MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Emil Skříšovský

Tlusté množiny v Banachových prostorech

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Jiří Spurný, PhD., DSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2017

Prohlášení.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....   Podpis autora

Poděkování.

Chtěl bych na tomto místě poděkovat prof. Jiřímu Spurnému za jeho pomoc při psaní této práce. Rád bych mu poděkoval zejména za jeho odborné rady a věcné připomínky, které mi poskytl na konsultacích, jichž si velmi cením, a také za čas, který mi během psaní prácek věnoval.

Název práce: Tlusté množiny v Banachových prostorech

Autor: Emil Skříšovský

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Spurný, PhD., DSc., Katedra matematické analýzy, MFF UK

Abstrakt: Práce se zabývá tlustými množinami v Banachových prostorech, přičemž tento pojem je definován jako analogie k pojmu množiny druhé kategorie. V práci jsou ukázány základní vlastnosti tlustých a tenkých množin a některé jejich charakterisace – zejména souvislost s principem stejnoměrné omezenosti, Banach-Steinhausovou větou, větou o otevřeném zobrazení a w^*-integrovatelností. V závěru je podán jistý příklad tlusté množiny, jež není druhé kategorie.

Klíčová slova: tlustá množina, tenká množina, silný princip stejnoměrné omezenosti, Banach-Steinhausova věta, w^*-integrovatelnost

Title: Thick Sets in Banach Spaces

Author: Emil Skříšovský

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Jiří Spurný, PhD., DSc., Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University

Abstract: This Thesis studies thick sets in Banach spaces, which are defined similarly as the sets of the second Baire category. We show some basic properties of thick and thin sets and their characterizations – mainly the relation with the Uniform Boundedness Principle, the Banach-Steinhaus and Open mapping theorem and w^*-integrability. Lastly, we give an example of a thick set, which is not of the second Baire category.

Keywords: thick set, thin set, strong uniform boundedness principle, Banach-Steinhaus theorem, w^*-integrability

Obsah

TLUSTÉ MNOŽINY V BANACHOVÝCH PROSTORECH

Úvod

Tato práce se zabývá tlustými množinami v Banachových prostorech. Pojem tlusté množiny je definován jako analogie k pojmu množiny druhé kategorie.

V úvodu je zaveden pojem τ-tenké a τ-tlusté množiny pro lokálně konvexní topologii τ na Banachově prostoru X, jež je slabší než topologie daná normou, a jsou ukázány některé jejich základní vlastnosti.

V druhé části jsou ukázány některé charakterisace pro τ-tlusté množiny. Je ukázáno, že τ-tlusté množiny jsou nejmenší takové, pro které platí princip stejnoměrné omezenosti, Banach-Steinhausova věta, či věta o otevřeném zobrazení. Současně je podána charakterisace tlustých množin pomocí w^*-integrovatelnosti.

Dále jsou vyzdvihnuty dva důležité případy – a to je-li τ přímo normová topologie na X, a je-li τ w^*-topologie na duálu Banachova prostoru. Je ukázáno, že reflexivitu lze charakterisovat pomocí vztahu tlustých a w^*-tlustých množin na duálu X^*.

V závěru je pomocí Nikodýmovy věty o omezenosti pro vektorové míry ukázán příklad tlusté množiny v prostoru $B(\Sigma)$ – omezených, měřitelných funkcí, a je ukázán příklad množiny, jež je tlustá, ale není druhé kategorie.

V této práci se opíráme o článek O. Nygaarda [Nyg], jehož výsledky práce shrnuje, a některé z nich zobecňuje pro lokálně konvexní topologie τ, jež jsou slabší než topologie normy.

1. Úvodní definice

Definice 1.1. Buď (X, τ) topologický lineární prostor nad $\mathbb{F}$, kde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Řekneme, že $A \subset X$ je absolutně konvexní, je-li A konvexní a vyvážená (tj. $aA \subset A$ pro $a \in \mathbb{F}, |a| \leq 1$).

Pro $A \subset X$ definujeme

- absolutně konvexní obal množiny A jako

$$\operatorname{aco} A = \bigcap \{F; A \subset F \subset X, F \text{ absolutně konvexní}\}$$

- τ-uzavřený absolutně konvexní obal množiny A jako

$$\overline{\operatorname{aco}}^{\tau} A = \bigcap \{F; A \subset F \subset X, F \text{ absolutně konvexní, } \tau\text{-uzavřená}\}.$$

Poznámka 1.2. Pokud bude z kontextu zřejmé, o kterou topologii τ na X se jedná, budeme namísto $\overline{\operatorname{aco}}^{\tau} A$ psát $\overline{\operatorname{aco}} A$.

Poznámka 1.3. Výše uvedené definice $\operatorname{aco} A$ a $\overline{\operatorname{aco}} A$ jsou korektní, jelikož celý prostor X je sám absolutně konvexní množinou (navíc i uzavřenou). Proto je systém množin, jež pronikáme neprázdný, tudíž $\operatorname{aco} A$ i $\overline{\operatorname{aco}} A$ jsou vždy definovány.

Poznámka 1.4. V celé práci budeme uvažovat, že všechny topologie jsou Hausdorffovy, tedy speciálně budeme-li mluvit o lineárním topologickém prostoru (X, τ), bude se vždy jednat o lineární topologický prostor, jež je Hausdorffův.

Lemma 1.5. *Buď (X, τ) topologický lineární prostor a $A \subset X$. Pak*

(a) $\operatorname{aco} A$, $\overline{\operatorname{aco}} A$ *jsou absolutně konvexní množiny. Navíc* $\operatorname{aco} A$ *(resp.* $\overline{\operatorname{aco}} A$*) je nejmenší absolutně konvexní množinou (resp. absolutně konvexní a uzavřenou množinou), jež obsahuje A, bráno vzhledem k inklusi.*

(b) *τ-uzávěr absolutně konvexní množiny je absolutně konvexní množina.*
(c) $\overline{\text{aco}}A = \overline{\text{aco}\,A}$.

Důkaz. Protože libovolný průnik absolutně konvexních množin je absolutně konvexní množina, tak triviálně z definic aco A a $\overline{\text{aco}}A$ dostáváme (a).

(b) plyne z toho, že τ-uzávěr konvexní (resp. vyvážené) množiny je opět konvexní (resp. vyvážená) množina. Konkrétněji, mějme A konvexní množinu a $x, y \in \overline{A}^{\tau}$. Pak existují nety $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ a $(y_i)_{i\in\mathcal{I}}$, jež konvergují v τ k x a y, a navíc $x_i \in A, y_i \in A$ pro $i \in \mathcal{I}$.

Je-li $t \in [0,1]$, pak je $tx_i + (1-t)y_i \in A$ z konvexity A a díky spojitosti vektorových operací (τ je lineární topologie na X) konverguje net $tx_i + (1-t)y_i$ v τ k $tx + (1-t)y$. Tedy $tx + (1-t)y$ je v τ-uzávěru A.

Je-li A vyvážená a $a \in \mathbb{F}, |a| \leq 1$, pak net ax_i konverguje k ax (díky spojitosti násobení skalárem) a tedy $ax \in \overline{A}^{\tau}$. Tedy τ-uzávěr A je vyvážená množina, a proto platí (b).

Zbývá ukázat (c). Triviálně z definice platí, že $\overline{\text{aco}}A \supset \text{aco}\,A$, neboť systém absolutně konvexních množin, jež jsou uzavřené, je podsystémem všech absolutně konvexních množin. Protože $\overline{\text{aco}}A$ je uzavřená množina, jakožto průnik uzavřených množin, tak dostáváme $\overline{\text{aco}}A \supset \overline{\text{aco}\,A}$.

Naopak, $\overline{\text{aco}\,A}$ je podle (a) a (b) absolutně konvexní a uzavřená, tudíž $\overline{\text{aco}}A \subset \overline{\text{aco}\,A}$. Proto platí (c). □

Výše uvedená definice se hodí zejména pro teoretické úvahy. Pro snadnější výpočty uveďme ekvivalentní vyjádření aco A.

Lemma 1.6. *Buď X topologický lineární prostor a $A \subset X$. Pak*

$$\text{aco}\,A = \left\{\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\,;\ \alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in A, \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Důkaz. Označme si množinu na pravé straně dokazované rovnosti jako B. Stačí ukázat, že B je absolutně konvexní, a je-li C libovolná absolutně konvexní množina, splňující $A \subset C$, pak $B \subset C$. Pak již plyne dokazované díky předchozímu lemmatu.

Nejprve k tomu, že B je absolutně konvexní. Mějme $x, y \in B$, tedy

$$x = \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1$$
$$y = \textstyle\sum_{i=1}^m \beta_i y_i, \quad \sum_{i=1}^m |\beta_i| \leq 1.$$

Pak pro $t \in [0,1]$ máme

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^n t\alpha_i x_i + \sum_{i=1}^m (1-t)\beta_i y_i,$$

přičemž

$$\sum_{i=1}^n |t\alpha_i| + \sum_{i=1}^m |(1-t)\beta_i| = |t|\sum_{i=1}^n |\alpha_i| + |1-t|\sum_{i=1}^m |\beta_i| \leq t + (1-t) = 1.$$

Proto $tx + (1-t)y \in B$ a tedy B je konvexní.

Analogicky ukažme vyváženost B. Je-li $a \in \mathbb{F}, |a| \leq 1$, pak

$$ax = a\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n a\alpha_i x_i$$

a zřejmě $\sum_{i=1}^n |a\alpha_i| \leq |a|\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1$. Proto $aB \subset B$, a tedy B je vyvážená. Tím je tedy ukázáno, že B je absolutně konvexní.

Nyní přistupme k důkazu druhé části. Mějme absolutně konvexní množinu C takovou, že $C \supset A$. Ukažme, že $B \subset C$.

Jelikož $A \subset C$ a C je absolutně konvexní, pak $\alpha x \in C$ pro $x \in A, |\alpha| \leq 1$. Tedy

$$\{\alpha x; x \in A, |\alpha| \leq 1\} \subset C.$$

Ukážeme, že jsou-li $x_i \in A$, pak $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in C$ pro $\alpha_i \in \mathbb{F}, \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1$. Přitom stačí uvážit, že $\alpha_i \in \mathbb{R}$, jinak stačí přenásobit x_i vhodnou komplexní jednotkou e_i a díky předchozímu bude stále $\alpha_i e_i x_i \in C$. Navíc stačí předpokládat, že $|\alpha_i| \in [0, 1)$, jinak tvrzení triviálně platí.

Postupujme indukcí podle n. Pro $n = 1$ platí tvrzení z vyváženosti C podle předchozího odstavce.

Uvažme, že platí pro $n - 1$, ukažme platnost pro n. Díky konvexitě C máme $\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)z \in C$, je-li $z \in C$. Máme, že $z = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} x_i \in C$ dle indukčního předpokladu, neboť $\sum_{i=1}^{n-1} |\frac{\alpha_i}{1-\alpha_n}| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\alpha_i|}{|1-\alpha_n|} \leq \frac{1-|\alpha_n|}{|1-\alpha_n|} \leq 1$. Speciálně tedy touto volbou dostáváme, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)z \in C$.

Tvrzení je tímto tedy ukázáno. □

Lemma 1.7. *Buď (X, τ) lineární topologický prostor, $A \subset X$ a $p : X \to \mathbb{R}$ τ-zdola polospojitá pseudonorma. Pak*

$$\sup_{x \in A} p(x) = \sup_{x \in \operatorname{aco} A} p(x) = \sup_{x \in \overline{\operatorname{aco}} A} p(x).$$

Speciálně, je-li Y normovaný lineární prostor, $T : X \to Y$ lineární, spojité, pak

$$\sup_{x \in A} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \operatorname{aco} A} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \overline{\operatorname{aco}} A} \|Tx\|_Y\,,$$

resp. je-li $x^* \in (X, \tau)^*$, pak

$$\sup_{x \in A} |x^*(x)| = \sup_{x \in \operatorname{aco} A} |x^*(x)| = \sup_{x \in \overline{\operatorname{aco}} A} |x^*(x)|.$$

Důkaz. Nejprve přistupme k důkazu první série rovností. Protože $A \subset \operatorname{aco} A$, tak triviálně platí

$$\sup_{x \in A} p(x) \leq \sup_{x \in \operatorname{aco} A} p(x).$$

Naopak, je-li $x \in \operatorname{aco} A$, pak je dle předchozího lemmatu $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, kde $x_i \in A$ a $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq 1$. Proto

$$p(x) = p(\sum_{i=1}^n a_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n p(a_i x_i) = \sum_{i=1}^n |a_i| p(x_i) \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \sup_{x \in A} p(x) \leq \sup_{x \in A} p(x).$$

Tedy dostáváme

$$\sup_{x \in \operatorname{aco} A} p(x) \leq \sup_{x \in A} p(x),$$

a tedy i první rovnost.

Jelikož dle lemmatu 1.5 je $\overline{\operatorname{aco}} A = \overline{\operatorname{aco} A}$, tak dostáváme

$$\sup_{x \in \overline{\operatorname{aco}} A} p(x) = \sup_{x \in \overline{\operatorname{aco} A}} p(x) \geq \sup_{x \in \operatorname{aco} A} p(x).$$

Naopak, je-li $x \in \overline{\operatorname{aco} A}$, existuje net $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ v $\operatorname{aco} A$, jež konverguje v topologii τ k x. Jelikož je p zdola polospojitá, je

$$p(x) \leq \liminf p(x_i) \leq \sup_{z \in \operatorname{aco} A} p(z),$$

a tedy $\sup_{x \in \operatorname{aco} A} p(x) = \sup_{x \in \overline{\operatorname{aco}} A} p(x)$.

Druhá část tvrzení plyne z toho, že je-li Y normovaný lineární prostor a $T : X \to Y$ lineární spojité, pak $\|\cdot\|_Y \circ T : X \to \mathbb{R}$ je spojitá pseudonorma na X, resp. je-li $x^* \in X^*$, pak $x^* : (X, \tau) \to (\mathbb{F}, |\cdot|)$ je lineární, spojité a $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ je normovaný lineární prostor. $\square$

Nyní přistupme k definici klíčových pojmů, kterým se budeme po zbytek této práce věnovat.

Definice 1.8. Buď X Banachův prostor a τ lokálně konvexní topologie na X. Řekneme, že $A \subset X$ je τ-nenormující, pokud $\overline{\mathrm{aco}}^{\tau} A \not\supset \delta B_X$ pro žádné $\delta > 0$.

Definice 1.9. Řekneme, že množina $A \subset X$ je τ-tenká, pokud je neklesajícím spočetným sjednocením τ-nenormujících množin, tj. pokud existují τ-nenormující množiny A_n takové, že $A_n \subset A_{n+1}$ a $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_n$. Množinu $A \subset X$ nazveme τ-tlustou, pokud není τ-tenká.

Poznámka 1.10. Budeme krátce psát, že $A \subset X$ je nenormující (resp. tenká, tlustá) bude-li τ topologie na X daná normou, tj. je-li A $\|\cdot\|$-nenormující (resp. $\|\cdot\|$-tenká, $\|\cdot\|$-tlustá).

Jelikož se budeme zabývat lokálně konvexními topologiemi na Banachově prostoru X, jež jsou slabší než topologie daná normou, pak je vhodné uvědomit si, v jakém vztahu jsou jejich duály. To shrnuje následující poznámka.

Poznámka 1.11. Je-li X Banachův prostor a τ topologie na X, jež je slabší než topologie daná normou, pak $(X, \tau)^* \subset\subset (X, \|\cdot\|)^* = X^*$. Speciálně lze tedy na $(X, \tau)^*$ přirozeně uvažovat normu zděděnou z X^* (jakožto restrikci normy na tento podprostor).

Důkaz. Je zřejmé, že $(X, \tau)^*$ tvoří lineární prostor. Je-li $f : (X, \tau) \to \mathbb{F}$ lineární a spojité, je $f^{-1}(G)$ τ-otevřená množina pro G otevřenou v $\mathbb{F}$. Tudíž je $f^{-1}(G)$ také $\|\cdot\|$-otevřená a proto je $f : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{F}$ spojité. Proto $(X, \tau)^* \subset\subset (X, \|\cdot\|)^* = X^*$. $\square$

V práci budeme potřebovat následující variantu Hahnovy–Banachovy věty pro oddělování konvexních množin v lokálně konvexních topologických prostorech.

Lemma 1.12 (Hahn–Banach). *Mějme (X, τ) lokálně konvexní topologický prostor.*

(a) Je-li $A \subset X$ absolutně konvexní množina a $x^* \in (X, \tau)^*$, pak

$$\sup_{x \in A} \Re x^*(x) = \sup_{x \in A} |x^*(x)|.$$

(b) Je-li $A \subset X$ neprázdná, konvexní, τ-uzavřená a $x \notin A$, pak existuje prvek $x^* \in (X, \tau)^*$, splňující

$$\Re x^*(x) > \sup_{y \in A} \Re x^*(y).$$

Je-li navíc A absolutně konvexní, pak lze najít $x^* \in X^*$ takové, že

$$|x^*(x)| > \sup_{y \in A} |x^*(y)|.$$

Důkaz. Triviálně platí, že $\Re x^*(x) \leq |x^*(x)|$ pro libovolné $x \in A$ a tedy i

$$\sup_{x\in A} \Re x^*(x) \leq \sup_{x\in A} |x^*(x)|.$$

Naopak pro $x \in A$ existuje $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ splňující $|x^*(x)| = \alpha x^*(x) = x^*(\alpha x) = \Re x^*(\alpha x)$. Protože A je absolutně konvexní, je $\alpha A \subset A$, tedy

$$|x^*(x)| = \Re x^*(\alpha x) \leq \sup_{y\in \alpha A} \Re x^*(y) \leq \sup_{z\in A} \Re x^*(z).$$

Protože bylo x voleno libovolně, platí odhad pro každé $x \in A$ a tedy je

$$\sup_{x\in A} |x^*(x)| \leq \sup_{x\in A} \Re x^*(x).$$

Tedy platí (a).

K důkazu (b). Jelikož τ je Hausdorffova topologie, je $\{x\}$ τ-uzavřená. Zřejmě je i kompaktní a konvexní množinou. Podle Hahnovy–Banachovy věty [Rud, věta 3.4, str. 58] tedy existuje $x^* \in X^*$ a $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\Re x^*(y) < \gamma_1 < \gamma_2 < \Re x^*(x),$$

pro všechna $y \in A$. Tedy

$$\sup_{y\in A} \Re x^*(y) < \Re x^*(x).$$

Je-li navíc A absolutně konvexní, pak podle (a) je

$$\sup_{y\in A} \Re x^*(y) = \sup_{y\in A} |x^*(y)| < \Re x^*(x) < |x^*(x)|.$$

□

Užitečnou charakterisaci nenormujících množin popisuje následující lemma.

Lemma 1.13. *Mějme X Banachův a τ lokálně konvexní topologii na X, jež je slabší než topologie daná normou. Je-li $A \subset X$ neprázdná, pak A je τ-nenormující, právě když*

$$\inf_{x^*\in S_{(X,\tau)^*}} \sup_{x\in A} |x^*(x)| = 0,$$

kde $S_{(X,\tau)^*} = S_{X^*} \cap (X,\tau)^*$ a S_{X^*} je jednotková sféra v X^*.

Důkaz. Je-li $A \subset X$ τ-nenormující, pak $\overline{\mathrm{aco}}^\tau A \not\supset \delta B_X$ pro žádné $\delta > 0$. Speciálně pro $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, existují $x_n \in \frac{1}{n} B_X$, $x_n \notin \overline{\mathrm{aco}}^\tau A$.

Podle lemmatu 1.5 je $\overline{\mathrm{aco}}^\tau A$ absolutně konvexní a τ-uzavřená, proto tedy existuje pro $n \in \mathbb{N}$ podle Hahnovy–Banachovy věty (lemma 1.12) $x^* \in X^*$ takové, že

$$|x^*(x_n)| \geq \sup_{x\in \overline{\mathrm{aco}}^\tau A} |x^*(x)| = \sup_{x\in A} |x^*(x)|.$$

Protože podle předcházející poznámky 1.11 je $(X,\tau)^* \subset (X,\|\cdot\|)^*$, tak je i $x^* \in (X,\|\cdot\|)^*$. Navíc můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\|x^*\| = 1$, a tedy máme

$$|x^*(x_n)| \leq \|x^*\| \, \|x_n\| \leq \frac{1}{n},$$

a tedy

$$\inf_{x^*\in S_{(X,\tau)^*}} \sup_{x\in A} |x^*(x)| = 0.$$

Naopak, ať A není τ-nenormující. Pak máme $\overline{\operatorname{aco}}^{\tau} A \supset \delta B_X$ pro nějaké $\delta > 0$. Pak je-li $x^* \in (X,\tau)^*$ libovolné, máme díky lemmatu 1.7

$$\sup_{x\in A} |x^*(x)| = \sup_{x\in \overline{\operatorname{aco}}^{\tau} A} |x^*(x)| \geq \sup_{x\in \delta B_X} |x^*(x)|.$$

Je-li tedy navíc $x^* \in S_{(X,\tau)^*}$, tj. je-li $x^* \in S_{X^*} \cap (X,\tau)^*$, pak

$$\sup_{x\in \delta B_X} |x^*(x)| = \delta \sup_{x\in B_X} |x^*(x)| = \delta \, \|x^*\| = \delta > 0,$$

proto

$$\inf_{x^*\in S_{(X,\tau)^*}} \sup_{x\in A} |x^*(x)| > 0.$$

$\square$

Lemma 1.14 (vlastnosti nenormujících množin). *Mějme X Banachův a τ lokálně konvexní topologii na X, jež je slabší než topologie daná normou, a buď $A \subset X$. Pak*

(a) A je τ-nenormující, právě když τ-uzávěr A je τ-nenormující.
(b) A je τ-nenormující, právě když $\operatorname{aco} A$ je τ-nenormující.
(c) Je-li $r > 0$ libovolné, pak A je τ-nenormující, právě když $A \cap rB_X$ je τ-nenormující.

Důkaz. Nejprve k důkazu (a). Protože pro libovolné $x^* \in (X,\tau)^*$ platí

$$\sup_{x\in A} |x^*(x)| = \sup_{x\in \overline{A}^{\tau}} |x^*(x)|,$$

tak i

$$\inf_{x^*\in S_{(X,\tau)^*}} \sup_{x\in A} |x^*(x)| = \inf_{x^*\in S_{(X,\tau)^*}} \sup_{x\in \overline{A}^{\tau}} |x^*(x)|,$$

a tedy dle předchozího lemmatu 1.13 je množina A τ-nenormující, právě když je $\overline{A}^{\tau}$ τ-nenormující. Tudíž platí (a).

Analogicky k předchozímu, dle lemmatu 1.7 máme

$$\sup_{x\in A} |x^*(x)| = \sup_{x\in \operatorname{aco} A} |x^*(x)|,$$

tudíž

$$\inf_{x^*\in S_{(X,\tau)^*}} \sup_{x\in A} |x^*(x)| = \inf_{x^*\in S_{(X,\tau)^*}} \sup_{x\in \operatorname{aco} A} |x^*(x)|,$$

a tedy A je τ-nenormující, právě když $\operatorname{aco} A$ je τ-nenormující, dle lemmatu 1.13. Tedy platí (b).

Zbývá ukázat (c). Je-li A τ-nenormující a $r > 0$, pak

$$\sup_{x\in A\cap rB_X} |x^*(x)| \leq \sup_{x\in A} |x^*(x)|$$

a tedy i

$$\inf_{x^*\in S_{(X,\tau)^*}} \sup_{x\in A\cap rB_X} |x^*(x)| \leq \inf_{x^*\in S_{(X,\tau)^*}} \sup_{x\in A} |x^*(x)| = 0,$$

a tudíž je $A \cap rB_X$ τ- nenormující.

Naopak, je-li $A \cap rB_X$ τ-nenormující, ukážeme, že A je τ-nenormující. Díky (a) a (b) stačí bez ztráty na obecnosti uvážit, že A je absolutně konvexní a τ-uzavřená.

Postupujme sporem, pokud by $A \supset \delta B_X$ pro nějaké $\delta > 0$, pak i $(A \cap rB_X) \supset \min(\delta, r)B_X$. Tudíž $\overline{\operatorname{aco}}(A \cap rB_X) \supset (A \cap rB_X) \supset \varepsilon B_X$ pro nějaké $\varepsilon > 0$ a tedy $A \cap rB_X$ není τ-nenormující. Tím dostáváme spor a tudíž platí (c). $\square$

2. Vlastnosti a charakterisace tlustých množin

V následující kapitole se budeme dále podrobněji zabývat některými vlastnostmi tlustých množin a podáme jejich ekvivalentní charakterisace.

Nejprve ukážeme některé základní vlastnosti tenkých a tlustých množin.

Lemma 2.1 (Vlastnosti tlustých a tenkých množin). *Mějme X Banachův, τ lokálně konvexní topologii na X, jež je slabší než topologie daná normou a $A \subset X$. Pak platí následující.*

(a) Je-li A τ-tenká a $B \subset A$, pak je B τ-tenká. Naopak je-li A τ-tlustá a $A \subset B$, pak je B τ-tlustá.

(b) A je τ-tenká právě když $\operatorname{aco} A$ je τ-tenká.

(c) A je τ-tenká právě když $\operatorname{span} A$ je τ-tenká

(d) τ-tenká množina je první kategorie v (X, τ). Naopak množina druhé kategorie v (X, τ) je τ-tlustá.

Speciálně, otevřená podmnožina Banachova prostoru je tlustá.

(e) Je-li X konečné dimense, je A tlustá, právě když je $\operatorname{span} A = X$.

Důkaz. (a) Je-li A τ-tenká, existují τ-nenormující množiny $A_n, n \in \mathbb{N}$ takové, že $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ a $A_n \subset A_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$B = B \cap A = B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n).$$

Jelikož $B \cap A_n \subset A_n$, tak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je evidentně $B \cap A_n$ τ-nenormující a tudíž $(B \cap A_n)_{n=1}^{\infty}$ tvoří neklesající spočetné pokrytí B τ-nenormujícími množinami. Tudíž platí (a).

(b) Je-li $\operatorname{aco} A$ τ-tenká, pak je A τ-tenká podle (a). Ať naopak je A τ-tenká a buď $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou τ-nenormující a $A_n \subset A_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{aco} A_n$ je absolutně konvexní množina, je totiž $\operatorname{aco} A_n \subset \operatorname{aco} A_m$ pro $n \leq m$ a jsou-li tedy $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{aco} A_n$, pak $x, y \in \operatorname{aco} A_m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ a tudíž $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{aco} A_n$ je absolutně konvexní množinou. Navíc $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{aco} A_n$ z definice $\operatorname{aco} A$, proto $\operatorname{aco} A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{aco} A_n$.

Podle lemmatu 1.14 jsou $\operatorname{aco} A_n$ τ-nenormující, tudíž $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{aco} A_n$ je τ-tenká, tedy podle (a) je $\operatorname{aco} A$ τ-tenká.

(c) Je-li $\operatorname{span} A$ τ-tenká, pak je A τ-tenká podle (a). Je-li A τ-tenká, pak díky (b) lze bez újmy na obecnosti uvažovat, že A je absolutně konvexní.

Mějme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n τ-nenormující a $A_n \subset A_m$ pro $n \leq m$. Jelikož je A absolutně konvexní, tak máme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{aco} A_n$ a $\operatorname{aco} A_n$ jsou τ-nenormující.

Pak $\operatorname{span} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} n \operatorname{aco} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \operatorname{aco} A_n$. Protože jsou $\operatorname{aco} A_n$ τ-nenormující, jsou i $n \operatorname{aco} A_n$ τ-nenormující a proto je $\operatorname{span} A$ τ-tenká množina.

(d) Nechť A je τ-tenká množina, bez újmy na obecnosti můžeme uvážit, že A je absolutně konvexní. Pak $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou τ-nenormující a $A_n \subset A_m$ pro $n \leq m$. Tedy $\overline{\operatorname{aco}}^{\tau} A_n \not\supset \delta B_X$ pro žádné $\delta > 0$. Z důkazu (b) je patrno, že $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{aco} A_n$.

Stačí tedy ukázat, že $\operatorname{aco} A_n$ jsou řídké v (X, τ), pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{aco} A_n$ je spočetné sjednocení τ-řídkých množin. Avšak $\overline{\operatorname{aco}}^{\tau} A_n \not\supset \delta B_X$ pro žádné $\delta > 0$, tedy musí nutně být $\operatorname{int}(\overline{\operatorname{aco} A_n}^{\tau}) = \emptyset$ (kde vnitřek rozumíme v topologii τ). Pokud by totiž $\overline{\operatorname{aco}}^{\tau} A_n$ obsahoval τ-otevřenou množinu G, pak G by byla i otevřená v $\|\cdot\|_X$. Pak by z absolutní konvexity nutně muselo platit, že $\overline{\operatorname{aco}}^{\tau} A_n \supset \delta B_X$ pro nějaké $\delta > 0$.

Druhá část (d) plyne z toho, že otevřené množiny v úplných prostorech jsou druhé kategorie.

(e). Díky (c) je A tlustá, právě když je $\operatorname{span} A$ tlustá. Stačí tedy uvážit, že $A \subset\subset X$, tj. $A = \operatorname{span} A$.

Je-li $\operatorname{span} A = X$, pak $A = \operatorname{span} A = X$ je druhé kategorie v X, tudíž je dle (d) tlustá.

Naopak, je-li A tlustá, pak $A = \operatorname{span} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA$. Tedy existuje $m \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$, že $m\,\overline{\operatorname{aco}}(A) \supset \delta B_X$. Protože A je lineární podprostor, tak je $\operatorname{aco} A = \operatorname{span} A$ a jelikož prostor X je konečně dimensionální, tak je $\operatorname{span} A$ uzavřený podprostor X, proto $\operatorname{span} A = \overline{\operatorname{aco}} A \supset \eta B_X$ pro nějaké $\eta > 0$. Tedy $\operatorname{span} A = X$. □

2.1. **Princip stejnoměrné omezenosti.** V následující části ukážeme, že tlusté množiny úzce souvisí s principem stejnoměrné omezenosti a navíc jsou ve skutečnosti tímto charakterisovány.

Nejprve však, jelikož budeme popisovat spojitá lineární zobrazení z lokálně konvexního prostoru (X, τ) do normovaných lineárních (obecněji i do lokálně konvexních) prostorů, je vhodné – analogicky k poznámce 1.11 – všimnout si následujícího.

Poznámka 2.2. Je-li X Banachův, τ topologie na X slabší než topologie daná normou a (Y, σ) topologický lineární prostor, pak

$$\mathcal{L}((X, \tau), (Y, \sigma)) \subset\subset \mathcal{L}((X, \|\cdot\|), (Y, \sigma)).$$

Speciálně, je-li Y normovaný lineární prostor, pak $\mathcal{L}((X, \tau), Y) \subset\subset \mathcal{L}(X, Y)$, tedy lze na $\mathcal{L}((X, \tau), Y)$ uvážit normu jakožto restrikci normy z $\mathcal{L}(X, Y)$ na tento podprostor

Důkaz. Zřejmě $\mathcal{L}((X, \tau), (Y, \sigma))$ tvoří lineární prostor. Je-li $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ lineární a spojité, pak $f^{-1}(G)$ je τ-otevřená pro každou σ-otevřenou $G \subset Y$. Jelikož je τ slabší topologií než topologie normy, je $f^{-1}(G)$ též i $\|\cdot\|_X$-otevřená. Tedy $f : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \sigma)$ je spojité. □

Díky této poznámce máme korektnost následující definice.

Definice 2.3. Mějme X Banachův, τ lokálně konvexní topologii na X, jež je slabší než topologie daná normou, a bud Y normovaný lineární prostor.

Řekneme, že $\Gamma \subset \mathcal{L}((X, \tau), Y)$ je bodově omezená na $A \subset X$, jestliže pro všechna $x \in A$ je $\{\|Lx\|_Y ; L \in \Gamma\}$ omezená množina, tj. $\sup_{L \in \Gamma} \|Lx\| < \infty$.

Řekneme, že Γ je omezená v $\mathcal{L}((X, \tau), Y)$, jestliže $\sup_{L \in \Gamma} \|L\| < \infty$.

Nyní můžeme ukázat platnost následujícího.

Věta 2.4 (silný princip stejnoměrné omezenosti). *Mějme X Banachův prostor, τ lokálně konvexní topologii na X, jež je slabší než topologie daná normou, a buď $A \subset X$. Pak následující je ekvivalentní.*

(a) A je τ-tlustá.

(b) Je-li Y normovaný lineární prostor a $\Gamma \subset \mathcal{L}((X, \tau), Y)$ bodově omezená na A, tj. pro všechna $x \in A$ je

$$\sup_{L \in \Gamma} \|Lx\| < \infty,$$

pak je Γ omezená v $(\mathcal{L}((X, \tau), Y), \|\cdot\|)$.

(c) Je-li $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v $(X, \tau)^*$, jež je omezená bodově na A, pak je omezená v $(X, \tau)^*$.

Důkaz. $(a) \to (b)$. Analogicky standardnímu důkazu principu stejnoměrné omezenosti. Buď $\Gamma \subset \mathcal{L}((X,\tau),Y)$ bodově omezená na A a nechť $A \subset X$ je τ-tlustá množina. Položme

$$A_n = \{x \in A; \|Lx\| \leq n; L \in \Gamma\}\,.$$

Z bodové omezenosti Γ na A dostáváme, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Navíc zřejmě pro $n \in \mathbb{N}$ platí $A_n \subset A_{n+1}$.

Protože A je τ-tlustá a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tvoří neklesající spočetné sjednocení, musí nutně existovat $m \in \mathbb{N}$, že A_m není τ-nenormující. Tedy $\overline{\mathrm{aco}}^{\tau} A_m \supset \delta B_X$ pro nějaké $\delta > 0$.

Potom, je-li $L \in \Gamma$ libovolné, máme dle lemmatu 1.7

$$\|L\| = \sup_{x \in B_X} \|Lx\| = \frac{1}{\delta} \sup_{x \in \delta B_X} \|Lx\| \leq \frac{1}{\delta} \sup_{x \in \overline{\mathrm{aco}} A_m} \|Lx\| = \frac{1}{\delta} \sup_{x \in A_m} \|Lx\| \leq \frac{m}{\delta}.$$

Tedy pro $L \in \Gamma$ je $\|L\| \leq \frac{m}{\delta}$, přičemž tento odhad je stejnoměrný a nezávislý na L (m ani δ na této volbě nezávisí). Proto je Γ je omezená v $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$.

Implikace $(b) \to (c)$ je triviální, stačí položit $Y = \mathbb{F}$ a $\Gamma = (x_n^*)_{n=1}^{\infty}$.

K důkazu $(c) \to (a)$. Sporem, uvažme, že $A \subset X$ je τ-tenká, a ukážeme, že existuje posloupnost v $(X,\tau)^*$, jež je ve sporu s (c).

Množina A je τ-tenká, a tedy existují τ-nenormující množiny A_n, kde $A_n \subset A_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tedy máme dle lemmatu 1.13 pro $n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{x^* \in S_{(X,\tau)^*}} \sup_{x \in A_n} |x^*(x)| = 0.$$

Konstruujme posloupnost funkcionálů $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ v $(X,\tau)^* \cap S_{X^*}$, pro kterou platí, že

$$\sup_{x \in A_n} |x_n^*(x)| \leq 2^{-n}.$$

Dále položme $y_n^* = 2^n x_n^*$. Ukážeme, že tato posloupnost je ve sporu s (c). Zjevně je $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ neomezená v normě, máme totiž

$$\|y_n^*\| = \|2^n x_n^*\| = 2^n \|x_n^*\| = 2^n, n \in \mathbb{N}.$$

Zbývá tedy ukázat bodovou omezenost této posloupnosti na A. Mějme $x \in A$, pak $x \in A_m$ pro jisté $m \in \mathbb{N}$. Navíc díky monotonii (A_n) je i $x \in A_n$ pro $n \geq m$. Pak rozlišme dva případy: je-li $n \leq m$, pak

$$|y_n^*(x)| \leq \|y_n^*\| \|x\| \leq 2^m \|x\|\,.$$

Je-li $n \geq m$, pak

$$|y_n^*(x)| = 2^n |x_n^*(x)| \leq 2^n \sup_{y \in A_n} |x_n^*(y)| \leq 1$$

díky tomu, že $x \in A_n$.

Tedy pro $x \in A$ a $n \in \mathbb{N}$ máme, že $|y_n^*(x)| \leq \max(2^m \|x\|, 1)$, a proto $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ je bodově omezená na A. To je však ve sporu s (c). □

Platnost principu stejnoměrné omezenosti lze ukázat i v případě, že na prostoru $\mathcal{L}((X,\tau),Y)$ uvažujeme jinou topologii, než topologii, jež je dána normou. V případě, že na $\mathcal{L}((X,\tau),Y)$ uvažujeme topologii bodové konvergence, tak platnost principu stejnoměrné konvergence zůstane zachována, jak ukážeme v následující větě. Navíc můžeme slevit z požadavku, že Y je normovaný lineární prostor, a obecněji uvažovat lokálně konvexní prostor Y.

Poznámka 2.5. Vezmeme za fakt, že jsou-li (X,τ) a (Y,σ) lokálně konvexní prostory, pak topologie bodové konvergence na $\mathcal{L}(X,Y)$ je lokálně konvexní topologie generována systémem pseudonorem

$$p_{A,q}(L) = \sup_{x\in A} q(Lx), \quad a \in \mathcal{A}, q \in \mathcal{Q},$$

kde $\mathcal{A} = \{A \subset X, A \text{ konečná}\}$ a $\mathcal{Q}$ je soubor pseudonorem, jež generuje lokálně konvexní topologii σ na Y. [Jar, př. 3A, str.153]

Tedy se jedná o topologii stejnoměrné konvergence na konečných podmnožinách X. Tuto topologii na $\mathcal{L}(X,Y)$ budeme značit ω_S.

Poznámka 2.6. Připomeňme, že je-li (X,τ) lokálně konvexní prostor a $A \subset X$, pak A je omezená v (X,τ), jestliže pro každé τ-okolí 0 V existuje $\lambda > 0$, že $A \subset \lambda V$.

Poznamenejme, že v lokálně konvexním prostoru je toto ekvivalentní tomu, že $p(A)$ je omezená v $\mathbb{R}$, pro každou pseudonormu p, jež generuje tuto lokálně konvexní topologii. [Rud, věta 1.37, str. 26]

Věta 2.7. *Mějme X Banachův prostor, τ lokálně konvexní topologii na X, jež je slabší než topologie daná normou a buď $A \subset X$. Pak následující je ekvivalentní.*

(a) A je τ-tlustá.
(b) Je-li (Y,σ) lokálně konvexní prostor a $\Gamma \subset \mathcal{L}((X,\tau),Y)$ bodově omezená na A, pak je Γ ω_S-omezená v $\mathcal{L}((X,\tau),Y)$.
(c) Je-li $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ posloupnost v $(X,\tau)^*$, jež je omezená bodově na A, pak je w^*-omezená v $(X,\tau)^*$.

Důkaz. Postup i myšlenky důkazu budou analogické těm v důkazu věty 2.4.

Nejprve ukažme $(a) \to (b)$. K tomu, že je Γ omezená v topologii ω_S stačí podle předchozí poznámky ukázat, že pro každou pseudonormu $p_{F,q}$ generující tuto topologii je $p_{F,q}(\Gamma)$ omezená.

Zvolme tedy $F \subset X$ konečnou a $q : Y \to \mathbb{R}$ pseudonormu generující topologii σ na Y libovolně a uvažme příslušnou pseudonormu $p_{F,q} : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$A_n = \{x \in A; q(Lx) \leq n, L \in \Gamma\}.$$

Triviálně platí, že $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset A$. Z bodové omezenosti Γ na A dostáváme podle předpokladu druhou inklusi. Je-li totiž $x \in A$, tak množina $\{Lx; L \in \Gamma\}$ je omezená množina v Y, a tedy $\sup_{L\in\Gamma} q(Lx) < \infty$, neboť q je pseudonorma generující topologii σ na Y. Tedy $x \in A_m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ a tedy $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$.

Dohromady tedy máme, že $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, a navíc zjevně platí $A_n \subset A_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Protože A je τ-tlustá podle předpokladu, tak nutně není nějaká A_m τ-nenormující. Tudíž existují $m \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$ takové, že $\overline{\text{aco}}^\tau A_m \supset \delta B_X$.

Pak $q \circ L : X \to \mathbb{R}$ je spojitá pseudonorma, a tedy dle lemmatu 1.7 máme, že $\sup_{x\in A_m} q(Lx) = \sup_{x\in\overline{\text{aco}}^\tau A_m} q(Lx)$. Proto je

$$m \geq \sup_{x\in A_m} q(Lx) = \sup_{x\in\overline{\text{aco}}^\tau A_m} q(Lx) \geq \sup_{x\in\delta B_X} q(Lx) = \delta \sup_{x\in B_X} q(Lx).$$

Je-li $F \subset X$ konečná, pak i množina $\{\|x\|; x \in F\}$ je konečná, a tedy $F \subset KB_X$, kde $K = \max_{x\in F} \|x\|$. Proto

$$\sup_{x\in F} q(Lx) \leq \sup_{x\in KB_X} q(Lx) = K \sup_{x\in B_X} q(Lx) \leq \frac{Km}{\delta}.$$

Tedy $p_{A,q}(\Gamma)$ je omezená pro libovolnou pseudonormu generující ω_S, a tudíž je Γ ω_S-omezená.

K důkazu $(b) \to (c)$, stačí položit $(Y,\sigma) = (\mathbb{F}, |\cdot|)$ a $\Gamma = \{x_n^*; n \in \mathbb{N}\}$. Pak topologie bodové konvergence na $(X,\tau)^*$ je právě w^*-topologie na $(X,\tau)^*$.

Ukažme $(c) \to (a)$. Postupujme sporem, uvažme, že A je τ-tenká, ukážeme, že existuje posloupnost $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ prvků v $(X,\tau)^*$, jež je ve sporu s (c).

Množina $A \subset X$ je τ-tenká, podle principu stejnoměrné omezenosti 2.4 existuje posloupnost $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ v $(X,\tau)^*$, jež je omezená bodově na A, ale není omezená v $(X,\tau)^*$ (v normě prostoru X^*).

K tomu, že tato posloupnost není w^*-omezenou množinou v $(X,\tau)^*$ stačí ukázat, že existuje $x \in X$ takové, že $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| = \infty$.

Podle standardního principu stejnoměrné omezenosti však musí existovat $x \in X$, že $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| = \infty$. Pokud by totiž pro všechna $x \in X$ platilo $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| < \infty$, pak by $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ byla omezená v X^*, což je však ve sporu s předchozím. $\square$

Poznámka 2.8. Poznamenejme, že zde formulovaný silný princip stejnoměrné omezenosti je opravdu zobecněním klasického principu stejnoměrné omezenosti. Tento z věty 2.4 vskutku dostaneme, neboť je-li $A \subset X$ množina druhé kategorie v X, pak je tlustá dle lemmatu 2.1 (a stačí tedy užít věty 2.4 pro $\tau = \|\cdot\|_X$).

2.2. **Otevřená zobrazení.**

Lemma 2.9. *Mějme X Banachův prostor a buď $\mathcal{A} \subset X$ absolutně konvexní a uzavřená množina. Pak na $Y = \operatorname{span}(\mathcal{A} \cap B_X)$ existuje norma $\|\cdot\|_Y$ taková, že $B_Y = \mathcal{A} \cap B_X$ a Y je s touto normou Banachův prostor.*

Navíc tato norma je na Y silnější než původní norma, tj. pro $y \in Y$ je $\|y\|_X \leq \|y\|_Y$.

Důkaz. Pro $x \in X$ definujme Minkovského funkcionál $\mathcal{A} \cap B_X$

$$p_{\mathcal{A}\cap B_X}(x) = \inf\{t > 0; x \in t(\mathcal{A} \cap B_X)\}.$$

Množina $\mathcal{A} \cap B_X$ je absolutně konvexní a uzavřená, na $\operatorname{span}(\mathcal{A} \cap B_X)$ je navíc pohlcující, proto $p_{\mathcal{A}\cap B_X}$ je pseudonorma na Y [Rud, věta 1.35., str. 25]. Navíc $p_{\mathcal{A}\cap B_X}(x) \leq 1$, právě když $x \in \mathcal{A} \cap B_X$.

Ukážeme, že $p_{\mathcal{A}\cap B_X}(x) = 0$ právě když $x = 0$. Triviálně, je-li $x = 0$, pak $x \in t(\mathcal{A} \cap B_X)$ pro každé $t > 0$, tudíž $p_{\mathcal{A}\cap B_X}(x) = 0$. Naopak, je-li $p_{\mathcal{A}\cap B_X}(x) = 0$, pak je $x \in t(\mathcal{A} \cap B_X)$ pro každé $t > 0$, tudíž $x \in tB_X$ pro každé $t > 0$, proto $x = 0$. Tedy $p_{\mathcal{A}\cap B_X}$ je norma na Y. Stačí tedy pro $x \in Y$ položit

$$\|x\|_Y = p_{\mathcal{A}\cap B_X}(x).$$

Dále ukážeme, že $\|x\|_X \leq \|x\|_Y$ pro $x \in X$. Jelikož pro každé $t > 0$ je $t(\mathcal{A} \cap B_X) \subset tB_X$, tak je-li $x \in t(\mathcal{A} \cap B_X)$, pak je $x \in tB_X$. Tedy

$$\{t > 0; x \in t(\mathcal{A} \cap B_X)\} \subset \{t > 0; x \in tB_X\},$$

proto přechodem k infimu dostáváme $p_{B_X} \leq p_{\mathcal{A}\cap B_X}$, což neznamená nic jiného než, že $\|x\|_X \leq \|x\|_Y$ pro $x \in Y$.

Závěrem ukážeme, že Y je Banachův, je-li X Banachův. Mějme absolutně konvergentní řadu v Y, tj. mějme pro $n \in \mathbb{N}$ $y_n \in Y$ takové, že $\sum_{n=1}^\infty \|y_n\|_Y < \infty$. Ukážeme, že tato řada je konvergentní v Y. Platí

$$\sum_{n=1}^\infty \|y_n\|_X \leq \sum_{n=1}^\infty \|y_n\|_Y < \infty,$$

proto $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ je absolutně konvergentní řada v X. Tato je konvergentní, neboť X je Banachův, proto existuje $y \in X$, takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$, kde konvergenci řady máme v normě na X.

Stačí proto ukázat, že $y \in Y$, tj. že $\|y\|_Y = p_{\mathcal{A}\cap B_X}(y) < \infty$, a že $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$ v prostoru Y (tj. $\lim_{m\to\infty} \|\sum_{n=1}^{m} y_n - y\|_Y = 0$). Nejprve ukažme konvergenci řady k y v normě na Y. Pro $m \in \mathbb{N}$ máme

$$\left\| y - \sum_{n=1}^{m} y_n \right\|_Y = \left\| \sum_{n=m}^{\infty} y_n \right\|_Y \leq \sum_{n=m}^{\infty} \|y_n\|_Y \to 0,$$

neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y < \infty$. Tedy $\sum y_n$ konverguje k y v prostoru Y.

Zbývá tedy ukázat, že $y \in Y$. Pro $m \in \mathbb{N}$ máme

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} y_n \right\|_Y \leq \sum_{n=1}^{m} \|y_n\|_Y \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y < \infty,$$

proto i limitním přechodem máme $\|y\|_Y \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y < \infty$.

Tedy $y \in Y$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$ v Y, a proto je Y Banachův. □

Nyní můžeme přistoupit k charakterisaci tlustých množin pomocí otevřenosti zobrazení.

Věta 2.10. *Buď X Banachův prostor, τ lokálně konvexní topologie na X slabší než topologie daná normou a přípustná pro X^* a buď $A \subset X$. Pak následující je ekvivalentní.*

(a) A je τ-tlustá.
(b) Je-li Y Banachův a $T : Y \to (X, \tau)$ lineární a spojité, takové, že $\operatorname{Rng} T \supset A$, *pak* $\operatorname{Rng} T = X$.

Důkaz. $(a) \to (b)$. Mějme Y Banachův, $T : Y \to X$ lineární a spojité (vzhledem k topologii τ na X). K tomu, že T je na, stačí ukázat, že TB_Y obsahuje $\|\cdot\|$-okolí 0 v X, pak již surjektivita T vyplyne z linearity.

Platí, že $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_Y$ a tedy $TY = \bigcup_{n=1}^{\infty} nTB_Y$. Dle předpokladu máme, že $TY \supset A$, tudíž

$$A = TY \cap A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nTB_Y \right) \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (nTB_Y \cap A).$$

Protože A je τ-tlustá, tak tedy existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\overline{\operatorname{aco}}^{\tau}(mTB_Y \cap A) \supset \delta B_X$ pro nějaké $\delta > 0$. Odtud již i máme, že $\overline{\operatorname{aco}}^{\tau}(mTB_Y) \supset \delta B_X$, neboť je $mTB_Y \cap A \subset TB_Y$. Navíc TB_Y je absolutně konvexní množina, proto speciálně $m\overline{TB_Y}^{\tau} = m\overline{\operatorname{aco}}^{\tau}(TB_Y) \supset \delta B_X$.

Jelikož je τ přípustná topologie pro X^* a TB_Y je konvexní množina, tak máme $\overline{TB_Y}^{\tau} = \overline{TB_Y}$, podle Mazurovy věty [Fab, věta 3.45, str. 102].

Díky tomu, že X je Banachův prostor, pak již z toho, že $\overline{TB_Y} \supset \frac{\delta}{m} B_X$, dostáváme podle klasického Banachova výsledku, že $TB_Y \supset \frac{\delta}{m} B_X$ [Fab, lemma 2.24, str. 66]. Tedy T je na, jak jsme chtěli ukázat.

Naopak, ukažme, proč $(b) \to (a)$. Postupujme sporem, ukážeme, že pro každou τ-tenkou množinu $A \subset X$ existuje Banachův prostor Y a spojitý lineární operátor $T : Y \to (X, \tau)$, který splňuje $\operatorname{Rng} T \supset A$, ale není na, tj. $\operatorname{Rng} T \neq X$.

Nejprve uvažme, že A je τ-nenormující. Obecný případ pak převedeme na tento. Označme $\mathcal{A} = \overline{\operatorname{aco}}^{\tau} A$. Tedy $\mathcal{A} \not\supset \delta B_X$ pro žádné $\delta > 0$, speciálně $\mathcal{A} \not\supset B_X$. Dále buď $Y = \operatorname{span}(\mathcal{A} \cap B_X)$. Pak množina $\mathcal{A} \cap B_X$ je absolutně konvexní, pohlcující v Y a τ-uzavřená. Jelikož je τ slabší topologie než normová topologie, tak je uzavřená i v $(X, \|\cdot\|_X)$. Lze tedy na Y uvážit normu $\|\cdot\|_Y$ takovou, že Y s touto normou je Banachův a $B_Y = \mathcal{A} \cap B_X$ dle lemmatu 2.9.

Uvažme, že $T : Y \to X$ je kanonické vnoření Y do X. Jelikož máme z konstrukce z lemmatu 2.9, že norma na Y je silnější, než původní, tak $T : Y \to X$ je spojité. Je-li totiž $G \subset \operatorname{Rng} T \subset X$ otevřená v $\|\cdot\|_X$, pak $T^{-1}G = G$ je $\|\cdot\|_Y$ otevřená, neboť $\tau_{\|\cdot\|_X} \subset \tau_{\|\cdot\|_Y}$. Navíc topologie τ je na X slabší než topologie daná normou, tak je i spojité do (X, τ). Tedy zobrazení $T : (Y, \|\cdot\|_Y) \to (X, \tau)$ je spojité a lineární.

Ukážeme, že toto není na. Máme, že

$$Y = \operatorname{span}(\mathcal{A} \cap B_X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n(\mathcal{A} \cap B_X).$$

Pokud by tedy byl $Y = X$, pak z Baireovy věty musí existovat $m \in \mathbb{N}$ takové, že množina $m\overline{(\mathcal{A} \cap B_X)}$ má neprázdný vnitřek. Jelikož je $m(\mathcal{A} \cap B_X)$ absolutně konvexní a uzavřená, tak $m(\mathcal{A} \cap B_X) \supset \delta B_X$ pro nějaké $\delta > 0$. Je tedy i $m\mathcal{A} \supset \delta B_X$, což je však spor s tím, že A je nenormující.

Tedy T není na, což ukazuje platnost tvrzení v tomto speciálním případě.

Nyní přistupme k obecnému případu. Ať $\mathcal{A}$ není τ-nenormující, pak najdeme τ-nenormující množinu $\tilde{\mathcal{A}}$ takovou, že $\operatorname{span} \mathcal{A} = \operatorname{span} \tilde{\mathcal{A}}$, pak stačí položit $Y = \operatorname{span}(\tilde{\mathcal{A}} \cap B_X)$ a postupovat jako v předchozím.

Jelikož je A τ-tenká množina, mějme $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ spočetné, neklesající sjednocení tvořené τ-nenormujícími množinami. Bez ztráty na obecnosti lze předpokládat, že $A_n \subset nB_X$, neboť totiž

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap nB_X)$$

a A_n je τ-nenormující, právě když $A_n \cap nB_X$ je τ-nenormující dle lemmatu 1.14.

Dále položme

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus A_{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

a buď

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} B_n, \quad \mathcal{B} = \overline{\operatorname{aco}}^{\tau} B.$$

Pak $\mathcal{B}$ bude námi hledaná množina – $\mathcal{B}$ je τ-uzavřená a absolutně konvexní (dle lemmatu 1.5), tedy $\overline{\operatorname{aco}}^{\tau} \mathcal{B} = \mathcal{B}$. K tomu, že $\mathcal{B}$ je nenormující stačí tedy ukázat, že $\mathcal{B} \not\supset \delta B_X$ pro $\delta > 0$.

Mějme tedy $\delta > 0$ dáno. Zvolme $m \in \mathbb{N}$, aby $\frac{1}{m} < \frac{\delta}{2}$. Množina A_m je τ-nenormující, podle lemmatu 1.13 tedy existuje prvek $x^* \in S_{X^*} \cap (X, \tau)^*$, pro který platí

$$\sup_{x \in A_m} |x^*(x)| < \frac{\delta}{2}.$$

Buď $x \in B$. Pak rozlišíme dvě možnosti. Je-li $x \in \frac{1}{n^2} B_n$ pro nějaké $n \leq m$, pak $B_n = A_n \setminus A_{n-1} \subset A_n \subset A_m$, tedy $\frac{1}{n^2} B_n \subset \frac{1}{n^2} A_m$, proto díky volbě x^* máme

$$|x^*(x)| \leq \sup_{y \in \frac{1}{n^2} B_n} |x^*(y)| \leq \frac{1}{n^2} \sup_{y \in A_m} |x^*(y)| < \frac{\delta}{2n^2} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Pokud je $x \in \frac{1}{n^2} B_n$ pro nějaké $n > m$, pak $A_n \subset nB_X$, $\|x^*\|_{X^*} = 1$ a tedy

$$|x^*(x)| \le \sup_{n>m} \frac{1}{n^2} \sup_{y \in B_n} |x^*(y)| \le \sup_{n>m} \frac{1}{n^2} \sup_{y \in B_n} \|x^*\|_{X^*} \|y\|_X .$$

Jelikož $B_n \subset A_n \subset nB_X$, tak je $\|y\| \le n$ pro $y \in B_n$ a dostáváme

$$|x^*(x)| \le \sup_{n>m} \frac{1}{n} \le \frac{1}{m} < \frac{\delta}{2}.$$

Tedy máme, že $\sup_{x \in B} |x^*(x)| < \frac{\delta}{2}$, a díky spojitosti x^* a lemmatu 1.7 taktéž $\sup_{x \in \mathcal{B}} |x^*(x)| \le \frac{\delta}{2} < \delta$.

Odtud nyní $\mathcal{B} \not\supset \delta B_X$, neboť pokud by tomu tak nebylo, pak

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)| \le \frac{1}{\delta} \sup_{x \in \mathcal{B}} |x^*(x)| \le \frac{1}{2} < 1,$$

což je spor s tím, že $x^* \in S_{X^*}$.

Tedy $\mathcal{B}$ je τ-nenormující a splňuje $\operatorname{span} \mathcal{B} = \operatorname{span} \mathcal{A}$. Tedy stačí položit $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$ a analogicky jako v nenormujícím případě $Y = \operatorname{span}(\mathcal{B} \cap B_X)$ a $T : Y \to X$. Dostáváme spor analogicky jako v předchozím. □

Poznámka 2.11. Poznamenejme, že z důkazu implikace $(b) \to (a)$ plyne následující: Je-li $A \subset X$ τ-tenká, pak existuje τ-nenormující množina B, že $\operatorname{span} B = \operatorname{span} A$.

Jako důsledek této věty dostáváme následující variantu věty o otevřeném zobrazení. Připomeňme, že zobrazení $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ mezi topologickými prostory nazveme otevřené, pokud pro každou τ-otevřenou množinu $G \subset X$ je $f(G)$ σ-otevřená.

Věta 2.12 (o otevřeném zobrazení). *Mějme X, Y Banachovy prostory a buď $T : Y \to X$ spojité, lineární zobrazení. Je-li* $\operatorname{Rng} T$ *tlustá podmnožina X, pak je T otevřené.*

Důkaz. Podle předchozí věty pro normovou topologii τ na X máme, že T je na X. Tudíž dle klasického výsledku [Fab, věta 2.25, str. 66] je T otevřené. □

Poznámka 2.13. Je zjevné, že za předpokladů předchozí věty a je-li navíc T prosté, pak je T isomorfismus. Je pak totiž $T : Y \to X$ spojitá lineární bijekce a navíc otevřenost T dává spojitost T^{-1}.

Platí tedy i následující verse Banachovy-Schauderovy alternativy.

Věta 2.14 (Banach–Schauder). *Mějme X, Y Banachovy prostory a $T : X \to Y$ prosté, lineární a spojité. Pak buď*

- $\operatorname{Rng} T$ *je tenká podmnožina Y,*
- *anebo* $\operatorname{Rng} T = Y$ *a T je isomorfismus.*

Důkaz. Pokud je $\operatorname{Rng} T$ tlustá, pak je dle věty 2.10 $\operatorname{Rng} T = Y$, tudíž T je spojitá lineární bijekce, dle 2.12 je T otevřené, tedy $T^{-1} : Y \to X$ je spojité a proto T je isomorfismus. □

Věta 2.15. *Mějme X, Y Banachovy a $T : X \to Y$ spojité lineární zobrazení. Pak T je otevřené, právě když TA je tlustá pro každou $A \subset X$ tlustou.*

Speciálně, je-li T isomorfismus, pak TA je tlustá, právě když je A tlustá.

Důkaz. Je-li TA tlustá podmnožina pro každou tlustou $A \subset X$, tak speciálně $TX = \operatorname{Rng} T$ je tlustá podmnožina Y, a tedy dle věty 2.12 je T otevřené.

Naopak, je-li T otevřené, ukážeme, že TA je tlustá, je-li $A \subset X$ tlustá. Bez újmy na obecnosti lze díky lemmatu 2.1 uvážit, že A je absolutně konvexní.

Pokud by byla TA tenká, pak existují nenormující absolutně konvexní množiny $(B_n)_{n=1}^\infty$ v Y takové, že $TA = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ a $B_n \subset B_m$ je-li $n \le m$. Pak

$$A = \bigcup_{n=1}^\infty (T^{-1}B_n \cap A),$$

přičemž tyto tvoří neklesající spočetné sjednocení A. Ke sporu stačí tedy ukázat, že $T^{-1}B_n \cap A$ je nenormující v X pro každé $n \in \mathbb{N}$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou $T^{-1}B_n$ a $T^{-1}B_n \cap A$ absolutně konvexní.

Pokud by $(T^{-1}B_n \cap A) \supset \delta B_X$ pro nějaké $\delta > 0$, pak $T^{-1}B_n \supset \delta U_X$. Díky otevřenosti T je pak však $T(\delta U_X)$ otevřená množina v Y, tedy $T(T^{-1}B_n) \supset T(\delta U_X) \supset \eta B_Y$ pro nějaké $\eta > 0$. Jelikož je T otevřené, je na (z linearity), proto $T^{-1}(TB_n) = B_n$, a tedy $B_n \supset \eta B_Y$. To je však ve sporu s tím, že B_n je nenormující.

Druhá část plyne z toho, že je-li $T : X \to Y$ isomorfismus, pak T i T^{-1} jsou otevřená, prostá zobrazení, tedy TA je tlustá pro každou $A \subset X$ tlustou a $A = T^{-1}(TA)$ je tlustá pro každou $TA \subset Y$ tlustou. Tedy $A \subset X$ je tlustá, právě když $TA \subset Y$ je tlustá. $\square$

2.3. **Tlusté množiny a barelovanost.** V následující části ukážeme, že tlusté množiny souvisejí s barelovanými prostory. Jak uvidíme, je to díky tomu, že pro tlusté množiny platí princip stejnoměrné omezenosti, jak jsme ukázali v předchozím, a známou charakterisací barelovaných prostorů je, že tento princip splňují též. Konkrétněji bude tato souvislost rozebrána dále.

Připomeňme proto nejprve následující definice.

Definice 2.16. Mějme (X, τ) lineární topologický prostor.

Řekneme, že $A \subset X$ je barel, jestliže A je absolutně konvexní, pohlcující a τ-uzavřená.

Řekneme, že (X, τ) je barelovaný prostor, je-li každý barel v X τ-okolím 0.

Nejprve se zabývejme jednodušším speciálním případem, kdy budeme studovat přímo tlusté množiny v Banachových prostorech.[1]

Před vyslovením samotné charakterisace formulujme následující lemma, které dává do souvislosti barelované normované lineární prostory a princip stejnoměrné omezenosti.

Lemma 2.17. *Buď Y normovaný lineární prostor. Pak Y je barelovaný, právě když pro každou posloupnost $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ v Y^*, jež je bodově omezená na Y, platí, že (y_n^*) je omezená v Y^*.*

Důkaz. Ať nejprve je Y barelovaný a $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ bodově omezená na Y. Položme

$$A = \{y \in Y; |y_n^*(y)| \le 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Pak A je barel v Y. Zřejmě je totiž A absolutně konvexní a uzavřená. Díky tomu, že (y_n^*) je bodově omezená na Y, je A též pohlcující.

[1] Připomeňme, že není-li dále specifikována jiná topologie na Banachově prostoru X, tak pod pojmem tlusté množiny rozumíme $\|\cdot\|$-tlustou množinu.

Jelikož Y je barelovaný a A je barel, je tedy A okolím 0. Base okolí 0 v normovaném lineárním prostoru je tvořena otevřenými (či uzavřenými) koulemi, existuje tedy $\delta > 0$, že $A \supset \delta B_Y$. Odtud již dostáváme ihned omezenost (y_n^*) v Y, je totiž

$$\|y_n^*\| = \sup_{y \in B_Y} |y_n^*(y)| = \frac{1}{\delta} \sup_{y \in \delta B_Y} |y_n^*(y)| \leq \frac{1}{\delta} \sup_{y \in A} |y_n^*(y)| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Ať naopak není Y barelovaný. Pak existuje barel B, jež není okolím 0. Tedy $B \not\supset \frac{1}{n} B_Y$ pro $n \in \mathbb{N}$, existuje tedy $y_n \in \frac{1}{n} B_Y \setminus B$. Podle Hahnovy–Banachovy věty existuje $y_n^* \in S_{Y^*}$ splňující $y_n^*(y_n) \geq \sup_{y \in B} |y_n^*(y)|$.

Pak pro posloupnost (ny_n^*) dostáváme $\|y_n^*\| = n$, a tudíž je tato neomezená v Y^*. Avšak je bodově omezená na Y, máme totiž pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{y \in B} |ny_n^*(y)| \leq n|y_n^*(y_n)| \leq n \, \|y_n^*\| \, \|y_n\| \leq 1.$$

Dále B je barel, je tedy pohlcující a pro $x \in Y$ pevné je $x \in KB$ pro nějaké $K > 0$, a tedy

$$|ny_n^*(x)| \leq \sup_{y \in KB} |ny_n^*(y)| \leq K.$$

□

Následující lemma podává charakterisaci hustých podprostorů v lokálně konvexním prostoru.

Lemma 2.18. *Buď (X, τ) lokálně konvexní prostor a nechť $M \subset\subset X$. Pak M je hustý v X, právě když pro každé $f \in (X, \tau)^*$ takové, že $f \restriction M \equiv 0$, je nutně $f \equiv 0$ na X.*

Důkaz. Nechť je M hustým podprostorem X, tzn. $\overline{M}^\tau = X$. Mějme $f \in (X, \tau)^*$ takové, že $f \equiv 0$ na M a nechť je $x \in X$. Pak existuje net $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ v M takový, že $x_i \xrightarrow{\tau} x$. Avšak $f(x_i) = 0$ pro všechna $i \in \mathcal{I}$, a tedy díky spojitosti f je $f(x) = 0$. Tedy $f \equiv 0$.

Ať naopak M není hustý v X, existuje tedy $x \in X \setminus \overline{M}^\tau$. Podle Hahn-Banachovy věty existuje $f \in (X, \tau)^*$ takové, že $f(y) = 0$ pro $y \in \overline{M}^\tau$ a $f(x) \neq 0$. Tedy $f \restriction M \equiv 0$, ale $f \not\equiv 0$. □

Poznámka 2.19. Ukázali jsme vlastně, že M je hustý podprostor X, právě když $(M, \tau)^* = \{f \restriction M; f \in (X, \tau)^*\}$, a tedy $T : f \to f \restriction M$ je bijekce $(X, \tau)^*$ na $(M, \tau)^*$. Budeme proto krátce psát, že $(M, \tau)^* = (X, \tau)^*$ a předchozí lemma tedy můžeme vyslovit jako: M je hustý v X, právě když $(M, \tau)^* = (X, \tau)^*$.

Obecněji lze ukázat, že $M \subset\subset X$ je hustý, právě když pro každý lokálně konvexní prostor Y je $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(M, Y)$, kde touto rovností myslíme, že zobrazení $T : f \to f \restriction M$ je spojitá lineární bijekce $\mathcal{L}(X, Y)$ na $\mathcal{L}(M, Y)$.

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu charakterisace tlustých množin pomocí barelovanosti.

Věta 2.20. *Mějme X Banachův a buď $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) *A je tlustá.*
(b) $\operatorname{span} A$ *je hustý a barelovaný prostor.*

Důkaz. Nechť je nejprve A tlustá. Pak $\operatorname{span} A$ je hustá v X. Pokud by tomu tak nebylo, tak existuje $x \in X \setminus \overline{\operatorname{span} A}$. Z Hahn-Banachovy věty existuje $x^* \in S_{X^*}$ takové, že $x^*(y) = 0$ pro všechna $y \in \overline{\operatorname{span} A}$ a $x^*(x) \neq 0$. Pak $(nx^*)_{n=1}^{\infty}$ je bodově omezená na A, neboť pro $x \in A$ a $n \in \mathbb{N}$ je $nx^*(y) = 0$, ale evidentně není omezená v X^*. To je však ve sporu s větou 2.4.

Tedy podle předchozího lemmatu 2.18 je $X^* = (\operatorname{span} A)^*$. Díky tomu a charakterisaci z věty 2.4 máme, že pro každou posloupnost v $(\operatorname{span} A)^*$ platí princip stejnoměrné omezenosti. Tudíž dle lemmatu 2.17 je $(\operatorname{span} A)$ barelovaný.

Ať naopak platí (b). Jelikož je $\operatorname{span} A$ barelovaný, platí pro něj princip stejnoměrné omezenosti podle lemmatu 2.17. Konkrétněji, je-li (y_n^*) posloupnost v $(\operatorname{span} A)^*$, jež je bodově omezená na $\operatorname{span} A$, tak je omezená v $(\operatorname{span} A)^*$.

Ale jelikož je $\operatorname{span} A$ hustá, tak podle lemmatu 2.18 je $(\operatorname{span} A)^* = X^*$. Je-li tedy posloupnost $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ bodově omezená na A, pak je bodově omezená na $\operatorname{span} A$, neboť totiž pro $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in \operatorname{span} A$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $x_i \in A$ máme

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i||x_n^*(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x_i)| < \infty.$$

Tudíž, je-li (x_n^*) posloupnost v X^*, jež je bodově omezená na A, tak je omezená v X^*, a A je tedy tlustá dle věty 2.4. □

2.4. **Banach–Steinhausova věta.** Díky předchozím charakterisacím můžeme vyslovit následující obecnější versi Banachovy–Steinhausovy věty o limitě spojitých lineárních operátorů.

Věta 2.21 (Banach–Steinhaus). *Mějme X, Y Banachovy a nechť $A \subset X$ je tlustá množina.*

Jestliže $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$, která konverguje bodově pro každé $x \in A$, pak existuje právě jedno $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, že $T_n \to T$ bodově na A.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že bodová limita posloupnosti (T_n) je lineární a spojitá na $\operatorname{span} A$, a následně, že k ní existuje jediné spojité lineární rozšíření T na X.

Posloupnost $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je pro všechna $x \in A$ konvergentní, tudíž omezená. Tedy (T_n) je posloupnost prvků $\mathcal{L}(X, Y)$ bodově omezená na tlusté množině A, proto dle věty 2.4 je i (T_n) omezená v normě $\mathcal{L}(X, Y)$. Tedy existuje $K > 0$, že $\|T_n\| < K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost T_n konverguje bodově pro $x \in A$, proto konverguje bodově i pro $x \in \operatorname{span} A$. Je-li totiž $x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j \in \operatorname{span} A$ pro $\alpha_j \in \mathbb{F}$ a $x_j \in A$, pak z linearity T_n máme

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j T_n(x_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lim_{n\to\infty} T_n(x_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \widehat{T} x_j,$$

kde $\widehat{T} : \operatorname{span} A \to Y$ je bodová limita T_n na $\operatorname{span} A$.

Ze stejného důvodu, tj. díky linearitě zobrazení T_n, máme, že výsledná limita $\widehat{T} : \operatorname{span} A \to Y$ je lineární. Navíc je spojitá, neboť je-li $x \in \operatorname{span} A$, tak díky spojitosti normy platí

$$\left\|\widehat{T}(x)\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|T_n\| \|x\| \leq K \|x\|.$$

Tudíž $\left\|\widehat{T}\right\| \leq K$.

Máme tedy, že $\widehat{T} : \operatorname{span} A \to Y$ je lineární a spojité. Navíc dle věty 2.20 je span A hustou podmnožinou X. Prostor Y je Banachův, tedy úplný, proto existuje jediné spojité rozšíření $T : X \to Y$. □

Jako důsledek dostáváme tento speciální případ pro prvky X^*.

Důsledek 2.22. *Mějme X Banachův a $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ posloupnost prvků v X^*. Nechť $A \subset X$ je tlustá a pro $a \in A$ existuje $\lim_{n\to\infty} x_n^*(a)$. Pak existuje jediné $x^* \in X^*$ takové, že $x_n^* \to x^*$ na A.*

Poznámka 2.23. Závěrem ještě poznamenejme, že předchozí věta je opravdu zobecněním známé Banachovy–Steinhausovy věty, viz např. [Fab, důsl. 3.86, str. 120]. Je-li totiž X Banachův, pak je druhé kategorie podle Baireovy věty a tudíž tlustou množinou dle lemmatu 2.1.

2.5. **Tlusté množiny a w^*-integrovatelnost.** V následující části ukážeme souvislost tlustých množin a w^*-integrovatelnosti ve větě 2.27. Nejprve připomeňme následující definice.

Definice 2.24. Mějme X Banachův a (Ω, Σ, μ) prostor s mírou.

Řekneme, že $g : \Omega \to X$ je jednoduchá, jestliže existují $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ a $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \Sigma$ takové, že $g(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}(\omega)$.

Řekneme, že $g : \Omega \to X$ je měřitelná, jestliže existují jednoduché funkce $g_n : \Omega \to X$ takové, že $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0$ μ-s.v.

Řekneme, že $g : \Omega \to X$ je w-měřitelné, je-li $x^*g : \Omega \to \mathbb{F}$ měřitelné pro každé $x^* \in X^*$.

Řekneme, že $g : \Omega \to X^*$ je w^*-měřitelné, je-li $xg : \Omega \to \mathbb{F}$ měřitelné pro každé $x \in X$.

Definice 2.25. Mějme (X, τ) lokálně konvexní prostor a (Ω, Σ, μ) prostor s mírou.

Řekneme, že $f : \Omega \to X$ je w-integrovatelná, jestliže pro všechna $x^* \in (X, \tau)^*$ je $x^* f \in L^1(\mu)$.

Řekneme, že $f : \Omega \to (X, \tau)^*$ je w^*-integrovatelná, jestliže pro všechna $x \in (X, \tau)$ je $xf \in L^1(\mu)$.

Ukážeme, že tlusté množiny jsou nejmenší takové, pro které w^*-integrovatelnost funkcí $g : \Omega \to X^*$ pro $x \in A$ již dává w^*-integrovatelnost, tj. pro všechna $x \in X$. K tomu nejprve ukažme následující lemma.

Lemma 2.26. *Buď X Banachův prostor, τ lokálně konvexní topologie na X, jež je slabší než topologie normy. Dále buď $A \subset X$ τ-tenká a $p \in [1, \infty)$.*

Pak existuje posloupnost $(x_j^*)_{j=1}^\infty$ v $(X, \tau)^*$ a $y \in X$ takové, že $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j^*(x)|^p < \infty$ pro všechna $x \in A$, ale $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j^*(y)|^p$ diverguje.

Důkaz. A je τ-tenká množina, existují tedy τ-nenormující množiny A_n, $n \in \mathbb{N}$, jež tvoří neklesající spočetné sjednocení A, tj. $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, a $A_n \subset A_{n+1}$.

Pak díky lemmatu 1.13 konstruujme posloupnost $(x_j^*)_{j=1}^\infty$ prvků v $(X, \tau)^*$ splňující $\|x_j^*\| = 2^j$ a navíc

$$\sup_{x\in A_j} |x_j^*(x)|^p \le 2^{-j}.$$

Konkrétněji, pro $j \in \mathbb{N}$ najdeme z tohoto lemmatu $y_j^* \in S_{X^*} \cap (X,\tau)^*$, pro které platí, že $\sup_{x \in A_j} |y_j^*(x)| \leq 2^{-j-\frac{j}{p}}$, a položíme $x_j^* = 2^j y_j^*$. Pak

$$\sup_{x\in A_j} |x_j^*(x)|^p = (\sup_{x\in A_j} |x_j^*(x)|)^p \leq (2^j \sup_{x\in A_j} |y_j^*(x)|)^p \leq (2^{\frac{-j}{p}})^p = 2^{-j}$$

a $\left\|x_j^*\right\| = 2^j \left\|y_j^*\right\| = 2^j$, a tedy $(x_j^*)_{j=1}^\infty$ splňuje požadované. Navíc jsou $x_n^* \in X^*$, speciálně jsou tedy $\|\cdot\|_X$-spojité.

Ukážeme nyní, že $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j^*(x)|^p < \infty$ pro všechna $x \in A$. Je-li $x \in A$, pak $x \in A_m$ pro jisté $m \in \mathbb{N}$. Tedy

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^*(x)|^p = \sum_{j=1}^{m-1} |x_j^*(x)|^p + \sum_{j=m}^{\infty} |x_j^*(x)|^p \leq \sum_{j=1}^{m-1} |x_j^*(x)|^p + \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j} < \infty,$$

neboť díky tomu, že (A_n) tvoří neklesající sjednocení, je i $x \in A_n$ pro $n \geq m$, a tudíž $|x_n^*(x)|^p \leq 2^{-n}$.

Tedy $\sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x)|^p < \infty$ pro všechna $x \in A$, a navíc je-li $(x_{n_j}^*)_{j=1}^\infty$ libovolná podposloupnost posloupnosti (x_j^*), pak tato zřejmě též splňuje $\sum_{j=1}^\infty |x_{n_j}^*(x)|^p < \infty$. Tudíž nám stačí namísto této posloupnosti uvážit nějakou její podposloupnost.

Najdeme tedy $y \in X$ a rostoucí posloupnost indexů $(n_j)_{j=1}^\infty$ takovou, jež splňuje $\sum_{j=1}^\infty |x_{n_j}^*(y)|^p = \infty$. Jelikož $\left\|x_j^*\right\| = 2^j$, existuje posloupnost $(y_j)_{j=1}^\infty$ prvků v X taková, že $\|y_j\| = 2^{-j}$ a $1 - \frac{1}{4} \leq |x_j^*(y_j)| \leq 1$.

Jelikož X je Banachův prostor a $\sum_{j=1}^\infty \|y_j\| = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} < \infty$, tak tato absolutně konvergentní řada je konvergentní. Navíc je zřejmě konvergentní i každá řada z ní vybraná (ze stejného důvodu).

Nyní rozlišíme dva případy:

(1) $\lim_{j\to\infty} |x_j^*(y_m)| \neq 0$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$.
(2) $\lim_{j\to\infty} |x_j^*(y_i)| = 0$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$.

V prvním případě, je-li $\lim_{j\to\infty} |x_j^*(y_m)| \neq 0$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, stačí uvážit podposloupnost $(n_j)_{j=1}^\infty$ takovou, že $|x_{n_j}^*(y_m)| \geq \delta$ pro nějaké $\delta > 0$. Pak je $|x_{n_j}^*(y_m)|^p \geq \delta^p > 0$ a stačí tedy položit $y = y_m$, neboť zjevně platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_{n_j}^*(y_m)|^p = \infty.$$

V druhém případě konstruujme indukcí rostoucí posloupnost indexů $(n_j)_{j=1}^\infty$, aby pro všechna $j \in \mathbb{N}$ splňovala následující:

$$\sum_{i=1}^{j-1} |x_{n_j}^*(y_{n_i})| < \frac{1}{4} \quad \text{a zároveň} \quad \frac{2^{n_{j-1}}}{2^{n_j}} \leq \frac{1}{2^{j+1}}.$$

Postupujme indukcí, volme $n_1 = 1$. Jsou-li $n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}$ dány, pak pro všechna $i = 1, 2, \ldots j-1$ máme, že

$$\lim_{n\to\infty} |x_n^*(y_{n_i})| = 0,$$

tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ máme $|x_n^*(y_{n_i})| < \frac{1}{4j}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, j-1$. Pak je totiž pro $n \geq n_0$

$$\sum_{i=1}^{j-1} |x_{n_j}^*(y_{n_i})| \leq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{4j} \leq \frac{1}{4}.$$

Stačí nyní zvolit $n_j \geq n_0$ dosti velké, že

$$2^{n_j} \geq 2^{j+1} 2^{n_{j-1}},$$

aby zároveň posloupnost $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ splňovala druhou podmínku.

Nyní stačí položit $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_{n_j}$. Pak totiž máme pro $m \in \mathbb{N}$ a $i > m$ odhad

$$|x_{n_m}^*(y_{n_i})| \leq \left\|x_{n_m}^*\right\| \|y_{n_i}\| \leq 2^{n_m} 2^{-n_i} = \frac{2^{n_m}}{2^{n_i}} \leq \frac{2^{n_{i-1}}}{2^{n_i}} \leq \frac{1}{2^{i+1}},$$

a tudíž

$$|x_{n_m}^*(y)| = |\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_m}^*(y_{n_j})| \geq |x_{n_m}^*(y_{n_m})| - \sum_{i=1}^{m-1} |x_{n_m}^*(y_{n_j})| - \sum_{i=m+1}^{\infty} |x_{n_m}^*(y_{n_j})| \geq$$

$$\geq (1 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \geq \frac{1}{4}.$$

Proto je pak i $|x_{n_m}^*(y)|^p \geq (\frac{1}{4})^p$ a tedy je zřejmě $\sum_{j=1}^{\infty} |x_{n_j}^*(y)|^p$ divergentní řada, čímž je tvrzení ukázáno. □

Nyní již můžeme formulovat následující charakterisaci tlustých množin pomocí w^*-integrovatelnosti.

Věta 2.27. *Buď X Banachův prostor, $A \subset X$ a $p \in [1, \infty]$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) A je tlustá.

(b) Je-li (Ω, Σ, μ) prostor s mírou a $g : (\Omega, \Sigma) \to X^*$ w^*-měřitelné zobrazení takové, že pro každé $x \in A$ je $xg \in L^p((\Omega, \Sigma, \mu))$, pak $xg \in L^p(\mu)$ pro všechna $x \in X$.

Důkaz. $(a) \to (b)$. Nechť $A \subset X$ je tlustá množina a buď (Ω, Σ, μ) prostor s mírou. Nechť $g : (\Omega, \Sigma) \to X^*$ je w^*-měřitelné, tedy pro všechna $x \in X$ je xg měřitelné zobrazení.

Ať je $p \in [1, \infty]$. Podle předpokladu je $xg \in L^p(\mu)$ pro všechna $x \in A$, tedy $\|xg\|_{L^p} < \infty$ pro každé $x \in A$.

Položme

$$A_n = \{x \in A; \|xg\|_{L^p} \leq n\}.$$

Pak $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ máme, že $A_n \subset A_{n+1}$. Tedy, jelikož je A tlustá množina, existuje $m \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$, že $\overline{\mathrm{aco}} A_m \supset \delta B_X$.

Stačí tedy ukázat, že $xg \in L^p(\mu)$ pro všechna $x \in \overline{\mathrm{aco}} A_m$. Je-li totiž $x \in X$, pak $x \in K B_X \subset \frac{K}{\delta} \overline{\mathrm{aco}} A_m$ a tedy $\frac{\delta}{K} x \in \overline{\mathrm{aco}} A_m$ pro nějaké $K > 0$. Pak

$$\|xg\|_{L^p} = \frac{K}{\delta} \left\|(\frac{\delta}{K}) xg\right\|_{L^p} < \infty.$$

Avšak pro $x \in \mathrm{aco}\, A_m$ máme, že $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, kde $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq 1$ a $x_i \in A_m$, proto dostáváme

$$\|xg\|_{L^p} = \left\|(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) g\right\|_{L^p} = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i g\right\|_{L^p} \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|x_i g\|_{L^p} \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| m \leq m,$$

tedy pro $x \in \mathrm{aco}\, A_m$ je $xg \in L^p(\mu)$ a navíc $\|xg\|_{L^p} \leq m$ (ukázali jsme vlastně ve skutečnosti více – a to, že A_m je absolutně konvexní množinou).

Je-li $x \in \overline{\mathrm{aco}} A_m$, existuje posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, že $x_n \to x$ a $x_n \in \mathrm{aco}\, A_m$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dále je $|x_n(g(\omega)) - x(g(\omega)| \leq \|x_n - x\|_X \, \|g(\omega)\|_{X^*}$, tedy $x_n g$ konverguje bodově k xg. Je-li $p \in [1, \infty)$, pak z Fatouova lemmatu máme, že

$$\|xg\|_{L^p}^p = \int_\Omega |x \circ g|^p d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |x_n \circ g|^p d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |x_n \circ g|^p d\mu \leq m^p < \infty.$$

Je-li $p = \infty$, pak

$$\|xg\|_{L^\infty} = \inf\{K > 0; |xg| \leq K \text{ pro } \mu\text{-s.v. } \omega \in \Omega\}.$$

Buď nyní $\varepsilon > 0$. Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|x_n g\|_{L^\infty} \leq m$, tak je pro každé $n \in \mathbb{N}$ $|x_n g(\omega))| \leq m + \varepsilon$ pro μ-s.v. $\omega \in \Omega$. Jelikož $x_n g$ konverguje k xg bodově, tak pro s.v. $\omega \in \Omega$ máme $|xg(\omega)| \leq m + \varepsilon$, a proto $\|xg\|_{L^\infty} \leq m + \varepsilon$. Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo voleno libovolně, je $\|xg\|_{L^\infty} \leq m$ (a tedy jsme vlastně ukázali, že A_m je absolutně konvexní a uzavřená).

Tedy $xg \in L^p(\mu)$ a $(a) \to (b)$ je tedy tímto ukázáno.

Nyní se obraťme k důkazu $(b) \to (a)$. Postupujme sporem, uvažme, že A je tenká, najdeme prostor s mírou (Ω, Σ, μ) a w^*-měřitelné zobrazení $g : (\Omega, \Sigma) \to X^*$, že $\int_\Omega |x \circ g|^p d\mu < \infty$ pro všechna $x \in A$, ale $\sup_{x \in X} \int_\Omega |x \circ g|^p d\mu = \infty$, je-li $p \in [1, \infty)$, resp. $\|xg\|_{L^\infty(\mu)} < \infty$ pro $x \in A$, ale $\sup_{x \in X} \|xg\|_{L\infty(\mu)} = \infty$, je-li $p = \infty$.

Buď $\Omega = \mathbb{N}$ a μ aritmetická míra na $\mathbb{N}$. Pak závěr plyne z předcházejícího lemmatu 2.26.

Označíme totiž $g(j) = x_j^*$ pro $j \in \mathbb{N}$. Ať je nejprve $p \in [1, \infty)$, pak existuje dle předcházejícího lemmatu (přímo pro τ topologii normy) posloupnost v X^*, že $\sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j^*(x)|^p < \infty$ pro všechna $x \in A$, ale přitom existuje $y \in X$ takové, že $\sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j^*(y)|^p$ diverguje.

Je-li $p = \infty$, existuje podle věty 2.7 posloupnost $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ v X^*, jež je bodově omezená na A, ale není w^*-omezená, tj. $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| < \infty$ pro každé $x \in A$, ale $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(y)| = \infty$ pro nějaké $y \in A$. To ukazuje platnost tvrzení pro $p = \infty$, je totiž $\|xg\|_{L^\infty(\mu)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|$ pro $x \in X$. □

2.6. **Tlusté a w^*-tlusté množiny.** V této části krátce shrňme výsledky pro tlusté množiny v Banachově prostoru. Je-li totiž X Banachův, tak patrně dostáváme důležitý případ, volíme-li v předchozím za lokálně konvexní topologii τ přímo topologii danou normou.

Poznámka 2.28. Je-li τ přímo topologie daná normou na Banachově prostoru X, pak $A \subset X$ je nenormující, pokud $\overline{\mathrm{aco}} A \not\supset \delta B_X$ pro žádné $\delta > 0$, což je podle lemmatu 1.13 právě, když $\inf_{x^* \in S_{X^*}} \sup_{x \in A} |x^*(x)| = 0$. Množina pak je tenká, je-li spočetným neklesajícím sjednocením nenormujících množin, a tlustá, pokud není tenká.

Máme-li X Banachův prostor, pak tedy platí následující charaterisace pro tlusté množiny, jak je shrnuto v [Nyg, věta 1.1, str. 59].

Věta 2.29. *Buď X Banachův prostor a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) A je tlustá množina.

(b) Je-li Y normovaný lineární prostor a $\Gamma \subset \mathcal{L}(X, Y)$ bodově omezená na A, tj. pro všechna $x \in A$ je

$$\sup_{L \in \Gamma} \|Lx\| < \infty,$$

pak je Γ *omezená v* $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$.

(c) *Je-li* $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ *posloupnost v* X^*, *jež je omezená bodově na* A, *pak je* $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ *omezená v* X^*.

(d) *Je-li* $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ *posloupnost v* X^*, *jež je omezená bodově na* A, *pak je* $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ w^**-omezená v* X^*.

(e) *Je-li* Y *Banachův a* $T : Y \to X$ *lineární a spojité, takové, že* $\operatorname{Rng} T \supset A$, *pak* $\operatorname{Rng} T = X$.

(f) $\operatorname{span} A$ *je hustý a barelovaný prostor.*

(g) *Je-li* (Ω, Σ, μ) *prostor s mírou,* $p \in [1, \infty]$ *a* $g : (\Omega, \Sigma) \to X^*$ w^**-měřitelné zobrazení, takové že pro každé* $x \in A$ *je* $xg \in L^p((\Omega, \Sigma, \mu))$, *pak je* $xg \in L^p(\mu)$ *pro všechna* $x \in X$.

Důkaz. Důkaz ekvivalence $(a) - (c)$ je obsažen v tvrzení 2.4, ekvivalence (a) a (d) ve větě 2.7, ekvivalence (a) a (e) v 2.12, ekvivalence (a) a (f) je tvrzení 2.20 a ekvivalence (a) a (g) je vlastně tvrzení 2.27. □

Poznámka 2.30. Poznamenejme, že ekvivalence prvních čtyř tvrzení $(a) - (d)$ a tvrzení (f) platí i pokud X není Banachův. Pojem tlusté a tenké množiny lze totiž zřejmě definovat bez předpokladu na úplnost prostoru X, a jak lze snadno nahlédnout, v důkazu vět 2.4, 2.7 a 2.20 jsme jej nijak nevyužili.

2.6.1. *Tlusté množiny na duálu,* w^**-tlusté množiny.* O něco zajímavější je pak situace na duálu X^* Banachova prostoru X. Pak máme na X^* tři následující lokálně konvexní topologie, jež jsou slabší, než topologie daná normou na X^* – a to přímo normovou topologii na X^*, w-topologii na X^* a w^*-topologii na X^* (a v obecném případě mohou tyto být různé).

Můžeme proto na X^* definovat tři druhy tlustých množin, tj. řekneme, že

- $A \subset X^*$ je tlustá, je-li A tlustá, bráno pro normovou topologii na X^*, tj. lokálně konvexní prostor $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$,
- $A \subset X^*$ je w-tlustá, je-li A τ-tlustá pro lokálně konvexní prostor (X^*, w), kde $w = \sigma(X^*, X^{**})$,
- $A \subset X^*$ je w^*-tlustá, je-li A τ-tlustá pro lokálně konvexní prostor (X^*, w^*), kde $w^* = \sigma(X^*, X)$.

Poznámka 2.31. Podle definice je $A \subset X^*$ w^*-nenormující, pokud $\overline{\text{aco}}^{w^*} A \not\supset \delta B_{X^*}$ pro žádné $\delta > 0$. Jelikož $(X^*, w^*)^* = X$, tak dle lemmatu 1.13 je $A \subset X^*$ w^*-nenormující, právě když je $\inf_{x \in S_X} \sup_{x \in A} |x^*(x)| = 0$.

Nicméně, je ihned patrno, že pojmy tlusté a w-tlusté množiny na X^* splývají, jak ostatně ukazuje následující (obecnější) lemma.

Lemma 2.32. *Mějme* X *Banachův a buď* τ *lokálně konvexní topologie na* X *slabší než topologie daná normou. Pak platí následující.*

(a) *Je-li* τ' *lokálně konvexní topologie na* X *taková, že* $\tau' \subset \tau$, *pak každá* τ*-tlustá množina je* τ'*-tlustá.*

(b) *Ve všech topologiích přípustných pro* $(X, \tau)^*$ *jsou tlusté množiny stejné (je-li* $A \subset X$ *a* σ *přípustná topologie pro* $(X, \tau)^*$, *pak* A *je* σ*-tlustá právě když je* τ*-tlustá).*

Speciálně, $A \subset X$ *je tlustá v* X, *právě když je* w*-tlustá.*

Důkaz. (a) Triviálně z definice pro každou množinu $A \subset X$ platí $\overline{\text{aco}}^{\tau} A \subset \overline{\text{aco}}^{\tau'} A$, neboť topologie τ je silnější než topologie τ', tedy obsahuje více uzavřených množin.

Tedy je-li A τ'-nenormující, pak je i τ-nenormující. Je-li tedy A τ'-tenká, je i τ-tenká. Tedy je-li A τ-tlustá, je i τ'-tlustá. Tedy platí (a).

(b) Zvolme σ přípustnou lokálně konvexní topologii pro $(X,\tau)^*$. Z Mazurovy věty [Fab, věta 3.45, str. 102] pro konvexní množinu $C \subset X$ máme $\overline{C}^{\tau} = \overline{C}^{\sigma}$. Tudíž pro každou $A \subset X$ je $\overline{\text{aco}}^{\sigma} A = \overline{\text{aco}}^{\tau} A$.

Proto A je τ-nenormující, právě když je σ-nenormující, tedy $A \subset X$ je τ-tenká, právě když je σ-tenká, tedy je A τ-tlustá, právě když je A τ-tlustá.

Druhá část (b) plyne z toho, že slabá topologie je nejslabší přípustná pro X^*. □

Poznámka 2.33. Předchozí výsledek není nikterak překvapivý, uvědomíme-li si, že pro tlusté množiny platí charakterisace z principu stejnoměrné omezenosti z věty 2.4. V přípustných topologiích jsou totiž stejné omezené množiny dle Mackeyovy věty. [Jar, věta 4, str. 151]

Poznámka 2.34. Je evidentní, že v případě reflexivního prostoru pojem tlusté a w^*-tlusté množiny splývá. Ukážeme, že ve skutečnosti je tímto reflexivita charakterizována.

K tomu nejprve ukažme, že platí následující analogie vět 2.4 a 2.12 i pro w^*-topologii na duálu.

Věta 2.35 (Silný princip stejnoměrné omezenosti pro w^*-tlusté množiny). *Mějme X Banachův a buď $A \subset X^*$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*

(a) A je w^*-tlustá.
(b) Je-li Y normovaný lineární prostor a $\Gamma \subset \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ množina spojitých, duálních operátorů, jež je bodově omezená na A, pak je Γ omezená v $\mathcal{L}(X^*, Y^*)$.
(c) Je-li $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v X, jež je bodově omezená na A, pak je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená v X.

Důkaz. Důkaz bude analogický důkazu věty 2.4, tj. silnému principu stejnoměrné omezenosti.

$(a) \to (b)$. Buď $\Gamma \subset \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ množina spojitých duálních operátorů, jež je bodově omezená na w^*-tlusté množině $A \subset X^*$. Jelikož jsou $T^* : X^* \to Y^*$, $T^* \in \Gamma$ duální, jsou w^*-w^* spojité [Jar, tvrzení 1, str. 161]. Položme

$$A_n = \{x^* \in A; \|T^* x^*\| \leq n, T^* \in \Gamma\}.$$

Z bodové omezenosti Γ na A dostáváme, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Navíc zřejmě pro $n, m \in \mathbb{N}$ platí $A_n \subset A_m$, je-li $n \leq m$.

Protože A je w^*-tlustá a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tvoří neklesající spočetné sjednocení, nutně musí existovat $m \in \mathbb{N}$, že A_m není w^*-nenormující. Tedy $\overline{\text{aco}}^{w^*} A_m \supset \delta B_{X^*}$ pro nějaké $\delta > 0$.

Potom, je-li $T^* \in \Gamma$ libovolné, máme dle lemmatu 1.7

$$\sup_{x^* \in A_m} \|T^* x^*\| = \sup_{x^* \in \overline{\text{aco}}^{w^*} A_m} \|T^* x^*\|,$$

neboť $\|\cdot\|_{Y^*}$ je na Y^* w^*-zdola polospojitá [Fab, př. 3.31, str. 149] a $T^* : X^* \to Y^*$ je w^*-w^* spojité. Proto

$$\|T^*\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|T^* x^*\| = \frac{1}{\delta} \sup_{x^* \in \delta B_{X^*}} \|T^* x^*\| \leq \frac{1}{\delta} \sup_{x^* \in \overline{\text{aco}}^{w^*} A_m} \|T^* x^*\| =$$
$$= \frac{1}{\delta} \sup_{x^* \in A_m} \|T^* x^*\| \leq \frac{m}{\delta}.$$

Tedy pro $T^* \in \Gamma$ je $\|T^*\| \leq \frac{m}{\delta}$, přičemž tento odhad je stejnoměrný a nezávislý na T^* (m ani δ na této volbě nezávisí). Proto je Γ je omezená v $(\mathcal{L}(X^*, Y^*), \|\cdot\|)$.

Implikace $(b) \to (c)$ je triviální, stačí položit $Y = \mathbb{F}$ a $\Gamma = (x_n)_{n=1}^\infty$ jako posloupnost v X^{**}. Pak na $x_n : X^* \to \mathbb{F}$ můžeme nahlížet jako na duální operátory k operátorům $z_n : \mathbb{F} \to X$ předpisem $z_n(t) = tx_n$.

$(c) \to (a)$ plyne z věty 2.4 z $(c) \to (a)$ pro Banachův prostor X^* a lokálně konvexní topologii $\tau = w^*$ na X^*. □

Analogicky platí následující varianta věty 2.12.

Věta 2.36. *Mějme X Banachův prostor a $A \subset X^*$. Pak tvrzení (a) implikuje tvrzení (b).*

(a) A je w^*-tlustá.
(b) Je-li Y normovaný lineární prostor, $T^* : Y^* \to X^*$ spojitý lineární duální operátor takový, že $\operatorname{Rng} T^* \supset A$, pak je $\operatorname{Rng} T^* = X^*$.

Důkaz. $(a) \to (b)$. Postupujme analogicky jako v důkazu věty 2.12. Mějme $A \subset X^*$ w^*-tlustou množinu a $T^* : Y^* \to X^*$ spojitý duální operátor, že $\operatorname{Rng} T^* \supset A$, kde $A \subset X^*$ je w^*-tlustá. Pak je $Y = \bigcup_{n=1}^\infty nB_{Y^*}$, a tedy

$$A = T^*Y^* \cap A = A \cap \bigcup_{n=1}^\infty nT^*B_{Y^*} = \bigcup_{n=1}^\infty (nT^*B_{Y^*} \cap A).$$

Jelikož je A w^*-tlustá, musí být pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ množina $(mT^*B_{Y^*} \cap A)$ w^*-nenormující. Proto w^*-uzavřený absolutně konvexní obal obsahuje δB_{X^*} pro nějaké $\delta > 0$, tj. $\overline{\text{aco}}^{w^*}(A \cap mT^*B_{Y^*}) \supset \delta B_{X^*}$. Avšak $A \cap mT^*B_{Y^*}$ je absolutně konvexní a tedy díky lemmatu 1.5 je $\overline{mT^*B_{Y^*} \cap A}^{w^*} \supset \delta B_{X^*}$, proto $m\overline{T^*B_{Y^*}}^{w^*} \supset \delta B_{X^*}$

Podle Alaoglu-Bourbakiho věty [Fab, věta 3.37, str. 99] je B_{Y^*} w^*-kompaktní, a jelikož $T^* : Y^* \to X^*$ je duální, je $w^* - w^*$ spojitý. Proto je $T^*B_{Y^*}$ w^*-kompaktní, jakožto spojitý obraz kompaktní množiny. Speciálně tedy je $T^*B_{Y^*}$ w^*-uzavřená, tedy $mT^*B_{Y^*} = m\overline{T^*B_{Y^*}}^{w^*}$, a proto $T^*B_{Y^*} \supset \frac{\delta}{m} B_{X^*}$.

Díky linearitě je tedy T^* na, tj. $\operatorname{Rng} T^* = X^*$. □

Poznámka 2.37. Poznamenejme, že ve skutečnosti platí v předchozí větě i druhá implikace, tj. analogie k větě 2.12 a tudíž vlastnost (b) v předchozí větě w^*- tlusté množiny ve skutečnosti charakterisuje, viz [Nyg, str. 63—64].

Důkaz této implikace je kompletně analogický důkazu implikace $(b) \to (a)$. Opět stačí vzít w^*-tenkou množinu $A \subset X$ a položit $Y = \operatorname{span}(\overline{\text{aco}}^{w^*}(A) \cap B_{X^*})$. Zcela analogicky se uváží kanonické vnoření Y do X. Nicméně je technicky náročné ukázat, že Y je duální prostor, a že kanonické vnoření, které bychom konstruovali, je w^*-w^* spojité (tj. duální operátor).

Nyní již můžeme vyslovit následující charakterisaci reflexivity prostoru.

Věta 2.38 (charakterisace reflexivity). *Mějme X Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když w^*-tlusté a tlusté množiny na X^* jsou shodné.*

Důkaz. Je-li X reflexivní, pak X^* je Banachův a $(X^*, w^*)^* = X^{**}$. Tedy w^* je přípustná topologie pro X^{**} a tedy dle lemmatu 2.32 jsou tlusté a w^*-tlusté množiny na X^* shodné.

Ať naopak X není reflexivní. Ukážeme, že existuje w^*-tlustá množina, jež není tlustá. Existuje $x^* \in X^{**} \setminus X$.[2] Pak $E = \ker x^*$ je uzavřený podprostor X^* a má kodimensi 1.

Jednoduché je nahlédnout, že E je tenká množina v X^*, a to díky charakterisaci z věty 2.20 – E totiž není hustý v X^*.

Ukážeme, že E je w^*-tlustou množinou v X^*, použijeme charakterisaci z věty 2.36, resp. z následující poznámky 2.37. Mějme Y Banachův a $T^* : Y^* \to X^*$ duální operátor takový, že $\operatorname{Rng} T^* \supset E$. Jelikož E má kodimensi 1 v X^*, tak nastane právě jedna z možností $\operatorname{Rng} T^* = X^*$ nebo $\operatorname{Rng} T^* = E$. Ukážeme, že nemůže nastat $\operatorname{Rng} T^* = E$.

Nejprve nahlédněme, že E je $\|\cdot\|$ X^*-uzavřený podprostor X^* (jelikož je $x^{**} \in X^{**}$), avšak E není w^*-uzavřený, neboť X^{**} není w^*-spojitý (E je w^*-hustý v X^*, je totiž jádrem nespojitého lineárního funkcionálu).

Avšak podle [Rud, věta 4.14, str. 96] je $\operatorname{Rng} T^*$ uzavřený podprostor X^*, právě když je w^*-uzavřený. Tudíž možnost $\operatorname{Rng} T^* = E$ nemůže nastat, a proto $\operatorname{Rng} T^* = X^*$. Proto E je w^*-tlustá. □

Přímo z důkazu předchozího tvrzení dostáváme následující důsledek.

Důsledek 2.39. *Je-li X nereflexivní Banachův prostor a $x^{**} \in X^{**} \setminus X$, pak $\ker x^{**} \cap S_{X^*}$ je w^*-tlustá množina v X^*.*

Důkaz. Pokud X není reflexivní a $x^{**} \in X^{**} \setminus X$, tak z důkazu předchozí věty plyne, že $\ker x^{**}$ je w^*-tlustá množina. Jelikož $\ker x^{**} = \operatorname{span}(\ker x^{**} \cap S_{X^*})$, tak tvrzení plyne z lemmatu 2.1. □

Shrňme ještě tedy závěrem této části charakterisace pro w^*-tlusté podmnožiny X^*, jak je shrnuto v [Nyg, věta 1.5, str. 63].

Věta 2.40. *Buď X Banachův prostor a $A \subset X^*$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) A je w^*-tlustá.
(b) Je-li Y normovaný lineární prostor a $\Gamma \subset \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ množina spojitých duálních operátorů, jež je bodově omezená na A, je omezená v $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.
(c) Je-li $(x_n)_{n=1}^\infty$ posloupnost v X, jež je bodově omezená na A, je omezená v X.
(d) Je-li $(x_n)_{n=1}^\infty$ posloupnost v X, jež je bodově omezená na A, je slabě omezená v X.
(e) Je-li Y normovaný lineární prostor a $T^* : Y^* \to X^*$ spojitý lineární duální operátor, že $\operatorname{Rng} T^* \supset A$, je $\operatorname{Rng} T^* = X^*$.

Důkaz. Důkaz $(a) - (c)$ je v tvrzení 2.35. Důkaz ekvivalence (a) a (d) je tvrzení 2.7 s přihlédnutím k tomu, že $(X^*, w^*)^* = X$ a w^*-topologie je v tomto případě topologie $\sigma((X^*, w^*)^*, X^*) = \sigma(X, X^*)$, tj. slabá topologie na X.

Ekvivalence (a) a (e) je ukázána v tvrzení 2.36 a poznámce 2.37. □

Poznámka 2.41. Z lemmatu 2.26 máme, že je-li $A \subset X^*$ w^*-tenká a $p \in [1, \infty)$, pak existuje posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ v X a $y^* \in X^*$, že $\sum_{n=1}^\infty |x^*(x_n)|^p < \infty$ pro každé $x^* \in A$, ale $\sum_{n=1}^\infty |y^*(x_n)|^p$ diverguje. Navíc z věty 2.7 existuje posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ v X a $y^* \in X^*$ splňující $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)| < \infty$ pro každé $x^* \in A$, ale $\sup_{n\in\mathbb{N}} |y^*(x_n)| = \infty$.

[2] Přirozeně zde chápeme X jako $X = \varepsilon X \subset\subset X^{**}$, tj. jako kanonické vnoření X do X^{**}.

Platí proto následující analogické tvrzení k implikaci $(b) \to (a)$ ve větě 2.27: Je-li $A \subset X^*$ w^*-tenká a $p \in [1, \infty]$, pak existuje prostor s mírou (Ω, Σ, μ) a $g : (\Omega, \Sigma) \to X$ w-měřitelné zobrazení takové, že pro každé $x^* \in A$ je $x^* g \in L^p((\Omega, \Sigma, \mu))$, ale $y^* g \notin L^p(\mu)$ pro nějaké $y^* \in X^*$.

Stačí opět totiž vzít jako $(\Omega, \Sigma) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ a μ aritmetickou míru na $\mathbb{N}$ a pak položit $g(n) = x_n$, kde $(x_n)_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti jako výše.

3. Vektorová integrace, Nikodýmova věta

V následující kapitole ukážeme jeden příklad tlusté množiny v Banachově prostoru měřitelných funkcí. Budeme přitom kromě výsledků z předchozí části využívat známý výsledek Nikodýma o omezenosti vektorových měr, viz např. [Die, str. 14].

Nejprve přistupme k definicím.

Definice 3.1. Buď X Banachův prostor a (Ω, Σ) měřitelný prostor. Zobrazení $F : \Sigma \to X$ nazveme konečně aditivní vektorovou mírou, jestliže splňuje

- $F(\emptyset) = 0$,
- $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$, jsou-li $A, B \in \Sigma$ po dvou disjunktní.

Řekneme, že F je spočetně aditivní vektorová míra, platí-li navíc

- $F(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty F(A_n)$, jsou-li $A_n \in \Sigma$ po dvou disjunktní množiny, přičemž konvergenci vpravo chápeme jako bezpodmínečnou v normě prostoru X.

Dále, variaci vektorové míry F na $E \in \Sigma$ definujeme jako

$$|F|(E) = \sup\{\sum_{j=1}^m \|F(E_j)\|_X \,; (E_j)_{j=1}^m \text{ tvoří disjunktní rozklad } E \text{ prvky } \Sigma\}$$

a je-li $|F|(\Omega) < \infty$, řekneme, že F je míra s omezenou variací.

Semivariaci vektorové míry F na $E \in \Sigma$ definujeme jako

$$\|F\|(E) = \sup\{|x^* F|(\Omega); x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$$

a je-li $\|F\|(\Omega) < \infty$, řekneme, že F je míra s omezenou semivariací.

Poznámka 3.2. Zřejmě platí, že $\|F\|(\Omega) \leq |F|(\Omega)$.

Pro konečně aditivní vektorové míry platí, že mají omezenou semivariaci právě, když jsou omezené. [Die, věta 11, str. 4]. Takovéto míry budeme dále nazývat omezenými vektorovými mírami.

Definice 3.3. Buď X Banachův a (Ω, Σ) měřitelný prostor. Pak definujeme

$$B(\Sigma, X) \equiv \{f : \Omega \to X; f \text{ omezená, měřitelná}\}$$

a pro $f \in B(\Sigma, X)$ položíme $\|f\|_{B(\Sigma,X)} = \sup_{\omega\in\Omega} \|f(\omega)\|_X$.

Dále definujme prostor X-hodnotových jednoduchých funkcí $S(\Sigma, X)$ jako

$$S(\Sigma, X) \equiv \{f : \Omega \to X; f \text{ jednoduchá}\}.$$

Poznámka 3.4. Připomeňme, že funkci $f : (\Omega, \Sigma) \to X$ nazveme měřitelnou, jestliže je stejnoměrnou limitou X-hodnotových jednoduchých funkcí.

Poznámka 3.5. Bude-li $X = \mathbb{F}$, budeme namísto $B(\Sigma, \mathbb{F})$ psát krátce $B(\Sigma)$ a namísto $S(\Sigma, \mathbb{F})$ pouze $S(\Sigma)$.

Cílem této kapitoly bude ukázat následující tvrzení, které nám dává konkrétní příklad tlusté množiny.

Věta 3.6 (o tlustosti charakteristických funkcí). *Je-li (Ω, Σ) měřitelný prostor, pak charakteristické funkce na (Ω, Σ), tj. $\{\chi_E; E \in \Sigma\}$ jsou tlustou podmnožinou $B(\Sigma)$.*

Lemma 3.7. *Je-li (Ω, Σ) měřitelný prostor a X Banachův, pak je i $B(\Sigma, X)$ Banachův.*

Důkaz. Zřejmě je $B(\Sigma, X)$ lineární prostor (neboť součet a skalární násobek omezených a měřitelných funkcí je omezená a měřitelná funkce). Těžké není nahlédnout ani to, že $\|f\|_{B(\Sigma,X)}$ je normou na $B(\Sigma, X)$.

K tomu, že $B(\Sigma, X)$ je Banachův, zvolme $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ cauchyovskou posloupnost. Pak pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$\|f_n - f_m\|_{B(\Sigma,X)} \leq \varepsilon,$$

je-li $n, m \geq n_0$. Tudíž i pro všechna $\omega \in \Omega$ je posloupnost $(f_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v X, máme totiž

$$\|f_n(\omega) - f_m(\omega)\|_X \leq \|f_n - f_m\|_{B(\Sigma,X)} \leq \varepsilon.$$

Prostor X je Banachův, tudíž je $(f_n(\omega))$ konvergentní, existuje tedy $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ pro všechna $\omega \in \Omega$. Označíme-li tuto limitu jako $f(\omega)$, pak $f_n \to f$ bodově na Ω. Ukážeme, že $f \in B(\Sigma, X)$ a $f_n \to f$ v $B(\Sigma, X)$.

Je-li $\varepsilon > 0$ dáno a n, m, n_0 jako výše, pak $\|f_n - f_m\|_{B(\Sigma,X)} \leq \varepsilon$, tudíž pro každé $\omega \in \Omega$ máme, že $\|f_n(\omega) - f_m(\omega)\|_X \leq \varepsilon$. Díky spojitosti normy na X dostáváme limitním přechodem $n \to \infty$, že $\|f(\omega) - f_m(\omega)\|_X \leq \varepsilon$ pro $m \geq n_0$. Proto $\|f - f_m\|_X \leq \varepsilon$ a tedy (f_n) konverguje k f v $B(\Sigma, X)$.

Zbývá tedy ukázat, že $f \in B(\Sigma, X)$. Nejprve nahlédneme, že f je omezená. Pro $\varepsilon = 1$ najdeme n_0, n, m jako výše, pak je-li $\omega \in \Omega$, máme

$$\|f(\omega)\|_X \leq \|f(\omega) - f_{n_0}(\omega)\|_X + \|f_{n_0}(\omega)\|_X \leq 1 + \|f_{n_1}\|_{B(\Sigma,X)}$$

a tedy $\|f\|_{B(\Sigma,X)} < \infty$.

To, že $f : \Omega \to X$ je měřitelná, tj. stejnoměrnou limitou jednoduchých, nahlédneme snadno. Je-li $k \in \mathbb{N}$, najdeme $n \in \mathbb{N}$, že $\|f - f_n\|_{B(\Sigma,X)} \leq \frac{1}{2k}$. Funkce f_n je měřitelná, existuje tedy jednoduchá funkce s_k, že $\|f_n - s_k\|_{B(\Sigma,X)} \leq \frac{1}{2k}$. Pak $\|f - s_k\|_{B(\Sigma,X)} \leq \frac{1}{k}$, tudíž f je měřitelná. □

Definice 3.8. Buď X Banachův a (Ω, Σ) měřitelný prostor. Pak definujeme

$$ba(\Sigma, X) \equiv \{\nu : \Sigma \to X; \nu \text{ omezená, aditivní}\}$$

a pro $\nu \in ba(\Sigma, X)$ položíme $\|\nu\|_{ba(\Sigma,X)} = \sup_{A\in\Sigma} \|\nu(A)\|_X$.

Lemma 3.9. *Je-li (Ω, Σ) měřitelný prostor a X Banachův, pak je i $ba(\Sigma, X)$ Banachův.*

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu předchozího lemmatu. Snad jediné, v čem se liší, a tudíž si zaslouží pozornost, je aditivita limitní funkce $f : \Sigma \to X$. Jelikož $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou všechny (konečně) aditivní, tak pro disjunktní $A, B \in \Sigma$ máme $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tudíž limitním přechodem dostáváme i $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, a tedy f je (konečně) aditivní. □

Poznámka 3.10. Je-li $\nu : \Omega \to X$ aditivní, tak již nutně musí splňovat $\nu(\emptyset) = 0$. Je pak totiž $\nu(A) = \nu(A \cup \emptyset) = \nu(A) + \nu(\emptyset)$.

Je tedy $ba(\Sigma, X)$ prostor všech X-hodnotových omezených vektorových měr na Ω. Díky [Die, věta 11, str. 4] máme, že supremová norma $\|\nu\|_{ba(\Sigma,X)}$ je na $ba(\Sigma, \nu)$ ekvivalentní normě $\|\nu\|(\Omega)$ – semivariaci vektorové míry ν. Tuto budeme dále na tomto prostoru uvažovat.

Bez důkazu uvedeme následující tvrzení, viz [Die, věta 13, str. 6].

Lemma 3.11 (o $\mathcal{L}(B(\Sigma), X)$). *Mějme X Banachův a (Ω, Σ) prostor s mírou. Pak existuje lineární isometrie $ba(\Sigma, X)$ (tj. X-hodnotových omezených vektorových měr) na $\mathcal{L}(B(\Sigma), X)$.*

Poznámka 3.12. Pro omezenou vektorovou míru $F : \Sigma \to X$ a $f : \Omega \to \mathbb{F}$ jednoduchou tvaru $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j}$ definujeme

$$T_F(f) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j F(E_j), .$$

Pak se dá ukázat, že pro $F \in ba(\Sigma, X)$ je $T_F \in \mathcal{L}(B(\Sigma), X)$ a $\|T_F\| = \|F\|(\Omega)$. Jelikož jednoduché funkce jsou husté v $B(\Sigma)$, neboť měřitelné byly definovány jako stejnoměrná limita jednoduchých, existuje jediné spojité rozšíření T_F na $B(\Sigma)$.

Takto získáme lineární isometrii $T : ba(\Sigma, X) \to \mathcal{L}(B(\Sigma), X)$ z předchozího lemmatu. Pro $f \in B(\Sigma)$ označíme jako $T_F(f) = \int_\Omega f dF$.

V důkazu tvrzení 3.6 se budeme odvolávat na následující výsledek Nikodýma o omezenosti vektorových měr, viz [Die, věta 3.1, str. 14].

Věta 3.13 (Nikodýmova). *Nechť (Ω, Σ) je měřitelný prostor, X Banachův a $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ je množina omezených vektorových měr definovaných na (Ω, Σ) s hodnotami v X. Je-li $\sup_{\alpha \in A} \|F_\alpha(E)\|_X < \infty$ pro všechna $E \in \Sigma$, pak je*

$$\sup_{\alpha \in A} \|F_\alpha\|(\Omega) < \infty.$$

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu tlustosti množiny charakteristických funkcí, ke kterému jsme v této kapitole směřovali.

Důkaz věty 3.6. Podle předchozího je $B(\Sigma)$ Banachův prostor. Ukážeme, že charakteristické funkce, tj. $S = \{\chi_E; E \in \Sigma\}$, jsou tlustou podmnožinou $B(\Sigma)$. K tomu užijeme charakterisace tlustých množin z věty 2.20 a ukážeme, že $\operatorname{span} S$ je hustý a barelovaný prostor v $B(\Sigma)$.

Nahlédnout, že $\operatorname{span} S$ je hustou množinou v $B(\Sigma)$, je snadné, takto byl totiž prostor $B(\Sigma)$ definován. Je totiž $\operatorname{span} S = S(\Sigma)$ a $B(\Sigma)$ je definován jako prostor omezených funkcí, jež jsou stejnoměrnou limitou jednoduchých funkcí, tj. prvků $S(\Sigma)$. Navíc je tedy $S(\Sigma)^* = B(\Sigma)^*$ podle lemmatu 2.18.

Barelovanost $S(\Sigma)$ plyne z Nikodýmovy věty a charakterisaci barelovanosti normovaného lineárního prostoru z lemmatu 2.17.

Podle lemmatu 2.17 je totiž $S(\Sigma)$ barelovaný, právě když pro každou posloupnost $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ v $S(\Sigma)^*$, jež je bodově omezená na $S(\Sigma)$, je (x_n^*) omezená v $S(\Sigma)^*$. Evidentně je posloupnost (x_n^*) bodově omezená na $S(\Sigma)$, právě když je bodově omezená na S.

Avšak je-li (x_n^*) bodově omezená na $S(\Sigma)$, je (x_n^*) i bodově omezená na S, tj. je $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(\chi_E)| < \infty$ pro každé $E \in \Sigma$. Pak z representace $S(\Sigma)^*$ (lemma 3.11 pro

$X = \mathbb{F}$, existuje lineární isometrie $T : ba(\Sigma) \to S(\Sigma)^*)$ je $\{T^{-1}x_n^*; n \in \mathbb{N}\}$ množina omezených vektorových měr. Pro charakteristickou funkci χ_E a $F \in ba(\Sigma)$ máme $TF(\chi_E) = \int \chi_E dF = F(E)$ pro $E \in \Sigma$. Proto je $\sup_{n\in\mathbb{N}} |T^{-1}x_n^*(E)| < \infty$ pro každé $E \in \Sigma$.

Z Nikodýmovy věty máme $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|T^{-1}x_n^*\right\|(\Omega) < \infty$ a tedy i $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^*\| < \infty$, jelikož je T isometrie. Proto je $S(\Sigma)$ barelovaný. □

Jako důsledek této věty dostáváme jako následující důsledek Seeverovu větu.

Důsledek 3.14 (Seever). *Nechť (Ω, Σ) je měřitelný prostor a buď X Banachův. Jestliže $T : X \to B(\Sigma)$ je spojitý lineární operátor, takový, že $\operatorname{Rng} T$ obsahuje $\{\chi_E; E \in \Sigma\}$, pak $\operatorname{Rng} T = B(\Sigma)$.*

Důkaz. Podle věty 3.6 jsou charakteristické funkce jsou tlustou množinou v $B(\Sigma)$. Tvrzení tedy plyne z věty 2.10. □

Jako důsledek uveďme ještě následující versi principu stejnoměrné omezenosti pro prostor $B(\Sigma)$.

Důsledek 3.15 (Nikodýmova). *Nechť (Ω, Σ) je měřitelný prostor, X Banachův a $\{T_\alpha : B(\Sigma) \to X, \alpha \in A\}$ je množina spojitých lineárních operátorů na $B(\Sigma)$ s hodnotami v X.*

Je-li $\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha \chi_E\|_X < \infty$ pro všechna $E \in \Sigma$, pak je $\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha\| < \infty$.

Důkaz. Plyne ihned z věty 3.6 a věty 2.4. □

Jako další důsledek můžeme uvážit variantu o limitě omezených vektorových měr.

Důsledek 3.16. *Nechť (Ω, Σ) je měřitelný prostor, X Banachův a $(F_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost omezených vektorových měr definovaných na (Ω, Σ) s hodnotami v X.*

Jestliže $F_n(E)$ konverguje v X k nějakému $F(E)$ pro každou měřitelnou $E \in \Sigma$, pak $F : \Omega \to X$ je omezená vektorová míra.

Důkaz. Z tvrzení 3.6 plyne, že charakteristické funkce jsou tlustou podmnožinou v $B(\Sigma)$, a tedy lze užít Banachovy–Steinhausovy věty 2.21.

Konkrétněji, $(F_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost omezených vektorových měr, tedy z lemmatu o representaci $\mathcal{L}(B(\Sigma), X)$ jsou $L_n = T^{-1}F_n \in \mathcal{L}(B(\Sigma), X)$. Tyto splňují, že $L_n(\chi_E)$ konverguje k nějakému $L(\chi_E)$ pro každou měřitelnou $E \in \Sigma$. Tedy lze užít věty 2.21 a dostáváme, že $L \in \mathcal{L}(B(\Sigma), X)$, tudíž $T(L) \in ba(\Sigma, X)$ je omezená vektorová míra. □

Důsledek 3.17. *Je-li $A \subset \ell_\infty$ množina vektorů v ℓ_∞, jejichž souřadnice jsou pouze 0 a 1, pak A je tlustá podmnožina ℓ_∞.*

Navíc A je řídká, tudíž není druhé kategorie.

Důkaz. Mějme měřitelný prostor $(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$, kde $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ je potenční množina $\mathbb{N}$ a μ je aritmetická míra na $\mathbb{N}$. Pak $B(\Sigma) = \ell_\infty$.

Pak $\{\chi_E : E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ je právě množina všech posloupností v ℓ_∞, jež mají za své souřadnice právě 0 a 1. První část tvrzení tedy plyne z věty 3.6.

Tato množina je řídká v ℓ_∞, je totiž A uzavřená množina v ℓ_∞ a tedy $X \setminus \overline{A} = X \setminus A$. Je-li $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ libovolná posloupnost v ℓ_∞, pak buď $x \in X \setminus A$ a nebo $x \in A$. Je-li $x \in A$, položíme pro $n \in \mathbb{N}$ $(y_j^n)_{j=1}^\infty = (x_j + 2^{-n})_{j=1}^\infty$. Pak $(y_j^n) \in X \setminus A$ a $\|y^n - x\|_{\ell_\infty} = 2^{-n}$. Tedy $X \setminus A$ je hustá v ℓ_∞. □

Poznámka 3.18. To, že množina A v předchozí větě je řídká, je zdůrazněno, aby bylo ukázáno, že existují tlusté, přesto řídké množiny. Předchozí příklad tedy slouží jako příklad množiny, jež je tlustá, ale ne druhé kategorie, a že tedy ve skutečnosti princip stejnoměrné omezenosti platí i pro menší množiny, než jsou množiny druhé kategorie.

Zdroje

[Die] Diestel, Joe; Uhl, John J. Vector Measures. Mathematical Surveys, Vol. 15. Providence, RI: American Mathematical Society, 1977.

[Fab] Fabian, Marián J., et al. Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis. CMS Books in Mathematics. New York: Springer, 2011.

[Jar] Jarchow, Hans. Locally Convex Spaces. Mathematische Leitfäden. Wiesbaden: B. G. Teubner Verlag, 1981.

[Nyg] Nygaard, Olav. Thick sets in Banach spaces and their properties. Quaest. Math. 29 (2006), no. 1, 59–72

[Rud] Rudin, Walter. Functional Analysis. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. New York: McGraw-Hill, 1973.

.