Oponentský posudek bakalářské práce

Emil Skříšovský: *Tlusté množiny v Banachových prostorech*

Práce se zabývá tlustými a tenkými množinami v Banachových prostorech. Tyto pojmy jsou jistou „absolutně konvexní analogií“ množin druhé a první kategorie. Práce je rozdělena do tří kapitol – v první jsou uvedeny základní definice a základní vlastnosti a charakterizace definovaných pojmů. Druhá kapitola je věnována vztahu tlustých množin k důsledkům Baireovy věty v Banachových prostorech a příbuzným pojmům (princip stejnoměrné omezenosti, Banach-Steinhausova věta, věta o otevřeném zobrazení, barelovanost, w^*-integrovatelnost) a porovnání tlustých a w^*-tlustých množin. Třetí kapitola obsahuje příklad tlusté množiny související s Nikodýmovou větou o omezenosti vektorových měr.

Téma práce je velmi zajímavé, jeho obtížnost přesahuje úroveň bakalářského studia. Student si musel nastudovat základy teorie lokálně konvexních prostorů i vektorové integrace a je třeba ocenit, že tak vcelku úspěšně učinil. Na druhou stranu je na bakalářskou práci text velmi dlouhý, a to na úkor kvality zpracování a srozumitelnosti. Práce menšího rozsahu, avšak lépe zpracovaná by byla lepší volba. Řada jednoduchých a standardních tvrzení je dokazována krkolomně, tvrzení (c) z Lemmatu 1.14 neplatí, důkaz Lemmatu 2.9 je chybný a v kapitole 3 panuje zmatek v definicích. Za přínos práce považuji zejména kapitolu druhou, která je ucelená, z větší části srozumitelná a obsahuje několik netriviálních důkazů vpodstatě dobře zpracovaných (např. Lemma 2.1, Věta 2.4, Věta 2.7, Věta 2.10 a Lemma 2.26).

Následuje seznam připomínek a komentářů.

1. Obecný kontext: V práci mi poněkud chybí názorná prezentace kontextu a osvětlení významu jednotlivých pojmů, které je nahrazeno technickými charakterizacemi. Konkrétněji:

Nechť X je Banachův prostor (či jen normovaný prostor) a τ slabší lokálně konvexní topologie na X.

(i) Pak $A \subset X$ je τ-nenormující, právě když je A obsažena v τ-uzavřené absolutně konvexní řídké množině. Dále, A je τ-tenká, právě když je obsažena v sjednocení rostoucí posloupnosti τ-uzavřených absolutně konvexních množin. Pokud by se toto vyjasnilo na začátku, pak vztah k množinám první kategorie (Lemma 2.1(d)) je zřejmý.

[Mimochodem, za úvahu by stálo i prozkoumat přirozený pojem mezi tenkými množinami a množinami první kategorie – množiny pokrytelné rostoucí posloupností τ-uzavřených konvexních (ne nutně absolutně konvexních) množin.]

(ii) Rovněž hned na počátku by se mělo říci, že z Mazurovy věty plyne, že pro topologie se stejným duálem příslušné pojmy nenormujících (a tedy i tenkých či tlustých) množin splývají. Z neznámého důvodu je toto základní pozorování uvedeno až v Lemmatu 2.32.

(iii) Na místě by bylo i vysvětlit vztah pojmu nenormujících množin ke standardnímu pojmu normujícího podprostoru duálu. Totiž, že $Y \subset\subset X^*$ je normující (v klasickém smyslu), právě když $Y \cap B_{X^*}$ není w^*-nenormující.

2. Strana 3, důkaz Lemmatu 1.5(b): Pro důkaz, že uzávěr konvexní množiny je konvexní se používají nety, a to ne zcela správně. Z toho, že $x, y \in \overline{A}^\tau$ plyne existence netů v A, z nichž jeden konverguje k x a druhý k y. To je pravda, ale zde se navíc používá, že tyto nety jsou indexovány touž množinou. To lze snadno zařídit díky tomu, že τ je translačně invariantní, a tedy v obou případech může být indexovou množinou filtr okolí nuly. Nicméně, možná by bylo lépe pochopitelné, kdyby se důkaz provedl bez netů, s použitím charakterizace uzávěrů pomocí okolí. Nejspíš by to ani nebylo delší.

3. Lemma 1.6: To je tvrzení ve vektorovém prostoru, topologie zde nehraje roli.

4. Strana 4, důkaz Lemmatu 1.7: Zde se krkolomně dokazuje trivialita – používá se Lemma 1.6 a nety. Přitom je to zcela jasné. Nechť $c = \sup_{x \in A} p(x)$. Pak množina $\{x \in X; p(x) \leq c\}$ je absolutně konvexní (protože p je pseudonorma) a τ-uzavřená (protože p je τ-zdola polospojitá), tedy obsahuje $\overline{\operatorname{aco}}^\tau A$.

5. Strana 7, Lemma 1.14:

(i) Body (a) a (b) jsou triviálním důsledkem definice, je zbytečné používat Lemma 1.7 a Lemma 1.13. Je totiž zřejmé, že pro množinu A platí

$$\overline{\operatorname{aco}}^\tau A = \overline{\operatorname{aco}}^\tau (\operatorname{aco} A) = \overline{\operatorname{aco}}^\tau \overline{A}^\tau.$$

(ii) Bod (c) neplatí. Tedy, platí v případě, že A je absolutně konvexní a τ-uzavřená (a pak je to triviální); chybná je úvaha, která obecný případ redukuje na případ absolutně konvexní τ-uzavřené množiny. Například pokud $A = S_X$, sféra prostoru X, pak A není nenormující, ale $A \cap \frac{1}{2} B_X = \emptyset$.

Tvrzení neplatí ani v případě, že A je absolutně konvexní. Je-li totiž X Banachův prostor a $Y \subset X^*$ je w^*-hustý podprostor, který není normující, pak Y není w^*-nenormující, ale $Y \cap B_{X^*}$ je w^*-nenormující.

6. Strana 9, důkaz Lemmatu 2.1(e): Druhá implikace se dokazuje zbytečně složitě. Pokud span $A \subsetneq X$, pak je to absolutně konvexní řídká množina, a tedy nenormující.

7. Strana 9, věta před Definicí 2.3: Výraz „máme korektnost následující definice“ není česky. Lépe „je následující definice korektní“.

8. Strana 9, Věta 2.4(c) – myslí se omezenost v normě, což z formulace není zřejmé.

9. Strana 10, důkaz Věty 2.4:
(i) První věta důkazu není gramatická věta.
(ii) V definici A_n by se druhý středník měl nahradit slovem „pro“.
(iii) Důkaz (c)$\Rightarrow$(a) není proveden sporem, ale nepřímo, tj. obměnou.

10. Strana 11, Poznámka 2.5:
(i) „Vezmeme za fakt“ není česky, rozhodně to nepatří do psané češtiny.
(ii) Stačilo by za $\mathcal{A}$ vzít jednoprvkové množiny, pak by vyjádření bylo jednodušší.

11. Strana 11, Věta 2.7: Pojem bodové omezenosti na A nebyl definován (byl definován jen pro Y normovaný). Nicméně je to srozumitelné.

12. Strana 11, řádky 12-11 zdola: Výraz „q je pseudonorma generující topologii σ“ není šťastný. Vypadá to totiž, jako by topologie σ byla generována pseudonormou q; myslí se zřejmě „jedna ze systému pseudonorem generujících topologii“, což lze krátce vyjádřit výrazem „spojitá pseudonorma“.

13. Strana 13, druhá část důkazu Tvrzení 2.9: Tato část důkazu je špatně. Ano, je třeba ukázat, že $y \in Y$ a že $\sum_n y_n = y$ v prostoru Y. Předvedený důkaz však důkazem není, mimo jiné proto, že se v něm používají nedefinované symboly – například $\|\cdot\|_Y$ aplikovaná na vektory, o nichž nevíme, zda patří do Y (zdůrazňuji, že $\|\cdot\|_Y$ je definována jen na Y). Nelze říkat, že řada $\sum y_n$ konverguje k y v Y, když ještě nevíme, že $y \in Y$. Správný postup je jiný: Nejprve je třeba ukázat, že $y \in Y$. K tomu je nutné využít uzavřenost množiny $\mathcal{A}$ – ta se v textu nevyužívá [využívá se na začátku uzavřenost v Y, ale ne uzavřenost v X]. Teprve když víme, že $y \in Y$, lze pomocí vhodných odhadů ukázat konvergenci v Y.

14. Strana 13, řádek 7 zdola: Předpokládám, že B_X značí uzavřenou kouli. Pak TB_Y nemusí obsahovat $\frac{\delta}{m}B_X$, ale jen $\frac{\delta}{m}U_X$, příslušnou otevřenou kouli, viz citované lemma z [Fab].

15. Strana 14, druhá polovina stránky:
(i) Řádek, kde se odkazuje na Lemma 1.14, není zcela správný, protože se odkazuje na neplatné tvrzení (c) onoho lemmatu. Naštěstí se zde používá jen jedna implikace, a to ta, která triviálně platí, a žádné lemma k tomu potřeba není.
(ii) Proč se zavádí množiny B_n jako rozdíly? Připadá mi, že to je zbytečné, že by se mohlo místo B_n vzít A_n a vyšlo by to stejně.

16. Strana 15, první polovina:
(i) První čtyři řádky jsou správně, ale jsou krkolomné. Z prvního řádku totiž plyne, že $\|x\| \leq \frac{1}{n}$, a tedy $|x^*(x)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$. A to je celé.
(ii) Na řádcích 7–9 se opakuje důkaz jedné implikace Lemmatu 1.13, místo aby se ta implikace použila.
(iii) Dostaneme span $\mathcal{B} \supset$ span $\mathcal{A}$, asi ne rovnost. Ale to stačí. Totéž platí v Poznámce 2.11.

17. Strana 17, začátek důkazu Lemmatu 2.18: Proč používat nety? Je-li $f \in (X, \tau)^*$, pak $\ker f$ je τ-uzavřená. Je-li zároveň τ-hustá, je to celé X.

18. Strana 18, první odstavec: Je to správně, ale krkolomné. Pokud A je tlustá, pak není nenormující, a tedy uzávěr aco A obsahuje okolí nuly. Proto lineární obal A je hustý v X.

19. Strana 18, poslední dva odstavce: Zde je trochu zmatené značení. Z předpokladu víme, že (T_n) konverguje bodově na A. Proto je přirozené označit $\widehat{T}$ nejprve limitu jako zobrazení $A \to Y$. Pak se ukáže (jako v textu), že (T_n) konverguje na span A. Limitu, která je rozšířením $\widehat{T}$ z A na span A, můžeme označit opět $\widehat{T}$.

20. Strana 19, Definice 2.24:
(i) Bylo by na místě upozornit, že x^*g je zkratkou pro složení $x^* \circ g$.
(ii) Bylo by na místě vysvětlit značení xg (i když mu rozumím).

21. Strana 19, odstavec před Lemmatem 2.26: „w^*-integrovatelnost funkcí $g : \Omega \to X^*$ pro $x \in A$" je podivný termín, byť srozumitelný.

22. Strana 20:

(i) Řádek 12: Bylo by vhodné dodat „pro $x \in A$".

(ii) Termín „řada z ní vybraná" není standardní, nicméně je srozumitelný.

(iii) V možnosti (1) se píše $\lim_{j\to\infty} |x_j^*(y_m)| \neq 0$. To není šťastné, protože tento zápis standardně znamená, že limita existuje a je různá od nuly. Zde se však asi myslí, že „není pravda, že limita je nula", což by se formálně zapsalo $\limsup_{j\to\infty} |x_j^*(y_m)| > 0$.

(iv) V prvním případě není třeba vybírat podposloupnost, stačí ověřit, že není splněna nutná podmínka konvergence.

(v) Na posledním řádku má být x_n^* místo $x_{n_j}^*$ a první nerovnost by měla být ostrá.

23. Strany 21-22, důkaz Věty 2.27:

(i) Na straně 21 dole se tvrdí, že se ukázalo, že A_m je absolutně konvexní. To se samozřejmě neukázalo, to by platilo jen, kdyby A byla absolutně konvexní.

(ii) Totéž platí pro tvrzení na straně 22, řádky 10-11, kde se tvrdí, že A_m je absolutně konvexní a uzavřená.

(iii) Důkaz (a)⇒(b) by byl jednodušší a názornější, kdyby se A_n definovaly jinak: $A_n = \{x \in A; \|xg\| \leq n\}$. Pak $A \subset \bigcup_n A_n$, a tedy jedna z nich není nenormující. Přitom A_n je zřejmě absolutně konvexní. Dále je uzavřená díky Fatouovu lemmatu. Tudíž jedna z množin A_n obsahuje okolí nuly, z čehož se snadno důkaz dokončí.

(iv) Důkaz (b)⇒(a) je proveden nepřímo, nikoli sporem.

(v) V charakterizacích pomocí prostoru s mírou se často uvažují prostoru s konečnou mírou. Platila by Věta 2.27 i v případě, že bychom v (b) uvažovali jen konečné míry?

24. Strana 25, důkaz Věty 2.36:

(i) Na třetím řádku má být Y^* místo Y.

(ii) $A \cap mT^*B_{Y^*}$ je absolutně konvexní jen v případě, že A je absolutně konvexní. Nicméně opět je to jednodušší, když se použije postup naznačený v poznámce 23(iii) výše. Z toho, že A je w^*-tlustá a $Rng(T^*) \supset A$ dostaneme, že $Rng(T^*)$ je w^*-tlustá, a tedy $nT^*B_{Y^*}$ není w^*-nenormující pro nějaké n. Protože poslední množina je absolutně konvexní a w^*-kompaktní, obsahuje nějaké normové okolí nuly. Proto T^* je na.

25. Strana 25, Poznámka 2.37:

(i) V druhém odstavci se asi myslí implikace (b)⇒(a) z Věty 2.10.

(ii) Postup naznačený v další větě funguje jen pro w^*-nenormující množinu, ne obecně pro w^*-tenkou (která může být w^*-hustá). To také odpovídá důkazu Věty 2.10, kde se nejprve ukázal speciální případ nenormující množiny a pak se obecný případ na tento převedl.

(iii) Po krátké úvaze jsem došel k názoru, že důkaz této implikace je spíše náročný myšlenkově než technicky – nevyžaduje složité výpočty a argumenty, ale správně sestavenou kombinaci známých vět.

26. Strana 26, důkaz Věty 2.40:

(i) V první větě důkazu chybí slovo „ekvivalence".

(ii) Ekvivalence (a) a (e) ukázána není. Jen jedna implikace, druhá je pouze zmíněna a naznačena.

27. Kapitola 3, celkově: Zdá se, že cílem této kapitoly je důkaz Věty 3.6 a Důsledku 3.17, jakožto konkrétního příkladu tlusté množiny, případně tlusté řídké množiny. Nicméně v této kapitole je spousta zmatku, používá se nestandardní definice měřitelnosti, z nějakého důvodu se dokazuje Lemma 3.7, které se nikde nepoužívá. Lepší by bylo kapitolu buď vynechat (práce by byla dost dlouhá i bez ní), nebo se soustředit jen na důkaz hlavní věty a věci k tomu nezbytné. V dalších poznámkách uvádím komentáře k jednotlivým problematickým místům.

28. Strana 27, Definice 3.1: Máme-li jen dvě množiny, obvykle neříkáme, že jsou „po dvou disjunktní".

29. Strana 27, Poznámka 3.4: Vektorová funkce se obvykle nazývá měřitelnou, pokud je **bodovou** limitou jednoduchých měřitelných funkcí, nikoli stejnoměrnou limitou. To je v souladu s Definicí 2.24, kde je vektorová měřitelná funkce na prostoru s mírou definována jako funkce, která je skoro všude limitou jednoduchých měřitelných. V případě, že máme jen σ-algebru a ne míru, nemáme konvergenci skoro všude, ale bodovou. Navíc, stejnoměrná limita jednoduchých funkcí je vždy omezená, a měřitelné funkce nemusí být omezené.

Omezme se však na omezené měřitelné funkce – tj. na prostor $B(\Sigma, X)$ resp. $B(\Sigma)$. Ve skalárním případě platí, že každá omezená měřitelná funkce je stejnoměrnou limitou jednoduchých měřitelných funkcí, tj. jednoduché funkce jsou husté v $B(\Sigma)$. Ve vektorovém případě to však neplatí (jakmile $\dim X = \infty$). Ve vektorovém případě platí, že v $B(\Sigma, X)$ jsou husté spočetně hodnotové měřitelné funkce.

30. Strana 28, Lemma 3.7 a jeho důkaz:

(i) Myslím, že toto lemma se dále používá jen ve skalárním případě (pokud vůbec), nikoli ve vektorovém případě. Důkaz ve skalárním případě je jednodušší, je to jeden z klasických Banachových prostorů.

(ii) Na konci třetího odstavce se píše, že (f_n) konverguje k f v $B(\Sigma, X)$. To však je v tuto chvíli nesmyslné tvrzení, protože dosud nevíme, že $f \in B(\Sigma, X)$. Správné by bylo říci, že (f_n) konverguje k f stejnoměrně na Ω.

(iii) Závěr důkazu by byl dobře, kdyby jednoduché funkce byly husté v $B(\Sigma, X)$. Proto by byl použitelný ve skalárním případě, nikoli však obecně.

(iv) Správný a elegantní důkaz pro skalární případ by byl tento: Pokud (f_n) je cauchyovská v $B(\Sigma)$, pak je stejnoměrně cauchyovská na Ω. Proto je stejnoměrně konvergentní na Ω. Označme limitu f. Pak f je omezená (stejnoměrná limita omezených je omezená) a měřitelná (bodová limita měřitelných je měřitelná). Používají se pouze věty známé ze základního kurzu matematické analýzy a teorie míry a integrálu.

(v) Důkaz pro vektorový případ je podobný, jen důkaz toho, že bodová limita měřitelných je měřitelná, je obtížnější.

(vi) Alternativně: Omezené měřitelné funkce tvoří uzavřený podprostor v prostoru všech omezených funkcí.

31. Strana 29, důkaz Lemmatu 3.9: Říká se, že je analogický předchozímu lemmatu. No, to není pravda, je to mnohem jednodušší. Lze to dokázat velmi snadno pomocí postupu naznačeného v poznámce 30(vi). Ukáže se totiž, že omezené aditivní funkce jsou uzavřený podprostor Banachova prostoru všech omezených funkcí. A to se vlastně dále v textu dělá.

32. Strana 29, řádek 1: Místo Ω má být Σ.

33. Strana 29, Lemma 3.11 a Poznámka 3.12: Nerozumím tomu, proč se to uvádí bez důkazu, když v Poznámce 3.12 je důkaz víceméně obsažen. Slova „dá se ukázat“ lze nahradit dvěma až čtyřmi řádky, kde se vysvětlí, že to vše plyne z definic. Jen to, že jednoduché funkce jsou husté v $B(\Sigma)$ není definice, ale věta.

Závěr: Student musel nastudovat netriviální množství látky přesahující úroveň bakalářského studia, zejména většina kapitoly druhé svědčí o tom, že se mu to vcelku podařilo. Nicméně úroveň prezentace i laťka toho, co dokazovat, v práci kolísá – na jednu stranu se občas krkolomně dokazují triviality (hlavně v kapitole 1, viz mj. poznámky 4–6), některé důkazy působí dojmem, že student chtěl podat prostě jakýkoli důkaz, bez snahy o uhlazení, skutečné pochopení a zasazení do kontextu (viz např. poznámky 16–18, 23 a 24 výše), na druhou stranu jednou je tvrzení uvedeno bez důkazu, třebaže důkaz je velmi snadný a víceméně obsažen v následující poznámce (viz poznámka 33). Některé důkazy jsou odbyté a nepřesné (viz poznámky 2, 14, 22, 25, 31), některé vysloveně chybné (viz poznámky 5(ii), 13, 30). Některé standardní značení je podrobně zaváděno (viz Definice 1.1), některé nestandardní je používáno bez vysvětlení (viz poznámky 11 a 20). Z hlediska jazykového je v práci používán specifický mix archaického pravopisu s hovorovými formulacemi, které do psaného odborného textu nepatří, třebaže se pro oživení používají během přednášek (viz např. poznámky 7, 9, 10, 21, 22(ii)). Rád bych, aby student při obhajobě vyjasnil poznámku 13 a vyjádřil se k otázkám z poznámek 1(i) a 23(v).

Přes uvedené výhrady, i přesto, že je práce zbytečně dlouhá na úkor kvality zpracování, se domnívám, že předložená práce splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci.

V Praze, 29.5.2017

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
KMA MFF UK