

Oponentský posudek bakalářské práce
Vojtěcha Kubáče
Přítokové a výtokové okrajové podmínky na umělých hranicích

Obsah práce

Předložená bakalářská práce studuje různé okrajové podmínky na umělé hranici v případě stacionárního proudění nestlačitelné homogenní tekutiny popsané Navierovými-Stokesovými rovnicemi. Velká část práce je zaměřena na numerické experimenty, ve kterých se zkoumá, které okrajové podmínky na umělé hranici jsou vhodné pro popis přítoku z dlouhého kanálu nebo naopak odtoku do něj.

Dosažené výsledky. Bakalářská práce se skládá ze tří částí. V první kapitole bakalant zavede klasické kinematické veličiny používané v mechanice kontinua a odvodí rovnici kontinuity a bilanci hybnosti. Obě rovnice poté přepíše do bezrozměrného tvaru.

Ve druhé kapitole autor odvodí dvě slabé formulace pro nestlačitelné Navierovy-Stokesovy rovnice, první slabá formulace \mathbf{P} obsahuje klasický Cauchyho tenzor napětí \mathbf{T} , druhá ekvivalentní formulace $\hat{\mathbf{P}}$ pak využívá nestlačitelnosti a obsahuje tenzor $\hat{\mathbf{T}}$ skládající se z tlaku a gradientu rychlosti (bez symetrické části). Pro obě formulace diskutuje energetický odhad a ukáže, jaké okrajové podmínky Neumannova typu stačí pro získání omezenosti rychlosti ve $W^{1,2}$ a následnou existenci řešení. Dále představí pět okrajových podmínek Neumannova typu: konstantní trakci, typu ‘do-nothing’ a příklad tří okrajových podmínek splňujících získanou postačující podmínku.

Třetí kapitola se potom zabývá simulací dvourozměrného proudění metodou konečných prvků pomocí balíku Fenics. Autor práce studuje problém, ve kterém úzký rovinný kanál ústí do velkého rezervoáru (zleva doprava) a uvažuje tři typy proudění: Poiseuilleovo, Couetteovo proudění a jejich kombinaci. Jejich analytická řešení v jednoduchém smykovém poli jsou pak použity jako Dirichletovy okrajové podmínky předepsané vlevo na začátku trubice. Na kraji rezervoáru vpravo, který je umístěn daleko od ústí trubice do rezervoáru, je předepsána ‘do-nothing’ podmínka. Problém je počítaný pro různá Reynoldsova čísla a autor zkoumá závislost tlaku, rychlosti a složek tenzorů napětí \mathbf{T} a $\hat{\mathbf{T}}$ na souřadnici y , jednak na začátku kanálu a také nedaleko ústí kanálu, kde řešení ještě není příliš ovlivněné ústím. Zároveň studuje závislost průměrného tlaku na zvoleném Reynoldsovém čísle pro různé typy proudění, tj. Dirichletových podmínek předepsaných vlevo, a pokouší se pomocí Bernoulliho rovnice získat analytický odhad, což se mu ovšem nedaří.

V druhé části této kapitoly pak autor počítá problém jen v úzkém kanále a zkoumá, jaký typ Neumannovy okrajové podmínky na (umělé) hranici vpravo zajišťuje, aby řešení bylo co nejvíce podobné řešení úlohy s rezervoárem. Zkoumá konstantní trakci, ‘do-nothing’ a podmínky zajišťující existenci řešení. Jen ‘do-nothing’ podmínka dává podobné řešení jako plná úloha s rezervoárem.

Přínos autora. Přínos autora práce je ve studiu různých okrajových podmínek a ukázání, že ‘do-nothing’ podmínka se dá dobře použít pro popis přítoku/výtoku z/do rezervoáru. Navíc ukazuje, že jednoduchá Bernoulliho rovnice se nedá použít k předpovědi závislosti řešení na Reynoldsově čísle.

Hodnocení práce

Věcná kvalita práce. První kapitola je velmi pěkně napsaná (i typograficky zpracovaná), ale nachází se v ní jedna maličkost při odvozování Navierových-Stokesových rovnic.

Druhá kapitola je také pěkná, ve slabých formulacích je malá nepřesnost v tom, že rychlost hledáme v prostoru s nulou na Γ_0 , ale přitom požadujeme dle (2.1), aby byla na Γ_0 předepsaná netriviální Dirichletova okrajová podmínka. Dále, na konci strany 13 je u slabé formulace s ‘directional do-nothing’ podmínkou překlep, že rovnice platí pro všechny rychlosti a tlaky. Tyto překlepy nijak nesnižují kvalitu práce.

Třetí kapitola je napsaná čtivě, obsahuje mnoho výsledků, ale některá tvrzení nejsou zcela jasně formulovaná. Mám několik otázek, které jsou zmíněny na konci posudku.

Tato práce obsahuje mnoho numerických výsledků, jejichž získání vyžadovalo hodně úsilí.

Formální kvalita práce. Práce obsahuje jen velmi málo překlepů a navíc je z typografického hlediska pěkně sepsaná.

Doporučení. Předloženou práci doporučuji uznat jako bakalářskou práci.

Dotazy

- Autor práce používá dvě formulace \mathbf{P} a $\hat{\mathbf{P}}$. Jak je formulovaná ‘do-nothing’ podmínka na kraji rezervoáru v případě formulace \mathbf{P} ? Jsou všechna řešení v Obr. 3.5 – 3.8 identická pro obě formulace? Pokud je v případě formulace \mathbf{P} na kraji rezervoáru předepsaná nulová trakce namísto ‘do-nothing’ podmínky, jak moc se řešení liší (tlak, rychlost, \mathbf{Tn} a $\hat{\mathbf{Tn}}$)?
- Část 3.4.1 se zabývá řešením pro okrajovou podmínku konstantní trakce. V Poiseuilleově úloze pro výtok bakalant popisuje, že tlak okolo bodu (2.4, 1.0) prudce poklesne oproti bodu (2.4, 0.0) o 7 až 21 jednotek. Nic takového ale na Obr. 3.6(b) nevidím, je tam pokles o 3 jednotky. Ještě složitější tvrzení se týká Couetteova proudění pro výtok, jenže v Obr. 3.8(b) se tlak jeví konstantní.
- Autor říká, že vhodná okrajová podmínka je ‘do-nothing’ ve tvaru $\hat{\mathbf{Tn}} = \mathbf{0}$. Vzhledem k tomu, že v plné úloze s rezervoárem, je rychlost ve směru y nedaleko ústí blízká nule, co si myslíte o okrajové podmínce $(\mathbf{Tn})_n = 0$ a rychlost ve směru y je nulová?

V Praze 12. června 2017

Karel Tůma

Matematický ústav Univerzity Karlovy