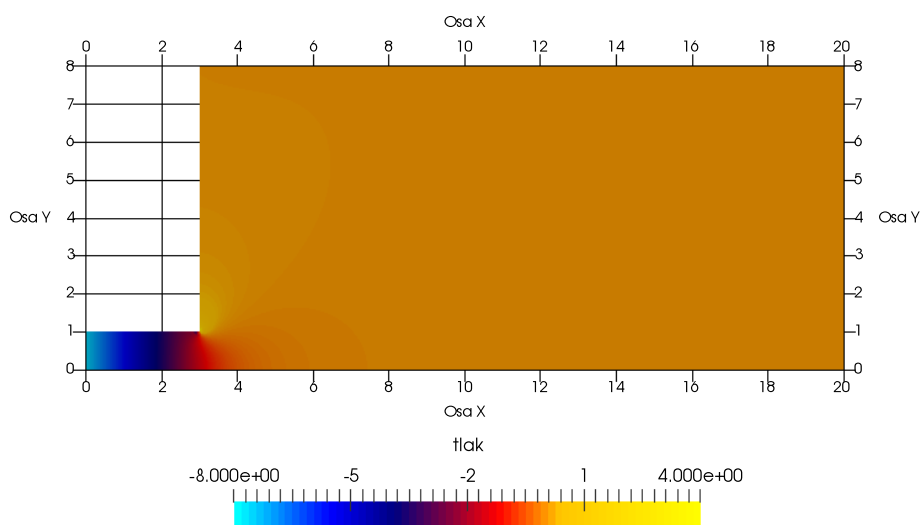


(b) tlak

Obrázek 3.16: Hodnoty rychlosti a tlaku pro Poiseuilleovu úlohu pro přítok pro $Re = 50$.

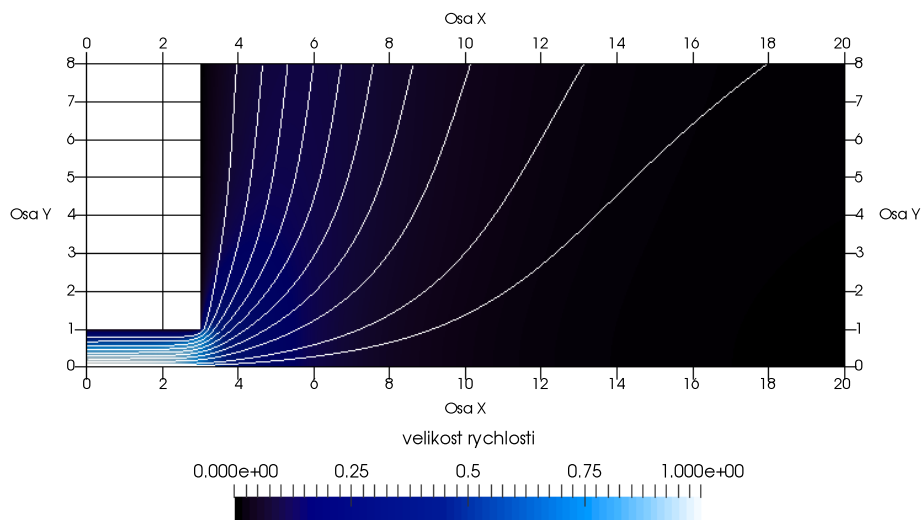


(a) rychlost

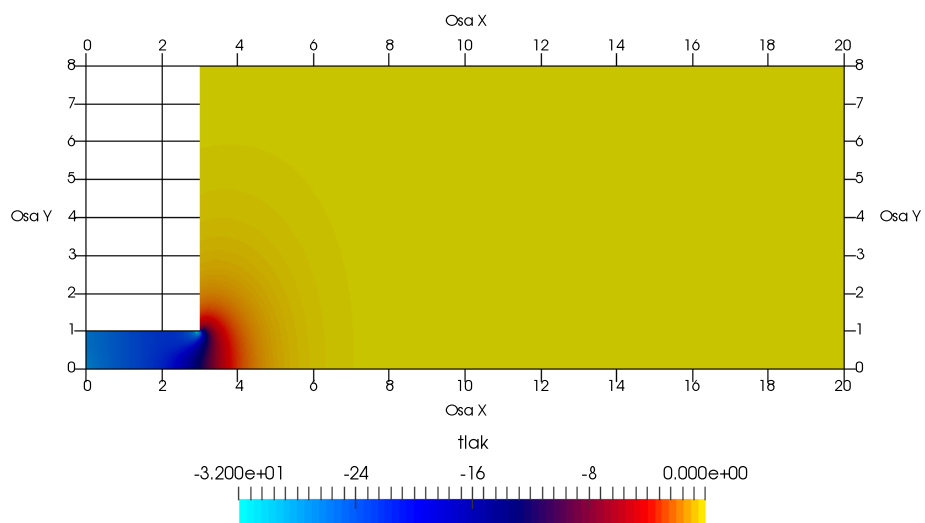


(b) tlak

Obrázek 3.17: Hodnoty rychlosti a tlaku pro Poiseuilleovu úlohu pro výtok pro $Re = 0$.

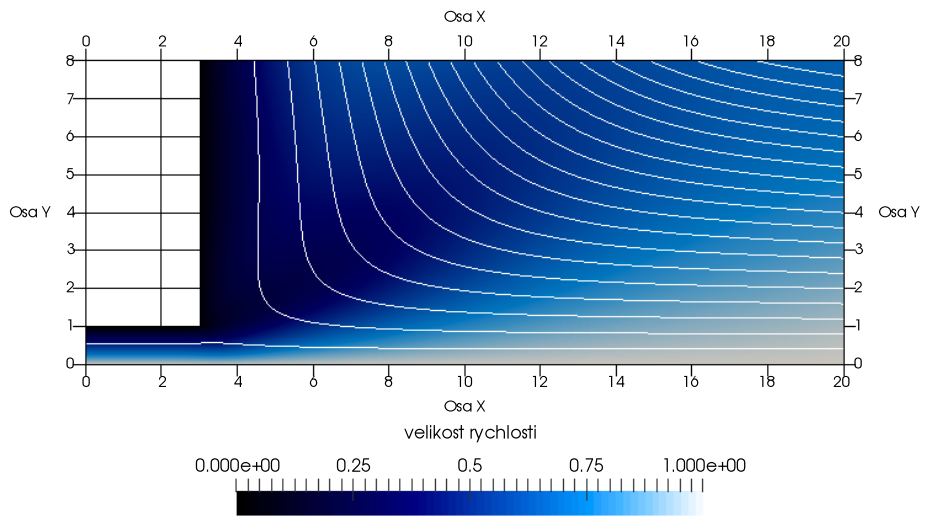


(a) rychlost

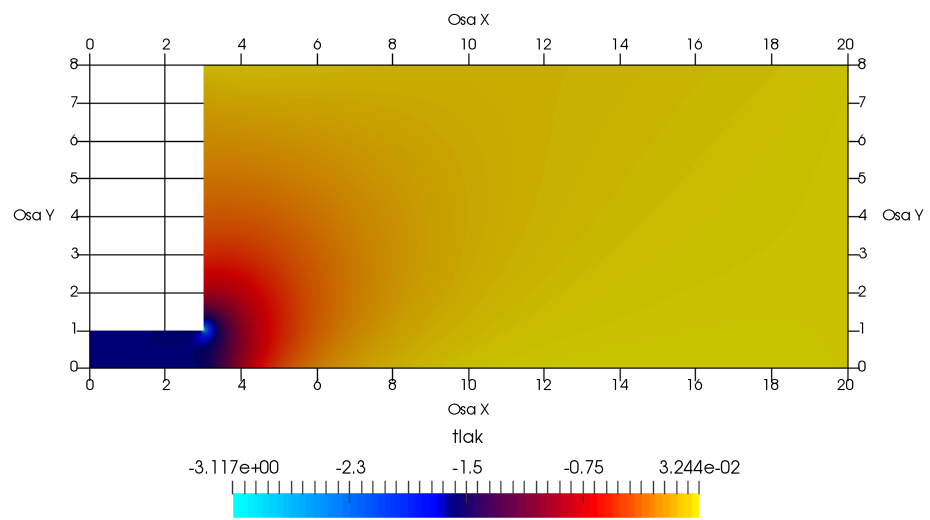


(b) tlak

Obrázek 3.18: Hodnoty rychlosti a tlaku pro Poiseuilleovu úlohu pro výtok pro $Re = 50$.

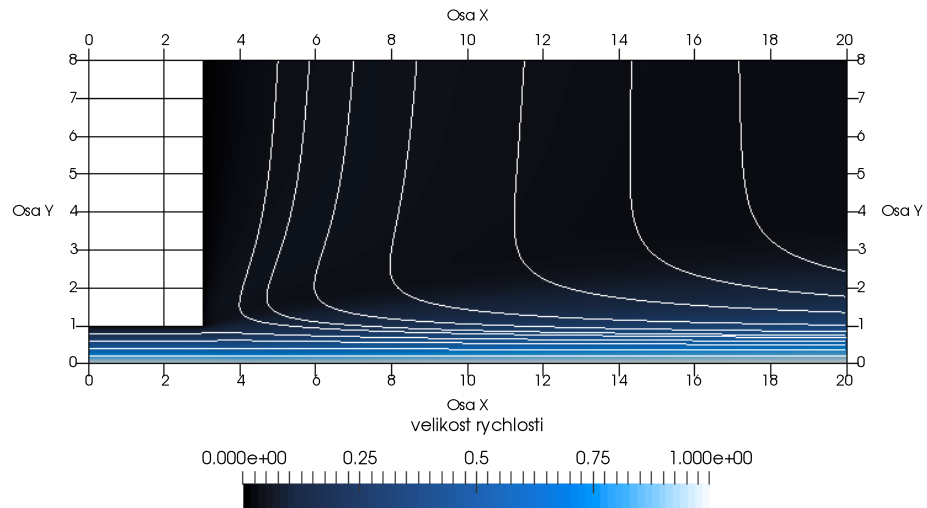


(a) rychlost

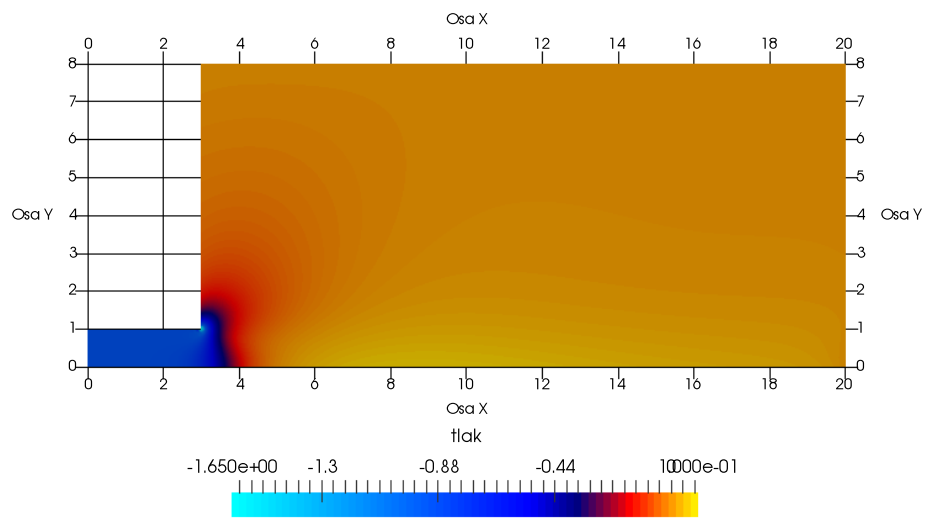


(b) tlak

Obrázek 3.19: Hodnoty rychlosti a tlaku pro Couetteovu úlohu pro přítok pro $Re = 0$.

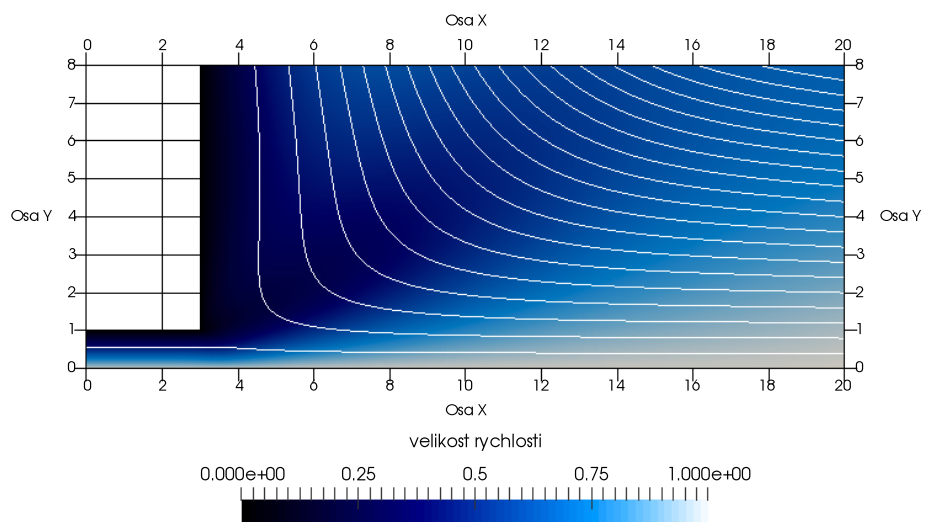


(a) rychlost

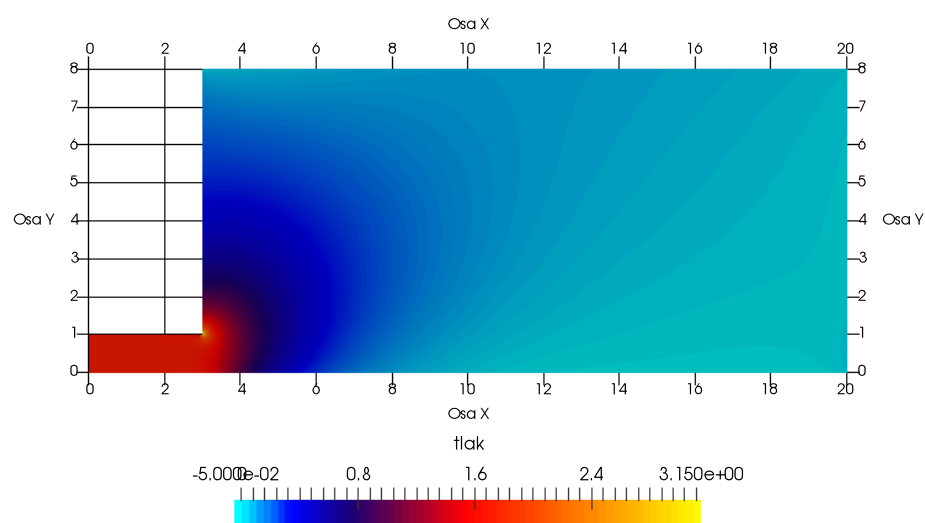


(b) tlak

Obrázek 3.20: Hodnoty rychlosti a tlaku pro Couetteovu úlohu pro přítok pro $Re = 50$.

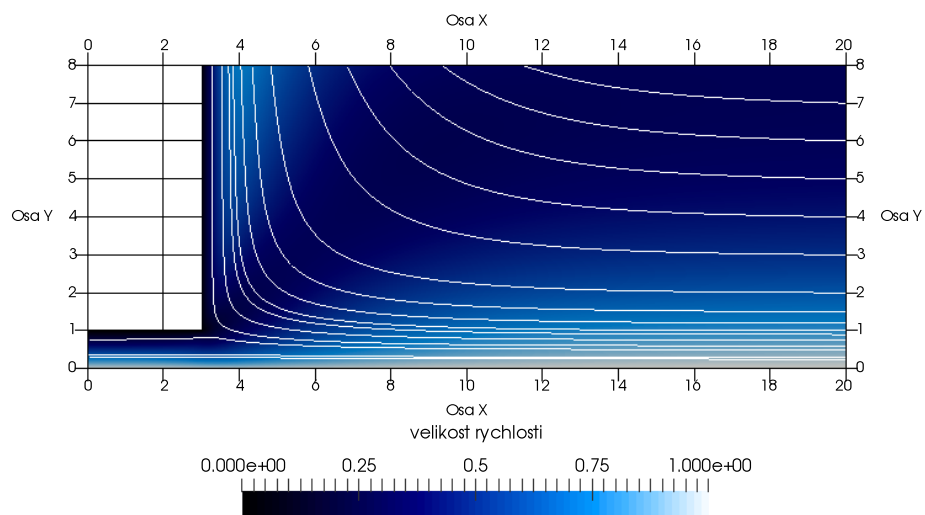


(a) rychlost

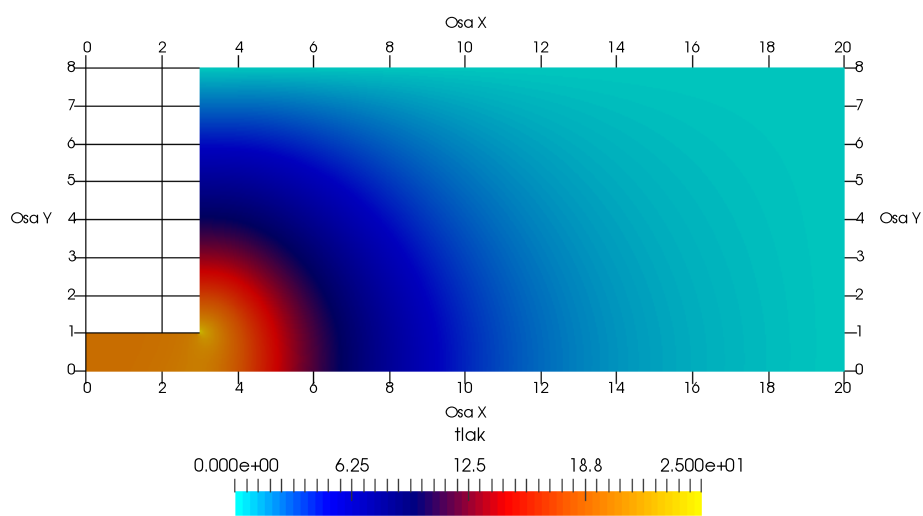


(b) tlak

Obrázek 3.21: Hodnoty rychlosti a tlaku pro Couetteovu úlohu pro výtok pro $Re = 0$.

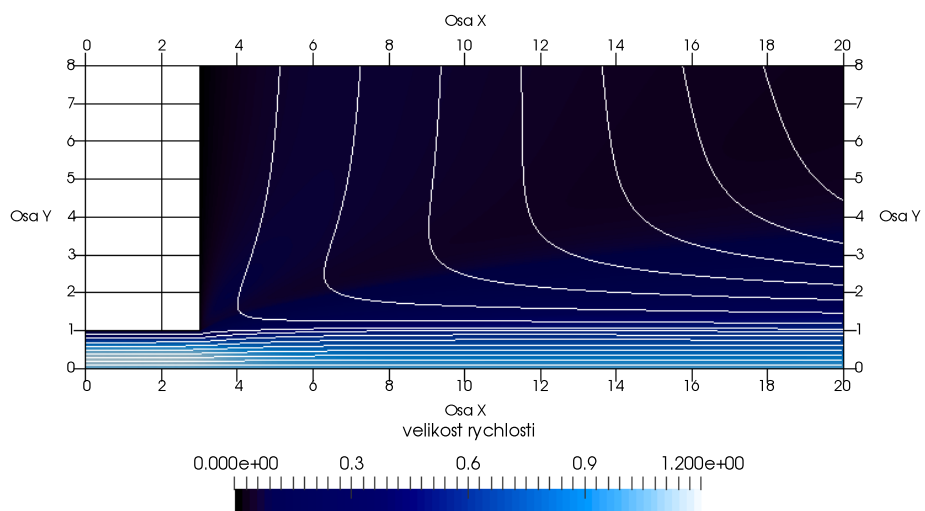


(a) rychlost

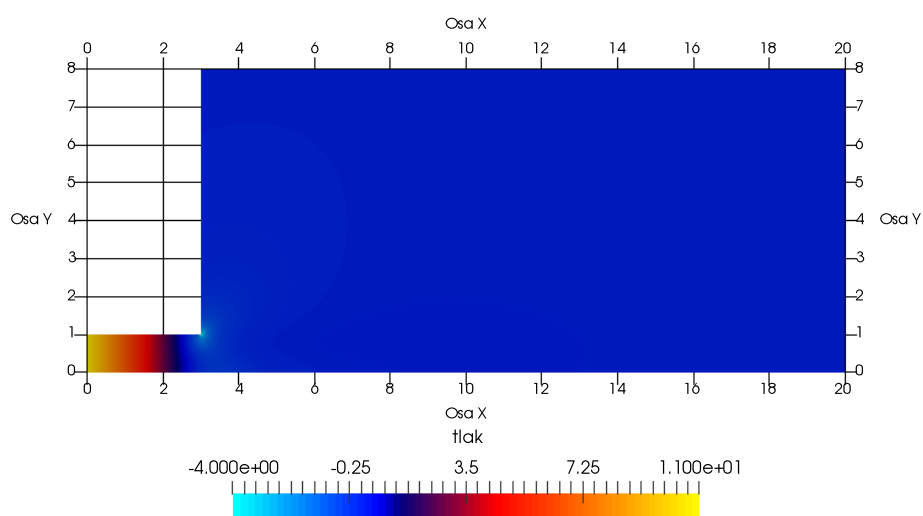


(b) tlak

Obrázek 3.22: Hodnoty rychlosti a tlaku pro Couetteovu úlohu pro výtok pro $Re = 50$.

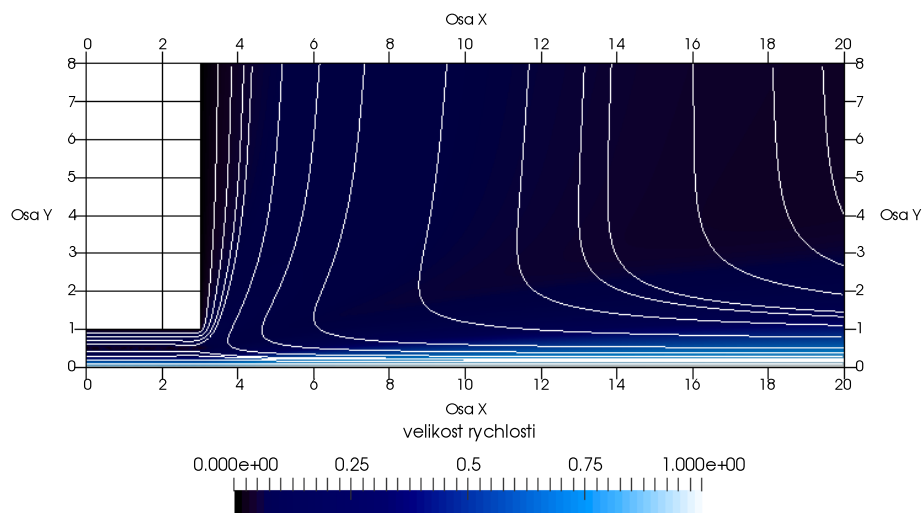


(a) rychlost

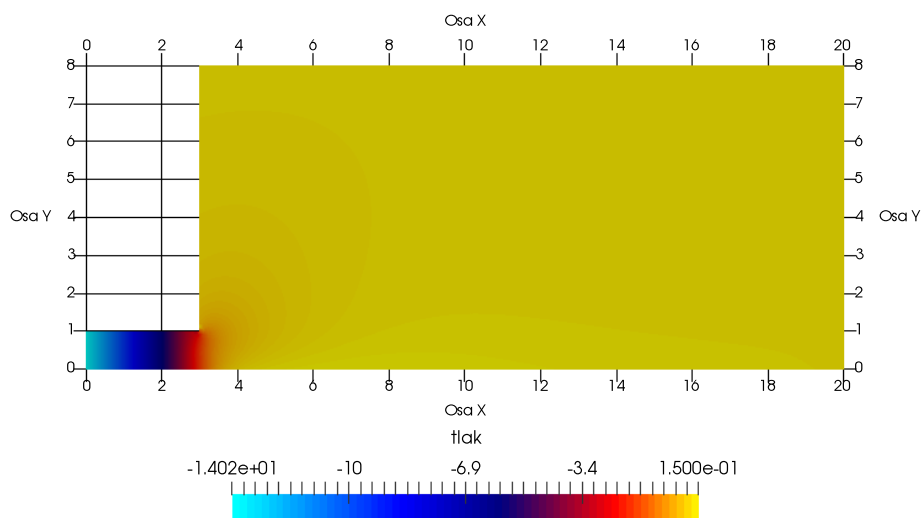


(b) tlak

Obrázek 3.23: Hodnoty rychlosti a tlaku pro kombinovanou úlohu s $a = 2.0$ pro přítok pro $Re = 35$.

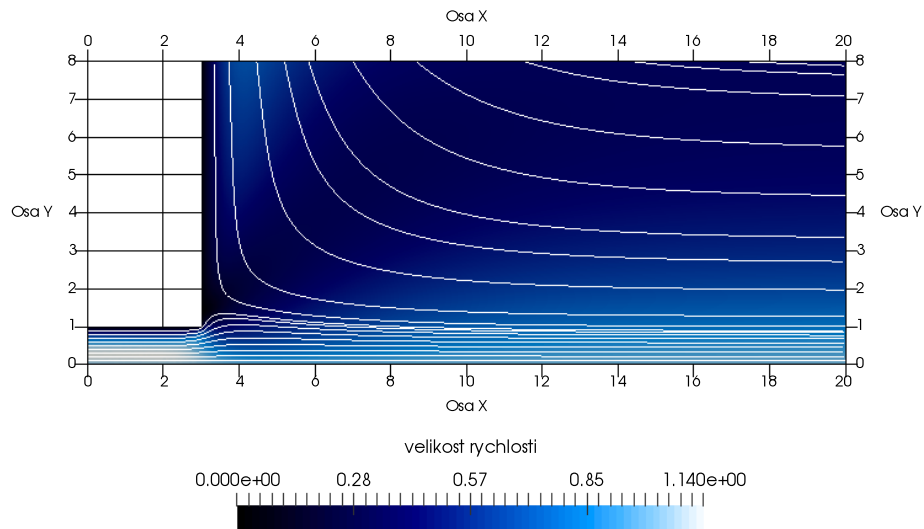


(a) rychlost

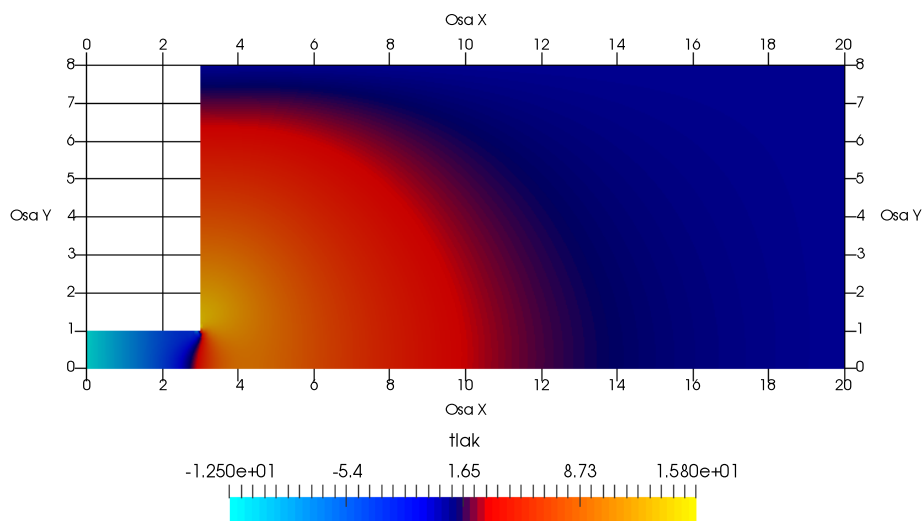


(b) tlak

Obrázek 3.24: Hodnoty rychlosti a tlaku pro kombinovanou úlohu s $a = -2.0$ pro přítok pro $Re = 35$.

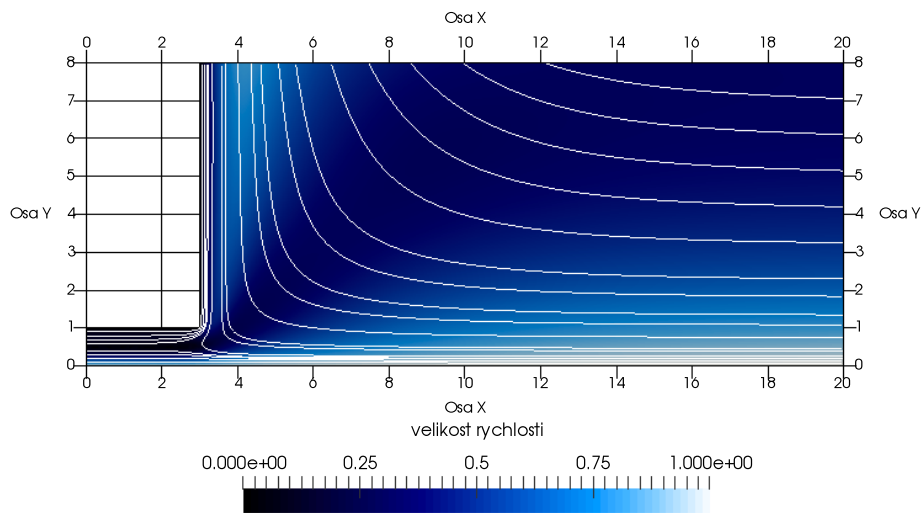


(a) rychlost

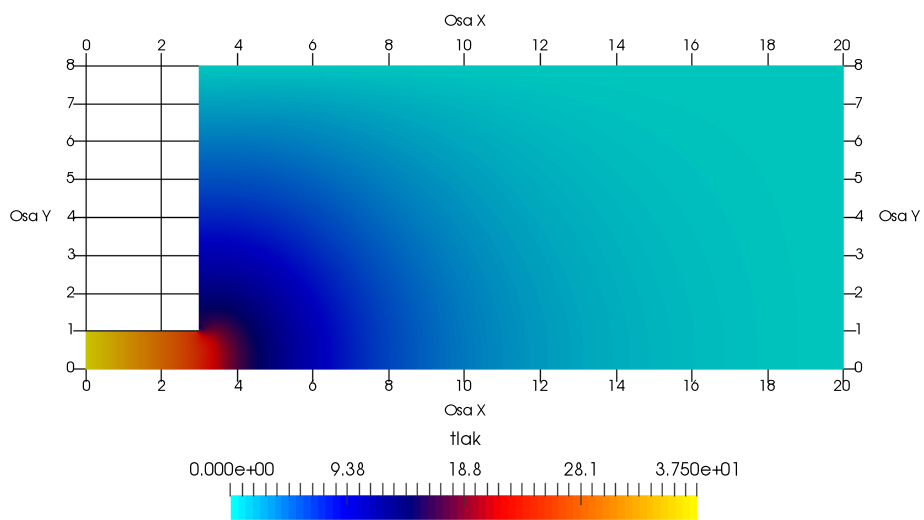


(b) tlak

Obrázek 3.25: Hodnoty rychlosti a tlaku pro kombinovanou úlohu s $a = 2.0$ pro výtok pro $Re = 35$.

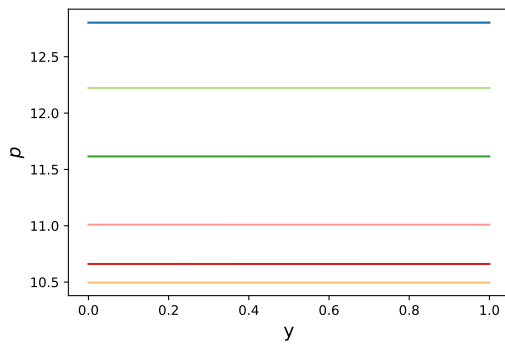


(a) rychlost

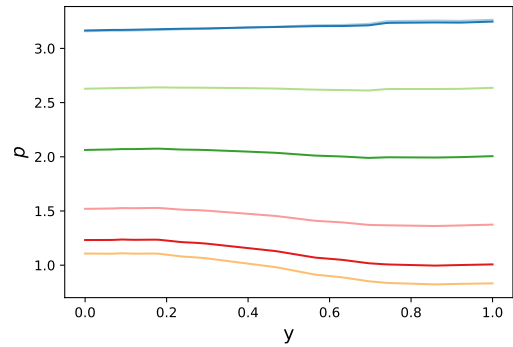


(b) tlak

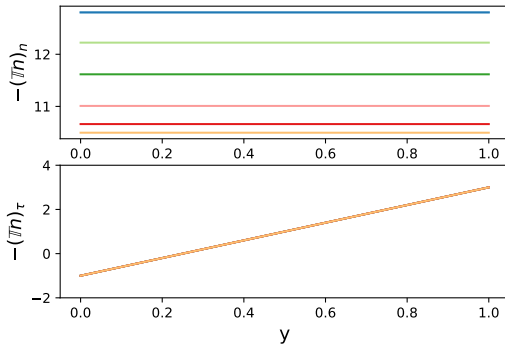
Obrázek 3.26: Hodnoty rychlosti a tlaku pro kombinovanou úlohu s $a = -2.0$ pro výtok pro $Re = 35$.



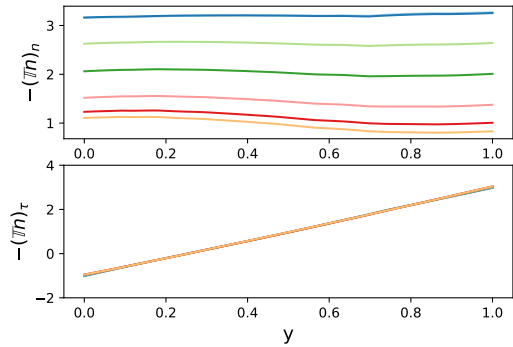
(a) Tlak v $x = 0.0$



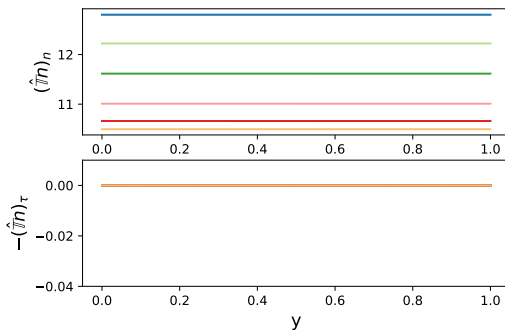
(b) Tlak v $x = 2.4$



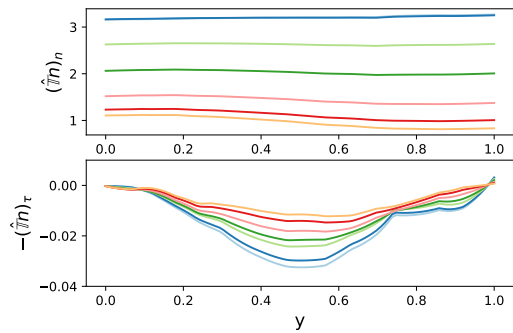
(c) $-\hat{\mathbf{T}}\mathbf{n}$ v $x = 0.0$



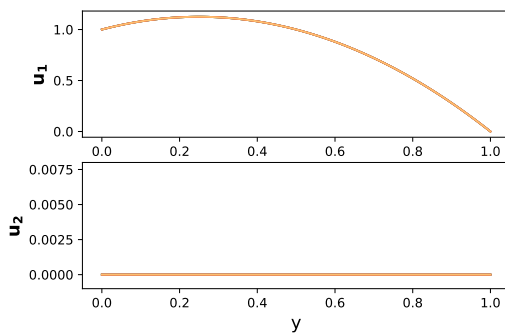
(d) $-\hat{\mathbf{T}}\mathbf{n}$ v $x = 2.4$



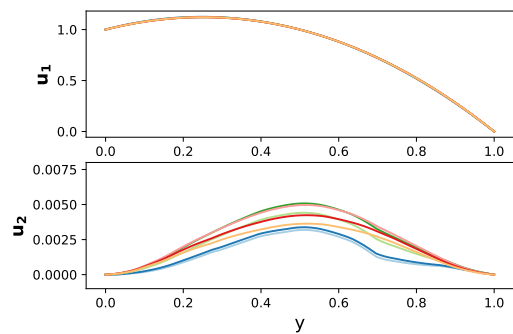
(e) $-\hat{\mathbf{T}}\mathbf{n}$ v $x = 0.0$



(f) $-\hat{\mathbf{T}}\mathbf{n}$ v $x = 2.4$

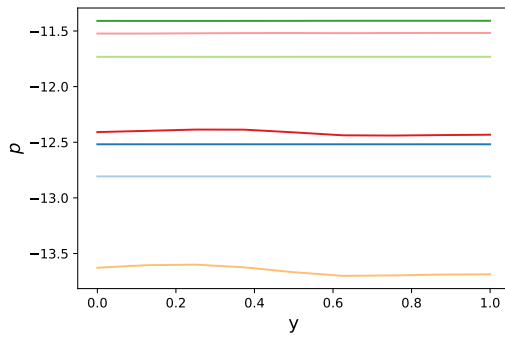


(g) rychlost v $x = 0.0$

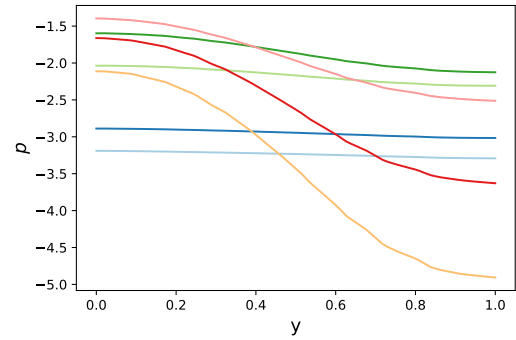


(h) rychlost v $x = 2.4$

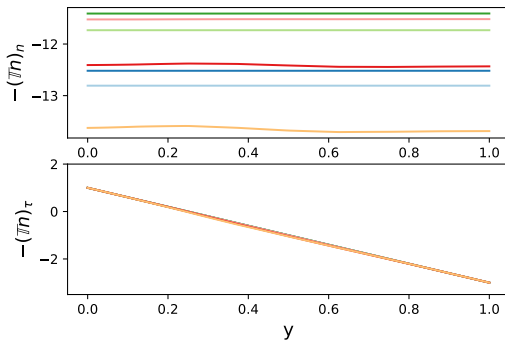
Obrázek 3.27: Hodnoty různých veličin pro kombinovanou úlohu pro přítok s $a = 2$ spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).



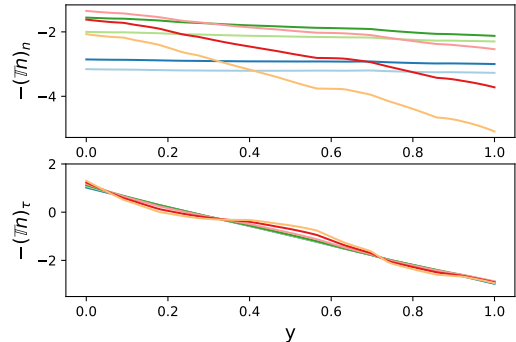
(a) Tlak v $x = 0.0$



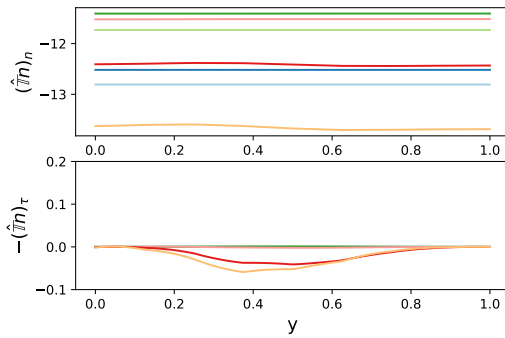
(b) Tlak v $x = 2.4$



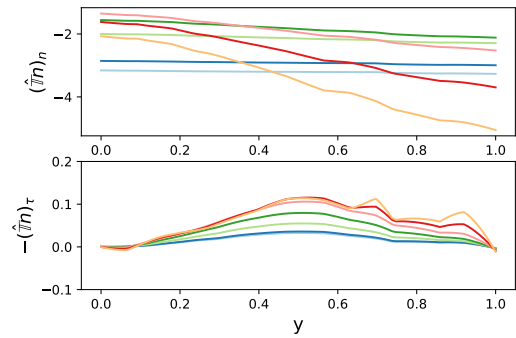
(c) $-\mathbb{T}\mathbf{n}$ v $x = 0,0$



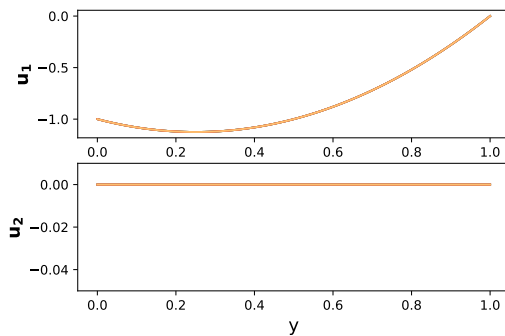
(d) $-\mathbb{T}\mathbf{n}$ v $x = 2.4$



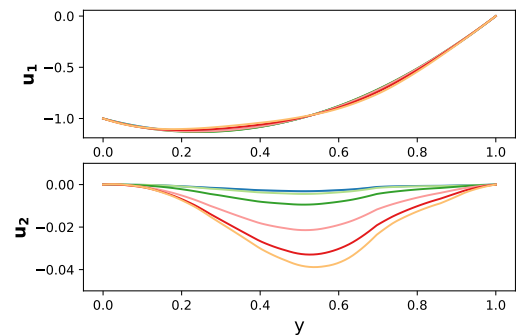
(e) $-\hat{\mathbb{T}}\mathbf{n}$ v $x = 0.0$



(f) $-\hat{\mathbb{T}}\mathbf{n}$ v $x = 2.4$

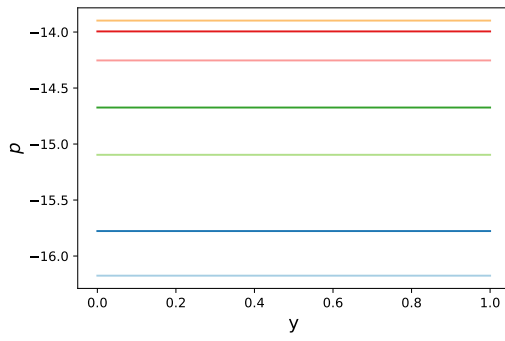


(g) rychlost v $x = 0.0$

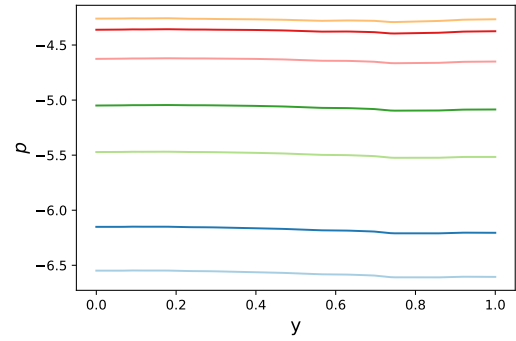


(h) rychlost v $x = 2.4$

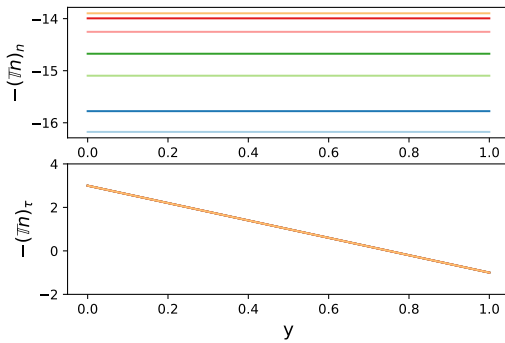
Obrázek 3.28: Hodnoty různých veličin pro kombinovanou úlohu pro výtok s $a = 2$ spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).



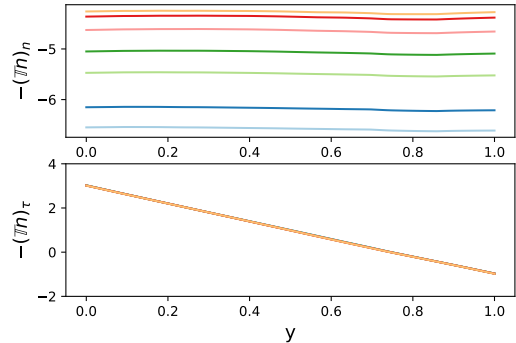
(a) Tlak v $x = 0.0$



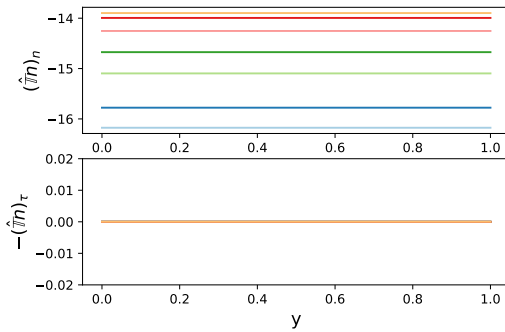
(b) Tlak v $x = 2.4$



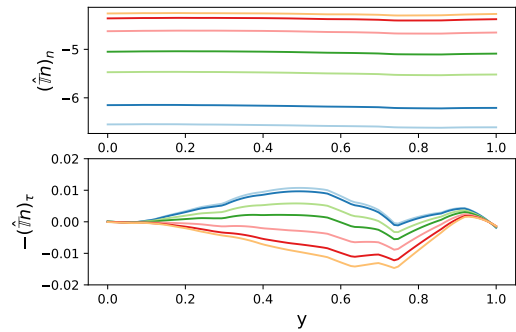
(c) $-\hat{\mathbf{T}}\mathbf{n}$ v $x = 0.0$



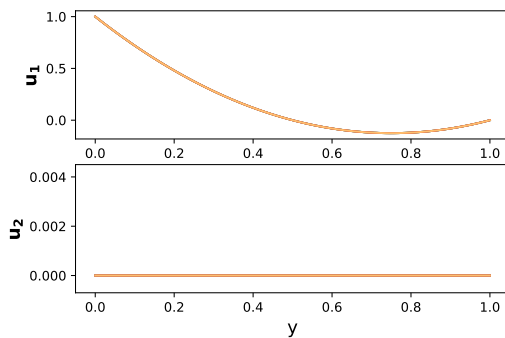
(d) $-\hat{\mathbf{T}}\mathbf{n}$ v $x = 2.4$



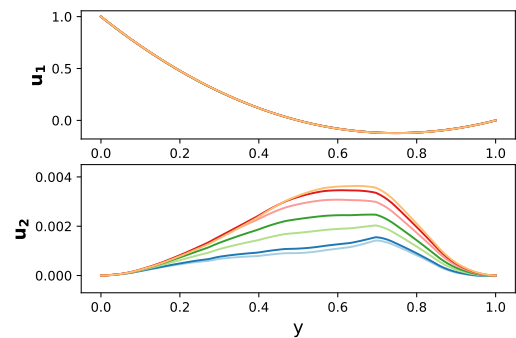
(e) $-\hat{\hat{\mathbf{T}}}\mathbf{n}$ v $x = 0.0$



(f) $-\hat{\hat{\mathbf{T}}}\mathbf{n}$ v $x = 2.4$

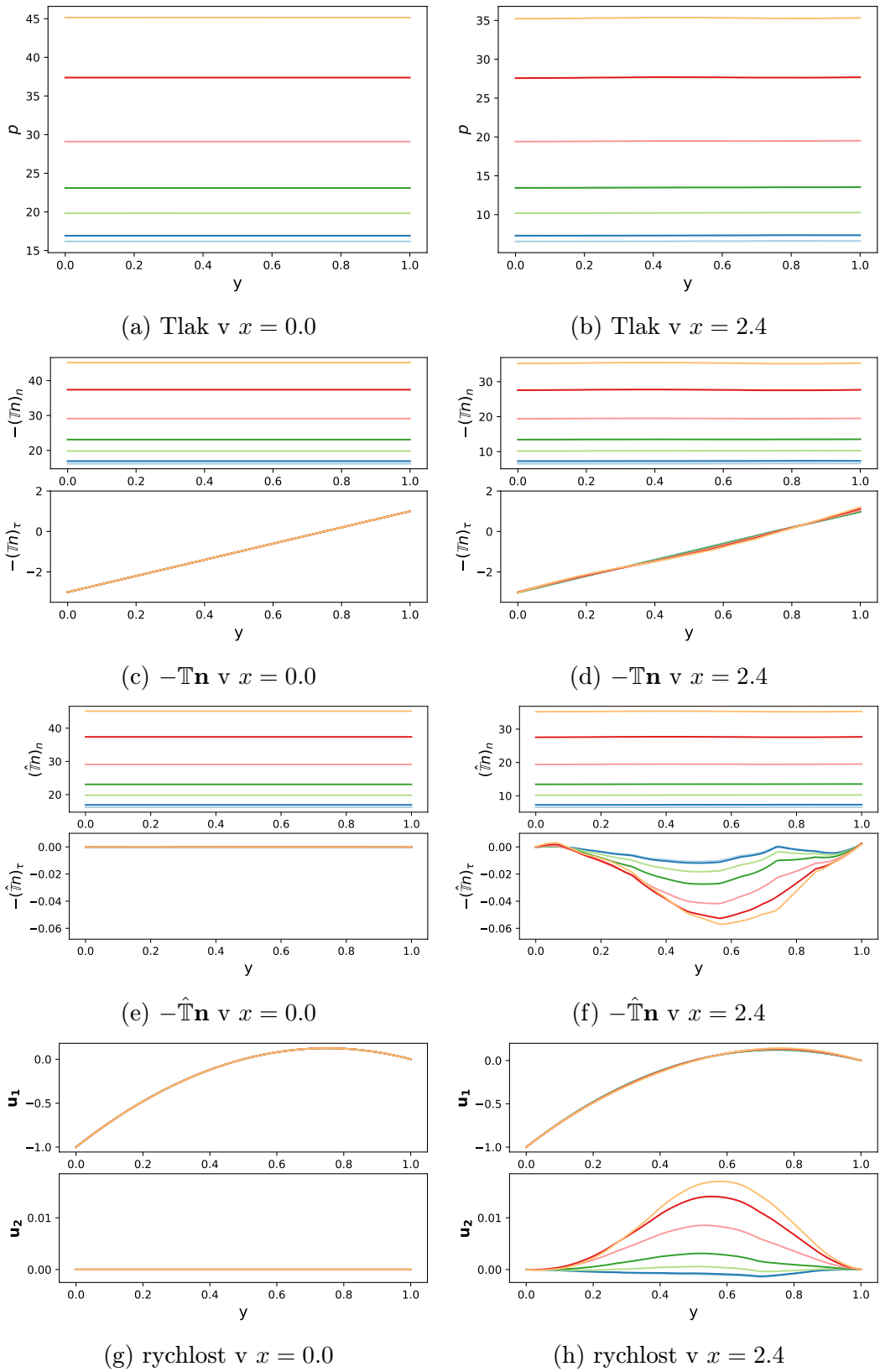


(g) rychlost v $x = 0.0$



(h) rychlost v $x = 2.4$

Obrázek 3.29: Hodnoty různých veličin pro kombinovanou úlohu pro přítok s $a = -2$ spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).



Obrázek 3.30: Hodnoty různých veličin pro kombinovanou úlohu pro výtok s $a = -2$ spočítané pomocí výpočtů na Ω pro Reynoldsova čísla 0 (světle modrá), 1, 5, 10, 20, 35, 50 (oranžová).