

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Petra Valešová

Aplikace Peanova a Sardova jádra na chybový člen kvadraturní a kubaturní formule

Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Josef Kofroň, Csc.
Studijní program: Numerická a výpočtová matematika

2009

Děkuji vedoucímu své práce Doc. RNDr. Josefu Kofroňovi, Csc. za poskytnuté konzultace, zapůjčení odborné literatury a cenné podněty, které mi poskytl při psaní práce. Chtěla bych zde poděkovat také své rodině za velikou trpělivost a veškerou podporu, kterou mi během mého studia poskytla.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 1.8.2009

Petra Valešová

Obsah

Úvod	6
1 Kvadraturní a kubaturní vzorce	7
1.1 Kvadraturní formule	7
1.2 Kubaturní formule	10
2 Definice a vlastnosti Peanova jádra kvadraturní formule	12
2.1 Definice Peanova jádra kvadraturní formule s hodnotami funkce f	12
2.2 Vlastnosti Peanova jádra	15
2.3 Odhad chyby kvadraturní formule pomocí Peanova jádra	16
Příklad	17
Příklad	20
2.4 Definice Peanova jádra kvadraturní formule s hodnotami funkce f a jejích derivací	23
2.5 Příklady	31
Simpsonovo pravidlo	31
Simpsonovo pravidlo-jiný způsob	35
3 Optimální kvadraturní formule	44
3.1 Optimální kvadratura druhého druhu v Nikolského smyslu	44
Příklad 1	47
Příklad 2	50
Příklad 3	54
3.2 Optimální kvadratura prvního druhu v Nikolského smyslu	57
Příklad - uzavřená kvadratura	59
Příklad - otevřená kvadratura	64

3.3	Optimální kvadratura v Markovově smyslu	69
3.4	Optimální kvadratura v Sardově smyslu	70
3.5	Asymptoticky optimální kvadraturní formule	72
3.6	Optimální kvadratura podle stupně přesnosti	72
4	Peanovo jádro Rombergovy kvadraturní formule	73
4.1	Rombergova kvadraturní formule	73
4.2	Brauerova věta	77
5	Rombergova kubaturní formule	78
5.1	Sardovo jádro kubaturní formule na čtverci	78
5.2	Rombergova kubaturní formule	86
5.3	Sardovo jádro Rombergovy kubaturní formule na čtverci . . .	87
5.4	Sardovo jádro kubaturní formule na krychli	125
5.5	Sardovo jádro Rombergovy kubaturní formule na krychli . . .	138
5.6	Shrnutí	175
	Závěr	176
	Literatura	177

Název práce: Aplikace Peanova a Sardova jádra na chybový člen kvadraturní a kubaturní formule

Autor: Petra Valešová

Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Josef Kofroň, Csc.

e-mail vedoucího: Josef.Kofron@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme vyjádření chyb kvadraturních a kubaturních formulí pomocí Peanova a Sardova jádra. Nejprve je definováno Peanovo jádro kvadraturní formule a jeho zobecnění, obojí je ukázáno na příkladech. Následně je využito Peanova jádra i jeho zobecnění k nalezení optimální kvadraturní formule v Nikolského smyslu. Dále jsou definována Sardova jádra kubaturní formule na čtverci a krychli. Pro oba případy je podrobně popsána konstrukce Rombergovy kubaturní formule a jejích Sardových jader. Následně je využito Sardových jader lichoběžníkového pravidla a Rombergovy kubaturní formule k odhadům chybových členů těchto kubatur.

Klíčová slova: Peanovo jádro, Sardova jádra, odhad chyby

Title: Application of Peano and Sard kernel for error term of quadrature and cubature formula

Author: Petra Valešová

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Doc. RNDr. Josef Kofroň, Csc.

Supervisor's e-mail address: Josef.Kofron@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the expressing of errors of quadrature and cubature formulae by Peano and Sard kernel. Firstly the Peano kernel of a quadrature formula and its generalization are defined, either are shown on the examples. Further the Peano kernel and its generalization are used for finding the optimal quadrature formula of Nikolskij's type. Furthermore there are the Sard kernels of a cubature formula for the square and the cube defined. There are in detail described Romberg's cubature formula and respective Sard kernels for both case. Further the Sard kernels of the trapezoidal rule and Romberg's cubature formula are used for estimation the error of these cubature formulae.

Keywords: Peano kernel, Sard kernels, error estimation

Úvod

Numerická integrace je rozsáhlým a v praxi hojně využívaným odvětvím numerické matematiky. Zabývá se aproximací určitého integrálu pomocí kvadraturních formulí. Pokud je Peanovo jádro kvadraturní formule známo, je velmi užitečným prostředkem k odhadu chybového členu této kvadratury. V práci popíšeme Peanovo jádro kvadraturní formule a ukážeme některé jeho vlastnosti. Dále tento pojem zobecníme pro kvadraturní vzorce operující nejen s hodnotami integrované funkce, ale i s hodnotami jejích derivací v uzlových bodech.

Kvadraturní formule jsou aproximací určitého integrálu pro vícerozměrný případ. I zde je existence Sardových jader velmi užitečným nástrojem k odhadu chyby. V práci zavedeme pojem Sardova jádra na čtverci a krychli. Podrobně popíšeme Sardova jádra lichoběžníkového pravidla a Rombergovy kvadraturní formule.

Tato práce je rozšířením bakalařské práce [7].

Kapitola 1

Kvadraturní a kubaturní vzorce

V následující kapitole zadefinujeme pojem kvadraturní formule v různých obecnostech. Zavedeme uzlové body kvadraturního vzorce, jeho váhy a funkcionál chyby. Krátce se též zmíníme o váhové funkci, o jejím významu a vlastnostech. Dále definujeme kubaturní formuli a pojmy s ní spojené, např. uzel kubaturní formule, váha kubaturní formule a v neposlední řadě chybový funkcionál.

1.1 Kvadraturní formule

Téměř všechny úvahy v následujících kapitolách uvádíme pro integrály na intervalu $[0, 1]$. K integrálu přes obecný interval $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ přejdeme snadno pomocí zobrazení $x \rightarrow a + (b - a)x$.

Nejprve uvedeme, co budeme rozumět pod pojmem kvadraturní formule. Pro zcela obecnou definici kvadraturní rovnice a kvadraturní formule musíme zavést množinu lineárních funkcionálů H nad prostorem funkcí V , tedy $H = \{h_j; h_j : V \Rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, M\}$. Pak pro libovolnou funkci $f \in V$ a vhodnou váhovou funkci w chápeme pod pojmem kvadraturní rovnice následující rovnost

$$\int_0^1 f(x)w(x) dx = \sum_{j=1}^M a_j h_j(f) + E(f),$$

kde funkcionál Q_m tvaru

$$Q_m f = \sum_{j=1}^M a_j h_j(f)$$

nazveme kvadraturní formulí.

Poznámka 1.1. Pro funkcionál Q_m budeme kromě názvu kvadraturní formule v hojně míře používat i pojmenování kvadraturní vzorec a kvadratura.

Funkcionál E nazveme chybovým funkcionálem kvadraturní formule Q_m .

Poznámka 1.2. V dalším textu budeme užívat pro chybový funkcionál kvadraturní i kubaturní formule jak plné označení E_m , tak zkrácený zápis E .

V této práci se však omezíme na funkcionály h_j reprezentující hodnoty dané funkce f a jejích derivací v uzlových bodech x_i , tedy pro každé $j \in \{1, \dots, M\}$ existuje $i \in \{1, \dots, m\}$ a $l \in \{0, \dots, n-1\}$ ¹ takové, že platí následující rovnost: $h_j(f) = f^{(l)}(x_i)$. Kvadraturní vzorec nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$\int_0^1 f(x)w(x) dx = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m a_{li} f^{(l)}(x_i) + E(f),$$

kde funkcionál $E(f)$ nazveme chybovým funkcionálem a funkcionál

$$Q_m f = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m a_{li} f^{(l)}(x_i) \quad (1.1)$$

nazveme kvadraturní formulí s váhami a_{li} pro $i = 1, \dots, m$ a $l = 0, \dots, n-1$ a uzly x_i pro $i = 1, \dots, m$, kde předpokládáme $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$.

V hojně míře se v praxi využívají kvadraturní vzorce, v nichž se vyskytují pouze hodnoty integrované funkce f v uzlových bodech x_i . V tomto případě pod pojmem kvadraturní vzorec budeme rozumět rovnost

$$Q_m f = \sum_{i=1}^m a_i f(x_i), \quad (1.2)$$

kde hodnoty a_i pro $i = 1, \dots, m$ nazveme jejími váhami a x_i pro $i = 1, \dots, m$ jejími uzly.

¹Vztahuje se na prostor funkcí $V = \mathcal{C}^n([0, 1])$.

²Existují i kvadraturní formule, jejichž uzly leží vně intervalu integrace. Tyto kvadraturní vzorce však v této práci uvažovat nebudeme.

Poznámka 1.3. *V dalším textu budeme vždy uvádět o jaký typ kvadraturního vzorce se jedná, tedy mluvíme-li o vzorci (1.1) (tuto kvadraturní formuli budeme označovat jako kvadraturní formuli prvního druhu) nebo (1.2) (tuto kvadraturu nazveme kvadraturní formuli druhého druhu). Pokud se bude jednat o oba druhy kvadraturních vzorců, budeme mluvit pouze o kvadraturní formuli (tedy bez dalšího označení).*

Krátce se zmíníme o váhových funkcích w , jejich vlastnostech a významu. Uvedeme také nejužívanější vahové funkce. Význam vahové funkce většinou spočívá v odstranění singularity integrované funkce na intervalu integrace. Často se nám podaří vhodnou volbou vahové funkce tuto singularitu odstranit, přičemž sama vahová funkce se v kvadraturním vzorci Q_m explicitně nevyskytuje. Dalším častým důvodem k použití netriviální vahové funkce je neomezenost intervalu integrace (např. interval $I = [0, \infty)$). I zde se daří tuto obtíž odstranit užitím vhodné vahové funkce w , přitom hodnoty vahové funkce opět v kvadraturní formuli Q_m nevystupují. Po vahové funkci nejčastěji požadujeme, aby byla integrovatelná, v některých případech dokonce, aby pro ni platila rovnost $\int_I w(x) dx = 1$, kde I značí interval integrace. Dále požadujeme, aby byla kladná na množině kladné míry. Následuje výčet osmi nejpoužívanějších vahových funkcí, kde nesporně nejčastěji pracujeme s triviální vahovou funkcí, tedy $w(x) = 1$.

1. $w(x) = 1$
2. $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
3. $w(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$
4. $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$
5. $w(x) = e^{-x^2}$
6. $w(x) = (1 + x^2)^{-1}$
7. $w(x) = x(1 + x^2)^{-2}$
8. $w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

Kvadraturní vzorce můžeme rozdělit podle způsobu jejich odvození do dvou skupin - na interpolační a neinterpolační kvadratury. Interpolační kvadratury získáme odvozením z interpolačních polynomů (Lagrangeových, Hermitových).

Neinterpolační kvadrurní vzorce vznikají jiným způsobem, nejčastěji pomocí extrapolace, jak je tomu např. u Rombergovy kvadrurní formule. V následujících kapitolách budeme užívat jak interpolační, tak i neinterpolační kvadrurní vzorce.

Dále můžeme dělit kvadrurní vzorce podle jejich uzlových bodů na kvadrurní otevřené a uzavřené, resp. jednostranně uzavřené. Uzavřená kvadrurní obsahuje mezi svými uzly krajní body intervalu integrace, uzlové body otevřeného kvadrurního vzorce leží uvnitř intervalu integrace. Kvadrurní formuli nazveme zleva uzavřenou, pokud je počáteční bod intervalu integrace jejím uzlovým bodem a koncový bod tohoto intervalu nikoli. Analogicky můžeme definovat zprava uzavřenou kvadrurní.

Pro odvození Peanova jádra (viz kapitola 2) a další úvahy je nezbytné zavést pojem algebraického řádu (stupně) přesnosti dané kvadrurní formule Q_m . E opět značí chybový funkcionál kvadrurní Q_m .

Definice 1.4.

Nechť $E(x^k) = 0$ pro $k = 0, \dots, M$ a $E(x^{M+1}) \neq 0$, pak říkáme, že kvadrurní vzorec Q_m má algebraický řád roven M .

Pokud platí $E(1) \neq 0$, řekneme, že kvadrurní formule Q_m nemá algebraický řád přesnosti.

1.2 Kubaturní formule

Při definování obecné kubaturní formule budeme postupovat obdobně jako u kvadrurní vzorců. Zavedeme množinu lineárních funkcionálů H nad prostorem funkcí V , tedy $H = \{h_j; h_j : V \Rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, m\}$. Pak pro libovolnou funkci $f \in V$ a vhodnou váhovou funkci w rozumíme pod pojmem kubaturní rovnice následující rovnost

$$\int_{\Omega} f(\vec{x})w(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{j=1}^m a_j h_j(f) + E(f),$$

kde funkcionál C_m tvaru

$$C_m f = \sum_{j=1}^m a_j h_j(f)$$

nazveme kubaturní formulí.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že oblast, přes kterou integrujeme, je čtverec $[0, 1]^2$ nebo krychle $[0, 1]^3$. Dále se, podobně jako v jednorozměrném případě, omezíme na funkcionály reprezentující hodnoty dané funkce f v uzlových bodech³ $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^d, d = 2, 3$. V našich úvahách se dále omezíme pouze na váhovou funkci $w(\vec{x}) = 1$.

Pro kvadraturní vzorec na čtverci dostavame tedy rovnost

$$\int_{[0,1]^2} f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{i=1}^m a_i f(\vec{x}_i) + E(f). \quad (1.3)$$

Kvadraturní vzorec na krychli má tvar

$$\int_{[0,1]^3} f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{i=1}^m a_i f(\vec{x}_i) + E(f). \quad (1.4)$$

Pro odvození Sardových jader (viz kapitola 5) a další úvahy je nezbytné zavést pojem algebraického řádu (stupně) přesnosti dané kubaturní formule C_m . E opět značí chybový funkcionál kubatury C_m .

Definice 1.5.

Nechť $E(\vec{x}^k) = 0$ pro $k = 0, \dots, M$ a $E(\vec{x}^{M+1}) \neq 0$, pak říkáme, že kubaturní vzorec C_m má algebraický řád roven M .

Pokud platí $E(\vec{1}) \neq 0$, řekneme, že kubaturní formule C_m nemá algebraický řád přesnosti.

³Opět neuvažujeme kubaturní vzorce s uzly ležícími vně oblasti integrace.

Kapitola 2

Definice a vlastnosti Peanova jádra kvadraturní formule

V následující kapitole zavedeme pojem Peanova jádra kvadraturní formule operující pouze s hodnotami integrované funkce a shrneme některé jeho vlastnosti (vyjádření chyby kvadraturní formule pomocí Peanova jádra, význam konstantního znaménka Peanova jádra pro odhad chyby). Dále zobecníme pojem Peanova jádra pro kvadraturní formule využívající nejen hodnot integrované funkce, ale i hodnot jejích derivací do určitého řádu. Toto zobecnění bude též zahrnovat integraci s netriviální váhovou funkcí w , kterou ovšem v praktických ukázkách používat nebudeme.

2.1 Definice Peanova jádra kvadraturní formule s hodnotami funkce f

V praxi v hojné míře využívanou skupinou kvadraturních formulí, jsou vzorce obsahující pouze hodnoty integrované funkce v uzlových bodech kvadraturní formule. Důvodem k tomu bývá snadnější manipulace a častá neznalost (případně neexistence) hodnot derivací v uzlových bodech. Proto se nejprve zaměříme na odvození a zkoumání vlastností Peanových jader těchto kvadraturních vzorců. Později pojem Peanova jádra zobecníme i pro kvadraturní formule obsahující kromě hodnot integrované funkce f v uzlových bodech i hodnoty derivací f v těchto bodech.

Než přejdeme k samotnému odvození Peanova jádra kvadraturní formule,

zavedeme pojem kladné části $(x - t)^k$.

Definice 2.1.¹

Nechť x je reálné číslo a $k \geq 0$, pak definujeme kladnou část $(x - t)^k$ předpisem:

$$(x - t)_+^k = \begin{cases} 0, & t \geq x \\ (x - t)^k, & t < x. \end{cases}$$

Stěžejním tvrzením pro odvození Peanova jádra kvadraturní formule pro nás bude Taylorova věta s integrálním tvarem zbytku, jejíž znění nyní, bez důkazu, uvádíme.

Věta 2.2. (Taylorova věta s integrálním tvarem zbytku)

Nechť a, b jsou reálná čísla taková, že $a < b$, nechť funkce f je třídy $\mathcal{C}^{k+1}([a, b])$. Pak pro každé $x \in [a, b]$ platí

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \dots + \frac{1}{k!}(x - a)^k f^{(k)}(a) + \frac{1}{k!} \int_a^x (x - t)^k f^{(k+1)}(t) dt.$$

Uvažujme libovolnou funkci f třídy \mathcal{C}^{k+1} na intervalu $[0, 1]$. Mějme dále kvadraturní vzorec

$$Q_m f = \sum_{j=1}^m a_j f(x_j)$$

algebraického řádu přesnosti k . Podle Taylorovy věty s integrálním tvarem zbytku můžeme psát

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} x^i f^{(i)}(0) + \frac{1}{k!} \int_0^x (x - t)^k f^{(k+1)}(t) dt.$$

Zapíšeme-li tuto rovnost pomocí kladné části $(x - t)^k$, dostaneme

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} x^i f^{(i)}(0) + \frac{1}{k!} \int_0^1 (x - t)_+^k f^{(k+1)}(t) dt.$$

¹[2], str.94

Nyní na poslední rovnost aplikujeme lineární funkcionál E_m a dostaneme

$$\begin{aligned} E_m(f) &= E_m \left[\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} x^i f^{(i)}(0) + \frac{1}{k!} \int_0^1 (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t) dt \right] = \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} E_m(x^i) f^{(i)}(0) + \frac{1}{k!} E_m \left[\int_0^1 (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Protože kvadrurní vzorec Q_m má (algebraický) řád k (tj. $E_m(x^i) = 0$, pro $i = 0, \dots, k$ a $E_m(x^{k+1}) \neq 0$), můžeme tuto rovnost přepsat ve tvaru

$$E_m(f) = \frac{1}{k!} E_m \left[\int_0^1 (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t) dt \right] = \frac{1}{k!} \int_0^1 f^{(k+1)}(t) E_m(x-t)_+^k dt.$$

Právě provedené úvahy shrneme v následující definici Peanova jádra kvadrurní formule.

Definice 2.3. ²

Nechť funkce f je třídy \mathcal{C}^{k+1} na intervalu $[0, 1]$, nechť Q_m je kvadrurní formule řádu k . Pak funkci $K_{m,k}(t) \equiv E_m^x(x-t)_+^k$ nazveme Peanovým jádrem kvadrurní formule Q_m řádu k .

Peanovo jádro můžeme definovat i v případě, že funkce f je třídy \mathcal{C}^{n+1} na intervalu $[0, 1]$ a kvadrurní formule Q_m má (algebraický) řád přesnosti k , kde $n \neq k$. V případě, že $n > k$, se vzorec pro výpočet Peanova jádra nezmění. Pro $n < k$ můžeme definovat Peanovo jádro dvojím způsobem. Buď rovností

$$E_m(f) = \frac{1}{n!} \int_0^1 K_{m,n}(t) f^{(n+1)}(t) dt,$$

nebo

$$E_m(f) = \sum_{i=n+1}^k \frac{f^{(i)}(0)}{i!} E_m(x^i) + \frac{1}{k!} \int_0^1 K_{m,k}(t) f^{(k+1)}(t) dt.$$

V této práci budeme používat první z nich (tedy $E_m(f) = \frac{1}{n!} \int_0^1 K_{m,n}(t) f^{(n+1)}(t) dt$).

²[2], str.95

2.2 Vlastnosti Peanova jádra

Nyní uvedeme bez důkazu několik vět, popisujících základní vlastnosti Peanova jádra. Z praktických důvodů zde budeme integrovat funkci f na intervalu $[-1, 1]$, případně na zcela obecném intervalu $[a, b]$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Důkazy k níže uvedeným větám je možné nalézt v [7].

Věta 2.4.³

Nechť $f \in \mathcal{C}^{k+1}([-1, 1])$, kde $k \geq 0$ a Q_m je kvadraturní formule algebraického stupně přesnosti $n \geq k$. Pak pro chybu $E_m f = \int_{-1}^1 f(t) dt - Q_m f$ platí

$$E_m f = \frac{1}{k!} \int_{-1}^1 K_{m,k}(t) f^{(k+1)}(t) dt,$$

kde $K_{m,k}(t)$ je Peanovo jádro kvadraturní formule Q_m řádu k .

Věta 2.5.⁴

Pro daný interval $[a, b]$, funkci f a kvadraturní vzorec Q_m je vyjádření Peanova jádra $K_{m,k}(t)$ pro pevné k jediné.

Věta 2.6.⁵

Peanovovo jádro $K_{m,k}(t)$ má nulové body násobnosti nejméně k pro $t = \pm 1$ a platí

$$(i+1)K_{m,i}(t) + K'_{m,i+1}(t) = 0,$$

pro $i = 0, \dots, k-1$.

Nyní vyslovíme velmi důležitou vlastnost Peanova jádra, které nemění znaménko. Následující věta ukazuje, jak můžeme pomocí Peanova jádra oddělit vlastnosti kvadraturní formule Q_m a funkce f samotné.

Věta 2.7.

Nechť Q_m je kvadraturní vzorec (algebraického) řádu n , nechť $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ a nechť Peanovo jádro $K_{m,k}$ kvadraturního vzorce Q_m nemění znaménko

³[2], str.95

⁴[2], str.99

⁵[2], str.100

na $[a, b]$. Pak existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že

$$\begin{aligned} E_m(f) &= \int_a^b f(t)dt - Q_m(f) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \left(\int_a^b t^{n+1} dt - Q_m(t^{n+1}) \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \left(\frac{1}{n+2} (b^{n+2} - a^{n+2}) - Q_m(t^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

2.3 Odhad chyby kvadraturní formule pomocí Peanova jádra

Popišme nyní způsob, jakým můžeme odhadnout chybu kvadraturní formule pomocí jejího Peanova jádra. Z věty 2.4 víme, že chybový člen $E_m f$ kvadraturního vzorce Q_m můžeme vyjádřit pomocí Peanova jádra $K_{m,k}$, kde $m \in \mathbb{N}$, následující rovností:

$$E_m f = \frac{1}{k!} \int_0^1 K_{m,k}(t) f^{(k+1)}(t) dt.$$

Při hledání odhadu chyby kvadraturní formule Q_m vyjdeme z právě uvedeného vztahu. Předpokládejme nejprve, že Peanovo jádro $K_{m,k}$ kvadraturní formule Q_m nemění na intervalu integrace (tedy na $[0,1]$) své znaménko. K odhadu chybového členu využijeme Hölderovy nerovnosti. Připomeňme, že pod normou prostoru $\mathcal{L}^p([0,1])$, pro $p \in [1, \infty)$ rozumíme

$$\|g\|_p = \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

pro $p = \infty$ pak

$$\|g\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |g(t)|.$$

Věta 2.8. (Hölderova nerovnost)

Nechť g, h jsou měřitelné funkce na intervalu $[0,1]$, nechť $p, q \in [1, \infty]$ jsou takové, že platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ⁶. Pak

$$\int_0^1 |g(t)h(t)| dt \leq \|g\|_p \|h\|_q.$$

⁶V případě, $p = \infty$ klademe $\frac{1}{p} = 0$

Nás bude v tuto chvíli zajímat případ $p = 1$. Aplikací Hölderovy nerovnosti tedy získáme odhad

$$|E_m f| \leq \frac{1}{k!} \|f^{(k+1)}\|_\infty \int_0^1 |K_{m,k}(t)| dt.$$

Protože podle předpokladu Peanovo jádro $K_{m,k}$ kvadraturní formule Q_m nemění na intervalu $[0, 1]$ znaménko, můžeme místo $\int_0^1 |K_{m,k}(t)| dt$ psát $\left| \int_0^1 K_{m,k}(t) dt \right|$.

Tento postup budeme demonstrovat v následujícím příkladě, kde k odhadu chyby Radauovy kvadraturní formule použijeme její Peanovo jádro druhého řádu.

Příklad

Hledáme Peanovo jádro Radauovy kvadraturní formule, jež je dána vzorcem (uvedeným v [2], str. 96)

$$Q_3 f = \frac{1}{4} [f(0) + 3f(\frac{1}{3}) + f(1)].$$

Z definice 2.3 dostáváme pro $k = 2$ rovnost

$$\begin{aligned} K_{3,2}(t) &= E_3^x (x-t)_+^2 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^2 dx - \frac{1}{4} \left[(0-t)_+^2 + 3\left(\frac{1}{3}-t\right)_+^2 + (1-t)_+^2 \right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0, \frac{1}{3})$ tedy dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-t)^2 dx - \frac{1}{4} \left[3\left(\frac{1}{3}-t\right)^2 + (1-t)^2 \right] &= -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{12} - \\ \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} &= -\frac{1}{3}t^3 \end{aligned}$$

a na intervalu $[\frac{1}{3}, 1]$

$$\int_t^1 (x-t)^2 dx - \frac{1}{4}(1-t)^2 = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}.$$

Peanovo jádro $K_{3,2}(t)$ je tedy dáno rovností

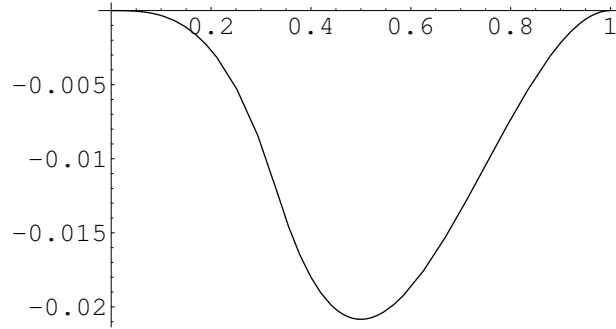
$$K_{3,2}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3, & t \in [0, \frac{1}{3}) \\ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}, & t \in [\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

Ověřme nyní spojitost funkce $K_{3,2}$ na intervalu $[0, 1]$. Opět se stačí omezit na vyšetřování spojitosti funkce $K_{3,2}$ v bodě $\frac{1}{3}$ zleva.

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{3}^-} K_{3,2}(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{3}^-} -\frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{81}$$

$$K_{3,2}\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{12} = -\frac{1}{81}.$$

Rovnost funkční hodnoty $K_{3,2}(\frac{1}{3})$ a limity $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{3}^-} K_{3,2}(t)$ dává spojitost na celém intervalu $[0, 1]$.



Obr. č.2.1, $K_{3,2}(t)$

Nyní využijeme Peanova jádra k odhadu chyby Radauovy kvadraturní formule. Použijeme tvrzení věty 2.4, tedy

$$E_3 f = \frac{1}{2!} \int_0^1 K_{3,2}(t) f^{(3)}(t) dt,$$

kde $K_{3,2}(t)$ je Peanovo jádro kvadraturní formule Q_3 řádu 2. Peanovo jádro $K_{3,2}$ nemění na intervalu integrace (tj. na intervalu $[0, 1]$) své znaménko, můžeme tedy psát

$$|E_3(f)| \leq \frac{1}{2!} \|f^{(3)}\|_\infty \left| \int_0^1 K_{3,2}(t) dt \right|.$$

Dosazením tedy snadno získáme odhad

$$|E_3(f)| \leq \frac{1}{216} \|f^{(3)}\|_\infty.$$

Máme tedy popsán odhad chyby kvadraturní formule, jejíž Peanovo jádro nemění na intervalu své integrace znaménko.

Tento případ je pro výpočet odhadu chyby kvadraturní formule velmi příznivý, není však zcela běžný. Pro odhad chyby kvadraturní formule pomocí Peanova jádra, které mění znaménko na intervalu integrace, můžeme použít následující postup. Přirozeným způsobem definujeme funkce

$$K_{m,k}^+ = \max(0, K_{m,k}) \text{ a } K_{m,k}^- = \min(0, K_{m,k}).$$

Opět použijeme tvrzení věty 2.4, tedy

$$E_m f = \int_0^1 K_{m,k}(t) f^{(k+1)}(t) dt,$$

kde $K_{m,k}(t)$ je Peanovo jádro kvadraturní formule Q_m řádu k . Pak zřejmě platí

$$|E_m(f)| \leq \int_0^1 |f^{(k+1)}(t)| K_{m,k}^+(t) dt - \int_0^1 |f^{(k+1)}(t)| K_{m,k}^-(t) dt.$$

Funkce $K_{m,k}^+(t)$ a $K_{m,k}^-(t)$ nemění na intervalu integrace svá znaménka. Předpokládejme, že Peanovo jádro $K_{m,k}$ kvadraturní formule Q_m je na intervalu $[0, 1]$ spojitou funkcí. Hledejme tedy body $t_j \in [0, 1]$, pro $j = 1, \dots, N$, kde $N \in \mathbb{N}$, takové, ve kterých platí

$$K_{m,k}(t_j) = 0$$

a Peanovo jádro $K_{m,k}$ v nich mění své znaménko. Předpokládejme, že Peanovo jádro $K_{m,k}$ je nezáporné na intervalu $[0, t_1]$, pak platí rovnost

$$\begin{aligned} E_m f &= \frac{1}{k!} \int_0^{t_1} K_{m,k}(t) f^{(k+1)}(t) dt + \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j \int_{t_j}^{t_{j+1}} K_{m,k}(t) f^{(k+1)}(t) dt + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^N \frac{1}{k!} \int_{t_N}^1 K_{m,k}(t) f^{(k+1)}(t) dt.$$

Poznámka 2.9. V případě, že $t_1 = 0$ a Peanovo jádro $K_{m,k}$ je nezáporné na intervalu $[t_1, t_2]$ platí

$$\begin{aligned} E_m f &= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} K_{m,k}(t) f^{(k+1)}(t) dt + \\ &+ (-1)^{N+1} \frac{1}{k!} \int_{t_N}^1 K_{m,k}(t) f^{(k+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Doposud jsme předpokládali, že Peanovo jádro $K_{m,k}$ je na intervalu $[0, 1]$ spojitě. Stejně úvahy můžeme použít i v případě, že připouštíme možnost existence bodů y_n , pro $n = 1, \dots, M$, kde $M \in \mathbb{N}$, v nichž je Peanovo jádro nespojitě. Obecný zápis takového odhadu se však stává značně komplikovaným, neboť v něm figurují krom bodů t_j , v nichž platí $K_{m,k}(t_j) = 0$ i některé z bodů nespojitosti y_n a to takové, pro které platí

$$\left(\lim_{t \rightarrow y_n^-} K_{m,k}(t) \right) \left(\lim_{t \rightarrow y_n^+} K_{m,k}(t) \right) < 0,$$

proto zde tento odhad neuvádíme.

Poznámka 2.10. Výše popsaný postup odhadu chybového členu kvadrurního vzorce je založen na hledání kořenů polynomů. Určení polohy těchto bodů je pro polynomy vyšších řádů značně obtížné, proto je tento postup vhodné použít především pro Peanova jádra nultého, prvního a druhého řádu (tedy pro funkce po částech lineární, kvadratické a kubické).

Právě popsaný postup demonstrujeme v následujícím příkladě na odhadu Radauovy formule pomocí jejího Peanova jádra prvního řádu.

Příklad

Hledáme Peanovo jádro Radauovy kvadrurní formule, jež je dána vzorcem (uvedeným v [2], str. 96)

$$Q_3 f = \frac{1}{4} [f(0) + 3f(\frac{1}{3}) + f(1)].$$

Z definice 2.3 dostáváme pro $k = 1$ rovnost

$$\begin{aligned} K_{3,1}(t) &= E_3^x(x-t)_+^1 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^1 dx - \frac{1}{4} \left[(0-t)_+^1 + 3\left(\frac{1}{3}-t\right)_+^1 + (1-t)_+^1 \right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0, \frac{1}{3})$ tedy řešíme rovnost

$$\int_t^1 (x-t) dx - \frac{1}{4} [3(\frac{1}{3}-t) + (1-t)] = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}t^2$$

a na intervalu $[\frac{1}{3}, 1]$

$$\int_t^1 (x-t) dx - \frac{1}{4}(1-t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}.$$

Pro Peanovo jádro $K_{3,1}(t)$ dostáváme tedy vztah

$$K_{3,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & t \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}, & t \in [\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

Soustředíme se nyní na některé důležité vlastnosti funkce $K_{3,1}$. Nejprve ověříme spojitost této funkce ve všech bodech intervalu $[0, 1]$. Posléze ukážeme, že její první derivace v bodě $\frac{1}{3}$ neexistuje.

Funkce $K_{3,1}$ je na každém z intervalů $[0, \frac{1}{3})$, $[\frac{1}{3}, 1]$ polynomiální a tedy zřejmě spojitá.

Zbývá dokázat spojitost v bodě $\frac{1}{3}$.

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{3}^-} K_{3,1}(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$K_{3,1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{18}.$$

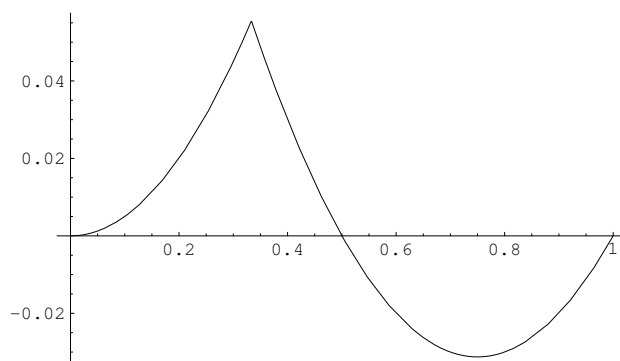
Hodnota funkce $K_{3,1}$ v bodě $\frac{1}{3}$ a její limita zleva v témže bodě se rovnají. Funkce $K_{3,1}$ je spojitá v bodě $\frac{1}{3}$ a je tedy spojitá na celém intervalu $[0, 1]$.

Nyní vyšetříme diferencovatelnost funkce $K_{3,1}$. Existence a spojitost derivace prvního řádu je na každém z intervalů $[0, \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}, 1]$ zřejmá (v bodech 0 a 1 uvažujeme pouze jednostranné derivace). Spočteme podle definice hodnoty jednostranných derivací v bodě $\frac{1}{3}$.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{K_{3,1}(\frac{1}{3}+h) - K_{3,1}(\frac{1}{3})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+h)^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2}{h} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{K_{3,1}(\frac{1}{3}+h) - K_{3,1}(\frac{1}{3})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+h)^2 - \frac{3}{4}(\frac{1}{3}+h) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2 - \frac{3}{4}(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}}{h} = -\frac{5}{12}.$$

Hodnoty jednostranných derivací prvního řádu v bodě $\frac{1}{3}$ se nerovnejí, tudíž derivace v tomto bodě neexistuje.



Obr. č.2.2, $K_{3,1}(t)$

Peanovo jádro $K_{3,1}$ mění na intervalu $[0, 1]$ své znaménko. Určíme body t_j , pro $j = 1, \dots, N$, kde $N \in \mathbb{N}$, pro které platí

$$K_{3,1}(t_j) = 0.$$

Snadným výpočtem zjistíme, že se jedná o body $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{2}$ a $t_3 = 1$. Zřejmě platí

$$K_{3,1}^+(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & t \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

$$K_{3,1}^-(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$$\int_0^{t_1} K_{3,1}(t) f^{(2)}(t) dt = \int_0^0 K_{3,1}(t) f^{(2)}(t) dt = 0,$$

$$\int_{t_3}^1 K_{3,1}(t)f^{(2)}(t)dt = \int_1^1 K_{3,1}(t)f^{(2)}(t)dt = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} K_{3,1}(t)f^{(2)}(t)dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} K_{3,1}(t)f^{(2)}(t)dt \leq \frac{1}{96} \|f^{(2)}\|_{\infty}, \\ -\int_{t_2}^{t_3} K_{3,1}(t)f^{(2)}(t)dt &= -\int_{\frac{1}{2}}^1 K_{3,1}(t)f^{(2)}(t)dt \leq \frac{1}{96} \|f^{(2)}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Součtem těchto dílčích odhadů získáme konečný odhad chyby kvadraturní formule Q_3 ve tvaru

$$|E_3(f)| \leq \frac{1}{48} \|f^{(2)}\|_{\infty}.$$

Poznámka 2.11. *V následující kapitole budeme k odhadu chyby kvadraturní formule používat Hölderovu nerovnost pro $p = 2$. V tomto případě odpadá problém s Peanovým jádrem měnícím znaménko.*

2.4 Definice Peanova jádra kvadraturní formule s hodnotami funkce f a jejích derivací

Doposud jsme se zabývali hledáním Peanova jádra dané kvadraturní formule. Můžeme ale postupovat jiným způsobem (viz [3]). Nejprve tedy určíme Peanovo jádro, které bude mít nějaké požadované vlastnosti a poté nalezneme k danému jádru kvadraturní formuli. Pro zavedení pojmu Peanovo jádro je klíčový algebraický stupeň přesnosti kvadraturní formule. Stejně tak pro nás bude tento pojem stěžejní. Nebudeme ale využívat klasické definice algebraického stupně přesnosti, ale její diferenciální zobecnění. Zavedeme nejprve diferenciální operátor D vzorcem

$$D = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=1}^n c_j(x) \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}},$$

kde funkce $c_j \in \mathcal{C}^{n-j}([0, 1])$, $j = 1, \dots, n - 1$.

Definice 2.12. *Kvadrurní formule Q_m má stupeň přesnosti roven k právě tehdy, když pro řešení g lineární diferenciální rovnice $Dg = 0$ platí $E(g) = 0$ (kvadrurní formule Q_m je pro toto řešení g přesná).*

Poznámka 2.13. *Algebraický stupeň přesnosti v klasickém smyslu (viz definice 1.4) je speciálním případem právě definovaného stupně přesnosti, pro diferenciální operátor $D = \frac{d^n}{dx^n}$, kde $n \in \mathbb{N}$.*

Pod pojmem stupeň přesnosti kvadrurní formule Q_m budeme tedy nadále rozumět podmínku

$$D(f) = 0 \Rightarrow E(f) = 0.$$

Jinými slovy kvadrurní formule Q_m je přesná, pokud funkce f řeší lineární diferenciální rovnici

$$D(f) = 0,$$

tedy

$$\frac{d^n f}{dx^n} + \sum_{j=1}^n c_j(x) \frac{d^{n-j} f}{dx^{n-j}} = 0.$$

Máme tedy definovaný stupeň přesnosti kvadrurní formule.

Nyní osvětlíme, co budeme v dalším textu rozumět pod pojmem Peanova jádra. Později ukážeme, že dosud uvažovaná definice Peanova jádra (def 2.3) je speciálním případem následující definice.

Definice 2.14. *Nechť $f \in C^k([0, 1])$, kvadrurní vzorec*

$$\int_0^1 f(x)w(x) dx = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m a_{li} f^{(l)}(x_i) + E(f),$$

kde funkcionál $E(f)$ nazveme chybovým funkcionálem a kvadrurní formule Q_m má tvar

$$Q_m f = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m a_{li} f^{(l)}(x_i),$$

kde a Q_m má stupeň přesnosti k (tj. existuje lineární diferenciální operátor D daný vzorcem

$$D = \frac{d^k}{dx^k} + \sum_{j=1}^k c_j(x) \frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}$$

takový, že platí $D(g) = 0 \Rightarrow E(g) = 0$). Existuje-li funkce $\mathbb{K}_{m,k-1}$ taková, že

$$E(f) = \int_0^1 D(f)(t)\mathbb{K}_{m,k-1}(t) dt, \quad (2.1)$$

pak funkci $\mathbb{K}_{m,k-1}$ nazveme Peanovým jádrem kvadrurní formule Q_m stupně $k-1$.

Poznámka 2.15. V této práci se budeme téměř výlučně zabývat diferenciálními operátory D tvaru $D = \frac{d^n}{dx^n}$, pro $n \in \mathbb{N}$.

Definice 2.16. Necht $f \in \mathcal{C}^k([0, 1])$, kvadrurní vzorec

$$\int_0^1 f(x)w(x) dx = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m a_{li}f^{(l)}(x_i) + E(f),$$

kde funkcionál $E(f)$ nazveme chybovým funkcionálem a kvadrurní formule Q_m má tvar

$$Q_m f = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m a_{li}f^{(l)}(x_i),$$

kde a a Q_m má stupeň přesnosti k (tj. existuje lineární diferenciální operátor D daný vzorcem

$$D = \frac{d^k}{dx^k}$$

takový, že platí $D(g) = 0 \Rightarrow E(g) = 0$). Existuje-li funkce $\mathbb{K}_{m,k-1}$ taková, že

$$E(f) = \int_0^1 \frac{d^k f}{dt^k}(t)\mathbb{K}_{m,k-1}(t) dt, \quad (2.2)$$

pak funkci $\mathbb{K}_{m,k-1}$ nazveme Peanovým jádrem kvadrurní formule Q_m stupně $k-1$.

Poznámka 2.17. V dalším textu budeme užívat pro Peanovo jádro jak plné označení $\mathbb{K}_{m,k}$, tak zkrácený zápis \mathbb{K} . Tohoto zjednodušeného zápisu budeme využívat, pokud bude z kontextu zcela zřejmé, jaký řád a počet uzlů pro dané Peanovo jádro uvažujeme.

Začneme odvozovat Peanovo jádro a jemu příslušící kvadrurní vzorec. Základním tvrzením v následujících úvahách bude tzv. Green-Lagrangeova identita. Ještě podotkneme, že následující odvození budeme provádět pro obecný diferenciální operátor D tvaru

$$D = \frac{d^k}{dx^k} + \sum_{j=1}^k c_j(x) \frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}.$$

V praktických ukázkách tohoto postupu, však budeme používat speciální tvar diferenciálního opátoru D a to

$$D = \frac{d^k}{dx^k}.$$

Věta 2.18. (Green-Lagrangeova identita)

Nechť $u, v \in C^k([0, 1])$, $k = 1, 2, \dots$. Pak platí následující rovnost

$$v(x)u^{(k)}(x) - (-1)^k v^{(k)}(x)u(x) = \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i-1} u^{(i)}(x)v^{(k-i-1)}(x) \quad (2.3)$$

pro všechna $x \in [0, 1]$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí. Nejprve ověříme platnost vzorce pro $k = 1$, tedy

$$v(x)u'(x) + v'(x)u(x) = \frac{d}{dx} (u(x)v(x)).$$

Nyní přejdeme k indukčnímu kroku: $k \rightarrow k + 1$

$$\begin{aligned} & v(x)u^{(k+1)}(x) - (-1)^{k+1}v^{(k+1)}(x)u(x) = \\ &= v(x) (u'(x))^{(k)} - ((-1)^{k+1}v^{(k)}(x)u(x))' + (-1)^{k+1}v^{(k)}(x)u'(x) = \\ &= \frac{d}{dx} \left[\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i-1} u^{(i+1)}(x)v^{(k-i-1)}(x) \right] - \frac{d}{dx} [(-1)^{k+1}v^{(k)}(x)u(x)] = \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} u^{(i)}(x)v^{(k-i)}(x). \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. □

Nyní definujeme adjungovaný operátor D^* k diferenciálnímu operátoru D následujícím vzorcem

$$D^* = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} c_j(x),$$

kde funkce $c_j \in \mathcal{C}^{n-j}([0, 1])$, $j = 1, \dots, n-1$. Dále definujeme pro diferenciální operátor D a pro operátor D^* , k němu adjungovaný, dílčí (nebo také částečné) diferenciální operátory D_i a D_i^* vzorci

$$D_i = \sum_{j=0}^i c_j(x) \frac{d^{i-j}}{dx^{i-j}}$$

a

$$D_i^* = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \frac{d^{i-j}}{dx^{i-j}} c_j(x),$$

pro $i = 0, \dots, n-1$.

Dosazením do definice diferenciálního operátoru D , adjungovaného operátoru D^* a následnou aplikací Green-Lagrangeovy identity snadno dostáváme rovnosti

$$\begin{aligned} & v(x)D(u)(x) - D^*(v)(x)u(x) = \\ &= v(x) \left(\frac{d^n}{dx^n} u(x) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(x) \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} u(x) \right) - \\ & \quad - \left((-1)^n \frac{d^n}{dx^n} v(x) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} (c_j(x)v(x)) \right) u(x) = \\ &= \left(v(x) \frac{d^n}{dx^n} u(x) - (-1)^n u(x) \frac{d^n}{dx^n} v(x) \right) + \\ & \quad + \sum_{j=1}^{n-1} \left(c_j(x)v(x) \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} u(x) - (-1)^{n-j} u(x) \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} (c_j(x)v(x)) \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i-1} u^{(i)}(x) v^{(n-i-1)}(x) + \\ & \quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{n-j-i-1} u^{(i)}(x) (v(x)c_j(x))^{(n-j-i-1)} = \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{n-1} u^{(i)}(x) D_{n-i-1}^*(v)(x). \end{aligned}$$

Získali jsme tedy rovnost

$$v(x)D(u)(x) - D^*(v)(x)u(x) = \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{n-1} u^{(i)}(x)D_{n-i-1}^*(v)(x). \quad (2.4)$$

Předpokládejme nyní, že máme dány uzlové body hledané kvadraturní formule. Z dalších úvah bude zřejmé, že pokud bychom chtěli provádět toto odvození, museli bychom se omezit na uzavřené kvadraturní vzorce. Proto v případech, kdy se o uzavřené vzorce nejedná, musíme přidat k stávajícím uzlům krajní body intervalu integrace. Vhodnou volbou podmínek, pak docílíme nulování koeficientů kvadraturní formule v těchto bodech.

Nechť φ_i , pro $i = 0, \dots, m$, tvoří fundamentální systém \mathcal{F} diferenciální rovnice dané adjungovaným operátorem D^* s pravou stranou tvořenou váhovou funkcí w , tedy rovnice

$$D^*(u) = w.$$

Pro libovolné φ_i , kde $i \in \{0, \dots, m\}$ tedy můžeme podle Green-Lagrangeovy identity psát rovnost

$$\varphi_i(x)D(f)(x) - w(x)f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(x)D_{n-l-1}^*(\varphi_i)(x).$$

Integrací této rovnosti na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ dostáváme rovnost

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)D(f)(x) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} w(x)f(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} \sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(x)D_{n-l-1}^*(\varphi_i)(x) dx,$$

tedy

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w(x)f(x) dx = - \left[\sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(x)D_{n-l-1}^*(\varphi_i)(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)D(f)(x) dx$$

pro všechna $i = 0, \dots, m$. Součtem přes všechna $i = 0, \dots, m$ získáme

$$\int_0^1 w(x)f(x) dx = - \sum_{i=0}^m \left[\sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(x)D_{n-l-1}^*(\varphi_i)(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)D(f)(x) dx.$$

Položíme-li tedy $\mathbb{K}_{m+2,k-1}(x)|_{[x_i,x_{i+1})} = \varphi_i(x)$ dostáváme tuto rovnici ve tvaru

$$\int_0^1 w(x)f(x) dx = - \sum_{i=0}^m \left[\sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(x) D_{n-l-1}^*(\varphi_i)(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_0^1 D(f)(x)\mathbb{K}_{m+2,k-1}(x) dx.$$

Nyní upravíme první sčítanec na pravé straně rovnosti následujícím způsobem

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=0}^m \left[\sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(x) D_{n-l-1}^*(\varphi_i)(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \\ & = - \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(x_i) D_{n-l-1}^*(\varphi_{i-1})(x_i) + \\ & \quad + \sum_{i=0}^m \sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(x_i) D_{n-l-1}^*(\varphi_i)(x_i). \end{aligned}$$

Přeuspořádáním právě získané rovnosti dostáváme hledanou kvadraturní formuli Q_{m+2} příslušnou Peanovu jádru \mathbb{K} ve tvaru

$$\begin{aligned} Q_{m+2}f & = \sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(x_0) D_{n-l-1}^*(\varphi_0)(x_0) + \\ & \quad + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m f^{(l)}(x_i) (D_{n-l-1}^*(\varphi_i - \varphi_{i-1})(x_i)) - \\ & \quad - \sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(x_{m+1}) D_{n-l-1}^*(\varphi_m)(x_{m+1}). \end{aligned}$$

Označíme-li nyní

$$\begin{aligned} a_{l0} & = D_{n-l-1}^*(\varphi_0)(x_0) \\ a_{li} & = D_{n-l-1}^*(\varphi_i - \varphi_{i-1})(x_i), \quad i = 1, \dots, m \\ a_{l(m+1)} & = D_{n-l-1}^*(\varphi_m)(x_{m+1}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

pro $l = 0, \dots, n-1$, dostaneme kvadraturní formuli Q_m ve tvaru vzorce (1.1), tedy

$$Q_{m+2}f = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m+1} a_{li} f^{(l)}(x_i).$$

Je zřejmé, že rozhodující vliv na vzhled Peanova jádra \mathbb{K} i kvadraturního vzorce Q_{m+2} má volba funkcí φ_i , pro $i = 0, \dots, m$, tvořících fundamentální systém \mathcal{F} . Nejprve se budeme zabývat problémem otevřených kvadraturních vzorců, který jsme předeslali na začátku našich úvah.

Není-li hledaná kvadraturní formule uzavřená, volíme tedy funkce φ_0 a φ_m tak, aby splňovaly podmínku

$$\varphi_0^{(i)}(x_0) = \varphi_m^{(i)}(x_{m+1}) = 0,$$

pro $i = 0, 1, \dots, n-1$. Dostáváme pak rovnost

$$Q_m f = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m f^{(l)}(x_i) (D_{n-l-1}^*(\varphi_i - \varphi_{i-1})(x_i)).$$

Označíme-li

$$a_{li} = D_{n-l-1}^*(\varphi_i - \varphi_{i-1})(x_i), \quad (2.6)$$

pro $l = 0, 1, \dots, n-1$ a $i = 1, 2, \dots, m$ dostáváme kvadraturní formuli Q_m ve tvaru

$$Q_m = \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} a_{li} f^{(l)}(x_i).$$

Na tomto místě je vhodné připomenout, že v případě otevřené kvadraturní formule se již nejedná o $(m+2)$ -bodovou kvadraturu, ale pouze o m -bodový kvadraturní vzorec, neboť body $x_0 = 0$ a $x_{m+1} = 1$ nejsou uzly této kvadraturní formule.

Poznámka 2.19. *Zcela analogicky bychom postupovali při odvozování jednostranně uzavřených kvadraturních vzorců. Pro zleva uzavřené vzorce volíme jako $\varphi_0^{(i)}(x_0) = 0$ pro $i = 0, 1, \dots, n-1$. Podmínka pro kvadratury zprava uzavřené je pak $\varphi_m^{(i)}(x_{m+1}) = 0$ pro $i = 0, 1, \dots, n-1$.*

Zde dostáváme ne zcela určený problém. Musíme tedy přidat dodatečné podmínky, abychom dostali konkrétní Peanovo jádro a příslušnou kvadraturní formuli. V této práci se budeme zabývat pouze dvěma druhy takovýchto podmínek - nulování v uzlových bodech a minimalizace \mathcal{L}^2 normy. První z uvedených postupů popíšeme v následujících úvahách.

2.5 Příklady

Uvedeme nyní dva příklady, oba se budou zabývat Simpsonovým pravidlem. V prvním příkladu ukážeme práci s Peanovým jádrem podle definice 2.3. Druhý příklad nám nastíní práci s Peanovým jádrem podle definice 2.16. Zároveň zde na konkrétním příkladu ukážeme v jakém vztahu jsou Peanova jádra spočtená podle dvou námi zavedených definic. Dále zde bude patrné, že Peanovo jádro K je v jistém smyslu (až na násobení konstantou) speciálním případem Peanova jádra \mathbb{K} .

Simpsonovo pravidlo

Hledáme Peanovo jádro Simpsonova pravidla, které je dáno následujícím vzorcem (převzatým z [6], str.67)

$$Q_3 f = \frac{1}{6} [f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)].$$

Pro $k = 0$ dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} K_{3,0}(t) &= E_3^x(x-t)_+^0 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^0 dx - \frac{1}{6} \left[(0-t)_+^0 + 4(\frac{1}{2}-t)_+^0 + (1-t)_+^0 \right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ platí

$$\int_t^1 dx - \frac{1}{6} [4 + 1] = 1 - t - \frac{5}{6} = -t + \frac{1}{6}$$

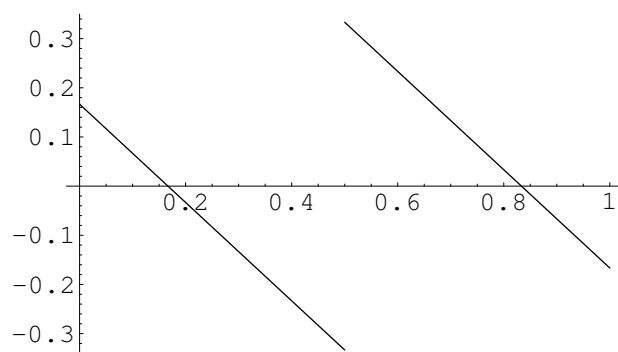
a na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\int_t^1 dx - \frac{1}{6} = 1 - t - \frac{1}{6} = -t + \frac{5}{6}.$$

Pro Peanovo jádro $K_{3,0}(t)$ dostáváme vztah

$$K_{3,0}(t) = \begin{cases} -t + \frac{1}{6}, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -t + \frac{5}{6}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Funkce $K_{3,0}$ je nespojitá v bodě $\frac{1}{2}$.



Obr. č.2.3, $K_{3,0}(t)$

Pro $k = 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} K_{3,1}(t) &= E_3^x(x-t)_+^1 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^1 dx - \frac{1}{6} \left[(0-t)_+^1 + 4\left(\frac{1}{2}-t\right)_+^1 + (1-t)_+^1 \right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ platí rovnost

$$\int_t^1 (x-t) dx - \frac{1}{6} [4(\frac{1}{2}-t) + (1-t)] = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}t - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t$$

a na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\int_t^1 (x-t) dx - \frac{1}{6}(1-t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}t - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{3}.$$

Pro Peanovo jádro $K_{3,1}(t)$ tedy platí rovnost

$$K_{3,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{3}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ověřením spojitosti funkce $K_{3,1}$ v bodě $\frac{1}{2}$, získáme spojitost této funkce na celém intervalu $[0, 1]$, neboť je na intervalech $[0, \frac{1}{2})$ a $[\frac{1}{2}, 1]$ po částech polynomiální a tedy jistě spojitá.

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} K_{3,1}(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$$

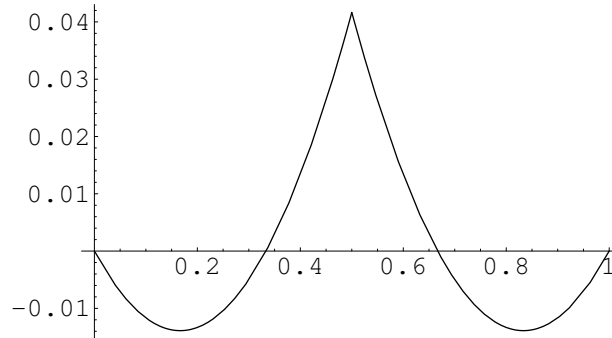
$$K_{3,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{24}.$$

Díky této rovnosti je funkce $K_{3,1}$ spojitá na celém intervalu $[0, 1]$.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{K_{3,1}(\frac{1}{2}+h) - K_{3,1}(\frac{1}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+h)^2 - \frac{1}{6}(\frac{1}{2}+h) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{6}(\frac{1}{2})}{h} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{K_{3,1}(\frac{1}{2}+h) - K_{3,1}(\frac{1}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+h)^2 - \frac{5}{6}(\frac{1}{2}+h) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{6}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{3}}{h} = -\frac{1}{3}.$$

Hodnoty jednostranných derivací v bodě $\frac{1}{2}$ jsou navzájem různé, tudíž funkce $K'_{3,1}$ není v bodě $\frac{1}{2}$ definována.



Obr. č.2.4, $K_{3,1}(t)$

Pro $k = 2$ dostáváme

$$K_{3,2}(t) = E_3^x(x-t)_+^2 = \int_0^1 (x-t)_+^2 dx - \frac{1}{6} \left[(0-t)_+^2 + 4\left(\frac{1}{2}-t\right)_+^2 + (1-t)_+^2 \right].$$

Na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ tedy řešíme

$$\int_t^1 (x-t)^2 dx - \frac{1}{6} \left[4\left(\frac{1}{2}-t\right)^2 + (1-t)^2 \right] = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^2$$

a na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\int_t^1 (x-t)^2 dx - \frac{1}{6}(1-t)^2 = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{6}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{6}.$$

Peanovo jádro $K_{3,2}(t)$ je dáno vzorcem

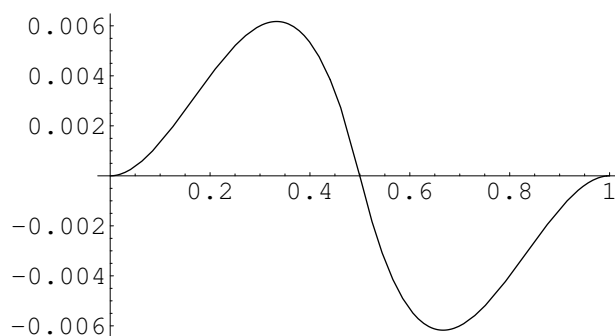
$$K_{3,2}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^2, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{6}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{6}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Funkce $K_{3,2}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, neboť je na každém z intervalů $[0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1]$ polynomiální, tedy zřejmě spojitá.

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} K_{3,2}(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$K_{3,2}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} = 0.$$

Díky rovnosti hodnot jednostranných limit v bodě $\frac{1}{2}$ je funkce $K_{3,2}$ spojitá na celém intervalu $[0, 1]$.



Obr. č.2.5, $K_{3,2}(t)$

Pro $k = 3$ dostáváme

$$\begin{aligned} K_{3,3}(t) &= E_3^x(x-t)_+^3 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^3 dx - \frac{1}{6} \left[(0-t)_+^3 + 4\left(\frac{1}{2}-t\right)_+^3 + (1-t)_+^3 \right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ tedy platí rovnost

$$\int_t^1 (x-t)^3 dx - \frac{1}{6} \left[4\left(\frac{1}{2}-t\right)^3 + (1-t)^3 \right] = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{2}t -$$

$$-\frac{1}{12} + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3$$

a na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\int_t^1 (x-t)^3 dx - \frac{1}{6}(1-t)^3 = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{6}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}.$$

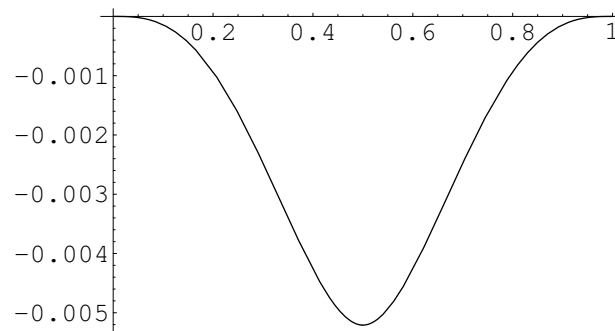
Pro Peanovo jádro $K_{3,3}(t)$ platí

$$K_{3,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{6}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dokažme nyní spojitost funkce $K_{3,3}$ na intervalu $[0, 1]$. Stejně jako v předchozích případech stačí ověřit spojitost funkce $K_{3,3}$ v bodě $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} K_{3,3}(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{192}$$

$$K_{3,3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12} = -\frac{1}{192}.$$



Obr. č.2.6, $K_{3,3}(t)$

Simpsonovo pravidlo-jiný způsob

Naším úkolem bude nalézt kvadraturní formuli Q_3 tvaru

$$Q_3 = a_0 f(0) + a_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + a_2 f(1)$$

pomocí Peanova jádra zavedeného v definici 2.16. Předpokládejme nejprve, že námi hledaná kvadratura má algebraický stupeň přesnosti alespoň roven 0. Jedná se tedy o uzavřenou kvadraturu, proto položíme $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = 1$. Hledejme řešení u diferenciální rovnice

$$-\frac{du(t)}{dt} = 1,$$

což je jistě polynom prvního stupně zapsaný obecně ve tvaru

$$u(t) = -t + a,$$

kde $a \in \mathbb{R}$. Právě tento koeficient chceme určit. Funkce φ_0 a φ_1 budou představovat dvě lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice

$$-\frac{du(t)}{dt} = 1,$$

tedy funkce φ_0 a φ_1 jsou tvaru $\varphi_0(t) = -t + \bar{a}$ a $\varphi_1(t) = -t + \tilde{a}$. Dosazením snadno získáme tvar koeficientů a_0, a_1 a a_2 , jejich hodnoty však nejsou zadány jednoznačně. Protože $D_0^* = 1$, platí tedy podle vzorce (2.5)

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{00} = \varphi_0(x_0) = \bar{a} \\ a_1 &= a_{01} = (\varphi_1 - \varphi_0)(x_1) = \tilde{a} - \bar{a} \\ a_2 &= a_{02} = -\varphi_1(x_2) = -(-1 + \tilde{a}). \end{aligned}$$

Dosadíme-li do těchto rovností $\bar{a} = \frac{1}{6}$ a $\tilde{a} = \frac{5}{6}$ dostáváme $a_0 = \frac{1}{6}$, $a_1 = \frac{2}{3}$ a $a_2 = \frac{1}{6}$. Hledaná kvadraturní formule má tedy tvar

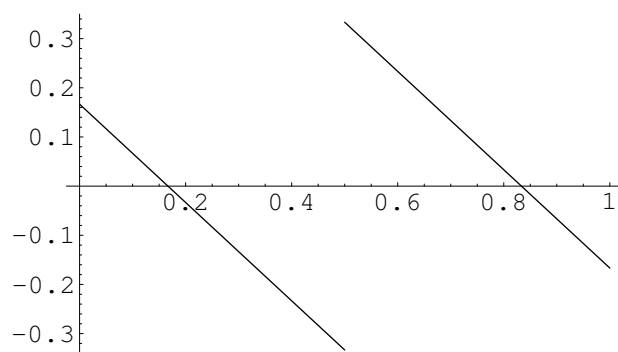
$$Q_3 f = \frac{1}{6} [f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)].$$

Připomeňme ještě, že Peanovo jádro $\mathbb{K}_{3,0}$ definujeme jako

$$\mathbb{K}_{3,0}(t)|_{[x_i, x_{i+1})} = \varphi_i(t),$$

pro $i = 0, 1$, platí tedy

$$\mathbb{K}_{3,0}(t) = \begin{cases} -t + \frac{1}{6}, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -t + \frac{5}{6}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Obr. č.2.7, $\mathbb{K}_{3,0}(t)$

Jinými slovy dostáváme vztah mezi Peanovým jádrem spočteným podle definice 2.3 a podle definice 2.16 ve tvaru

$$\mathbb{K}_{3,0} = K_{3,0}.$$

Předpokládejme nyní, že hledáme opět kvadraturní formuli Q_3 tvaru

$$Q_3 = a_0 f(0) + a_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + a_2 f(1),$$

kteřá má algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 1. Jedná se zřejmě o uzavřenou kvadraturu, proto položíme $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = 1$. Hledejme tedy řešení u diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = 1,$$

což je jistě polynom druhého stupně zapsaný obecně ve tvaru

$$u(t) = \frac{t^2}{2} + at + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Funkce φ_0 a φ_1 budou představovat dvě lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = 1,$$

tedy funkce φ_0 a φ_1 jsou tvaru $\varphi_0(t) = \frac{t^2}{2} + \bar{a}t + \bar{b}$ a $\varphi_1(t) = \frac{t^2}{2} + \tilde{a}t + \tilde{b}$. Protože požadovaná kvadraturní formule neobsahuje hodnoty derivací funkce

f v uzlových bodech x_i , pro $i = 0, 1, 2$, platí

$$a_{10} = \varphi_0(x_0) = \bar{b} = 0$$

$$a_{11} = (\varphi_1 - \varphi_0)(x_1) = (\tilde{a} - \bar{a})\frac{1}{2} + (\tilde{b} - \bar{b}) = 0$$

$$a_{12} = -\varphi_1(x_2) = -\left(\frac{1}{2} + \tilde{a} + \tilde{b}\right) = 0.$$

Máme soustavu tří lineárních rovnic pro čtyři neznámé, musíme tedy jeden z parametrů zvolit. Pro příklad zvolme $\bar{a} = -\frac{1}{6}$. Nyní je již soustava jednoznačně řešitelná a jejím řešením je $\bar{a} = -\frac{1}{6}$, $\bar{b} = 0$, $\tilde{a} = -\frac{5}{6}$ a $\tilde{b} = \frac{1}{3}$. Pro určení vah a_0 , a_1 a a_2 opět použijeme vzorec (2.5), kde $D_1^* = -\frac{d}{dt}$. Dosazením právě získaných hodnot do tohoto vzorce dostaneme

$$a_0 = a_{00} = D_1^*(\varphi_0)(x_0) = -\bar{a} = \frac{1}{6}$$

$$a_1 = a_{01} = D_1^*(\varphi_1 - \varphi_0)(x_1) = -(\tilde{a} - \bar{a}) = \frac{2}{3}$$

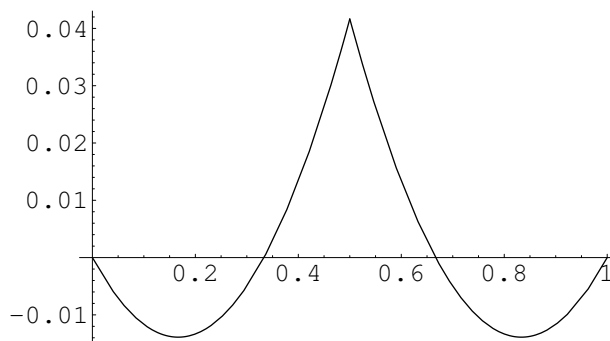
$$a_2 = a_{02} = -D_1^*(\varphi_1)(x_2) = 1 + \tilde{a} = \frac{1}{6}.$$

Hledaná kvadraturní formule má tedy tvar

$$Q_3 f = \frac{1}{6}[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)].$$

Peanovo jádro $\mathbb{K}_{3,1}$ definujeme jako $\mathbb{K}_{3,1}(t)|_{[x_i, x_{i+1})} = \varphi_i(t)$, pro $i = 0, 1$, platí tedy

$$\mathbb{K}_{3,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{3}, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$



Obr. č.2.8, $\mathbb{K}_{3,1}(t)$

Vztah mezi Peanovým jádrem spočteným pomocí definice 2.3 a Peanovým jádrem spočteným podle definice 2.16 je

$$\mathbb{K}_{3,1} = K_{3,1}.$$

Hledejme nyní kvadrurní vzorec Q_3 ve tvaru

$$Q_3 = a_0 f(0) + a_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + a_2 f(1),$$

přitom předpokládejme, že námi hledaná kvadrurní formule Q_3 má algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 2. Opět hovoříme o uzavřené kvadrurní formulí, polořme tedy $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = 1$. Hledáme řešení u diferenciální rovnice

$$-\frac{du^3(t)}{dt^3} = 1,$$

coř je jistě polynom druhého stupně zapsaný obecně ve tvaru

$$u(t) = -\frac{t^3}{6} + at^2 + bt + c,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Právě tyto koeficienty chceme určit. Funkce φ_0 a φ_1 budou představovat dvě lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice

$$-\frac{du^3(t)}{dt^3} = 1,$$

tedy funkce φ_0 a φ_1 jsou tvaru

$$\varphi_0(t) = -\frac{t^3}{6} + \bar{a}t^2 + \bar{b}t + \bar{c}, \quad \varphi_1(t) = -\frac{t^3}{6} + \tilde{a}t^2 + \tilde{b}t + \tilde{c}.$$

Opět využijeme skutečnosti, že námi hledaná kvadratura je druhého druhu, tedy neobsahuje hodnoty derivací funkce f ve svých uzlových bodech. Aplikací vzorce (2.5), kde $D_0^* = 1$, získáme rovnosti

$$\begin{aligned} a_{20} &= \varphi_0(x_0) = \bar{c} = 0 \\ a_{21} &= (\varphi_1 - \varphi_0)(x_1) = (\tilde{a} - \bar{a})\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\tilde{b} - \bar{b})\frac{1}{2} + (\tilde{c} - \bar{c}) = 0 \\ a_{22} &= -\varphi_1(x_2) = -\left(-\frac{1}{6} + \tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c}\right) = 0. \end{aligned}$$

Opět použijeme vzorec (2.5), tentokrát pro $D_1^* = -\frac{d}{dt}$, dostaneme tedy

$$\begin{aligned} a_{10} &= D_1^*(\varphi_0)(x_0) = -\bar{b} = 0 \\ a_{11} &= D_1^*(\varphi_1 - \varphi_0)(x_1) = -(\tilde{a} - \bar{a})\frac{1}{2} - (\tilde{b} - \bar{b}) = 0 \\ a_{12} &= -D_1^*(\varphi_1)(x_2) = -\frac{1}{2} + 2\tilde{a} + \tilde{b} = 0. \end{aligned}$$

Získali jsme tedy soustavu šesti lineárních rovnic pro šest neznámých. Tato soustava je jednoznačně řešitelná (zde již nemusíme přidávat další podmínky). Jejím řešením je $\bar{a} = \frac{1}{12}, \bar{b} = \bar{c} = 0, \tilde{a} = \frac{5}{12}, \tilde{b} = -\frac{1}{3}$ a $\tilde{c} = \frac{1}{12}$. Dosazením získaných hodnot do vzorce (2.5) pro určení koeficientů kvadraturní formule Q_3 , kde $D_2^* = \frac{d^2}{dt^2}$, dostaneme

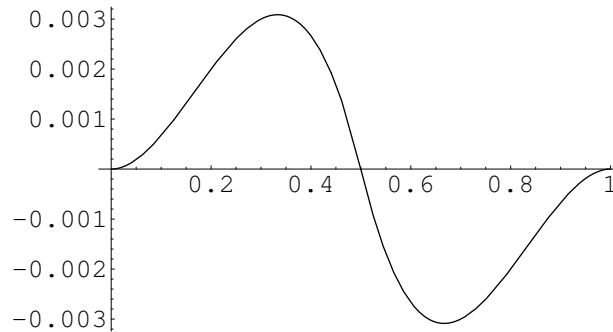
$$\begin{aligned} a_0 &= a_{00} = D_2^*(\varphi_0)(x_0) = 2\bar{a} = \frac{1}{6} \\ a_1 &= a_{01} = D_2^*(\varphi_1 - \varphi_0)(x_1) = 2(\tilde{a} - \bar{a}) = \frac{2}{3} \\ a_2 &= a_{02} = -D_2^*(\varphi_1)(x_2) = -(-1 + 2\tilde{a}) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Hledaná kvadraturní formule má tedy tvar

$$Q_3 f = \frac{1}{6}[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)].$$

Peanovo jádro $\mathbb{K}_{3,2}$ definujeme jako $\mathbb{K}_{3,2}(t)|_{[x_i, x_{i+1}]} = \varphi_i(t)$, pro $i = 0, 1$, platí tedy

$$\mathbb{K}_{3,2}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^2, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{12}t^2 - \frac{2}{6}t + \frac{1}{12}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Obr. č.2.9, $K_{3,2}(t)$

Vztah mezi Peanovým jádrem spočteným pomocí definice 2.3 a Peanovým jádrem spočteným podle definice 2.16 je

$$\mathbb{K}_{3,2} = \frac{1}{2}K_{3,2}.$$

Naším úkolem bude nyní nalézt kvadraturní formuli Q_3 tvaru

$$Q_3 = a_0f(0) + a_1f\left(\frac{1}{2}\right) + a_2f(1).$$

Předpokládejme, že námi hledaná kvadratura má algebraický stupeň přesnosti roven 3. Jde zřejmě o uzavřenou kvadraturní formuli, proto položíme $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = 1$. Hledejme řešení u diferenciální rovnice

$$\frac{du^4(t)}{dt^4} = 1,$$

což je jistě polynom čtvrtého stupně zapsaný obecně ve tvaru

$$u(t) = \frac{t^4}{24} + at^3 + bt^2 + ct + d,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Funkce φ_0 a φ_1 budou představovat dvě lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice

$$\frac{du^4(t)}{dt^4} = 1,$$

tedy funkce φ_0 a φ_1 jsou tvaru

$$\varphi_0(t) = \frac{t^4}{24} + \bar{a}t^3 + \bar{b}t^2 + \bar{c}t + \bar{d},$$

$$\varphi_1(t) = \frac{t^4}{24} + \tilde{a}t^3 + \tilde{b}t^2 + \tilde{c}t + \tilde{d}.$$

Využijeme skutečnosti, že námi hledaná kvadratura je druhého druhu, tedy neobsahuje hodnoty derivací funkce f ve svých uzlech. Platí tedy podle vzorce (2.5), pro $D_0^* = 1$, následující rovnosti:

$$a_{30} = \varphi_0(x_0) = \bar{d} = 0$$

$$a_{31} = (\varphi_1 - \varphi_0)(x_1) = (\tilde{a} - \bar{a})\left(\frac{1}{2}\right)^3 + (\tilde{b} - \bar{b})\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\tilde{c} - \bar{c})\frac{1}{2} + (\tilde{d} - \bar{d}) = 0$$

$$a_{32} = -\varphi_1(x_2) = -\left(\frac{1}{24} + \tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} + \tilde{d}\right) = 0.$$

Stejný vzorec použijeme pro $D_1^* = -\frac{d}{dt}$ a získáme

$$\begin{aligned} a_{20} &= D_1^*(\varphi_0)(x_0) = -\bar{c} = 0 \\ a_{21} &= D_1^*(\varphi_1 - \varphi_0)(x_1) = -3(\tilde{a} - \bar{a}) \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (\tilde{b} - \bar{b})\frac{1}{2} - (\tilde{c} - \bar{c}) = 0 \\ a_{22} &= -D_1^*(\varphi_1)(x_2) = \frac{1}{6} + 3\tilde{a} + 2\tilde{b} + \tilde{c} = 0. \end{aligned}$$

Analogicky postupujeme pro $D_2^* = \frac{d^2}{dt^2}$ a dostáváme

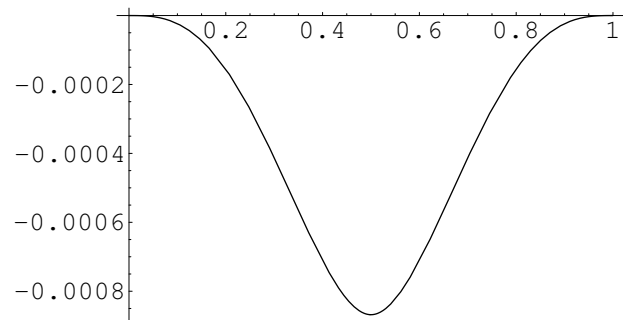
$$\begin{aligned} a_{10} &= D_2^*(\varphi_0)(x_0) = 2\bar{b} = 0 \\ a_{11} &= D_2^*(\varphi_1 - \varphi_0)(x_1) = 6(\tilde{a} - \bar{a})\frac{1}{2} + 2(\tilde{b} - \bar{b}) = 0 \\ a_{12} &= -D_2^*(\varphi_1)(x_2) = -\left(\frac{1}{2} + 6\tilde{a} + 2\tilde{b}\right) = 0. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že tato soustava rovnic je přezadaná, máme totiž devět rovnic pro osm neznámých. Přesto je tato soustava jednoznačně řešitelná, přičemž jejím řešením je $\bar{a} = -\frac{1}{36}$, $\bar{b} = \bar{c} = \bar{d} = 0$, $\tilde{a} = -\frac{5}{36}$, $\tilde{b} = \frac{1}{6}$, $\tilde{c} = -\frac{1}{12}$ a $\tilde{d} = \frac{1}{72}$. Obdobně pro $D_3^* = -\frac{d^3}{dt^3}$ dostáváme

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{00} = D_3^*(\varphi_0)(x_0) = -6\bar{a} = \frac{1}{6} \\ a_1 &= a_{01} = D_3^*(\varphi_1 - \varphi_0)(x_1) = -6(\tilde{a} - \bar{a}) = \frac{2}{3} \\ a_2 &= a_{02} = -D_3^*(\varphi_1)(x_2) = 1 + 6\tilde{a} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Peanovo jádro $\mathbb{K}_{3,3}$ definujeme jako $\mathbb{K}_{3,3}(t)|_{[x_i, x_{i+1})} = \varphi_i(t)$, pro $i = 0, 1$, platí tedy

$$\mathbb{K}_{3,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{36}t^3, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{24}t^4 - \frac{5}{36}t^3 + \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{12}t + \frac{1}{72}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Obr. č.2.10, $K_{3,3}(t)$

Vztah mezi Peanovým jádrem spočteným pomocí definice 2.3 a Peanovým jádrem spočteným podle definice 2.16 je

$$\mathbb{K}_{3,3} = \frac{1}{3!} K_{3,3}.$$

Kapitola 3

Optimální kvadraturní formule

V následující kapitole se budeme zabývat hledáním optimální kvadraturní formule. Pod názvem optimální kvadraturní formule můžeme rozumět několik dosti odlišných pojmů. Nejpoužívanějšími kritériem pro určení optimality kvadraturního vzorce bývá odhad chybového členu. Dalším v podstatně menší míře užívaným kritériem je algebraický stupeň přesnosti. V této kapitole se budeme zabývat především prvním z výše uvedených kritérií - odhadem chybového členu. Nejprve zavedeme pojem optimální kvadratury v Nikolského, v Sardově a v Markovově smyslu¹. Uvedeme některé vlastnosti a příklady těchto kvadraturních formulí. Dále se budeme zabývat jejich vzájemnými vztahy a v neposlední řadě úskalími při jejich hledání. Podrobněji se budeme zabývat nalezením optimální kvadraturní formule v Nikolského smyslu. Na závěr se krátce zmíníme o optimální kvadratuře vzhledem k algebraickému stupni přesnosti, tedy kvadraturní formulí s největším možným algebraickým stupněm přesnosti.

3.1 Optimální kvadratura druhého druhu v Nikolského smyslu

Z výše uvedené trojice optimálních kvadratur jsou právě Nikolského kvadraturní vzorce nejméně obecné. Nejprve ozřejmíme, co budeme v následujícím textu rozumět, pod pojmem optimální kvadratura v Nikolského smyslu, na kvadraturním vzorci druhého druhu, který pracuje pouze s hodnotami in-

¹Toto rozdělení přebíráme z [1].

tegrované funkce v uzlových bodech kvadraturní formule (tedy kvadraturní formule neobsahující hodnoty derivací).

Uvažujme kvadraturní rovnici druhého druhu, tedy

$$\int_0^1 f(x)w(x) dx = \sum_{i=1}^m a_i f(x_i) + E(f),$$

kde funkcionál E nazveme chybovým funkcionálem, číslo $E(f)$ chybou kvadraturní formule a funkcionál Q_m tvaru

$$Q_m f = \sum_{i=1}^m a_i f(x_i) \quad (3.1)$$

kvadraturní formulí druhého druhu s váhami a_i a uzly x_i pro $i = 1, \dots, m$, kde předpokládáme $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$ a množinu funkcí \mathcal{O} . Chybu kvadraturní formule (3.1) na množině funkcí \mathcal{O} označíme \mathcal{E} a definujeme ji následujícím způsobem:

$$\mathcal{E} = \sup_{f \in \mathcal{O}} E(f).$$

Optimální kvadraturní formuli v Nikolského smyslu druhého druhu budeme značit takto:

$$Q_m^N f = \sum_{i=1}^m a_i^N f(x_i). \quad (3.2)$$

Její chybu na množině funkcí \mathcal{O} označíme jako \mathcal{E}^N , přitom požadujeme, aby platilo

$$\mathcal{E}^N = \inf_{\substack{a_i \in \mathbb{R} \\ i=1, \dots, m}} \mathcal{E},$$

jinými slovy kvadraturní formule Q_m^N má pro dané rozložení uzlových bodů x_i , kde $i = 1, \dots, m$, nejmenší chybu na množině funkcí \mathcal{O} . Výše uvedené úvahy nyní shrneme do definice optimální kvadraturní formule v Nikolského smyslu na množině funkcí \mathcal{O} .

Definice 3.1.

Existuje-li kvadraturní formule Q_n^N druhého druhu taková, že platí

$$\max_{f \in \mathcal{O}} |E_m^N f| = \min_{\substack{a_i \in \mathbb{R} \\ i=1, \dots, m}} \max_{f \in \mathcal{O}} |E_m f|,$$

pak tuto kvadraturní formuli nazveme optimální kvadraturní formulí v Nikolského smyslu na množině funkcí \mathcal{O} .

Poznámka 3.2. Pro korektnost uvedené definice je nutné uvést, na jaké množině funkcí je daná kvadrurní formule optimální. Z kontextu však bude vždy zřejmé, jakou množinu funkcí uvažujeme, proto budeme tuto množinu v zápise často vynechávat a o uvedené kvadrurní formuli budeme nadále hovořit pouze jako o optimální kvadratuře v Nikolského smyslu.

Pojem optimální kvadratury v Nikolského smyslu nejprve ozřejmíme v ne zcela obecném případě. Budeme uvažovat n -krát spojitě diferencovatelnou funkci f na intervalu $[0, 1]$. Váhovou funkci w volíme rovnu jedné. V našich úvahách se prozatím omezíme na kvadrurní formule operující pouze s hodnotami funkce f v uzlových bodech x_i , tedy

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^m a_i f(x_i) + E(f).$$

Předpokládejme dále, že uvedená kvadratura $Q_m f = \sum_{i=1}^m a_i f(x_i)$ má algebraický stupeň přesnosti k . Pro jednoduchost budeme předpokládat rovnost $k = n$.

Z předchozích kapitol víme, že je možné zapsat chybu E kvadrurní formule Q_m pomocí Peanova jádra $K_{m,k}$ následujícím způsobem:

$$E(f) = \frac{1}{k!} \int_0^1 f^{(k+1)}(t) K_{m,k}(t) dt.$$

Nyní se budeme snažit odhadnout chybový člen $E(f)$. Odhad budeme hledat v normě prostoru $\mathcal{L}^p([0, 1])$ pro $p \in [1, \infty]$. Speciálně nás bude zajímat případ $p = 1$ a především $p = 2$ tedy pro výše uvedené hodnoty p dostáváme, užitím Hölderovy nerovnosti, pořadě následující vztahy:

$$|E(f)| \leq \frac{1}{k!} \int_0^1 |f^{(k+1)}(t) K_{m,k}(t)| dt \leq \frac{1}{k!} \|f^{(k+1)}\|_\infty \|K_{m,k}\|_1,$$

$$|E(f)| \leq \frac{1}{k!} \int_0^1 |f^{(k+1)}(t) K_{m,k}(t)| dt \leq \frac{1}{k!} \|f^{(k+1)}\|_2 \|K_{m,k}\|_2.$$

Pro zjednodušení dalších operací označíme

$$M_1 = \int_0^1 |K_{m,k}(t)| dt,$$

$$M_2 = \int_0^1 |K_{m,k}(t)|^2 dt.$$

V obou uvedených případech jsou zcela odděleny vlastnosti kvadraturní formule Q_m a integrované funkce f . Tento fakt, je pro nás velmi důležitý, neboť nám umožní minimalizovat část odpovídající kvadraturnímu vzorci, tedy normu Peanova jádra hledané kvadratury v prostoru funkcí \mathcal{L}_p , pro $p = 1, 2$, nezávisle na integrované funkci f .

Hledáme tedy

$$\mathcal{M}_j = \min_{a_i \in \mathbb{R}} M_j,$$

pro $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, 2$. V obou případech pro nás bude stěžejní lineární závislost Peanova jádra kvadraturní formule na jejích koeficientech.

Nejprve se budeme věnovat případu $p = 1$.

Příklad 1

Hledáme optimální kvadraturní vzorec Q_3 v Nikolského smyslu ve tvaru

$$Q_3 f = af(0) + bf\left(\frac{1}{2}\right) + cf(1)$$

na množině funkcí $\mathcal{O} = \mathcal{C}^1([0, 1])$. Hledáme tedy hodnoty vah $a, b, c \in \mathbb{R}$, pro dané uzlové body $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$ a $x_3 = 1$. Předpokládejme (z předpokladů věty 2.4), že má námi hledaná kvadratura algebraický stupeň přesnosti alespoň 0. Platí tedy

$$E_3(1) = 0,$$

což znamená

$$\int_0^1 1 dx - a - b - c = 0.$$

Jinými slovy platí rovnost

$$a + b + c = 1.$$

Podle definice 2.3 odvodíme tvar Peanova jádra $K_{3,0}$ multého řádu kvadraturní formule Q_3 . Pro $k = 0$ dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} K_{3,0}(t) &= E_3^x(x-t)_+^0 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^0 dx - \left[a(0-t)_+^0 + b\left(\frac{1}{2}-t\right)_+^0 + c(1-t)_+^0 \right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ platí

$$\int_t^1 dx - b - c = 1 - t - b - c = -t + a$$

a na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\int_t^1 dx - c = 1 - t - c.$$

Pro Peanovo jádro $K_{3,0}(t)$ dostáváme vztah

$$K_{3,0}(t) = \begin{cases} -t + a, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -t + 1 - c, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Takto získaná funkce $K_{3,0}$ zřejmě není určena jednoznačně. Řešíme zde soustavu jedné lineární rovnice pro tři neznámé, je tedy třeba dodat nějaké zjednoznačující podmínky. Zjednoznačující podmínku budeme volit

$$\mathcal{M}_1 = \min_{a,b,c \in \mathbb{R}} M_1,$$

kde platí

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1^{[1]} + \mathcal{M}_1^{[2]},$$

kde

$$\mathcal{M}_1^{[i-1]} = \min_{a,c \in \mathbb{R}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |K_{3,0}(t)| dt,$$

pro $i = 1, 2$. Spočteme tedy

$$M_1^{[1]}(a, c) = \int_0^{\frac{1}{2}} |-t + a| dt,$$

$$M_1^{[2]}(a, c) = \int_{\frac{1}{2}}^1 |-t + 1 - c| dt.$$

Dostaneme vzorce

$$M_1^{[1]}(a, c) = \begin{cases} \frac{a}{2} - \frac{1}{8}, & a \geq \frac{1}{2} \\ a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{8}, & a \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{a}{2} + \frac{1}{8}, & a \leq 0 \end{cases}$$

a

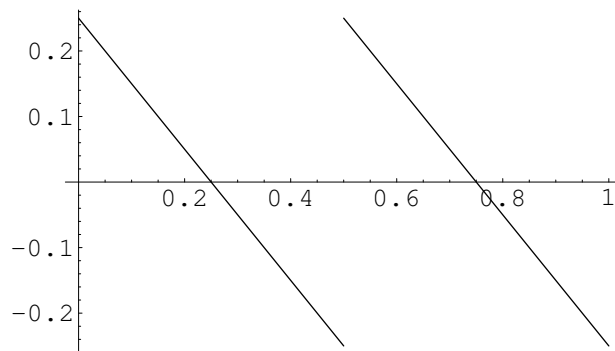
$$M_1^{[2]}(a, c) = \begin{cases} \frac{c}{2} - \frac{1}{8}, & c \geq \frac{1}{2} \\ c^2 - \frac{c}{2} + \frac{1}{8}, & c \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{c}{2} + \frac{1}{8}, & c \leq 0. \end{cases}$$

Minimum tyto funkce zřejmě nabývají pro hodnoty $a = \frac{1}{4}$ a $c = \frac{1}{4}$. Dosazením do rovnice pro algebraický stupeň přesnosti získáme poslední hledaný koeficient $b = \frac{1}{2}$. Kvadraturní formule Q_3 má tedy tvar

$$Q_3 f = \frac{1}{4} \left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right].$$

Pro Peanovo jádro $K_{3,0}(t)$ dostáváme vztah (nyní již zcela konkrétní)

$$K_{3,0}(t) = \begin{cases} -t + \frac{1}{4}, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -t + \frac{3}{4}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Obr. č.3.1, $K_{3,0}(t)$

Použijeme nyní tvrzení věty 2.4 a dostaneme rovnost

$$E_3(f) = \int_0^1 f'(t)K_{3,0}(t) dt.$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti pro $p = 1$ získáme odhad

$$|E_3f| \leq \|f'\|_\infty \int_0^1 |K_{3,0}(t)| dt.$$

Dosazením snadno získáme

$$|E_3f| \leq \frac{1}{8} \|f'\|_\infty = 0,125 \cdot \|f'\|_\infty.$$

Jak jsme již předeslali před příkladem 1, oddělení vlastností kvadraturní formule Q_3 a integrované funkce f v odhadu chyby této kubatury nám umožnilo minimalizovat pouze část odpovídající kvadraturnímu vzorci Q_3 , tedy \mathcal{L}_1 normu Peanova jádra $K_{3,0}$.

Poznámka 3.3. *Hledat odhad chybového členu kvadraturní formule Q_m pomocí normy prostoru $\mathcal{L}_1([0,1])$ je vhodné především pro kvadraturní vzorce, jejichž algebraický stupeň přesnosti je roven 0. Pro kvadratury s větším algebraickým stupněm přesnosti nastává problém při hledání minima M_1 , neboť tako funkce již obecně není konvexní kvadratickou funkcí svých proměnných (tedy koeficientů hledané kvadraturní formule).*

Nyní podrobněji popíšeme postup pro případ $p = 2$.

Příklad 2

Hledáme optimální kvadraturní vzorec Q_3 v Nikolského smyslu ve tvaru

$$Q_3f = af(0) + bf\left(\frac{1}{2}\right) + cf(1)$$

na množině funkcí $\mathcal{O} = \mathcal{C}^1([0,1])$. Hledáme tedy hodnoty vah $a, b, c \in \mathbb{R}$, pro dané uzlové body $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$ a $x_3 = 1$. Opět předpokládejme (z předpokladů věty 2.4), že má námi hledaná kvadratura algebraický stupeň přesnosti alespoň 0. Platí tedy

$$E_3(1) = 0,$$

což znamená

$$\int_0^1 1 \, dx - a - b - c = 0.$$

Jinými slovy platí rovnost

$$a + b + c = 1.$$

Podle definice 2.3 odvodíme tvar Peanova jádra $K_{3,0}$ nultého řádu kvadraturní formule Q_3 . Pro $k = 0$ dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} K_{3,0}(t) &= E_3^x(x-t)_+^0 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^0 dx - \left[a(0-t)_+^0 + b\left(\frac{1}{2}-t\right)_+^0 + c(1-t)_+^0 \right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ platí

$$\int_t^1 dx - b - c = 1 - t - b - c = -t + a$$

a na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\int_t^1 dx - c = 1 - t - c.$$

Pro Peanovo jádro $K_{3,0}(t)$ dostáváme vztah

$$K_{3,0}(t) = \begin{cases} -t + a, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -t + 1 - c, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Takto získaná funkce $K_{3,0}$ zřejmě není určena jednoznačně. Řešíme zde soustavu jedné lineární rovnice pro tři neznámé, je tedy třeba dodat nějaké zjednotňující podmínky. Zjednotňující podmínku budeme volit takto:

$$\mathcal{M}_2 = \min_{a,b,c \in \mathbb{R}} M_2,$$

kde platí

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2^{[1]} + \mathcal{M}_2^{[2]},$$

kde

$$M_2^{[i-1]} = \min_{a,c \in \mathbb{R}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K_{3,0}^2(t) \, dt,$$

pro $i = 1, 2$. Spočteme tedy

$$M_2^{[1]}(a, c) = \int_0^{\frac{1}{2}} (-t + a)^2 dt,$$

$$M_2^{[2]}(a, c) = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-t + 1 - c)^2 dt.$$

Dostaneme vzorce

$$M_2^{[1]}(a, c) = \frac{a^2}{2} - \frac{a}{4} + \frac{1}{24}$$

a

$$M_2^{[2]}(a, c) = \frac{c^2}{2} - \frac{c}{4} + \frac{1}{24}.$$

Je zřejmé, že funkce $M_2^{[1]}$ a $M_2^{[2]}$ jsou v každé své proměnné konvexní kvadratické funkce. Pro výpočet jejich minimálních hodnot použijeme běžný postup pro hledání extrémů funkce více proměnných. Řešíme tedy dvě soustavy lineárních rovnic daných rovnostmi:

$$\frac{\partial M_2^{[1]}}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial M_2^{[1]}}{\partial c} = 0$$

a

$$\frac{\partial M_2^{[2]}}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial M_2^{[2]}}{\partial c} = 0.$$

Řešením této soustavy je: $a = \frac{1}{4}$ a $c = \frac{1}{4}$. Dosazením právě získaných hodnot do rovnice pro algebraický stupeň přesnosti, tedy

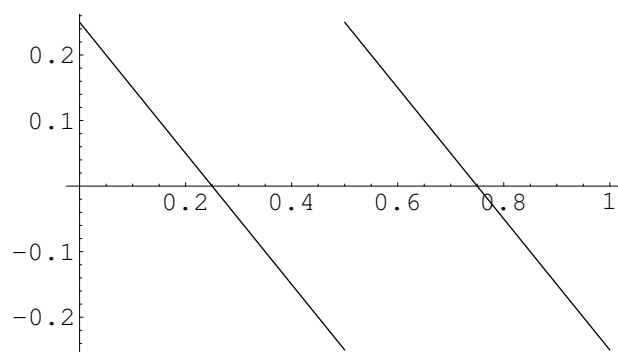
$$a + b + c = 1,$$

dostaneme hodnotu posledního hledaného parametru $b = \frac{1}{2}$. Kvadrurní formule Q_3 má tedy tvar

$$Q_3 f = \frac{1}{4} \left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right].$$

Pro Peanovo jádro $K_{3,0}(t)$ dostáváme vztah (nyní již zcela konkrétní)

$$K_{3,0}(t) = \begin{cases} -t + \frac{1}{4}, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -t + \frac{3}{4}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Obr. č.3.2, $K_{3,0}(t)$

Použijeme nyní tvrzení věty 2.4 a dostaneme rovnost

$$E_3(f) = \int_0^1 f'(t)K_{3,0}(t) dt.$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ získáme odhad

$$|E_3 f| \leq \|f'\|_2 \left(\int_0^1 |K_{3,0}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dosazením snadno získáme

$$|E_3 f| \leq \sqrt{\frac{1}{48}} \|f'\|_2 \doteq 0,144 \cdot \|f'\|_2.$$

Na tomto místě je vhodné zdůraznit skutečnost, že optimální kvadratura získaná v příkladu 1 je totožná s optimální kvadraturní formulí, jež je výsledkem příkladu 2.

Poznámka 3.4. Při hledání odhadu chyby kvadraturní formule Q_m pomocí normy prostoru \mathcal{L}_2 se nemusíme omezovat na kvadratury s algebraickým stupněm přesnosti rovným 0, neboť minimalizovaná funkce M_2 je v každé své proměnné konvexní kvadratická funkce.

Právě uvedenou poznámku demonstrujeme v následujícím příkladě, kde budeme hledat optimální kvadraturní formuli druhého druhu v Nikolského smyslu, která má algebraický stupeň přesnosti větší než 0, tedy roven alespoň 1.

Příklad 3

Hledáme opět optimální kvadraturní vzorec Q_3 v Nikolského smyslu ve tvaru

$$Q_3 f = af(0) + bf\left(\frac{1}{2}\right) + cf(1)$$

na množině funkcí $\mathcal{O} = \mathcal{C}^2([0, 1])$. Předpokládejme nyní, že tato kvadraturní formule má algebraický stupeň přesnosti roven alespoň jedné, tedy integruje přesně konstanty i lineární funkce. Stejně jako v předchozím příkladě snadným dosazením do rovnic pro algebraický stupeň přesnosti získáme rovnosti

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ b + 2c &= 1. \end{aligned}$$

Pro dané uzlové body $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$ a $x_3 = 1$, hledáme tedy hodnoty vah $a, b, c \in \mathbb{R}$. Řešíme nyní soustavu dvou lineárních rovnic pro tři neznámé, stejně jako v předchozím případě tedy musíme dodat zjednodušující podmínku. Pro $k = 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} K_{3,1}(t) &= E_3^x(x-t)_+^1 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^1 dx - \left[b(0-t)_+^1 + c\left(\frac{1}{2}-t\right)_+^1 + (1-t)_+^1 \right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ platí rovnost

$$\int_t^1 (x-t) dx - [b(\frac{1}{2}-t) + c(1-t)] = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} + (b+c-1)t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}b - c.$$

Pomocí substituce z rovnice pro algebraický stupeň přesnosti $b = 1 - 2c$, snadno získáme rovnost

$$\int_t^1 (x-t) dx - [b(\frac{1}{2}-t) + c(1-t)] = \frac{1}{2}t^2 - ct.$$

Na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$ budeme postupovat zcela analogicky. Dostáváme tedy

$$\int_t^1 (x-t) dx - c(1-t) = \frac{1}{2}t^2 + (c-1)t + \frac{1}{2} - c.$$

Pro Peanovo jádro $K_{3,1}(t)$ tedy platí rovnost

$$K_{3,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - ct, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}t^2 + (c-1)t + \frac{1}{2} - c, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Takto získaná funkce $K_{3,1}$ zřejmě není určena jednoznačně. Řešíme zde soustavu dvou lineárních rovnic pro tři neznámé, je tedy třeba dodat nějakou zjednoznačňující podmínku. Zjednoznačňující podmínku budeme volit takto:

$$\mathcal{M}_2 = \min_{a,b,c \in \mathbb{R}} M_2,$$

kde platí

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2^{[1]} + \mathcal{M}_2^{[2]},$$

kde

$$M_2^{[i-1]} = \min_{c \in \mathbb{R}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K_{3,1}^2(t) dt,$$

pro $i = 1, 2$. Spočteme tedy

$$M_2^{[1]}(c) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}t^2 - ct\right)^2 dt,$$

$$M_2^{[2]}(c) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2}t^2 + (c-1)t + \frac{1}{2} - c\right)^2 dt.$$

Dostaneme vzorce

$$M_2^{[1]}(c) = \frac{c^2}{24} - \frac{c}{64} + \frac{1}{640}$$

a

$$M_2^{[2]}(c) = \frac{c^2}{24} - \frac{c}{64} + \frac{1}{640}.$$

Je zřejmé, že funkce $M_2^{[1]}$ a $M_2^{[2]}$ jsou konvexní kvadratické funkce v proměnné c . Pro výpočet jejich minimálních hodnot použijeme běžný postup pro hledání extrémů funkce více proměnných. Řešíme tedy lineární rovnici danou rovností:

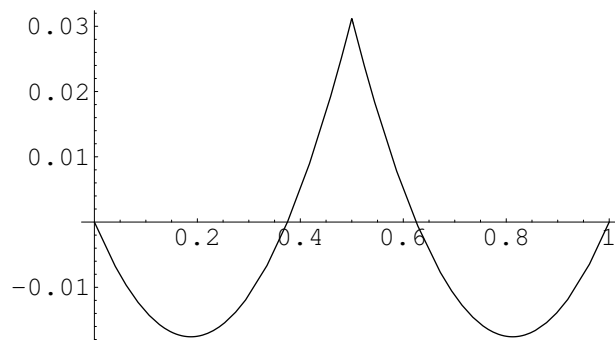
$$\frac{\partial M_2^{[1]}}{\partial c} = \frac{\partial M_2^{[2]}}{\partial c} = 0$$

Řešením této rovnice je $c = \frac{3}{8}$. Dosazením do rovnic pro algebraický stupeň přesnosti získáme zbylé dva koeficienty kvadraturního vzorce Q_3 , tedy $a = \frac{3}{16}$ a $b = \frac{5}{8}$. Kvadraturní formule Q_3 má nyní tvar

$$Q_3 f = \frac{1}{16} \left[3f(0) + 10f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(1) \right].$$

Peanovo jádro $K_{3,1}$ má tedy tvar

$$K_{3,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{16}t, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{13}{16}t + \frac{5}{16}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Obr. č.3.3, $K_{3,1}(t)$

Použijeme nyní tvrzení věty 2.4 a dostaneme rovnost

$$E_3(f) = \int_0^1 f^{(2)}(t) K_{3,1}(t) dt.$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ získáme odhad

$$|E_3 f| \leq \|f^{(2)}\|_2 \left(\int_0^1 |K_{3,1}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dosazením snadno získáme

$$|E_3 f| \leq \sqrt{\frac{1}{5120}} \|f^{(2)}\|_2 \doteq 0,014 \cdot \|f^{(2)}\|_2.$$

Zdůrazněme, že právě získaná kvadrurní formule již s předchozími kvadraturami (viz příklad 1 a příklad 2) není totožná.

3.2 Optimální kvadratura prvního druhu v Nikolského smyslu

Podrobněji se budeme zabývat hledáním optimální kvadraturní formule prvního druhu v Nikolského smyslu. Uvažujme kvadraturní rovnici prvního druhu

$$\int_0^1 f(x)w(x) dx = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m a_{li} f^{(l-1)}(x_i) + E(f),$$

kde funkcionál E nazveme chybovým funkcionálem, číslo $E(f)$ chybou kvadraturní formule a funkcionál Q_m tvaru

$$Q_m f = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m a_{li} f^{(l-1)}(x_i) \quad (3.3)$$

kvadraturní formulí prvního druhu s váhami a_{li} pro $i = 1, \dots, m$ a $l = 1, \dots, n$ a uzly x_i pro $i = 1, \dots, m$, kde předpokládáme $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$ a množinu funkcí \mathcal{O} . Chybou kvadraturní formule (3.9) na množině funkcí \mathcal{O} označíme \mathcal{E} a definujeme následujícím způsobem:

$$\mathcal{E} = \sup_{f \in \mathcal{O}} E(f).$$

Optimální kvadraturní formuli v Nikolského smyslu prvního druhu budeme značit jako

$$Q_m^N f = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m a_{li}^N f^{(l-1)}(x_i) \quad (3.4)$$

Její chybu na množině funkcí \mathcal{O} označíme takto: \mathcal{E}^N , přitom požadujeme, aby platilo

$$\mathcal{E}^N = \inf_{\substack{a_{li} \in \mathbb{R} \\ i=1, \dots, m \\ l=0, \dots, n-1}} \mathcal{E},$$

jinými slovy kvadraturní formule Q_m^N má pro dané rozložení uzlových bodů x_i , kde $i = 1, \dots, m$, nejmenší chybu na množině funkcí \mathcal{O} . Výše uvedené úvahy nyní shrneme do definice optimální kvadraturní formule v Nikolského smyslu na množině funkcí \mathcal{O} .

Definice 3.5.

Existuje-li kvadrurní formule Q_n^N prvního druhu taková, že platí

$$\max_{f \in \mathcal{O}} |E_n^N f| = \min_{\substack{a_i \in \mathbb{R} \\ i=1, \dots, m \\ l=0, \dots, n-1}} \max_{f \in \mathcal{O}} |E_n f|,$$

pak tuto kvadrurní formuli nazveme optimální kvadrurní formulí v Nikolského smyslu na množině funkcí \mathcal{O} .

Hledáme tedy pro dané rozmístění uzlových bodů x_i , kde $i = 1, \dots, n$ nejlepší hodnoty vah, pro které bude chyba kvadrurní formule na množině funkcí \mathcal{O} minimální. Předpokládejme, že kvadrurní formule Q_m má algebraický stupeň přesnosti roven k (podle definice 2.12, kde diferenciální operátor $D = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}$). Z předchozí kapitoly víme, že je možné zapsat chybu $E(f)$ kvadrurní formule Q_m pomocí Peanova jádra $\mathbb{K}_{m,k}$ následujícím způsobem:

$$E(f) = \int_0^1 f^{(k+1)}(t) \mathbb{K}_{m,k}(t) dt,$$

kde $\mathbb{K}_{m,k}$ je Peanovo jádro kvadrurní formule Q_m . Nyní se budeme snažit odhadnout chybový člen $E(f)$. Odhad budeme hledat v normě prostoru $\mathcal{L}^p([0, 1])$ pro $p \in [1, \infty]$. Speciálně nás bude zajímat případ $p = 2$. Pro tuto hodnotu p dostáváme, užitím Hölderovy nerovnosti, následující vztah:

$$|E(f)| \leq \int_0^1 |f^{(k+1)}(t) \mathbb{K}_{m,k}(t)| dt \leq \|f^{(k+1)}\|_2 \|\mathbb{K}_{m,k}\|_2.$$

Pro zjednodušení dalších operací označíme

$$M = \left(\int_0^1 |\mathbb{K}_{m,k}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Obdobně jako u kvadrurní formule druhého druhu i zde zcela odděleny vlastnosti kvadrurní formule Q_m a integrované funkce f . Tento fakt, je pro nás velmi důležitý, neboť nám umožňuje minimalizovat pouze část odpovídající kvadrurní formulí.

Hledáme tedy

$$\mathcal{M} = \min_{a_i \in \mathbb{R}} M,$$

pro $i = 1, \dots, m$ a $l = 0, \dots, n$. Připomeňme krátce, co přesně rozumíme pod pojmem Peanovo jádro $\mathbb{K}_{m,k}$. Necht' φ_i , pro $i = 0, \dots, m$, tvoří fundamentální systém \mathcal{F} diferenciální rovnice dané adjungovaným operátorem D^* s pravou stranou tvořenou váhovou funkcí w , tedy rovnice

$$D^*(u) = w.$$

Peanovo jádro $\mathbb{K}_{m,k}$ definujeme jako $\mathbb{K}_{m,k}(x)|_{[x_i, x_{i+1})} = \varphi_i(x)$. Je tedy zřejmé, že klíčovou roli v definici Peanova jádra zde hraje volba funkcí $\varphi_i(x)$. V předchozí kapitole jsme uvažovali některé možnosti volby těchto funkcí, nyní ukážeme další způsob, jakým je možno volit funkce $\varphi_i(x)$.

Příklad - uzavřená kvadratura

Hledáme optimální kvadrurní formuli Q_3 v Nikolského smyslu ve tvaru

$$Q_3 = \sum_{l=0}^2 \left[f^{(l)}(0) + f^{(l)}\left(\frac{1}{2}\right) + f^{(l)}(1) \right]$$

na množině funkcí $\mathcal{O} = \mathcal{C}^3([0, 1])$. Naším úkolem tedy bude aproximovat integrál $\int_0^1 f(x) dx$ kvadrurní formulí, která má algebraický stupeň přesnosti rovný dvěma a jejíž uzly leží v bodech 0 , $\frac{1}{2}$ a 1 . Jedná se tedy o uzavřenou kvadraturu, proto položíme $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = 1$. Hledejme řešení u diferenciální rovnice

$$-\frac{d^3 u(t)}{dt^3} = 1,$$

což je jistě polynom třetího stupně zapsaný obecně ve tvaru

$$u(t) = -\frac{t^3}{6} + at^2 + bt + c,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Právě tyto koeficienty chceme určit. Zjednodušující podmínku budeme volit takto:

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^2(t) dt,$$

pro $i = 1, 2$. Spočteme tedy

$$\tilde{u}_1(a, b, c) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{t^3}{6} + at^2 + bt + c \right)^2 dt,$$

$$\tilde{u}_2(a, b, c) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{t^3}{6} + at^2 + bt + c \right)^2 dt.$$

Dostaneme vzorce

$$\tilde{u}_1(a, b, c) = \frac{a^2}{160} + \frac{b^2}{24} + \frac{c^2}{2} + \frac{ab}{32} + \frac{ac}{12} + \frac{bc}{4} - \frac{a}{1152} - \frac{b}{480} - \frac{c}{192} + \frac{1}{32256}$$

a

$$\tilde{u}_2(a, b, c) = \frac{31a^2}{160} + \frac{7b^2}{24} + \frac{c^2}{2} + \frac{15ab}{32} + \frac{7ac}{12} + \frac{3bc}{4} - \frac{7a}{128} - \frac{31b}{480} - \frac{5c}{64} + \frac{127}{32256}.$$

Je zřejmé, že funkce \tilde{u}_1 a \tilde{u}_2 jsou v každé své proměnné konvexní kvadratické funkce. Pro výpočet jejich minimálních hodnot použijeme běžný postup pro hledání extrémů funkce více proměnných. Řešíme tedy dvě soustavy lineárních rovnic daných rovnostmi:

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial c} = 0$$

a

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c} = 0.$$

Vyřešíme nejprve soustavu pro \tilde{u}_1 . Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{a}{80} + \frac{b}{32} + \frac{c}{12} - \frac{1}{1152} &= 0 \\ \frac{a}{32} + \frac{b}{12} + \frac{c}{4} - \frac{1}{480} &= 0 \\ \frac{a}{12} + \frac{b}{4} + c - \frac{1}{192} &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je: $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{40}$ a $c = \frac{1}{960}$. Na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ definujeme funkci u_1 dosazením získaných hodnot a, b, c do vzorce pro u . Funkce u_1 má tedy tvar

$$u_1(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{40} + \frac{1}{960}.$$

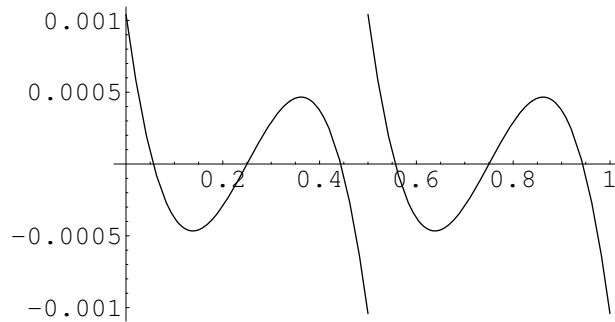
Stejným způsobem budeme postupovat při řešení soustavy rovnic pro \tilde{u}_2 . V tomto případě řešíme soustavu

$$\begin{aligned}\frac{31a}{80} + \frac{15b}{32} + \frac{7c}{12} - \frac{7}{128} &= 0 \\ \frac{15a}{32} + \frac{7b}{12} + \frac{3c}{4} - \frac{31}{480} &= 0 \\ \frac{7a}{12} + \frac{3b}{4} + c - \frac{5}{64} &= 0.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy je: $a = \frac{3}{8}$, $b = -\frac{11}{40}$ a $c = \frac{21}{320}$. Na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$ definujeme funkci u_2 dosazením získaných hodnot a, b, c do rovnice pro u . Funkce u_2 má tvar

$$u_2(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{8} - \frac{11t}{40} + \frac{21}{320}.$$

$$\mathbb{K}_{3,2}(t) = \begin{cases} -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{40} + \frac{1}{960} & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{8} - \frac{11t}{40} + \frac{21}{320} & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Obr. č.3.4, $\mathbb{K}_{3,2}(t)$

Nyní se zaměříme na konstrukci příslušné kvadraturní formule Q_3 . Využijeme vzorce z druhé kapitoly, který pro náš případ vypadá následovně:

$$Q_3 f = \sum_{l=0}^2 [f^{(l)}(x_0) D_{2-l}^*(\varphi_0)(x_0) + f^{(l)}(x_1) (D_{2-l}^*(\varphi_1 - \varphi_0)(x_1)) - f^{(l)}(x_3) D_{2-l}^*(\varphi_1)(x_2)].$$

Hledaná kvadratura je uzavřená, proto musíme pro její konstrukci brát vzorec v plném tvaru. Funkce φ_0 a φ_1 zde představují dvě lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice

$$-\frac{d^3 u(t)}{dt^3} = 1.$$

Definujme funkce φ_0 a φ_1 pomocí vypočtených funkcí u_1 a u_2 , platí tedy

$$\varphi_0(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{40} + \frac{1}{960}$$

$$\varphi_1(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{8} - \frac{11t}{40} + \frac{21}{320}.$$

Ještě připomeňme tvary částečných adjungovaných diferenciálních operátorů D_0^* , D_1^* a D_2^* . Platí

$$\begin{aligned} D_0^* &= 1 \\ D_1^* &= -\frac{d}{dt} \\ D_2^* &= \frac{d^2}{dt^2}. \end{aligned}$$

Hledáme tedy kvadraturní vzorec ve tvaru

$$Q_3 = \sum_{l=0}^2 \sum_{i=0}^2 a_{li} f^{(l)}(x_i), \quad (3.5)$$

kde pro a_{li} , $i = 0, 1, 2$ a $l = 0, 1, 2$ platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} a_{l0} &= D_{2-l}^*(\varphi_0)(x_0), \quad l = 0, 1, 2 \\ a_{l1} &= (D_{2-l}^*(\varphi_1 - \varphi_0))(x_1), \quad l = 0, 1, 2 \\ a_{l2} &= -D_{2-l}^*(\varphi_1)(x_2), \quad l = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Dosazením snadno získáme rovnosti

$$\begin{aligned} a_{00} &= D_2^* \varphi_0(0) = \frac{d^2}{dt^2} \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{40} + \frac{1}{960} \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \left(-t + \frac{1}{4} \right) \Big|_{t=0} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{10} &= D_1^* \varphi_0(0) = -\frac{d}{dt} \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{40} + \frac{1}{960} \right) \Big|_{t=0} = \\
&= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{4} + \frac{1}{40} \right) \Big|_{t=0} = \frac{1}{40}
\end{aligned}$$

$$a_{20} = D_0^* \varphi_0(0) = \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{40} + \frac{1}{960} \right) \Big|_{t=0} = \frac{1}{960}$$

$$a_{01} = D_2^* (\varphi_1 - \varphi_0) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} + \frac{31}{320} \right) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= D_1^* (\varphi_1 - \varphi_0) \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} + \frac{31}{320} \right) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \\
&= \left(-\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = 0
\end{aligned}$$

$$a_{21} = D_0^* (\varphi_1 - \varphi_0) \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} + \frac{31}{320} \right) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{480}$$

$$\begin{aligned}
a_{02} &= -D_2^* \varphi_1(1) = -\frac{d^2}{dt^2} \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{8} - \frac{11t}{40} + \frac{21}{320} \right) \Big|_{t=1} = \\
&= \left(t - \frac{3}{4} \right) \Big|_{t=1} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= -D_1^* \varphi_1(1) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{8} - \frac{11t}{40} + \frac{21}{320} \right) \Big|_{t=1} = \\
&= \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{3t}{4} - \frac{11}{40} \right) \Big|_{t=1} = -\frac{1}{40}
\end{aligned}$$

$$a_{22} = -D_0^* \varphi_1(1) = -\left(-\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{8} - \frac{11t}{40} + \frac{21}{320} \right) \Big|_{t=1} = \frac{1}{960}.$$

Nyní dosadíme vypočtené hodnoty do vzorce (3.5) a získáme kvadraturní vzorec

$$\begin{aligned}
Q_3 f &= \frac{1}{4} f(0) + \frac{1}{40} f'(0) + \frac{1}{960} f''(0) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{480} f''\left(\frac{1}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{4} f(1) - \frac{1}{40} f'(1) + \frac{1}{960} f''(1).
\end{aligned}$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ získáme odhad

$$|E_3 f| \leq \|f^{(3)}\|_2 \left(\int_0^1 |\mathbb{K}_{3,2}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dosazením snadno získáme

$$|E_3 f| \leq 3,94 \cdot 10^{-4} \|f^{(3)}\|_2.$$

Množina funkcí \mathcal{O} se rovná $\mathcal{C}^3([0, 1])$.

Příklad - otevřená kvadratura

Hledáme optimální kvadraturní formuli Q_3 v Nikolského smyslu ve tvaru

$$Q_3 = \sum_{l=0}^2 \left[f^{(l)}(0) + f^{(l)}\left(\frac{1}{2}\right) + f^{(l)}(1) \right]$$

na množině funkcí $\mathcal{O} = \mathcal{C}^3([0, 1])$. Chceme tedy aproximovat integrál $\int_0^1 f(x) dx$ kvadraturní formulí, která má algebraický stupeň přesnosti rovný 2 a jejíž uzly leží v bodech $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$. Na rozdíl od předchozího příkladu zde nemáme uzavřenou kvadraturu a musíme proto přidat podmínky v krajních bodech intervalu integrace (tedy v bodě 0 a 1) způsobem popsáným v kapitole 2. Položíme tedy $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ a $x_4 = 1$. Hledáme řešení u diferenciální rovnice

$$-\frac{d^3 u(t)}{dt^3} = 1,$$

což je jistě polynom třetího stupně zapsaný obecně ve tvaru

$$u(t) = -\frac{t^3}{6} + at^2 + bt + c,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Právě tyto koeficienty chceme určit. Zjednodušující podmínku budeme volit dvojím způsobem:

$$\min_{a,b,c} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^2(t) dt, \quad i = 2, 3$$

nebo

$$u^{(j)}(x_0) = u^{(j)}(x_4) = 0, \quad j = 0, 1, 2.$$

Nejprve se budeme zabývat podmínkou $u^{(j)}(x_0) = u^{(j)}(x_4) = 0$ pro $j = 0, 1, 2$. Dostáváme dvě soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} c &= 0 \\ b &= 0 \\ 2a &= 0 \end{aligned}$$

s řešením $a = b = c = 0$ a

$$\begin{aligned} a + b + c - \frac{1}{6} &= 0 \\ 2a + b - \frac{1}{2} &= 0 \\ 2a - 1 &= 0 \end{aligned}$$

s řešením $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ a $c = \frac{1}{6}$. Funkce u_0 a u_3 získáme dosazením vypočtených hodnot a, b, c do rovnice pro u . Definujeme tedy funkci u_0 na intervalu $[0, \frac{1}{4}]$ a funkci u_3 na intervalu $[\frac{3}{4}, 1]$ předpisem

$$u_0 = -\frac{t^3}{6}$$

a

$$u_3 = -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{6}.$$

Nyní stejně jako v předchozím příkladě budeme hledat funkce u_1 a u_2 . Definujeme funkce \tilde{u}_1 a \tilde{u}_2 předpisem

$$\tilde{u}_1(a, b, c) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{t^3}{6} + at^2 + bt + c \right)^2 dt,$$

$$\tilde{u}_2(a, b, c) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \left(-\frac{t^3}{6} + at^2 + bt + c \right)^2 dt.$$

Řešíme problém minimalizace $\min_{a,b,c} \tilde{u}_1$ a $\min_{a,b,c} \tilde{u}_2$. Získáme rovnosti

$$\tilde{u}_1(a, b, c) = \frac{31a^2}{5120} + \frac{7b^2}{192} + \frac{c^2}{4} + \frac{15ab}{512} + \frac{7ac}{96} + \frac{3bc}{16} - \frac{7a}{8192} - \frac{31b}{15360} - \frac{5c}{1024} + \frac{127}{4128768}$$

a

$$\tilde{u}_2(a, b, c) = \frac{211a^2}{5120} + \frac{19b^2}{192} + \frac{c^2}{4} + \frac{65ab}{512} + \frac{19ac}{96} + \frac{5bc}{16} - \frac{665a}{73728} - \frac{211b}{15360} - \frac{65c}{3072} + \frac{2059}{4128768}.$$

Je zřejmé, že funkce \tilde{u}_1 a \tilde{u}_2 jsou v každé své proměnné konvexní kvadratické funkce. Pro výpočet jejich minimálních hodnot opět použijeme běžný postup pro hledání extrémů funkce více proměnných. Řešíme nyní dvě soustavy lineárních rovnic daných rovnostmi:

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial c} = 0$$

a

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c} = 0.$$

V tomto konkrétním případě se jedná o dvě soustavy s rovnicemi pro \tilde{u}_1

$$\begin{aligned} \frac{31a}{2560} + \frac{15b}{512} + \frac{7c}{96} - \frac{7}{8192} &= 0 \\ \frac{15a}{512} + \frac{7b}{96} + \frac{3c}{16} - \frac{31}{15360} &= 0 \\ \frac{7a}{96} + \frac{3b}{16} + \frac{c}{2} - \frac{5}{1024} &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $a = \frac{3}{16}$, $b = -\frac{11}{160}$ a $c = \frac{21}{2560}$,
a pro \tilde{u}_2

$$\begin{aligned} \frac{211a}{2560} + \frac{65b}{512} + \frac{19c}{96} - \frac{665}{73728} &= 0 \\ \frac{65a}{512} + \frac{19b}{96} + \frac{5c}{16} - \frac{211}{15360} &= 0 \\ \frac{19a}{96} + \frac{5b}{16} + \frac{c}{2} - \frac{65}{3072} &= 0 \end{aligned}$$

s řešením $a = \frac{5}{16}$, $b = -\frac{31}{160}$ a $c = \frac{61}{1536}$.

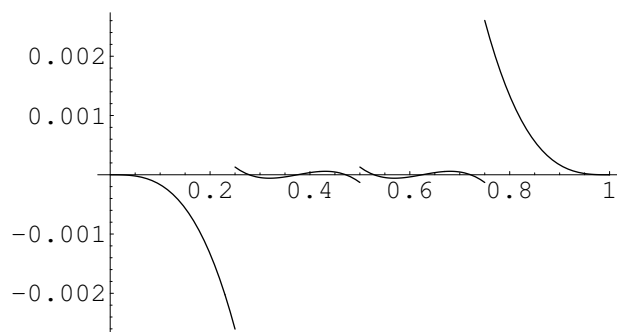
Dosazením získaných hodnot a, b, c do rovnice pro u definujeme na intervalu $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ funkci u_1 a na intervalu $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ funkci u_2 . Platí tedy

$$u_1(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{16} - \frac{11t}{160} + \frac{21}{2560}$$

a

$$u_2(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{5t^2}{16} - \frac{31t}{160} + \frac{61}{1536}.$$

$$\mathbb{K}_{3,2}(t) = \begin{cases} -\frac{t^3}{6} & t \in [0, \frac{1}{4}) \\ -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{16} - \frac{11t}{160} + \frac{21}{2560} & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ -\frac{t^3}{6} + \frac{5t^2}{16} - \frac{31t}{160} + \frac{61}{1536} & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{6} & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$



Obr. č.3.5, $\mathbb{K}_{3,2}(t)$

$$Q_3 f = \sum_{l=0}^2 \sum_{i=1}^3 f^{(l)}(x_i) (D_{2-l}^*(\varphi_i - \varphi_{i-1})(x_i)).$$

Definujeme funkce $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ a φ_3 pomocí vypočtených funkcí u_0, u_1, u_2 a u_3 takto:

$$\varphi_0(t) = -\frac{t^3}{6}$$

$$\varphi_1(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{16} - \frac{11t}{160} + \frac{21}{2560}$$

$$\varphi_2(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{5t^2}{16} - \frac{31t}{160} + \frac{61}{1536}$$

$$\varphi_3(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{6}.$$

Hledáme tedy kvadrurní formuli ve tvaru

$$Q_3 = \sum_{l=0}^2 \sum_{i=1}^3 a_{li} f^{(l)}(x_i), \quad (3.6)$$

kde pro a_{li} $i = 1, 2, 3$ a $l = 0, 1, 2$ platí

$$a_{li} = (D_{2-l}^*(\varphi_1 - \varphi_0)(x_i)), \quad l = 0, 1, 2; \quad i = 1, 2, 3.$$

Dosazením snadno získáme rovnosti

$$\begin{aligned} a_{01} &= D_2^*(\varphi_1 - \varphi_0)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{3t^2}{16} - \frac{11t}{160} + \frac{21}{2560} \right) \Big|_{t=\frac{1}{4}} = \frac{3}{8} \\ a_{11} &= D_1^*(\varphi_1 - \varphi_0)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{3t^2}{16} - \frac{11t}{160} + \frac{21}{2560} \right) \Big|_{t=\frac{1}{4}} = \\ &= \left(-\frac{3t}{8} + \frac{11}{160} \right) \Big|_{t=\frac{1}{4}} = -\frac{1}{40} \\ a_{21} &= D_0^*(\varphi_1 - \varphi_0)\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3t^2}{16} - \frac{11t}{160} + \frac{21}{2560} \right) \Big|_{t=\frac{1}{4}} = \frac{7}{2560} \\ a_{02} &= D_2^*(\varphi_2 - \varphi_1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{8} + \frac{121}{3840} \right) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \\ a_{12} &= D_1^*(\varphi_2 - \varphi_1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{8} + \frac{121}{3840} \right) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \\ &= \left(-\frac{t}{4} + \frac{1}{8} \right) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = 0 \\ a_{22} &= D_0^*(\varphi_2 - \varphi_1)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{8} + \frac{121}{3840} \right) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{3840} \\ a_{03} &= D_2^*(\varphi_3 - \varphi_2)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{3t^2}{16} - \frac{49t}{160} + \frac{45}{512} \right) \Big|_{t=\frac{3}{4}} = \frac{3}{8} \\ a_{13} &= D_1^*(\varphi_3 - \varphi_2)\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{3t^2}{16} - \frac{49t}{160} + \frac{45}{512} \right) \Big|_{t=\frac{3}{4}} = \\ &= \left(-\frac{3t}{8} + \frac{49}{160} \right) \Big|_{t=\frac{3}{4}} = \frac{19}{160} \\ a_{23} &= D_0^*(\varphi_3 - \varphi_2)\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3t^2}{16} - \frac{49t}{160} + \frac{45}{512} \right) \Big|_{t=\frac{3}{4}} = -\frac{93}{2560} \end{aligned}$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do vzorce (3.6). Získáme tak kvadraturní formuli

$$Q_3 f = \frac{3}{8}f\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{40}f'\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{7}{2560}f''\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3840}f''\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{8}f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{19}{160}f'\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{93}{2560}f''\left(\frac{3}{4}\right).$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ získáme odhad

$$|E_3 f| \leq \|f^{(3)}\|_2 \left(\int_0^1 |\mathbb{K}_{3,2}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dosazením snadno získáme

$$|E_3 f| \leq 6,97 \cdot 10^{-4} \|f^{(3)}\|_2.$$

3.3 Optimální kvadratura v Markovově smyslu

Optimální kvadraturní vzorce v Markovově smyslu jsou obecnější než v Niského smyslu, protože v nich hledáme kromě hodnot vah i vhodné rozmístění některých uzlových bodů. Jedná se vesměs o uzavřené případně jednostranně uzavřené kvadratury, kdy fixujeme jeden nebo oba krajní body intervalu integrace. Zbylé uzlové body volíme libovolně (tj. nejsou předem dané).

Uvažujme kvadraturní rovnici

$$\int_0^1 f(x)w(x) dx = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m a_{li} f^{(l-1)}(x_i) + E(f),$$

kde funkcionál E nazveme chybovým funkcionálem, číslo $E(f)$ chybou kvadraturní formule a funkcionál Q_m tvaru

$$Q_m f = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m a_{li} f^{(l-1)}(x_i) \tag{3.7}$$

kvadraturním vzorcem prvního druhu s váhami a_{li} pro $i = 1, \dots, m$ a $l = 1, \dots, n$ a uzly x_i pro $i = 1, \dots, m$, kde předpokládáme $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$ a

množinu funkcí \mathcal{O} . Chybou kvadraturní formule (3.9) na množině funkcí \mathcal{O} označíme \mathcal{E} a definujeme následujícím způsobem:

$$\mathcal{E} = \sup_{f \in \mathcal{O}} E(f).$$

Optimální kvadraturní formuli v Markovově smyslu budeme značit jako

$$Q_m^M f = \sum_{i=1}^m a_i^M f(x_i^M). \quad (3.8)$$

Její chybu na množině funkcí \mathcal{O} označíme jako \mathcal{E}^M , přitom požadujeme, aby platilo

$$\mathcal{E}^M = \inf_{\substack{a_{li} \in \mathbb{R} \\ i=1, \dots, m \\ l=0, \dots, n-1 \\ x_i \in (0,1) \\ i=2, \dots, m-1}} \mathcal{E}.$$

Výše uvedené úvahy nyní shrneme do definice optimální kvadraturní formule v Sardově smyslu na množině funkcí \mathcal{O} .

Definice 3.6.

Existuje-li kvadraturní formule Q_n^M taková, že platí

$$\max_{f \in \mathcal{O}} |E_n^M f| = \min_{\substack{a_{li} \in \mathbb{R} \\ i=1, \dots, m \\ l=0, \dots, n-1 \\ x_i \in (0,1) \\ i=2, \dots, m-1}} \max_{f \in \mathcal{O}} |E_n f|,$$

pak tuto kvadraturní formuli nazveme optimální kvadraturní formulí v Markovově smyslu na množině funkcí \mathcal{O} .

3.4 Optimální kvadratura v Sardově smyslu

Pojem optimální kvadraturní formule v Sardově smyslu je z uvedených tří optimálních kvadratur podle odhadu na chybový člen nejobecnější, neboť v tomto případě hledáme nejen hodnoty vah (jako u optimální kvadratury v Nikolského smyslu) ale i vhodnou polohu uzlových bodů. Uvažujme kvadraturní rovnici

$$\int_0^1 f(x)w(x) dx = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m a_{li} f^{(l-1)}(x_i) + E(f),$$

kde funkcionál $E(f)$ nazveme chybovým funkcionálem a funkcionál Q_m tvaru

$$Q_m f = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m a_{li} f^{(l-1)}(x_i) \quad (3.9)$$

kvadraturní formulí prvního druhu s váhami a_{li} pro $i = 1, \dots, m$ a $l = 1, \dots, n$ a uzly x_i pro $i = 1, \dots, m$, kde předpokládáme $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$. Jak bylo ozřejmeno v předchozím odstavci, hledáme optimální kvadraturní formuli pro nějakou danou množinu funkcí \mathcal{O} . Chybou kvadraturní formule (3.9) na množině funkcí \mathcal{O} označíme \mathcal{E} a definujeme následujícím způsobem:

$$\mathcal{E} = \sup_{f \in \mathcal{O}} E(f).$$

Optimální kvadraturní formuli v Sardově smyslu budeme značit jako

$$Q_m^S f = \sum_{i=1}^m a_i^S f(x_i^S). \quad (3.10)$$

Její chybu na množině funkcí \mathcal{O} označíme jako \mathcal{E}^S , přitom požadujeme, aby platilo

$$\mathcal{E}^S = \inf_{\substack{a_{li} \in \mathbb{R} \\ x_i \in [0,1] \\ i=1,\dots,m \\ l=0,\dots,n-1}} \mathcal{E}$$

nebo také

$$\mathcal{E}^S = \inf_{Q_m} \mathcal{E}.$$

Výše uvedené úvahy nyní shrneme do definice optimální kvadraturní formule v Sardově smyslu na množině funkcí \mathcal{O} .

Definice 3.7.

Existuje-li kvadraturní formule Q_m^S taková, že platí

$$\max_{f \in \mathcal{O}} |E_m^S f| = \min_{\substack{a_i \in \mathbb{R} \\ x_i \in [0,1] \\ i=1,\dots,m \\ l=0,\dots,n-1}} \max_{f \in \mathcal{O}} |E_m f|$$

pak tuto kvadraturní formuli nazveme optimální kvadraturní formulí v Sardově smyslu na množině funkcí \mathcal{O} .

3.5 Asymptoticky optimální kvadrurní formule

Nyní se v krátkosti zmíníme o asymptoticky optimálních kvadrurních formuách.

Definice 3.8.²

Nechť Q_m^{ao} je kvadrurní vzorec, \mathcal{O} je množina funkcí. Chybu kvadrurní formule Q_m^{ao} na množině \mathcal{O} označme $\mathcal{E}^{ao} = \sup_{f \in \mathcal{O}} E^{ao}(f)$. Nechť $\mathcal{E} = \sup_{f \in \mathcal{O}} E(f)$

a $\mathcal{E}^S = \inf_{a_j, x_i} \mathcal{E}^3$. Pak kvadrurní formuli Q_m^{ao} nazveme asymptoticky optimální, jestliže platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}^{ao}}{\mathcal{E}^S} = 1.$$

3.6 Optimální kvadratura podle stupně přesnosti

Na závěr se krátce zmíníme o optimálních kvadrurních formuách podle stupně přesnosti. Opět budeme uvažovat kvadrurní vzorce operující jen s hodnotami integrované funkce, tedy pro danou funkci f platí

$$Q_m f = \sum_{j=1}^m a_j f(x_j).$$

Věta 3.9.

Maximální algebraický stupeň přesnosti pro kvadraturu s m uzly je $2m - 1$.

Poznámka 3.10. Přitom pro rovnost nastává pouze pro speciální rozmístění uzlů. Tyto body odpovídají kořenům Čebyševova polynomu. Takto vzniklý kvadrurní vzorec nazýváme Gaussovou kvadrurní formuálí.

²[1], str 107

³Jedná se tedy o optimální kvadraturu v Sardově smyslu na množině \mathcal{O}

Kapitola 4

Peanovo jádro Rombergovy kvadraturní formule

V následující kapitole se vrátíme ke klasické definici Peanova jádra (tj. definice 2.3) a shrneme nejdůležitější poznatky o Rombergově kvadraturní formuli a jejích Peanových jádrech (podrobnosti k Rombergově kvadraturní formuli můžeme nalézt např. v [2] nebo [7]). Především nás budou zajímat její dobré vlastnosti jako je pozitivita a konstantnost znaménka Peanova jádra, tyto vlastnosti budeme následně zkoumat ve vícerozměrném případě Rombergovy kvadraturní formule (viz kapitola 5).

4.1 Rombergova kvadraturní formule

Rombergova kvadraturní formule vychází z tzv. Richardsonovy extrapolace. Při výpočtu integrálu pomocí Rombergovy kvadraturní formule se využívá tzv. T-schématu¹,

$$\begin{array}{ccccccc} T_{0,0} & & & & & & \\ T_{0,1} & T_{1,0} & & & & & \\ T_{0,2} & T_{1,1} & T_{2,0} & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ T_{0,m} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & T_{m,0}, \end{array}$$

kde prvky $T_{0,k}$ prvního sloupce spočteme pomocí složeného lichoběžníkového

¹[8], str.95

pravidla, tedy platí

$$T_{0,0} = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1)$$

$$T_{0,1} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}f(0) + f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f(1)]$$

⋮

$$T_{0,k} = \frac{1}{2^k}[\frac{1}{2}f(0) + \sum_{i=1}^{2^k-1} f(\frac{i}{2^k}) + \frac{1}{2}f(1)].$$

Prvky ostatních sloupců spočteme podle vzorce

$$T_{m,k} = \frac{1}{4^m - 1}(4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Takto zkonstruovaná posloupnost $T_{k,0} = \frac{1}{4^k-1}(4^k T_{k-1,1} - T_{k-1,0})$ obvykle konverguje k hodnotám integrálu rychleji než původní posloupnost $T_{0,k}$ získaná pomocí lichoběžníkového pravidla.

Nejprve zavedeme pojem pozitivní kvadrurní formule, poté uvedeme bez důkazu (který je možno nalézt v [2] na straně 381-382) větu, která hovoří o této vlastnosti ve vztahu k Rombergově kvadratuře.

Definice 4.1.

Nechť funkcionál Q_m je kvadrurní formule

$$Q_m = \sum_{i=1}^m a_i f(x_i),$$

pro $m \in \mathbb{N}$, kde x_i jsou navzájem různé uzlové body pro $i = 1, \dots, m$.

Pak kvadrurní formuli nazveme kladnou, pokud platí

$$a_i > 0,$$

pro všechna $i = 1, \dots, m$.

Věta 4.2.

Rombergova kvadrurní formule je pozitivní.

Pozitivita je velice důležitá vlastnost kvadrurní formule, neboť zaručuje konvergenci této kvadratury pro všechny funkce f takové, že $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

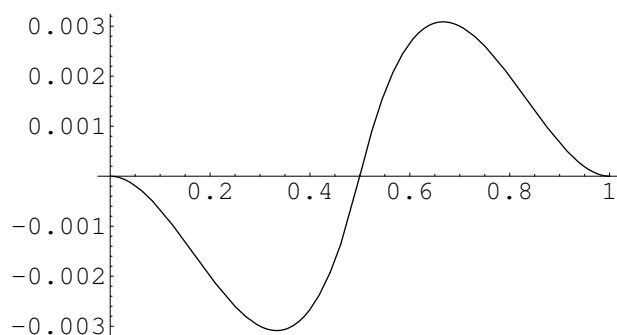
Jak vzápětí uvidíme, budou pro nás velmi důležitá Peanova jádra vyšších řádů. Nejprve uvedeme několik vzorců těchto Peanových jader a popíšeme jejich zajímavé vlastnosti, které posléze shrneme do věty.

Využijme nyní vzorce pro Peanovo jádro kvadraturní formule $K_{3,1}^{T_{1,0}}(t)$ a položme

$$\begin{aligned}\bar{K}_{3,1}(t) &= K_{3,1}^{T_{1,0}}(t), \\ K_{3,2}(t) &= \int_0^t \bar{K}_{3,1}(\tau) d\tau, \\ K_{3,3}(t) &= \int_0^t K_{3,2}(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Pro funkci $K_{3,2}(t)$ tedy platí vzorec

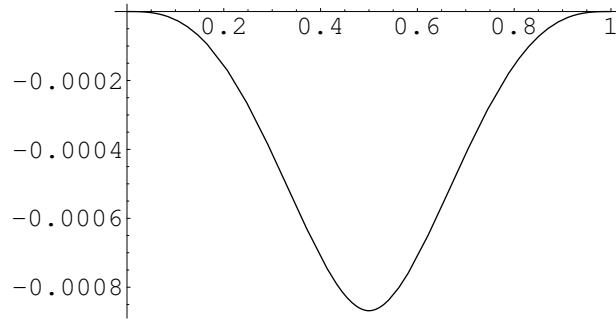
$$K_{3,2}(t) = \int_0^t \bar{K}_{3,1}(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^2, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{12}t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{12}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Obr. č.4.1, $K_{3,2}(t)$

a pro funkci $K_{3,3}(t)$ získáváme rovnost

$$K_{3,3}(t) = \int_0^t K_{3,2}(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{36}t^3, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{24}t^4 - \frac{5}{36}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{12}t + \frac{1}{72}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Obr. č.4.2, $K_{3,3}(t)$

Dosazením snadno ověříme platnost rovnosti $K_{3,2}(\frac{1}{2}) = 0$. Pro $t \in [0, \frac{1}{2}]$ platí pro $K_{3,2}(t)$ rovnosti

$$\begin{aligned} K_{3,2}(t) &= \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^2 \\ -K_{3,2}(1-t) &= -\left[\frac{1}{6}(1-t)^3 - \frac{5}{12}(1-t)^2 + \frac{1}{3}(1-t) - \frac{1}{12}\right] = \\ &= \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^2. \end{aligned}$$

Pro $K_{3,3}(t)$ dostáváme na témže intervalu

$$\begin{aligned} K_{3,3}(t) &= \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{36}t^3 \\ K_{3,3}(1-t) &= \frac{1}{24}(1-t)^4 - \frac{5}{36}(1-t)^3 + \frac{1}{4}(1-t)^2 - \frac{1}{12}(1-t) + \frac{1}{72} = \\ &= \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{36}t^3. \end{aligned}$$

Tedy zřejmě

$$K_{3,2}(t) = -K_{3,2}(1-t) \quad t \in [0, \frac{1}{2}]$$

a

$$K_{3,3}(t) = K_{3,3}(1-t) \quad t \in [0, \frac{1}{2}].$$

Nyní tento konkrétní případ zobecníme ve větě, která zaručuje platnost výše uvedených vlastností. Druhá z vět již přímo řeší problém vyjádření chybového členu Rombergovy kvadraturní formule. Ještě podotkněme, že obě věty uvádíme bez důkazů, jež je možné nalézt v [7] na str. 50-54.

4.2 Brauerova věta

Věta 4.3. (Bauerova věta)²

Mějme rekurentně zadanou posloupnost vzorců:

$$\begin{aligned}
 K_1(t) &= -\frac{1}{2}t(1-t) & t \in [0, 1] \\
 \bar{K}_{2j-1}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{4^j-1} [K_{2j-1}(2t) - K_{2j-1}(t)], & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{4^j-1} [K_{2j-1}(2t-1) - K_{2j-1}(t)], & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\
 K_{2j}(t) &= \int_0^t \bar{K}_{2j-1}(\tau) d\tau, & t \in [0, 1] \\
 K_{2j+1}(t) &= \int_0^t K_{2j}(\tau) d\tau, & t \in [0, 1] \\
 & \text{pro } j = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Pak platí následující tvrzení:

1. $K_j(1-t) = (-1)^{j+1}K_j(t)$, pro $t \in [0, 1]$
2. $K_j(t) \leq 0$, pro $t \in [0, \frac{1}{2}]$
3. $K_j(0) = K_j(1) = K_{2j}(\frac{1}{2}) = 0$
4. $K_{2j-1}(t)$ monotónně klesá na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$
 $E_{2^k+1}^{T_{j,k}} f = \int_0^1 f^{(2j)}(t) K_{2j-1}(t) dt$, kde $K_{2j-1}(t)$ nemění na intervalu $[0, 1]$ znaménko.

Věta 4.4.³

Pro chybu $E_{2^k+1}^{T_{j,k}}$ platí rovnost $E_{2^k+1}^{T_{j,k}} f = f^{(2j)}(\xi) \int_0^1 K_{2j-1}(t) dt$.

²[2], str.386

³[2], str.386

Kapitola 5

Rombergova kubaturní formule

V následující kapitole zavedeme pojem Sardova jádra kubaturní formule na čtverci $[0, 1]^2$ a na krychli $[0, 1]^3$. Podrobně se budeme zabývat Rombergovou kubaturní formulí a popíšeme některé její vlastnosti. Zaměříme se především na porovnání vlastností vícerozměrného a jednorozměrného případu, tedy Rombergovy kvadratury. Dále zavedeme Sardova jádra těchto kubaturních formulí, s jejich pomocí odhadneme chyby daných kubaturních vzorců.

5.1 Sardovo jádro kubaturní formule na čtverci

Nejprve ozřejmíme, co budeme v následující kapitole uvažovat pod pojmem Sardových jader kubaturní formule C_n , kde $n \in \mathbb{N}$. Jak jsme předeslali již v první kapitole, budeme se zabývat pouze kubaturními vzorci majícími následující tvar:

Kubaturní vzorec na čtverci $[0, 1]^2$ má tvar

$$\int_{[0,1]^2} f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \sum_{i=1}^m a_i f(\vec{x}_i) + E(f).$$

Kubaturní vzorec na krychli $[0, 1]^3$ má tvar

$$\int_{[0,1]^3} f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \sum_{i=1}^m a_i f(\vec{x}_i) + E(f)$$

Kubaturní vzorce se samozřejmě neomezují jen na námi zvolené dva případy. Vyšetřování kubaturních formulí a jejich Sardových jader pro obecnější oblasti by však již přesahovalo rámec této práce.

Nyní odvodíme Sardova jádra kubaturní formule na čtverci $[0, 1]^2$. Než začneme s odvozováním, zavedeme ještě konvenci ve značení.

Poznámka 5.1. *Nechť f je funkce n proměnných, kde $n \in \mathbb{N}$. Funkce f je třídy $\mathcal{C}^k([0, 1]^n)$ pro $k > 0$, nechť i_1, \dots, i_n jsou nezáporná celá čísla, pro něž platí $\sum_{j=1}^n i_j \leq k$. Pak označme*

$$f_{i_1, \dots, i_n}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\sum_{j=1}^n i_j} f}{\partial \vec{x}(1)^{i_1} \dots \partial \vec{x}(n)^{i_n}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in [0, 1]^n.$$

Poznámka 5.2. *Pro usnadnění zápisu budeme používat následujícího značení:*

Je-li $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, pak $\vec{x} = (x, y)$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Je-li $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, pak $\vec{x} = (x, y, z)$, kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Nechť tedy $f \in \mathcal{C}^{k+1}([0, 1]^2)$, pak platí

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, 0) + \int_0^y f_{0,1}(x, t) dt = \\ &= f(0, 0) + \int_0^x f_{1,0}(u, 0) du + \int_0^y f_{0,1}(x, t) dt = \\ &= f(0, 0) + x f_{1,0}(0, 0) + y f_{0,1}(0, 0) + \int_0^x (x - u) f_{2,0}(u, 0) du + \\ &+ \int_0^y (y - t) f_{0,2}(0, t) dt + \int_0^x \int_0^y f_{1,1}(u, t) dt du = \\ &= f(0, 0) + x f_{1,0}(0, 0) + y f_{0,1}(0, 0) + \frac{x^2}{2!} f_{2,0}(0, 0) + \frac{y^2}{2!} f_{0,2}(0, 0) + \\ &+ \int_0^x \frac{(x - u)^2}{2!} f_{3,0}(u, 0) du + \int_0^y \frac{(y - t)^2}{2!} f_{0,3}(0, t) dt + xy f_{1,1}(0, 0) + \\ &+ \frac{y}{2} \int_0^x f_{2,1}(u, 0) du + \frac{x}{2} \int_0^y f_{1,2}(0, t) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y [(x - u) f_{2,1}(u, t) + (y - t) f_{1,2}(u, t)] dt du. \end{aligned}$$

Pro lichá k ($k = 2\kappa + 1$) tedy platí

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \frac{1}{i!} \binom{i}{j} x^{i-j} y^j f_{i-j,j}(0, 0) + \\
&+ \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{k}{j} \left\{ y^j \int_0^x (x-u)^{k-j} f_{k+1-j,j}(u, 0) du + \right. \\
&+ \left. x^j \int_0^y (y-t)^{k-j} f_{j,k+1-j}(0, t) dt \right\} + \\
&+ \frac{1}{(\kappa!)^2} \int_0^x \int_0^y (x-u)^{\kappa} (y-t)^{\kappa} f_{\kappa+1,\kappa+1}(u, t) dt du
\end{aligned}$$

a pro sudá k ($k = 2\kappa$) platí

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \frac{1}{i!} \binom{i}{j} x^{i-j} y^j f_{i-j,j}(0, 0) + \\
&+ \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{k}{j} \left\{ y^j \int_0^x (x-u)^{k-j} f_{k+1-j,j}(u, 0) du + \right. \\
&+ \left. x^j \int_0^y (y-t)^{k-j} f_{j,k+1-j}(0, t) dt \right\} + \\
&+ \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \binom{k}{\kappa} \left\{ y^{\kappa} \int_0^x (x-u)^{\kappa} f_{\kappa+1,\kappa}(u, 0) du + x^{\kappa} \int_0^y (y-t)^{\kappa} f_{\kappa,\kappa+1}(0, t) dt \right\} + \\
&+ \frac{1}{2(\kappa-1)! \kappa!} \int_0^x \int_0^y (x-u)^{\kappa-1} (y-t)^{\kappa-1} \left\{ (x-u) f_{\kappa+1,\kappa}(u, t) + \right. \\
&+ \left. (y-t) f_{\kappa,\kappa+1}(u, t) \right\} dt du.
\end{aligned}$$

Nyní na poslední rovnosti aplikujeme lineární funkcionál E_m a dostaneme:

pro lichá k ($k = 2\kappa + 1$)

$$\begin{aligned}
E_m f(x, y) &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \frac{1}{i!} \binom{i}{j} E_m^{x,y} \{ x^{i-j} y^j f_{i-j,j}(0, 0) \} + \\
&+ \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{k}{j} E_m^{x,y} \left\{ y^j \int_0^x (x-u)^{k-j} f_{k+1-j,j}(u, 0) du + \right. \\
&+ \left. x^j \int_0^y (y-t)^{k-j} f_{j,k+1-j}(0, t) dt \right\} + \\
&+ \frac{1}{(k!)^2} E_m^{x,y} \left\{ \int_0^x \int_0^y (x-u)^\kappa (y-t)^\kappa f_{\kappa+1,\kappa+1}(u, t) dt du \right\} = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^1 E_m^{x,y} [y^j (x-u)_+^{k-j}] f_{k+1-j,j}(u, 0) du + \right. \\
&+ \left. \int_0^1 E_m^{x,y} [x^j (y-t)_+^{k-j}] f_{j,k+1-j}(0, t) dt \right\} + \\
&+ \frac{1}{(\kappa!)^2} \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y} [(x-u)_+^\kappa (y-t)_+^\kappa] f_{\kappa+1,\kappa+1}(u, t) dt du
\end{aligned}$$

a pro sudá k ($k = 2\kappa$) platí

$$\begin{aligned}
E_m f(x, y) &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \frac{1}{i!} \binom{i}{j} E_m^{x,y} \{ x^{i-j} y^j f_{i-j,j}(0, 0) \} + \\
&+ \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{k}{j} E_m^{x,y} \left\{ y^j \int_0^x (x-u)^{k-j} f_{k+1-j,j}(u, 0) du + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x^j \int_0^y (y-t) f_{j,k+1-j}(0,t) dt \Big\} + \\
& + \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \binom{k}{\kappa} E_m^{x,y} \left\{ y^\kappa \int_0^x (x-u)^\kappa f_{\kappa+1,\kappa}(u,0) du + \right. \\
& \left. + x^\kappa \int_0^y (y-t) f_{\kappa,\kappa+1}(0,t) dt \right\} + \\
& + \frac{1}{2(\kappa-1)! \kappa!} E_m^{x,y} \int_0^x \int_0^y \{ (x-u)^{\kappa-1} (y-t)^{\kappa-1} (x-u) f_{\kappa+1,\kappa}(u,t) + \\
& + (x-u)^{\kappa-1} (y-t)^{\kappa-1} (y-t) f_{\kappa,\kappa+1}(u,t) \} dt du = \\
& = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^1 E_m^{x,y} [y^j (x-u)_+^{k-j}] f_{k+1-j,j}(u,0) du + \right. \\
& \left. + \int_0^1 E_m^{x,y} [x^j (y-t)_+^{k-j}] f_{j,k+1-j}(0,t) dt \right\} + \\
& + \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \binom{k}{\kappa} \left\{ \int_0^1 E_m^{x,y} [y^\kappa (x-u)_+^\kappa] f_{\kappa+1,\kappa}(u,0) du + \right. \\
& \left. + \int_0^1 E_m^{x,y} [x^\kappa (y-t)_+^\kappa] f_{\kappa,\kappa+1}(0,t) dt \right\} + \\
& + \frac{1}{2(\kappa-1)! \kappa!} \int_0^1 \int_0^1 \{ E_m^{x,y} [(x-u)_+^\kappa (y-t)_+^{\kappa-1}] f_{\kappa+1,\kappa}(u,t) + \\
& + E_m^{x,y} [(x-u)_+^{\kappa-1} (y-t)_+^\kappa] f_{\kappa,\kappa+1}(u,t) \} dt du.
\end{aligned}$$

Nyní můžeme definovat Sardova jádra kubaturní formule.

Definice 5.3.¹

Nechť $k > 0$ a platí:

$$\begin{aligned} K_{k-j}(u) &\equiv E_n^{x,y}[y^j(x-u)_+^{k-j}], & j = 0, \dots, \kappa, & (x, y) \in \Omega \\ K_{k-j}(v) &\equiv E_n^{x,y}[x^j(y-v)_+^{k-j}], & j = 0, \dots, \kappa, & (x, y) \in \Omega \\ K_{\kappa,\kappa}(u, v) &\equiv E_n^{x,y}[(x-u)_+^\kappa(y-v)_+^\kappa], & k = 2\kappa + 1, & (x, y) \in \Omega \\ K_{\kappa,\kappa-1}(u, v) &\equiv E_n^{x,y}[(x-u)_+^\kappa(y-v)_+^{\kappa-1}], & k = 2\kappa, & (x, y) \in \Omega \end{aligned}$$

Pak funkce $K_j(u), K_j(v), K_{\kappa,\lambda}(u, v)$ ² nazveme Sardovými jádry kubaturní formule $C_m f$.

Následuje věta popisující vyjádření chybového členu $E_m f$ kubaturní formule C_m prostřednictvím jejích Sardových jader.

Věta 5.4.

Nechť funkce $f \in \mathcal{C}^{k+1}([0, 1]^2)$, kubaturní formule C_m má algebraický stupeň přesnosti roven k . Pak pro chybový $E_m f$ člen kubaturní formule C_m platí rovnost pro lichá k ($k = 2\kappa + 1$)

$$\begin{aligned} E_m f(x, y) &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^1 K_{k-j}(u) f_{k+1-j,j}(u, 0) du + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 K_{k-j}(t) f_{j,k+1-j}(0, t) dt \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{(\kappa!)^2} \int_0^1 \int_0^1 K_{\kappa,\kappa}(u, t) dt du \end{aligned}$$

a pro sudá k ($k = 2\kappa$) platí

$$E_m f(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^1 K_{k-j}(u) f_{k+1-j,j}(u, 0) du + \right.$$

¹[2], str.105

²Pro přehlednost píšeme označení dané kubaturní formule jí odpovídajícím Sardovým jádrům do horního indexu.

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 K_{k-j}(t) f_{j,k+1-j}(0, t) dt \Big\} + \\
& + \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \binom{k}{\kappa} \left\{ \int_0^1 K_{\kappa}(u) f_{\kappa+1,\kappa}(u, 0) du + \right. \\
& + \left. \int_0^1 K_{\kappa}(t) f_{\kappa,\kappa+1}(0, t) dt \right\} + \\
& + \frac{1}{2(\kappa-1)! \kappa!} \int_0^1 \int_0^1 \{ K_{\kappa,\kappa-1}(u, t) f_{\kappa+1,\kappa}(u, t) + \\
& + K_{\kappa-1,\kappa}(u, t) f_{\kappa,\kappa+1}(u, t) \} dt du.
\end{aligned}$$

Důkaz. Je-li funkce f třídy $\mathcal{C}^{k+1}([0, 1]^2)$, pak z předchozích úvah víme, že pro chybový člen kubaturní formule C_m platí následující rovnosti: pro lichá k ($k = 2\kappa + 1$)

$$\begin{aligned}
E_n f(x, y) &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^1 E_m^{x,y} [y^j (x-u)_+^{k-j}] f_{k+1-j,j}(u, 0) du + \right. \\
& + \left. \int_0^1 E_m^{x,y} [x^j (y-t)_+^{k-j}] f_{j,k+1-j}(0, t) dt \right\} + \\
& + \frac{1}{(\kappa!)^2} \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y} [(x-u)_+^{\kappa} (y-t)_+^{\kappa}] f_{\kappa+1,\kappa+1}(u, t) dt du
\end{aligned}$$

a pro sudá k ($k = 2\kappa$) platí

$$E_m f(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^1 E_m^{x,y} [y^j (x-u)_+^{k-j}] f_{k+1-j,j}(u, 0) du + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 E_m^{x,y} [x^j (y-t)_+^{k-j}] f_{j,k+1-j}(0,t) dt \Big\} + \\
& + \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \binom{k}{\kappa} \left\{ \int_0^1 E_m^{x,y} [y^\kappa (x-u)_+^\kappa] f_{\kappa+1,\kappa}(u,0) du + \right. \\
& + \left. \int_0^1 E_m^{x,y} [x^\kappa (y-t)_+^\kappa] f_{\kappa,\kappa+1}(0,t) dt \right\} + \\
& + \frac{1}{2(\kappa-1)! \kappa!} \int_0^1 \int_0^1 \{ E_m^{x,y} [(x-u)_+^\kappa (y-t)_+^{\kappa-1}] f_{\kappa+1,\kappa}(u,t) + \\
& + E_m^{x,y} [(x-u)_+^{\kappa-1} (y-t)_+^\kappa] f_{\kappa,\kappa+1}(u,t) \} dt du.
\end{aligned}$$

Uvažovaná kubaturní formule C_m má algebraický stupeň přesnosti roven k , tedy platí

$$E_m(x^i y^j) = 0,$$

pro i, j nezáporná celá čísla taková, že $i+j \leq k$. Dosazením snadno dostaneme rovnosti pro lichá k ($k = 2\kappa + 1$)

$$\begin{aligned}
E_m f(x, y) &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^1 K_{k-j}(u) f_{k+1-j,j}(u,0) du + \right. \\
& + \left. \int_0^1 K_{k-j}(t) f_{j,k+1-j}(0,t) dt \right\} + \\
& + \frac{1}{(\kappa!)^2} \int_0^1 \int_0^1 K_{\kappa,\kappa}(u,t) dt du
\end{aligned}$$

a pro sudá k ($k = 2\kappa$) platí

$$E_m f(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^1 K_{k-j}(u) f_{k+1-j,j}(u,0) du + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 K_{k-j}(t) f_{j,k+1-j}(0, t) dt \} + \\
& + \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \binom{k}{\kappa} \left\{ \int_0^1 K_{\kappa}(u) f_{\kappa+1,\kappa}(u, 0) du + \right. \\
& + \left. \int_0^1 K_{\kappa}(t) f_{\kappa,\kappa+1}(0, t) dt \right\} + \\
& + \frac{1}{2(\kappa-1)! \kappa!} \int_0^1 \int_0^1 \{ K_{\kappa,\kappa-1}(u, t) f_{\kappa+1,\kappa}(u, t) + \\
& + K_{\kappa-1,\kappa}(u, t) f_{\kappa,\kappa+1}(u, t) \} dt du.
\end{aligned}$$

Čímž je důkaz proveden. □

5.2 Rombergova kubaturní formule

V kapitole 4 jsme se zabývali studiem Rombergovy kvadraturní formule. Ukázali jsme, že tato kvadratura má velmi příznivé vlastnosti, především, že se jedná o pozitivní kvadraturní formuli, jejíž Peanovo jádro nemění na intervalu integrace své znaménko. V následujícím textu se budeme zabývat Rombergovou kubaturou (nejprve na jednotkovém čtverci, později na krychli $[0, 1]^3$). Naší snahou bude zjistit, zda tyto kubaturní formule mají podobné dobré vlastnosti jako jejich jednorozměrný případ.

Rombergovu kubaturní formuli pro vícerozměrný případ odvodíme obdobným způsobem jako Rombergův kvadraturní vzorec v jedné prostorové proměnné (viz kapitola 4). Vyjdeme z lichoběžníkového pravidla na $[0, 1]^N$, kde $N \in \mathbb{N}$. Tuto kubaturní formuli značíme $T_{0,0}^{(N)}$. Přejdeme ke složenému lichoběžníkovému pravidlu $T_{0,1}^{(N)}$, tedy rozdělíme stávající N -dimenzionální krychli na 2^N stejně velkých N -dimenzionálních krychlí. Analogicky postupujeme dále, čímž dostaneme obecný vzorec pro složené lichoběžníkové pravidlo $T_{0,k}^{(N)}$, pro $k \in \mathbb{N}$, na N -dimenzionální krychli. Pomocí vzorce

$$T_{m,k}^{(N)} = \frac{1}{4^m - 1} (4^m T_{m-1,k+1}^{(N)} - T_{m-1,k}^{(N)}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

odvodíme zbylé kubaturní formule $T_{m,k}^{(N)}$ v tzv. T-schématu

$$\begin{array}{cccc}
 T_{0,0}^{(N)} & & & \\
 T_{0,1}^{(N)} & T_{1,0}^{(N)} & & \\
 T_{0,2}^{(N)} & T_{1,1}^{(N)} & T_{2,0}^{(N)} & \\
 \vdots & & \ddots & \\
 T_{0,m}^{(N)} & \dots & \dots & T_{m,0}^{(N)}.
 \end{array}$$

Kubaturní vzorce $T_{m,0}^{(N)}$, pro $m \in \mathbb{N}$ (tedy kubatury ležící na diagonále T-schématu) nazveme Rombergovými kubaturními formullemi.

Definice 5.5.

Nechť funkcionál C_m je kubaturní formule

$$C_m = \sum_{i=1}^m a_i f(\vec{x}_i),$$

kde $\vec{x}_i \in [0, 1]^n$ jsou navzájem různé uzlové body pro $i = 1, \dots, m$, pro $n, m \in \mathbb{N}$.

Pak kubaturní formuli nazveme kladnou, pokud platí

$$a_i > 0,$$

pro všechna $i = 1, \dots, m$.

Pozitivita je velice důležitá vlastnost kubaturní formule, neboť zaručuje konvergenci této kubatury pro všechny funkce f takové, že $f \in \mathcal{C}([0, 1]^n)$.

Nyní můžeme začít s odvozováním Rombergových kubaturních vzorců v konkrétních případech.

5.3 Sardovo jádro Rombergovy kubaturní formule na čtverci

Nejprve se budeme věnovat hledání Rombergovy kubaturní formule na jednotkovém čtverci. Jak jsme již dříve předeslali, budeme vycházet z lichoběžníkového pravidla na čtverci $[0, 1]^2$. Tuto kubaturu budeme značit $T_{0,0}^{(2)}$,

jedná se zřejmě o kubaturní formuli s uzlovými body ve vrcholech jednotkového čtverce, tedy

$$T_{0,0}^{(2)} = \frac{1}{4} [f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1)].$$

Obdobným způsobem jako v jednorozměrném případě přejdeme k složenému lichoběžníkovému pravidlu, tentokrát dělením jednotkového čtverce na čtvrtiny, které budou mít opět tvar čtverce. Jinými slovy rozdělíme čtverec $[0,1]^2$ na čtverce $[0, \frac{1}{2}]^2$, $[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$, $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$ a $[\frac{1}{2}, 1]^2$. Uzlovými body nové kubaturní formule, kterou budeme značit $T_{0,1}^{(2)}$, budou vrcholy těchto čtverců. Dostáváme tedy kubaturu ve tvaru

$$\begin{aligned} T_{0,1}^{(2)} &= \frac{1}{16} [f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) + \\ &+ 2(f(0, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 0) + f(1, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 1)) + \\ &+ 4f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]. \end{aligned}$$

Kubaturní formule $T_{0,1}^{(2)}$ má zřejmě devět různých uzlových bodů.

Opakováním právě popsaného postupu získáme vzorce pro $T_{0,k}^{(2)}$, kde $k = 2, 3, \dots$. Než přejdeme k obecnému vzoreci pro složené lichoběžníkové pravidlo na čtverci $[0,1]^2$, tedy $T_{0,k}^{(2)}$, kde $k \in \mathbb{N}$, uvedeme ještě konkrétní tvar kubaturní formule $T_{0,2}^{(2)}$, neboť s právě zmíněným vzorcem budeme dále pracovat. Kubaturní vzorec $T_{0,2}^{(2)}$ má tedy tvar

$$\begin{aligned} T_{0,2}^{(2)} &= \frac{1}{64} [f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) + \\ &+ 2(f(0, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 0) + f(1, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 1) + f(0, \frac{1}{4}) + f(0, \frac{3}{4}) + \\ &+ f(\frac{1}{4}, 0) + f(\frac{3}{4}, 0) + f(1, \frac{1}{4}) + f(1, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4}, 1) + f(\frac{3}{4}, 1)) + \\ &+ 4(f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + \\ &+ f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}))]. \end{aligned}$$

Jedná se o kubaturní formuli s pětadvaceti uzlovými body.

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ dosaneme vzorec

$$T_{0,k}^{(2)} = 2^{-2(k+1)} \left[\sum_{i,j=0}^1 f(i, j) + 2 \left[\sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^{2^k-1} f(i, \frac{j}{2^k}) + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^{2^k-1} f(\frac{i}{2^k}, j) \right] + 4 \sum_{i,j=1}^{2^k-1} f(\frac{i}{2^k}, \frac{j}{2^k}) \right].$$

Snadno zjistíme, že se jedná o kubaturní vzorec s $(2^{2k} + 2^{k+1} + 1)$ uzlovými body. Je zřejmé, že všechny kubaturní vzorce $T_{0,k}^{(2)}$, pro $k \in \mathbb{N}$, jsou pozitivní.

Než přistoupíme k odvozování Rombergovy kubaturní formule, budeme se zabývat hledáním Sardových jader právě definovaných kubaturních formulí. Budou nás zajímat jejich vlastnosti a jejich možné využití k odhadu chyby těchto kubaturních vzorců. Nejprve určíme podrobně algebraický stupeň přesnosti kubaturní formule $T_{0,0}^{(2)}$, u zbylých kubaturních vzorců $T_{0,k}^{(2)}$, kde $k \in \mathbb{N}$, podrobné výpočty uvádět nebudeme.

Tato kubatura zřejmě integruje přesně konstanty, neboť platí

$$\int_0^1 \int_0^1 1 \, dx dy = 1$$

a zároveň

$$T_{0,0}^{(2)} 1 = \frac{1}{4} [1 + 1 + 1 + 1] = 1,$$

tedy

$$\int_0^1 \int_0^1 1 \, dx dy - T_{0,0}^{(2)} 1 = 0.$$

Kubaturní formule $T_{0,0}^{(2)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti rovem alespoň 0, což nám umožní použít k odhadu jejího chybového členu Sardova jádra. Snadným dosazením zjistíme, že tento kubaturní vzorec integruje přesně i polynomy prvního stupně, což dokládají následující výpočty. Platí rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 x \, dx dy = \frac{1}{2},$$

a současně

$$T_{0,0}^{(2)} x = \frac{1}{4} [0 + 0 + 1 + 1] = \frac{1}{2},$$

tedy odečtením dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 x \, dx dy - T_{0,0}^{(2)} x = 0.$$

Stejně postupujeme i pro proměnnou y a opět získáme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy = \frac{1}{2}$$

a dosazením do kubaturního vzorce $T_{0,0}^{(2)}$

$$T_{0,0}^{(2)} y = \frac{1}{4}[0 + 1 + 0 + 1] = \frac{1}{2}.$$

Je zřejmé, že odečtením těchto výrazů opět dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy - T_{0,0}^{(2)} y = 0.$$

Kubaturní formule $T_{0,0}^{(2)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 1. Stejným způsobem pokračujeme dále pro polynomy druhého stupně (připomeňme, že se jedná o polynomy tvaru x^2 , xy a y^2). Dosazením snadno ověříme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx dy = \frac{1}{4},$$
$$T_{0,0}^{(2)} xy = \frac{1}{4}[0 + 0 + 0 + 1] = \frac{1}{4}.$$

Jejichž odečtením získáme rovnost

$$\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx dy - T_{0,0}^{(2)} xy = 0.$$

Problém nastává u polynomů druhého stupně tvaru x^2 a y^2 . Výpočet provedeme pouze pro polynom x^2 . Zřejmě platí

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 \, dx dy = \frac{1}{3},$$

$$T_{0,0}^{(2)}x^2 = \frac{1}{4}[0 + 0 + 1 + 1] = \frac{1}{2},$$

tedy odečtením právě získaného dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 dx dy - T_{0,0}^{(2)}x^2 \neq 0.$$

Kubатурní formule $T_{0,0}^{(2)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven 1.

Pro chybu E_4f platí rovnost

$$E_4f = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \frac{1}{4}[f(0, 0) + f(0, 1) + f(1, 0) + f(1, 1)].$$

Kubatura $T_{0,0}^{(2)}$ má algebraický stupeň přesnosti roven 1, víme tedy pomocí věty 5.4, že chybový člen kubaturní formule $T_{0,0}^{(2)}$ můžeme vyjádřit jako

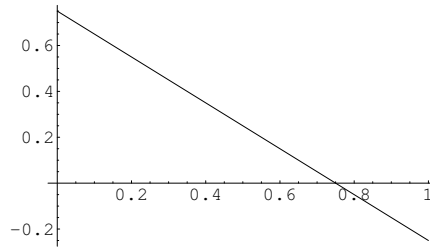
$$\begin{aligned} E_4(f) &= \int_0^1 K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(u) f_{2,0}(u, 0) du + \int_0^1 K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(v) f_{0,2}(0, v) dv + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,0}^{(2)}}(u, v) f_{1,1}(u, v) dudv, \end{aligned}$$

kde $K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(u)$, $K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(v)$ jsou jednorozměrná Sardova jádra kubaturní formule $T_{0,0}^{(2)}$ a $K_{0,0}^{T_{0,0}^{(2)}}$ je dvojrozměrné Sardovo jádro této kubatury.

Hledáme tedy Sardova jádra kubaturní formule $T_{0,0}^{(2)}$. Nejprve spočteme jednorozměrná Sardova jádra $K_j^{T_{0,0}^{(2)}}(u)$, $K_j^{T_{0,0}^{(2)}}(v)$, pro $j = 0, 1$. Podle definice 5.3 pro $j = 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} K_0^{T_{0,0}^{(2)}}(u) &= \int_0^1 \int_0^1 (x - u)_+^0 dx dy - \frac{1}{4}[(0 - u)_+^0 + (1 - u)_+^0] = \int_u^1 dx - \frac{1}{4} = -u + \frac{3}{4} \\ K_0^{T_{0,0}^{(2)}}(v) &= \int_0^1 \int_0^1 (y - v)_+^0 dx dy - \frac{1}{4}[(0 - v)_+^0 + (1 - v)_+^0] = \int_v^1 dy - \frac{1}{4} = -v + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Tyto funkce můžeme graficky znázornit následujícím způsobem.



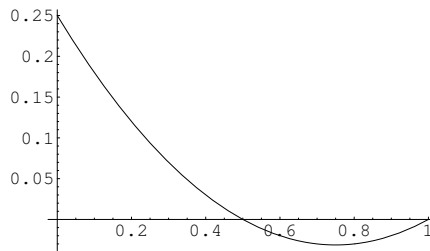
Obr. č.5.1, $K_0^{T_{0,0}^{(2)}}(u)$, $K_0^{T_{0,0}^{(2)}}(v)$

Obdobně získáme vzorce $K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(u)$ a $K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(v)$ ve tvaru

$$K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(u) = \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_+^1 dx dy - \frac{1}{4}[(0-u)_+^1 + (1-u)_+^1] = \int_u^1 (x-u) dx - \frac{1}{4}(1-u) = \\ = \frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{4}u + \frac{1}{4}$$

$$K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(v) = \int_0^1 \int_0^1 (y-v)_+^1 dx dy - \frac{1}{4}[(0-v)_+^1 + (1-v)_+^1] = \int_v^1 (y-v) dy - \frac{1}{4}(1-v) = \\ = \frac{1}{2}v^2 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}$$

a jejich grafické znázornění:



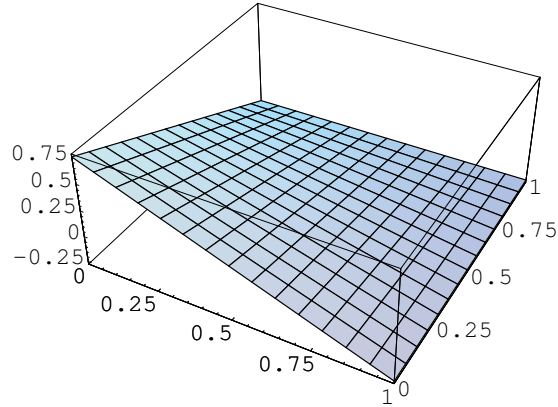
Obr. č.5.2, $K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(u)$, $K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(v)$

Nyní spočteme dvourozměrná Sardova jádra $K_{\kappa,\lambda}^{T_{0,0}^{(2)}}(u,v)$, pro $\kappa = 0, 1$ a $\lambda = 0, 1$.

Pro $\kappa = 0$ a $\lambda = 0$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{0,0}^{T_{0,0}^{(2)}}(u,v)$ ve tvaru

$$K_{0,0}^{T_{0,0}^{(2)}}(u,v) = \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_+^0 (y-v)_+^0 dx dy - \frac{1}{4}[(0-u)_+^0 (0-v)_+^0 +$$

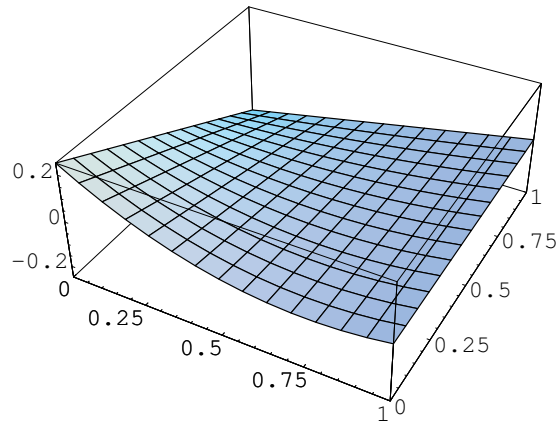
$$\begin{aligned}
& + (0 - u)_+^0(1 - v)_+^0 + (1 - u)_+^0(0 - v)_+^0 + (1 - u)_+^0(1 - v)_+^0] = \\
& = \int_v^1 \int_u^1 dx dy - \frac{1}{4} = uv - u - v + \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$



Obr. č.5.3, $K_{0,0}^{T(2)}(u, v)$

Pro $\kappa = 1$ a $\lambda = 0$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{1,0}^{T(2)}(u, v)$ ve tvaru

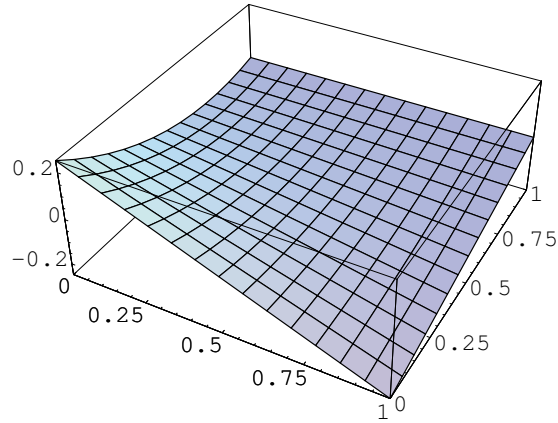
$$\begin{aligned}
K_{1,0}^{T(2)}(u, v) & = \int_0^1 \int_0^1 (x - u)_0^1 (y - v)_+^0 - \frac{1}{4} [(0 - u)_+^1 (0 - v)_+^0 + (0 - u)_+^1 (1 - v)_+^0 + \\
& + (1 - u)_+^1 (0 - v)_+^0 + (1 - u)_+^1 (1 - v)_+^0] = \int_v^1 \int_u^1 (x - u) dx dy - \frac{1}{4} (1 - u) = \\
& = -\frac{1}{2} u^2 v + \frac{1}{2} u^2 + uv - \frac{3}{4} u - \frac{1}{2} v + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$



Obr. č.5.4, $K_{1,0}^{T(2)}(u, v)$

Pro $\kappa = 0$ a $\lambda = 1$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{0,1}^{T_{0,0}^{(2)}}(u, v)$ ve tvaru

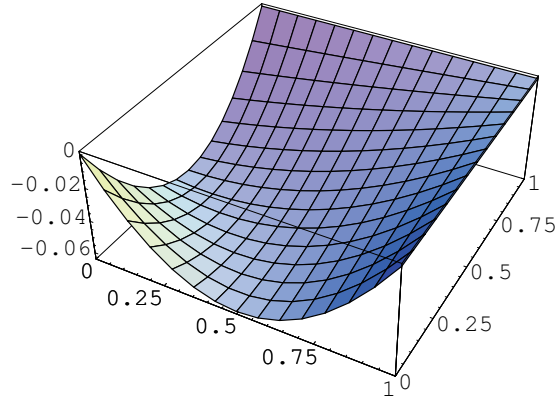
$$\begin{aligned} K_{0,1}^{T_{0,0}^{(2)}}(u, v) &= \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_0^0 (y-v)_+^1 - \frac{1}{4} [(0-u)_+^0 (0-v)_+^1 + (0-u)_+^0 (1-v)_+^1 + \\ &+ (1-u)_+^0 (0-v)_+^1 + (1-u)_+^0 (1-v)_+^1] = \int_v^1 \int_u^1 (y-v) dx dy - \frac{1}{4} (1-v) = \\ &= -\frac{1}{2} v^2 u + \frac{1}{2} v^2 + uv - \frac{1}{2} u - \frac{3}{4} v + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Obr. č.5.5, $K_{0,1}^{T_{0,0}^{(2)}}(u, v)$

Pro $\kappa = 1$ a $\lambda = 1$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{1,1}^{T_{0,0}^{(2)}}(u, v)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} K_{1,1}^{T_{0,0}^{(2)}}(u, v) &= \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_+^1 (y-v)_+^1 dx dy - \frac{1}{4} [(0-u)_+^1 (0-v)_+^1 + (0-u)_+^1 (1-v)_+^1 + \\ &+ (1-u)_+^1 (0-v)_+^1 + (1-u)_+^1 (1-v)_+^1] = \int_v^1 \int_u^1 (x-u)(y-v) dx dy - \frac{1}{4} (1-u)(1-v) = \\ &= \frac{1}{4} u^2 v^2 - \frac{1}{2} u^2 v - \frac{1}{2} uv^2 + \frac{1}{4} u^2 + \frac{1}{4} v^2 + \frac{3}{4} uv + \frac{1}{4} u + \frac{1}{4} v. \end{aligned}$$



Obr. č.5.6, $K_{1,1}^{T_{0,0}^{(2)}}(u,v)$

Kubатурní formule $T_{0,0}^{(2)}$ má algebraický stupeň přesnosti roven 1. Připomeňme, že integrovaná funkce f je v každé své proměnné dvakrát spojitě diferencovatelná na jednotkovém čtverci. Aplikujeme tedy na chybový člen $E_4(f)$ větu 5.4 pro $k = 1$ a dostaneme rovnost

$$E_4(f) = \int_0^1 K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(u) f_{2,0}(u, 0) du + \int_0^1 K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(v) f_{0,2}(0, v) dv + \\ + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,0}^{(2)}}(u, v) f_{1,1}(u, v) dudv.$$

Pro odhad chybového členu použijeme Hölderovu nerovnost pro $p = 2$, takto získaný odhad bude tedy v normě prostoru $\mathcal{L}_2([0, 1]^2)$. Dostaneme tedy nerovnost

$$|E_4(f)| \leq \|f_{2,0}\|_2 \left(\int_0^1 \left| K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} + \|f_{0,2}\|_2 \left(\int_0^1 \left| K_1^{T_{0,0}^{(2)}}(v) \right|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + \|f_{1,1}\|_2 \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| K_{0,0}^{T_{0,0}^{(2)}}(u, v) \right|^2 dudv \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Snadným výpočtem získáme odhad

$$|E_4(f)| \leq 0,403 \cdot \|f\|_{2,2},$$

kde pod symbolem $\|g\|_{2,2}$ rozumíme toto

$$\|g\|_{2,2} = \|g_{0,2}\|_2 + \|g_{2,0}\|_2 + \|g_{1,1}\|_2.$$

Nyní budeme hledat Sardova jádra kubaturní formule $T_{0,1}^{(2)}$. Nejprve spočteme jednorozměrná Sardova jádra $K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(u)$, $K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(v)$. Podle definice 5.3 pro $K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(u)$ na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ dostáváme vzorec

$$\begin{aligned} K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(u) &= \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_+^1 dx dy - \frac{1}{16}[(0-u)_+^1 + 2(\frac{1}{2}-u)_+^1 + (1-u)_+^1] = \\ &= \int_u^1 (x-u) dx - \frac{1}{16}[2(\frac{1}{2}-u) + (1-u)] = \frac{1}{2}u^2 - \frac{13u}{16} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

a na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\begin{aligned} K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(u) &= \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_+^1 dx dy - \frac{1}{16}[(0-u)_+^1 + (\frac{1}{2}-u)_+^1 + (1-u)_+^1] = \\ &= \int_u^1 (x-u) dx - \frac{1}{16}(1-u) = \frac{1}{2}u^2 - \frac{15u}{16} + \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Jednorozměrné Sardovo jádro $K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(u)$ má tedy tvar

$$K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 - \frac{13u}{16} + \frac{3}{8}, & u \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}u^2 - \frac{15u}{16} + \frac{7}{16}, & u \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Zcela analogicky postupujeme při odvozování vzorce pro jednorozměrné Sardovo jádro $K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(v)$. Aplikací definice 5.3 dostáváme pro $K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(v)$ na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ vzorec

$$\begin{aligned} K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(v) &= \int_0^1 \int_0^1 (y-v)_+^1 dx dy - \frac{1}{16}[(0-v)_+^1 + 2(\frac{1}{2}-v)_+^1 + (1-v)_+^1] = \\ &= \int_v^1 (y-v) dy - \frac{1}{16}[2(\frac{1}{2}-v) + (1-v)] = \frac{1}{2}v^2 - \frac{13v}{16} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

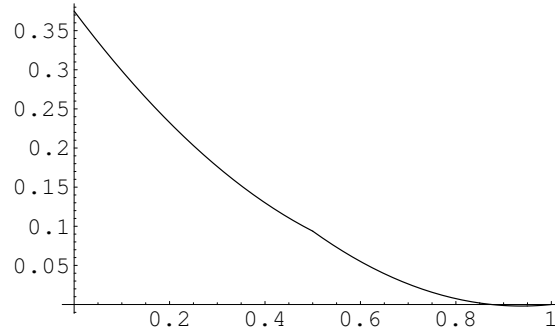
a na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\begin{aligned} K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(v) &= \int_0^1 \int_0^1 (y-v)_+^1 dx dy - \frac{1}{16}[(0-v)_+^1 + (\frac{1}{2}-v)_+^1 + (1-v)_+^1] = \\ &= \int_v^1 (y-v) dy - \frac{1}{16}(1-v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{15v}{16} + \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Jednorozměrné Sardovo jádro $K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(v)$ má tedy tvar

$$K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}v^2 - \frac{13v}{16} + \frac{3}{8}, & v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}v^2 - \frac{15v}{16} + \frac{7}{16}, & v \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Tyto funkce můžeme graficky znázornit takto:



Obr. č.5.7, $K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(u), K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(v)$

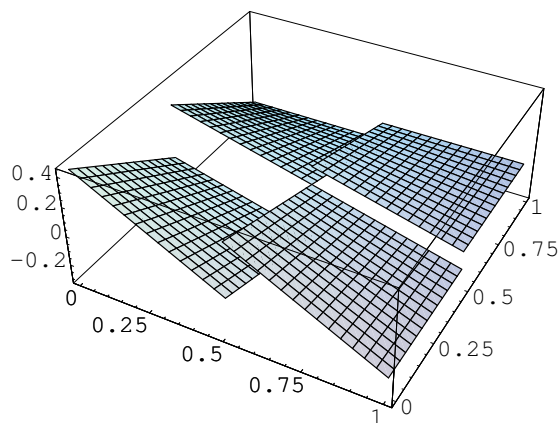
Stejným způsobem nalezneme dvojrozměrná Sardova jádra kubaturní formule $T_{0,1}^{(2)}$ Pro $\kappa = 0$ a $\lambda = 0$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{0,0}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} K_{0,0}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v) = & \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_+^0 (y-v)_+^0 dx dy - \frac{1}{16} [(0-u)_+^0 (0-v)_+^0 + \\ & + (0-u)_+^0 (1-v)_+^0 + (1-u)_+^0 (0-v)_+^0 + (1-u)_+^0 (1-v)_+^0 + \\ & + 2(0-u)_+^0 (\frac{1}{2}-v)_+^0 + 2(\frac{1}{2}-u)_+^0 (0-v)_+^0 + 2(1-u)_+^0 (\frac{1}{2}-v)_+^0 + \\ & + 2(\frac{1}{2}-u)_+^0 (1-v)_+^0 + 4(\frac{1}{2}-u)_+^0 (\frac{1}{2}-v)_+^0]. \end{aligned}$$

Snadným výpočtem získáme konečný vzorec pro dvojrozměrné Sardovo jádro $K_{0,0}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ ve tvaru

$$K_{0,0}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v) = \begin{cases} uv - u - v + \frac{7}{16}, & u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [0, \frac{1}{2}) \\ uv - u - v + \frac{13}{16}, & u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [0, \frac{1}{2}) \\ uv - u - v + \frac{13}{16}, & u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [\frac{1}{2}, 1] \\ uv - u - v + \frac{15}{16}, & u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Grafické znázornění této funkce následuje v obrázku 5.8.



Obr. č.5.8, $K_{0,0}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$

Pro $\kappa = 1$ a $\lambda = 1$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{1,1}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ ve tvaru

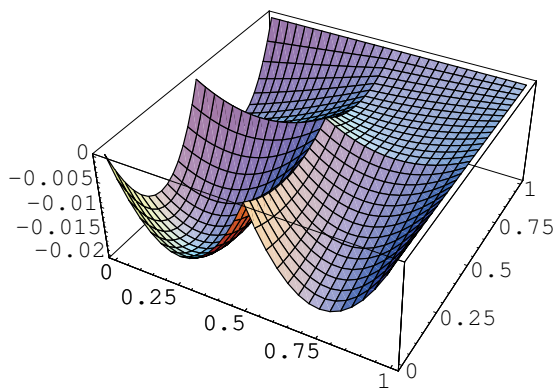
$$\begin{aligned} K_{1,1}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v) = & \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_+^1 (y-v)_+^1 dx dy - \frac{1}{16} [(0-u)_+^1 (0-v)_+^1 + \\ & + (0-u)_+^1 (1-v)_+^1 + (1-u)_+^1 (0-v)_+^1 + (1-u)_+^1 (1-v)_+^1 + \\ & + 2(0-u)_+^1 (\frac{1}{2}-v)_+^1 + 2(\frac{1}{2}-u)_+^1 (0-v)_+^1 + 2(1-u)_+^1 (\frac{1}{2}-v)_+^1 + \\ & + 2(\frac{1}{2}-u)_+^1 (1-v)_+^1 + 4(\frac{1}{2}-u)_+^1 (\frac{1}{2}-v)_+^1]. \end{aligned}$$

Pro dvojrozměrné Sardovo jádro $K_{1,1}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ tedy platí vzorec

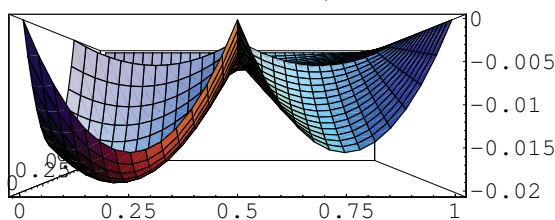
$$K_{1,1}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v) = \begin{cases} \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{7uv}{16} - \frac{u}{8} - \frac{v}{8}, & u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{13uv}{16} - \frac{3u}{8} - \frac{5v}{16} + \frac{1}{8}, & u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{13uv}{16} - \frac{5u}{16} - \frac{3v}{8} + \frac{1}{8}, & u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{15uv}{16} - \frac{7u}{16} - \frac{7v}{16} + \frac{3}{16}, & u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Grafické znázornění funkce $K_{1,1}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ nalezneme na obrázku 5.9 a 5.10.

Sardovo jádro $K_{1,1}^{T_{0,1}^{(2)}}$ nemění na oblasti integrace své znaménko.



Obr. č.5.9, $K_{1,1}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$



Obr. č.5.10, $K_{1,1}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$

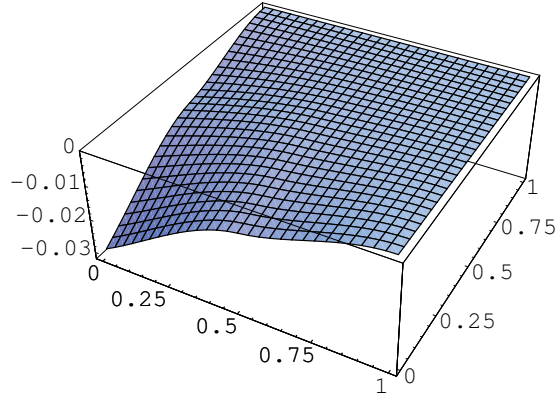
Pro $\kappa = 2$ a $\lambda = 2$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{2,2}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
K_{2,2}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v) &= \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_+^2 (y-v)_+^2 dx dy - \frac{1}{16} [(0-u)_+^2 (0-v)_+^2 + \\
&+ (0-u)_+^2 (1-v)_+^2 + (1-u)_+^2 (0-v)_+^2 + \\
&+ (1-u)_+^2 (1-v)_+^2 + 2(0-u)_+^2 (\frac{1}{2}-v)_+^2 + \\
&+ 2(\frac{1}{2}-u)_+^2 (0-v)_+^2 + 2(1-u)_+^2 (\frac{1}{2}-v)_+^2 + \\
&+ 2(\frac{1}{2}-u)_+^2 (1-v)_+^2 + 4(\frac{1}{2}-u)_+^2 (\frac{1}{2}-v)_+^2].
\end{aligned}$$

Přímým výpočtem získáme vzorec pro dvojrozměrné Sardovo jádro $K_{2,2}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$, tedy

$$K_{2,2}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v) = \begin{cases} \frac{u^3 v^3}{9} - \frac{u^3 v^2}{3} - \frac{u^2 v^3}{3} + \frac{u^3 v}{3} + \frac{u v^3}{3} - \frac{u^3}{9} - \frac{v^3}{9} + \frac{7u^2 v^2}{16} - \frac{u^2 v}{4} - \\ - \frac{u v^2}{4} + \frac{29u^2}{96} + \frac{29v^2}{96} + \frac{u}{24} + \frac{v}{24} - \frac{17}{576}, \\ u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^3 v^3}{9} - \frac{u^3 v^2}{3} - \frac{u^2 v^3}{3} + \frac{u^3 v}{3} + \frac{u v^3}{3} - \frac{u^3}{9} - \frac{v^3}{9} + \frac{13u^2 v^2}{16} - \frac{3u^2 v}{4} - \\ - \frac{5u v^2}{8} + \frac{23u^2}{96} + \frac{19v^2}{48} + \frac{u v}{2} - \frac{7u}{48} - \frac{v}{12} + \frac{5}{288}, \\ u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^3 v^3}{9} - \frac{u^3 v^2}{3} - \frac{u^2 v^3}{3} + \frac{u^3 v}{3} + \frac{u v^3}{3} - \frac{u^3}{9} - \frac{v^3}{9} + \frac{13u^2 v^2}{16} - \frac{5u^2 v}{8} - \\ - \frac{3u v^2}{4} + \frac{19u^2}{48} + \frac{23v^2}{96} + \frac{u v}{2} - \frac{u}{12} - \frac{7v}{48} + \frac{5}{288}, \\ u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{u^3 v^3}{9} - \frac{u^3 v^2}{3} - \frac{u^2 v^3}{3} + \frac{u^3 v}{3} + \frac{u v^3}{3} - \frac{u^3}{9} - \frac{v^3}{9} + \frac{15u^2 v^2}{16} - \frac{7u^2 v}{8} - \\ - \frac{7u v^2}{8} + \frac{13u^2}{48} + \frac{13v^2}{48} + \frac{3u v}{4} - \frac{5u}{24} - \frac{5v}{24} + \frac{7}{144}, \\ u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Graf této funkce následuje na obrázku 5.11.



Obr. č.5.11, $K_{2,2}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$

I v případě Sardova jádra $K_{2,2}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ se jedná o funkci neměící na intervalu integrace své znaménko.

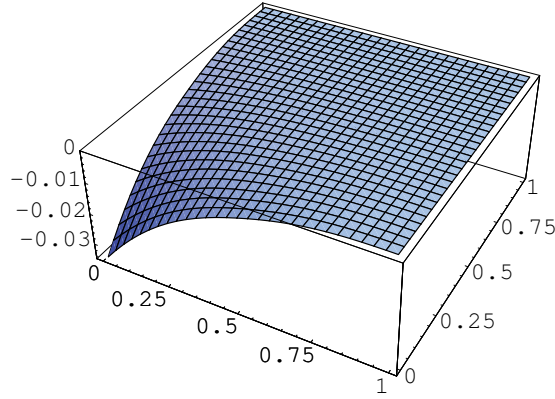
Pro $\kappa = 3$ a $\lambda = 3$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{3,3}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
 K_{3,3}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v) = & \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_+^3 (y-v)_+^3 dx dy - \frac{1}{16} [(0-u)_+^3 (0-v)_+^3 + \\
 & + (0-u)_+^3 (1-v)_+^3 + (1-u)_+^3 (0-v)_+^3 + \\
 & + (1-u)_+^3 (1-v)_+^3 + 2(0-u)_+^3 (\frac{1}{2}-v)_+^3 + \\
 & + 2(\frac{1}{2}-u)_+^3 (0-v)_+^3 + 2(1-u)_+^3 (\frac{1}{2}-v)_+^3 + \\
 & + 2(\frac{1}{2}-u)_+^3 (1-v)_+^3 + 4(\frac{1}{2}-u)_+^3 (\frac{1}{2}-v)_+^3].
 \end{aligned}$$

Dvojměrné Sardovo jádro $K_{3,3}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ má tedy vzorec

$$K_{3,3}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{u^4v^4}{16} - \frac{u^4v^3}{4} - \frac{u^3v^4}{4} + \frac{3u^4v^2}{8} + \frac{u^2v^4}{8} - \frac{u^4v}{4} - \frac{uv^4}{4} + \frac{u^4}{16} + \frac{v^4}{16} + \\ + \frac{7u^3v^3}{16} - \frac{3u^3v^2}{8} - \frac{3u^2v^3}{8} + \frac{5u^3v}{32} + \frac{5uv^3}{32} - \frac{u^3}{64} - \frac{v^3}{64} + \frac{3u^2v}{16} + \\ + \frac{3uv^2}{16} - \frac{3u^2}{32} - \frac{3v^2}{32} - \frac{17uv}{64} + \frac{13u}{128} + \frac{13v}{128} - \frac{9}{256}, \\ u \in \left[0, \frac{1}{2}\right), v \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{u^4v^4}{16} - \frac{u^4v^3}{4} - \frac{u^3v^4}{4} + \frac{3u^4v^2}{8} + \frac{u^2v^4}{8} - \frac{u^4v}{4} - \frac{uv^4}{4} + \frac{u^4}{16} + \frac{v^4}{16} + \\ + \frac{13u^3v^3}{16} - \frac{9u^3v^2}{8} - \frac{15u^2v^3}{16} + \frac{23u^3v}{32} + \frac{7uv^3}{16} - \frac{11u^3}{64} - \frac{v^3}{16} + \frac{9u^2v^2}{8} - \\ - \frac{21u^2v}{32} - \frac{3uv^2}{8} + \frac{9u^2}{64} + \frac{5uv}{32} - \frac{u}{64} + \frac{v}{32} - \frac{1}{64}, \\ u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], v \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{u^4v^4}{16} - \frac{u^4v^3}{4} - \frac{u^3v^4}{4} + \frac{3u^4v^2}{8} + \frac{u^2v^4}{8} - \frac{u^4v}{4} - \frac{uv^4}{4} + \frac{u^4}{16} + \frac{v^4}{16} + \\ + \frac{13u^3v^3}{16} - \frac{9u^3v^2}{8} - \frac{15u^2v^3}{16} + \frac{7u^3v}{16} + \frac{23uv^3}{32} - \frac{u^3}{16} - \frac{11v^3}{64} + \frac{9u^2v^2}{8} - \\ - \frac{3u^2v}{8} - \frac{21uv^2}{32} + \frac{9v^2}{64} + \frac{5uv}{32} + \frac{u}{32} - \frac{v}{64} - \frac{1}{64}, \\ u \in \left[0, \frac{1}{2}\right), v \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ \frac{u^4v^4}{16} - \frac{u^4v^3}{4} - \frac{u^3v^4}{4} + \frac{3u^4v^2}{8} + \frac{u^2v^4}{8} - \frac{u^4v}{4} - \frac{uv^4}{4} + \frac{u^4}{16} + \frac{v^4}{16} + \\ + \frac{15u^3v^3}{16} - \frac{21u^3v^2}{16} - \frac{21u^2v^3}{16} + \frac{13u^3v}{16} + \frac{13uv^3}{16} - \frac{3u^3}{16} - \frac{3v^3}{16} + \frac{27u^2v^2}{16} - \\ - \frac{15u^2v}{16} - \frac{15uv^2}{16} + \frac{3u^2}{16} + \frac{3v^2}{16} + \frac{7uv}{16} - \frac{u}{16} - \frac{v}{16}, \\ u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], v \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{array} \right.$$

Graf funkce $K_{3,3}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ nalezneme na obrázku 5.12



Obr. č.5.12, $K_{3,3}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$

Funkce $K_{3,3}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v)$ má opět na celém intervalu své integrace konstantní znaménko.

Kubатурní vzorec $T_{0,1}^{(2)}$ má algebraický stupeň přesnosti roven 1, což lze ukázat zcela analogicky, jako v případě kubатурní formule $T_{0,0}^{(2)}$. I zde předpokládáme, že funkce f je třídy $\mathcal{C}^2([0, 1]^2)$. Aplikací věty 5.4 pro $k = 1$ dostaneme pro chybový člen $E_9(f)$ vzorec

$$E_9(f) = \int_0^1 K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(u) f_{2,0}(u, 0) du + \int_0^1 K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(v) f_{0,2}(0, v) dv + \\ + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v) f_{1,1}(u, v) dudv.$$

Použijeme-li na tuto rovnost Hölderovu nerovnost pro $p = 2$, dostáváme odhad na chybový člen $E_9(f)$ kubатурní formule $T_{0,1}^{(2)}$ ve tvaru

$$|E_9(f)| \leq \|f_{2,0}\|_2 \left(\int_0^1 \left| K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} + \|f_{0,2}\|_2 \left(\int_0^1 \left| K_1^{T_{0,1}^{(2)}}(v) \right|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + \|f_{1,1}\|_2 \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| K_{0,0}^{T_{0,1}^{(2)}}(u, v) \right|^2 dudv \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Opět se jedná o odhad v normě prostoru $\mathcal{L}_2([0, 1]^2)$. Dosazením snadno získáme odhad

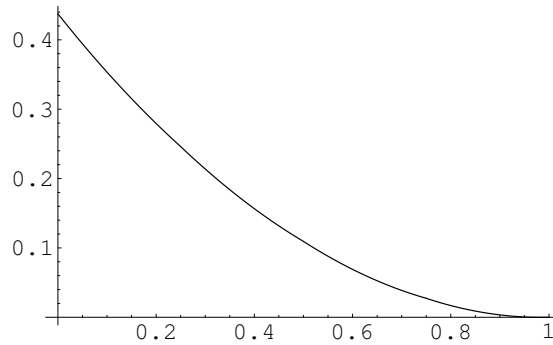
$$|E_9 f| \leq 0,444 \cdot \|f\|_{2,2}.$$

Nyní se budeme zabývat kubaturním vzorcem $T_{0,2}^{(2)}$, jeho Sardovými jádry a konečně odhadem jeho chybového členu. Zcela analogicky jako v případě $T_{0,0}^{(2)}$ nebo $T_{0,1}^{(2)}$ určíme nejprve jednorozměrná Sardova jádra $K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(u)$ a $K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(v)$. Pro Sardova jádra $K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(u)$ a $K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(v)$ dostáváme vzorce

$$K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 - \frac{57u}{64} + \frac{7}{16}, & u \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{2}u^2 - \frac{59u}{64} + \frac{57}{128}, & u \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}u^2 - \frac{61u}{64} + \frac{59}{128}, & u \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{2}u^2 - \frac{63u}{64} + \frac{31}{64}, & u \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

$$K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}v^2 - \frac{57v}{64} + \frac{7}{16}, & v \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{2}v^2 - \frac{59v}{64} + \frac{57}{128}, & v \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}v^2 - \frac{61v}{64} + \frac{59}{128}, & v \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{2}v^2 - \frac{63v}{64} + \frac{31}{64}, & v \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Obě tyto funkce, tedy $K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(u)$ a $K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(v)$, jsou graficky znázorněny na obrázku 5.13.



Obr. č.5.13, $K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(u)$, $K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(v)$

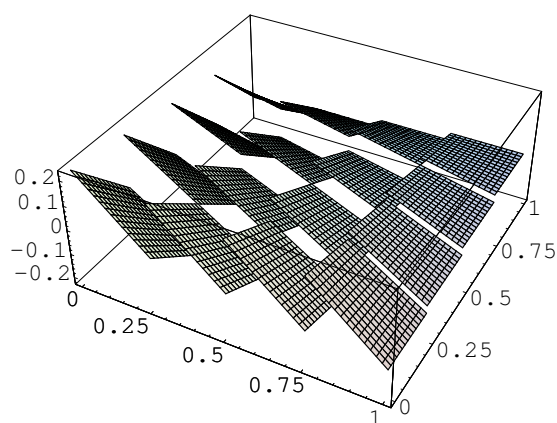
Než přejdeme z odvození dvojrozměrného Sardova jádra $K_{0,0}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v)$, zavedeme zjednodušující značení, které budeme později využívat i v zápise Sardových jader Rombergovy kubaturní formule. Je zřejmé, že složené lichoběžníkové pravidlo $T_{0,2}^{(2)}$ rozdělí jednotkový čtverec na šestnáct stejně velkých čtverců, jejichž seznam následuje:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= [0, \frac{1}{4}) \times [0, \frac{1}{4}) & \mathcal{E} &= [0, \frac{1}{4}) \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & \mathcal{I} &= [0, \frac{1}{4}) \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) & \mathcal{M} &= [0, \frac{1}{4}) \times [\frac{3}{4}, 1] \\
\mathcal{B} &= [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{4}) & \mathcal{F} &= [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & \mathcal{J} &= [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) & \mathcal{N} &= [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times [\frac{3}{4}, 1] \\
\mathcal{C} &= [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \times [0, \frac{1}{4}) & \mathcal{G} &= [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & \mathcal{K} &= [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) & \mathcal{O} &= [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \times [\frac{3}{4}, 1] \\
\mathcal{D} &= [\frac{3}{4}, 1] \times [0, \frac{1}{4}) & \mathcal{H} &= [\frac{3}{4}, 1] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) & \mathcal{L} &= [\frac{3}{4}, 1] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) & \mathcal{P} &= [\frac{3}{4}, 1] \times [\frac{3}{4}, 1]
\end{aligned}$$

Obdobným způsobem jako v předchozím případě získáme dvojrozměrné Sardovo jádro $K_{0,0}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v)$ ve tvaru

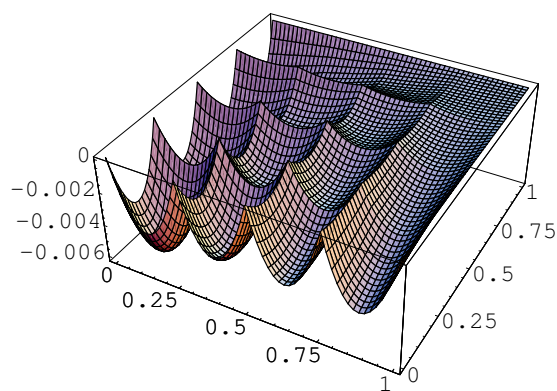
$$K_{0,0}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v) = \begin{cases} uv - u - v + \frac{15}{64}, & u, v \in \mathcal{A} \\ uv - u - v + \frac{29}{64}, & u, v \in \mathcal{B} \\ uv - u - v + \frac{29}{64}, & u, v \in \mathcal{E} \\ uv - u - v + \frac{39}{64}, & u, v \in \mathcal{F} \\ uv - u - v + \frac{43}{64}, & u, v \in \mathcal{C} \\ uv - u - v + \frac{43}{64}, & u, v \in \mathcal{I} \\ uv - u - v + \frac{49}{64}, & u, v \in \mathcal{G} \\ uv - u - v + \frac{49}{64}, & u, v \in \mathcal{J} \\ uv - u - v + \frac{55}{64}, & u, v \in \mathcal{K} \\ uv - u - v + \frac{57}{64}, & u, v \in \mathcal{D} \\ uv - u - v + \frac{57}{64}, & u, v \in \mathcal{M} \\ uv - u - v + \frac{59}{64}, & u, v \in \mathcal{H} \\ uv - u - v + \frac{59}{64}, & u, v \in \mathcal{N} \\ uv - u - v + \frac{61}{64}, & u, v \in \mathcal{L} \\ uv - u - v + \frac{61}{64}, & u, v \in \mathcal{O} \\ uv - u - v + \frac{63}{64}, & u, v \in \mathcal{P} \end{cases}$$

Graf Sardova jádra $K_{0,0}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v)$ nalezneme na obrázku 5.14.



Obr. č.5.14, $K_{0,0}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v)$

Než přejdeme k odhadu chybového členu kubaturní formule $T_{0,2}^{(2)}$, odvodíme ještě její dvojrozměrné Sardovo jádro $K_{1,1}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v)$. Při odvozování postupujeme zcela analogicky jako u kubaturního vzorce $T_{0,1}^{(2)}$. Nejprve uvedeme na obrázku 5.15 graf Sardova jádra $K_{1,1}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v)$, vzorec této funkce následuje vzápětí.



Obr. č.5.15, $K_{1,1}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v)$

Vzorec pro dvojrozměrné Sardovo jádro $K_{1,1}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v)$ má tvar

$$K_{1,1}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{15uv}{64} - \frac{u}{16} - \frac{v}{16}, u, v \in \mathcal{A} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{29uv}{64} - \frac{3u}{16} - \frac{5v}{128} + \frac{1}{32}, u, v \in \mathcal{B} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{29uv}{16} - \frac{5u}{128} - \frac{3v}{16} + \frac{1}{32}, u, v \in \mathcal{E} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{39uv}{64} - \frac{29u}{128} - \frac{29v}{128} + \frac{15}{256}, u, v \in \mathcal{F} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{43uv}{64} - \frac{5u}{16} - \frac{29v}{128} + \frac{5}{32}, u, v \in \mathcal{C} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{43uv}{64} - \frac{29u}{128} - \frac{5v}{16} + \frac{5}{32}, u, v \in \mathcal{I} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{49uv}{64} - \frac{43u}{128} - \frac{39v}{128} + \frac{29}{256}, u, v \in \mathcal{G} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{49uv}{64} - \frac{39u}{128} - \frac{43v}{128} + \frac{29}{256}, u, v \in \mathcal{J} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{55uv}{64} - \frac{49u}{128} - \frac{49v}{128} + \frac{39}{256}, u, v \in \mathcal{K} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{57uv}{64} - \frac{7u}{16} - \frac{25v}{64} + \frac{3}{16}, u, v \in \mathcal{D} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{57uv}{16} - \frac{25u}{64} - \frac{7v}{16} + \frac{3}{16}, u, v \in \mathcal{M} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{59uv}{64} - \frac{57u}{128} - \frac{27v}{64} + \frac{25}{128}, u, v \in \mathcal{H} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{59uv}{64} - \frac{27u}{64} - \frac{57v}{128} + \frac{25}{128}, u, v \in \mathcal{N} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{61uv}{64} - \frac{59u}{128} - \frac{29v}{64} + \frac{27}{128}, u, v \in \mathcal{L} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{61uv}{64} - \frac{29u}{64} - \frac{59v}{128} + \frac{27}{128}, u, v \in \mathcal{O} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{63uv}{64} - \frac{31u}{64} - \frac{31v}{64} + \frac{15}{64}, u, v \in \mathcal{P}. \end{array} \right.$$

Složené lichoběžníkové pravidlo $T_{0,2}^{(2)}$ má algebraický stupeň přesnosti rovný 1. Předpokládáme-li, že integrovaná funkce f je třídy $\mathcal{C}^2([0, 1]^2)$, můžeme pro vyjádření chyby této kubaturní formule použít větu 5.4 pro $k = 1$. Pro

chybový člen $E_{25}(f)$ kubaturního vzorce $T_{0,2}^{(2)}$ tedy dostáváme rovnost

$$E_{25}(f) = \int_0^1 K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(u) f_{2,0}(u, 0) du + \int_0^1 K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(v) f_{0,2}(0, v) dv + \\ + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v) f_{1,1}(u, v) dudv.$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ na právě získaný vztah, dostaneme odhad chyby kubaturní formule $T_{0,2}^{(2)}$ ve tvaru

$$|E_{25}f| \leq \|f_{2,0}\|_2 \left(\int_0^1 \left| K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} + \|f_{0,2}\|_2 \left(\int_0^1 \left| K_1^{T_{0,2}^{(2)}}(v) \right|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + \|f_{1,1}\|_2 \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| K_{0,0}^{T_{0,2}^{(2)}}(u, v) \right|^2 dudv \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Snadným výpočtem získáme konečný odhad chybového členu v \mathcal{L}_2 normě ve tvaru

$$|E_{25}f| \leq 0,449 \cdot \|f\|_{2,2}.$$

Nyní odvodíme vzorce pro Rombergovu kubaturní formuli. Jak jsem již dříve předeslali, využijeme k tomu, obdobně jako v jednorozměrném případě, T-schématu:

$$\begin{array}{cccc} T_{0,0}^{(2)} & & & \\ T_{0,1}^{(2)} & T_{1,0}^{(2)} & & \\ T_{0,2}^{(2)} & T_{1,1}^{(2)} & T_{2,0}^{(2)} & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{0,m}^{(2)} & \dots & \dots & T_{m,0}^{(2)}, \end{array}$$

kde položíme $T_{m,k}^{(2)}$ rovno

$$T_{m,k}^{(2)} = \frac{1}{4^m - 1} (4^m T_{m-1,k+1}^{(2)} - T_{m-1,k}^{(2)}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Aplikací vzorce (5.2) pro $k = 0$ a $m = 1$ snadno získáme vzorec pro Rombergovu kubaturu $T_{1,0}^{(2)}$, tedy

$$\begin{aligned} T_{1,0}^{(2)} &= \frac{1}{3}[4T_{0,1}^{(2)} - T_{0,0}^{(2)}] \\ T_{1,0}^{(2)} &= \frac{1}{6}[f(0, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 0) + f(1, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 1) + 2f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \end{aligned}$$

Jedná se zřejmě o kubaturní vzorec s pěti uzlovými body. Zdůrazněme, že se jedná o pozitivní kubaturní formuli. Nejprve spočteme jednorozměrná Sardova jádra této kubaturní formule, která později využijeme k odhadu na chybový člen. Samotné výpočty jsou přímou aplikací definice 5.3, proto zde uvádíme pouze jejich výsledky.

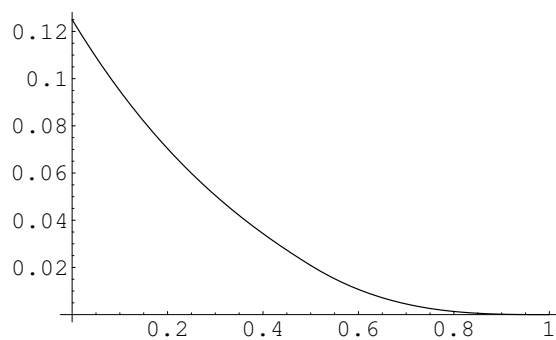
Pro jednorozměrné Sardovo jádro $K_2^{T_{1,0}^{(2)}}(u)$ dostáváme tedy vzorec

$$K_2^{T_{1,0}^{(2)}}(u) = \begin{cases} -\frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{3} - \frac{u}{3} + \frac{1}{8}, & u \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} - \frac{u}{2} + \frac{1}{6}, & u \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Vzorec pro jednorozměrné Sardovo jádro $K_1^2(v)$ má tvar

$$K_2^{T_{1,0}^{(2)}}(v) = \begin{cases} -\frac{v^3}{6} + \frac{v^2}{3} - \frac{v}{3} + \frac{1}{8}, & v \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{v^3}{6} + \frac{v^2}{2} - \frac{v}{2} + \frac{1}{6}, & v \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Grafické znázornění obou právě zavedených funkcí vidíme na obrázce 5.16.



Obr. č.5.16, $K_2^{T_{1,0}^{(2)}}(u)$, $K_2^{T_{1,0}^{(2)}}(v)$

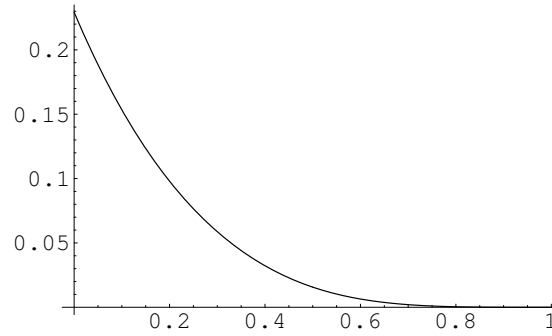
Opět zcela analogicky (přímou aplikací definice 5.3) odvodíme vzorce pro jednorozměrná Sardova jádra $K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(u)$ a $K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(v)$. Vzorec pro $K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(u)$ má tvar

$$K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(u) = \begin{cases} \frac{u^4}{4} - \frac{5u^3}{6} + \frac{5u^2}{4} - \frac{7u}{8} + \frac{11}{48}, & u \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^4}{4} - u^3 + \frac{3u^2}{2} - u + \frac{1}{4}, & u \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Pro jednorozměrné Sardovo jádro $K_1^3(v)$ dostaneme vzorec

$$K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(v) = \begin{cases} \frac{v^4}{4} - \frac{5v^3}{6} + \frac{5v^2}{4} - \frac{7v}{8} + \frac{11}{48}, & v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{v^4}{4} - v^3 + \frac{3v^2}{2} - v + \frac{1}{4}, & v \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Grafy funkcí $K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(u)$ a $K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(v)$ nalezneme na obrázku 5.17



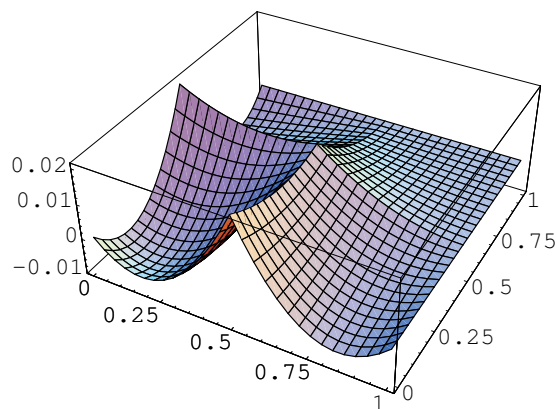
Obr. č.5.17, $K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(u)$, $K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(v)$

Nyní přistupme k výpočtu dvojrozměrných Sardových jader $K_{1,1}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$, $K_{2,2}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$ a $K_{3,3}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$. Podotkněme ještě, že k samotnému odhadu chybového členu kubaturního vzorce $T_{1,0}^{(2)}$ využijeme, jak posléze uvidíme, pouze Sardovo jádro $K_{1,1}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$. Výpočet je, stejně jako v případě jednorozměrných Sardových jader, přímou aplikací definice 5.3, proto zde uvádíme pouze výsledný tvar těchto funkcí.

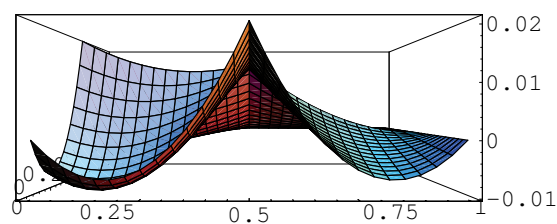
Pro dvojrozměrné Sardovo jádro $K_{1,1}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$, dostaneme vzorec

$$K_{1,1}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v) = \begin{cases} \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{uv}{3} - \frac{u}{12} - \frac{v}{12}, & u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{5uv}{6} - \frac{5u}{12} - \frac{v}{3} + \frac{1}{6}, & u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{5uv}{6} - \frac{u}{3} - \frac{5v}{12} + \frac{1}{6}, & u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + uv - \frac{u}{2} - \frac{v}{2} + \frac{1}{4}, & u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Na obrázku 5.18 a 5.19 následuje jeho grafické znázornění.



Obr. č.5.18, $K_{1,1}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$

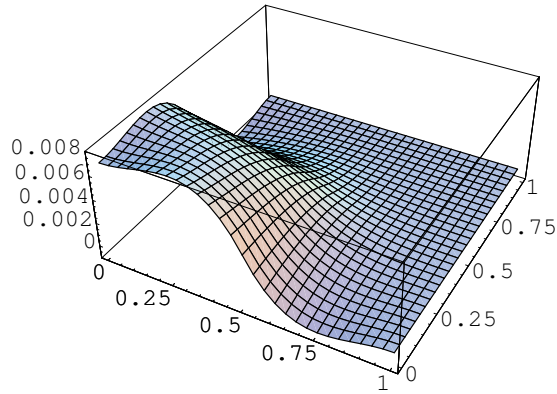


Obr. č.5.19, $K_{1,1}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$

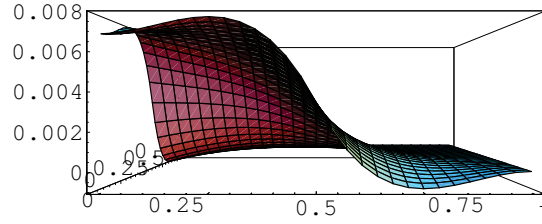
Vzorec pro dvojrozměrné Sardovo jádro $K_{2,2}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$ má tvar

$$K_{2,2}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v) = \begin{cases} \frac{u^3v^3}{9} - \frac{u^3v^2}{3} - \frac{u^2v^3}{3} + \frac{u^3v}{3} + \frac{uv^3}{3} - \frac{u^3}{9} - \frac{v^3}{9} + \frac{u^2v^2}{3} - \frac{u^2v}{6} - \frac{uv^2}{6} + \\ + \frac{u^2}{24} + \frac{v^2}{24} - \frac{1}{144}, & u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^3v^3}{9} - \frac{u^3v^2}{3} - \frac{u^2v^3}{3} + \frac{u^3v}{3} + \frac{uv^3}{3} - \frac{u^3}{9} - \frac{v^3}{9} + \frac{5u^2v^2}{6} - \frac{5u^2v}{6} - \frac{2uv^2}{3} + \\ + \frac{7u^2}{24} + \frac{v^2}{6} + \frac{2uv}{3} - \frac{u}{4} - \frac{v}{6} + \frac{5}{72}, & u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^3v^3}{9} - \frac{u^3v^2}{3} - \frac{u^2v^3}{3} + \frac{u^3v}{3} + \frac{uv^3}{3} - \frac{u^3}{9} - \frac{v^3}{9} + \frac{5u^2v^2}{6} - \frac{2u^2v}{3} - \frac{5uv^2}{6} + \\ + \frac{u^2}{6} + \frac{7v^2}{24} + \frac{2uv}{3} - \frac{u}{6} - \frac{v}{4} + \frac{5}{72}, & u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{u^3v^3}{9} - \frac{u^3v^2}{3} - \frac{u^2v^3}{3} + \frac{u^3v}{3} + \frac{uv^3}{3} - \frac{u^3}{9} - \frac{v^3}{9} + u^2v^2 - u^2v - uv^2 + \\ + \frac{u^2}{3} + \frac{v^2}{3} + uv - \frac{u}{3} - \frac{v}{3} + \frac{1}{9}, & u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Graf Sardova jádra $K_{2,2}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$ nalezneme na obrázku 5.20. a 5.21



Obr. č.5.20, $K_{2,2}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$

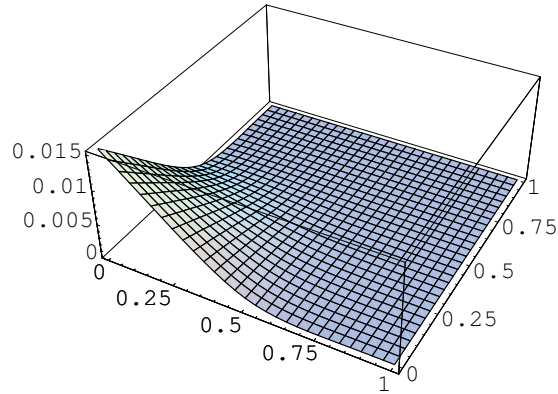


Obr. č.5.21, $K_{2,2}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$

Pro dvojrozměrné Sardovo jádro $K_{3,3}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$ dostáváme vzorec

$$K_{3,3}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{u^4 v^4}{16} - \frac{u^4 v^3}{4} - \frac{u^3 v^4}{4} + \frac{3u^4 v^2}{8} + \frac{u^2 v^4}{8} - \frac{u^4 v}{4} - \frac{uv^4}{4} + \frac{u^4}{16} + \frac{v^4}{16} + \frac{u^3 v^3}{3} - \\ - \frac{u^3 v^2}{4} - \frac{u^2 v^3}{4} + \frac{u^3 v}{8} + \frac{uv^3}{8} - \frac{u^3}{48} - \frac{v^3}{48} + \frac{uv}{16} - \frac{u}{32} - \frac{v}{32} + \frac{1}{64}, \\ u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^4 v^4}{16} - \frac{u^4 v^3}{4} - \frac{u^3 v^4}{4} + \frac{3u^4 v^2}{8} + \frac{u^2 v^4}{8} - \frac{u^4 v}{4} - \frac{uv^4}{4} + \frac{u^4}{16} + \frac{v^4}{16} + \frac{5u^3 v^3}{6} - \\ - \frac{5u^3 v^2}{4} - u^2 v^3 + \frac{7u^3 v}{8} + \frac{uv^3}{2} - \frac{11u^3}{48} - \frac{v^3}{12} + \frac{3u^2 v^2}{2} - \frac{9u^2 v}{8} - \frac{3uv^2}{4} + \\ + \frac{5u^2}{16} + \frac{v^2}{8} + \frac{5uv}{8} - \frac{3u}{16} - \frac{v}{8} + \frac{1}{24}, \quad u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{u^4 v^4}{16} - \frac{u^4 v^3}{4} - \frac{u^3 v^4}{4} + \frac{3u^4 v^2}{8} + \frac{u^2 v^4}{8} - \frac{u^4 v}{4} - \frac{uv^4}{4} + \frac{u^4}{16} + \frac{v^4}{16} + \frac{5u^3 v^3}{6} - \\ - u^3 v^2 - \frac{5u^2 v^3}{4} + \frac{u^3 v}{2} + \frac{7uv^3}{8} - \frac{u^3}{12} - \frac{11v^3}{48} + \frac{3u^2 v^2}{2} - \frac{3u^2 v}{4} - \frac{9uv^2}{8} + \\ + \frac{u^2}{8} + \frac{5v^2}{16} + \frac{5uv}{8} - \frac{u}{8} - \frac{3v}{16} + \frac{1}{24}, \quad u \in [0, \frac{1}{2}), v \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{u^4 v^4}{16} - \frac{u^4 v^3}{4} - \frac{u^3 v^4}{4} + \frac{3u^4 v^2}{8} + \frac{u^2 v^4}{8} - \frac{u^4 v}{4} - \frac{uv^4}{4} + \frac{u^4}{16} + \frac{v^4}{16} + u^3 v^3 - \\ - \frac{3u^3 v^2}{2} - \frac{3u^2 v^3}{2} + u^3 v + uv^3 - \frac{u^3}{4} - \frac{v^3}{4} + \frac{9u^2 v^2}{4} - \frac{3u^2 v}{2} - \frac{3uv^2}{2} + \\ + \frac{3u^2}{8} + \frac{3v^2}{8} + uv - \frac{u}{4} - \frac{v}{4} + \frac{1}{16}, \quad u \in [\frac{1}{2}, 1], v \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Grafické znázornění této funkce vidíme na obrázku 5.22.



Obr. č.5.22, $K_{3,3}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v)$

Určeme nyní podrobně algebraický stupeň přesnosti Rombergovy kubaturní formule $T_{1,0}^{(2)}$. Tento kubaturní vzorec zřejmě integruje přesně konstanty, neboť

$$\int_0^1 \int_0^1 1 \, dx dy = 1$$

a zároveň

$$T_{1,0}^{(2)} 1 = \frac{1}{6}[1 + 1 + 1 + 1 + 2] = 1,$$

odečtením těchto rovností snadno získáme

$$\int_0^1 \int_0^1 1 \, dx dy - T_{1,0}^{(2)} 1 = 0.$$

Kubaturní formule $T_{1,0}^{(2)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti alespoň roven 0, tato skutečnost je pro nás velmi důležitá, neboť nám umožňuje využít při odhadu chybového členu Sardova jádra. Přímým dosazením zjistíme, že Rombergův kubaturní vzorec $T_{1,0}^{(2)}$ integruje přesně i polynomy prvního stupně, jak vidíme na následujících výpočtech:

Pro proměnnou x dostaneme přímým dosazením rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 x \, dx dy = \frac{1}{2},$$

$$T_{1,0}^{(2)}x = \frac{1}{6}\left[0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1\right] = \frac{1}{2}.$$

Odečtením právě uvedených rovností získáme

$$\int_0^1 \int_0^1 x \, dx dy - T_{1,0}^{(2)}x = 0.$$

V případě proměnné y postupujeme zcela analogicky, tedy platí

$$\int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy = \frac{1}{2},$$

$$T_{1,0}^{(2)}y = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 1 + 1\right] = \frac{1}{2}.$$

Odečtením dostáváme

$$\int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy - T_{1,0}^{(2)}y = 0.$$

Rombergova kubatura $T_{1,0}^{(2)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 1.

Nyní se budeme zabývat polynomy druhého stupně, tedy x^2 , xy a y^2 . Snadno zjistíme, že kubaturní formule $T_{1,0}^{(2)}$ integruje přesně všechny tři zmiňované funkce, jak je zřejmě vidět z následujících výpočtů. Dosazením funkce xy získáme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx dy = \frac{1}{4},$$

$$T_{1,0}^{(2)}xy = \frac{1}{6}\left[0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}.$$

Jejich odečtením dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx dy - T_{1,0}^{(2)}xy = 0.$$

Stejně postupujeme pro funkci x^2 , kde po dosazení získáme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 \, dx dy = \frac{1}{3},$$

$$T_{1,0}^{(2)} x^2 = \frac{1}{6} \left[0 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{3},$$

po odečtení tedy platí

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 \, dx dy - T_{1,0}^{(2)} x^2 = 0.$$

Stejně tak pro funkci y^2 dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 y^2 \, dx dy = \frac{1}{3},$$

$$T_{1,0}^{(2)} y^2 = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{3}.$$

Odečtením těchto rovností opět získáme

$$\int_0^1 \int_0^1 y^2 \, dx dy - T_{1,0}^{(2)} y^2 = 0.$$

Rombergova kubaturní formule $T_{1,0}^{(2)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 2. Stejným způsobem budeme postupovat pro polynomy třetího stupně. Pripomeňme, že se jedná o funkce typu x^3 , y^3 , x^2y a xy^2 . Dosazením funkce x^3 získáme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 x^3 \, dx dy = \frac{1}{4},$$

$$T_{1,0}^{(2)} x^3 = \frac{1}{6} \left[0 + \frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4}.$$

Jejich odečtením dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 x^3 \, dx dy - T_{1,0}^{(2)} x^3 = 0.$$

Zcela analogicky postupujeme v případě funkce y^3 , kdy po dosazení obdržíme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 y^3 \, dx dy = \frac{1}{4},$$
$$T_{1,0}^{(2)} y^3 = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4}.$$

Odečtením opět získáme

$$\int_0^1 \int_0^1 y^3 \, dx dy - T_{1,0}^{(2)} y^3 = 0.$$

Dosazením funkce $x^2 y$ snadno dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 y \, dx dy = \frac{1}{6},$$
$$T_{1,0}^{(2)} x^2 y = \frac{1}{6} \left[0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{6}.$$

Rozdílem právě získaných rovností tedy obdržíme

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 y \, dx dy - T_{1,0}^{(2)} x^2 y = 0.$$

Stejně tak po dosazení funkce xy^2 dostaneme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 xy^2 \, dx dy = \frac{1}{6},$$
$$T_{1,0}^{(2)} xy^2 = \frac{1}{6} \left[0 + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{6},$$

pro jejichž rozdíl opět platí

$$\int_0^1 \int_0^1 xy^2 \, dx dy - T_{1,0}^{(2)} xy^2 = 0.$$

Kubатурní formule $T_{1,0}^{(2)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 3. Problém nastává pro polynomy stupně 4, což doložíme na příkladu funkce x^4 . Dosazením této funkce získáme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 x^4 \, dx dy = \frac{1}{5},$$

$$T_{1,0}^{(2)} x^4 = \frac{1}{6} \left[0 + \frac{1}{16} + 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \right] = \frac{5}{24}.$$

Jejich odečtením dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 x^4 \, dx dy - T_{1,0}^{(2)} x^4 \neq 0.$$

Rombergova kubатурní formule $T_{1,0}^{(2)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven právě 3. Využijeme tvrzení věty 5.4 a získáme odhad chybového členu ve tvaru

$$\begin{aligned} E_5 f &= \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(u) f_{4,0}(u, 0) \, du + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(v) f_{0,4}(v) \, dv + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(2)}}(u) f_{3,1}(u, 0) \, du + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(2)}}(v) f_{1,3}(v) \, dv + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{1,0}^{(2)}}(u, v) f_{2,2}(u, v) \, dudv, \end{aligned}$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ dostaneme

$$|E_5 f| \leq \frac{1}{3!} \|f_{4,0}\| \left(\int_0^1 \left| K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(u) \right|^2 \, du \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3!} \|f_{0,4}\| \left(\int_0^1 \left| K_3^{T_{1,0}^{(2)}}(v) \right|^2 \, dv \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2!} \|f_{3,1}\| \left(\int_0^1 \left| K_2^{T_{1,0}^{(2)}}(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \|f_{1,3}\| \left(\int_0^1 \left| K_2^{T_{1,0}^{(2)}}(v) \right|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + \|f_{2,2}\| \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| K_{1,1}^{T_{1,0}^{(2)}}(u,v) \right|^2 dudv \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

$$|E_5 f| \leq 0,083 \cdot \|f\|_{4,2}$$

Pomocí T-schématu odvodíme vzorec pro kubaturní formuli $T_{1,1}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
T_{1,1}^{(2)} &= \frac{1}{3} [4T_{0,2}^{(2)} - T_{0,1}^{(2)}] \\
T_{1,1}^{(2)} &= \frac{1}{24} [f(0, \frac{1}{4}) + f(0, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4}, 0) + f(\frac{3}{4}, 0) + f(1, \frac{1}{4}) + f(1, \frac{3}{4}) + \\
& + f(\frac{1}{4}, 1) + f(\frac{3}{4}, 1) + \\
& + 2(f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) + \\
& + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}))]
\end{aligned}$$

a následně pro $T_{2,0}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
T_{2,0}^{(2)} &= \frac{1}{15} [16T_{1,1}^{(2)} - T_{1,0}^{(2)}] \\
T_{2,0}^{(2)} &= \frac{1}{90} [4(f(0, \frac{1}{4}) + f(0, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4}, 0) + f(\frac{3}{4}, 0) + f(1, \frac{1}{4}) + f(1, \frac{3}{4}) + \\
& + f(\frac{1}{4}, 1) + f(\frac{3}{4}, 1)) + \\
& + 8(f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) + \\
& + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})) - \\
& - (f(0, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 0) + f(1, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 1) + 2f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))]
\end{aligned}$$

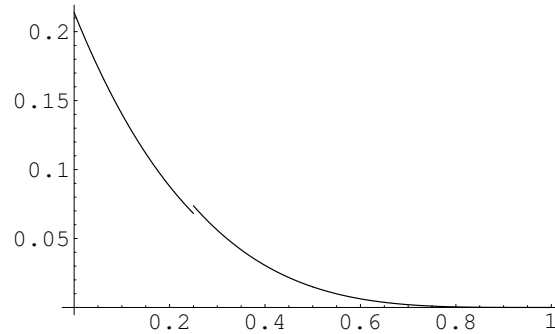
Získali jsme tedy Rombergovu kubaturní formuli $T_{2,0}^{(2)}$. Tato kubaturní formule má 21 uzlových bodů a nejedná se zde o pozitivní kubaturu, neboť se v ní vyskytují kladné i záporné koeficienty.

Jednorozměrná Sardova jádra $K_3^{T_{2,0}^{(2)}}(u)$ a $K_3^{T_{2,0}^{(2)}}(v)$ Rombergovy kubaturní formule $T_{2,0}^{(2)}$ mají vzorce

$$K_3^{T_{2,0}^{(2)}}(u) = \begin{cases} \frac{u^4}{4} - \frac{83u^3}{90} + \frac{83u^2}{60} - \frac{37u}{40} + \frac{167}{720}, & u \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ \frac{u^4}{4} - \frac{29u^3}{30} + \frac{17u^2}{12} - \frac{14u}{15} + \frac{67}{288}, & u \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{u^4}{4} - \frac{43u^3}{45} + \frac{7u^2}{5} - \frac{37u}{40} + \frac{37}{160}, & u \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ \frac{u^4}{4} - u^3 + \frac{3u^2}{2} - u + \frac{1}{4}, & u \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

$$K_3^{T_{2,0}^{(2)}}(v) = \begin{cases} \frac{v^4}{4} - \frac{83v^3}{90} + \frac{83v^2}{60} - \frac{37v}{40} + \frac{167}{720}, & v \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ \frac{v^4}{4} - \frac{29v^3}{30} + \frac{17v^2}{12} - \frac{14v}{15} + \frac{67}{288}, & v \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{v^4}{4} - \frac{43v^3}{45} + \frac{7v^2}{5} - \frac{37v}{40} + \frac{37}{160}, & v \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ \frac{v^4}{4} - v^3 + \frac{3v^2}{2} - v + \frac{1}{4}, & v \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Grafy těchto Sardových jader nalezneme na obrázku 5.23.



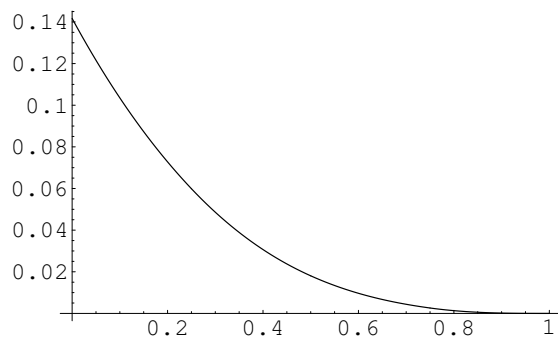
Obr. č.5.23, $K_3^{T_{2,0}^{(2)}}(u)$, $K_3^{T_{2,0}^{(2)}}(v)$

Vzorce pro jednorozměrná Sardova jádra $K_1^{T_2^{(2)}}(u)$ a $K_2^{T_2^{(2)}}(v)$ kubaturní formule $T_{2,0}^{(2)}$ mají tvar

$$K_2^{T_2^{(2)}}(u) = \begin{cases} -\frac{u^3}{6} + \frac{19u^2}{45} - \frac{19u}{45} + \frac{17}{120}, & u \in [0, \frac{1}{4}) \\ -\frac{u^3}{6} + \frac{7u^2}{15} - \frac{4u}{9} + \frac{13}{90}, & u \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ -\frac{u^3}{6} + \frac{41u^2}{90} - \frac{13u}{30} + \frac{17}{120}, & u \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -\frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} - \frac{u}{2} + \frac{1}{6}, & u \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$K_2^{T_2^{(2)}}(v) = \begin{cases} -\frac{v^3}{6} + \frac{19v^2}{45} - \frac{19v}{45} + \frac{17}{120}, & v \in [0, \frac{1}{4}) \\ -\frac{v^3}{6} + \frac{7v^2}{15} - \frac{4v}{9} + \frac{13}{90}, & v \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ -\frac{v^3}{6} + \frac{41v^2}{90} - \frac{13v}{30} + \frac{17}{120}, & v \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -\frac{v^3}{6} + \frac{v^2}{2} - \frac{v}{2} + \frac{1}{6}, & v \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Na obrázku 5.24 následuje grafické znázornění těchto funkcí.

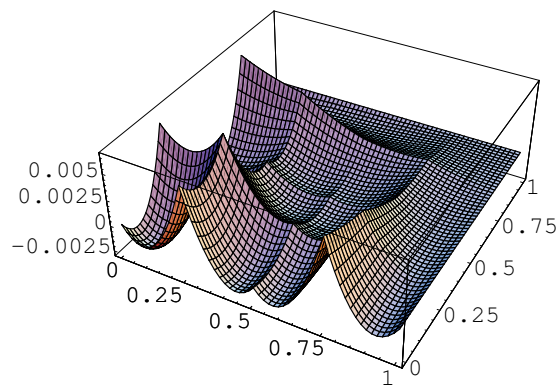


Obr. č.5.24, $K_2^{T_2^{(2)}}(u)$, $K_2^{T_2^{(2)}}(v)$

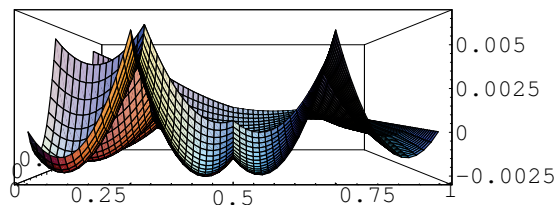
Pro dvojrozměrné Sardovo jádro Rombergovy kubaturní formule $T_{2,0}^{(2)}$ dostaneme vzorec

$$K_{1,1}^{T_{2,0}^{(2)}}(u, v) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{7uv}{45} - \frac{7u}{180} - \frac{7v}{180}, \quad u, v \in \mathcal{A} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{7uv}{15} - \frac{13u}{60} - \frac{7v}{60} + \frac{2}{45}, \quad u, v \in \mathcal{B} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{7uv}{15} - \frac{7u}{60} - \frac{13v}{60} + \frac{2}{45}, \quad u, v \in \mathcal{E} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{31uv}{45} - \frac{49u}{180} - \frac{49v}{180} + \frac{1}{12}, \quad u, v \in \mathcal{F} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{11uv}{18} - \frac{17u}{60} - \frac{17v}{90} + \frac{7}{90}, \quad u, v \in \mathcal{C} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{11uv}{18} - \frac{17u}{90} - \frac{17v}{60} + \frac{5}{32}, \quad u, v \in \mathcal{I} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{67uv}{90} - \frac{19u}{60} - \frac{3v}{10} + \frac{19}{180}, \quad u, v \in \mathcal{G} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{67uv}{90} - \frac{3u}{10} - \frac{19v}{60} + \frac{19}{180}, \quad u, v \in \mathcal{J} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{37uv}{45} - \frac{16u}{45} - \frac{16v}{45} + \frac{2}{15}, \quad u, v \in \mathcal{K} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{83uv}{90} - \frac{83u}{180} - \frac{19v}{45} + \frac{19}{90}, \quad u, v \in \mathcal{D} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{83uv}{90} - \frac{19u}{45} - \frac{83v}{180} + \frac{19}{90}, \quad u, v \in \mathcal{M} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{29uv}{30} - \frac{17u}{36} - \frac{7v}{15} + \frac{2}{9}, \quad u, v \in \mathcal{H} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{29uv}{30} - \frac{7u}{15} - \frac{17v}{36} + \frac{2}{9}, \quad u, v \in \mathcal{N} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{43uv}{45} - \frac{7u}{15} - \frac{41v}{90} + \frac{13}{60}, \quad u, v \in \mathcal{L} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{43uv}{45} - \frac{41u}{90} - \frac{7v}{15} + \frac{13}{60}, \quad u, v \in \mathcal{O} \\ \frac{u^2v^2}{4} - \frac{u^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + uv - \frac{u}{2} - \frac{v}{2} + \frac{1}{4}, \quad u, v \in \mathcal{P} \end{array} \right.$$

Grafické znázornění Sardova jádra $K_{1,1}^{T_{2,0}^{(2)}}(u, v)$ nalezneme na obrázcích 5.25 a 5.26.



Obr. č.5.25, $K_{1,1}^{T_{2,0}^{(2)}}(u, v)$



Obr. č.5.26, $K_{1,1}^{T_{2,0}^{(2)}}(u, v)$

Rombergova kubaturní formule $T_{2,0}^{(2)}$ má algebraický stupeň přesnosti roven 3. Využijeme tedy tvrzení věty 5.4 a dostaneme odhad chybového členu ve tvaru

$$\begin{aligned}
 E_{21}f &= \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{2,0}^{(2)}}(u) f_{4,0}(u, 0) \, du + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{2,0}^{(2)}}(v) f_{0,4}(v) \, dv + \\
 &+ \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(2)}}(u) f_{3,1}(u, 0) \, du + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(2)}}(v) f_{1,3}(v) \, dv + \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{2,0}^{(2)}}(u, v) f_{2,2}(u, v) \, dudv
 \end{aligned}$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ získáme odhad

$$\begin{aligned}
|E_{21}f| &\leq \frac{1}{3!} \|f_{4,0}\| \left(\int_0^1 \left| K_3^{T_{2,0}^{(2)}}(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3!} \|f_{0,4}\| \left(\int_0^1 \left| K_3^{T_{2,0}^{(2)}}(v) \right|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \frac{1}{2!} \|f_{3,1}\| \left(\int_0^1 \left| K_2^{T_{2,0}^{(2)}}(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \|f_{1,3}\| \left(\int_0^1 \left| K_2^{T_{2,0}^{(2)}}(v) \right|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \|f_{2,2}\| \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| K_{1,1}^{T_{2,0}^{(2)}}(u,v) \right|^2 dudv \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Snadným výpočtem tedy získáme odhad chybového členu $E_{21}f$ Rombergovy kubaturní formule $T_{2,0}^{(2)}$ ve tvaru

$$|E_{21}f| \leq 0,081 \cdot \|f\|_{4,2}$$

5.4 Sardovo jádro kubaturní formule na krychli

Na rozdíl od kubaturních vzorců na čtverci, Sardova jádro kubaturní formule pro krychli nebudeme odvozovat do zcela obecného řádu $k \in \mathbb{N}$. Jak vzápětí uvidíme, v následujícím textu se budeme zabývat pouze kubaturními vzorci s algebraickým stupněm přesnosti rovným 1 a 3, proto odvození i následnou definici Sardových jader uvádíme pouze pro $k = 1$ a $k = 3$.

Nechť funkce tří proměnných f je třídy $\mathcal{C}^{k+1}([0, 1]^3)$

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= f(0, 0, 0) + x f_{1,0,0}(0, 0, 0) + y f_{0,1,0}(0, 0, 0) + z f_{0,0,1}(0, 0, 0) + \\
&+ \int_0^x (x-a) f_{2,0,0}(a, 0, 0) da + \int_0^y (y-b) f_{0,2,0}(0, b, 0) db + \\
&+ \int_0^z (z-c) f_{0,0,2}(0, 0, c) dc + \int_0^x \int_0^y f_{1,1,0}(a, b, 0) db da +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^y \int_0^z f_{0,1,1}(0, b, c) \, dc \, db + \int_0^z \int_0^x f_{1,0,1}(a, 0, c) \, da \, dc = \\
= & f(0, 0, 0) + x f_{1,0,0}(0, 0, 0) + y f_{0,1,0}(0, 0, 0) + z f_{0,0,1}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{x^2}{2!} f_{2,0,0}(0, 0, 0) + \frac{y^2}{2!} f_{0,2,0}(0, 0, 0) + \frac{z^2}{2!} f_{0,0,2}(0, 0, 0) + \\
& + \int_0^x \frac{(x-a)^2}{2!} f_{3,0,0}(a, 0, 0) \, da + \int_0^y \frac{(y-b)^2}{2!} f_{0,3,0}(0, b, 0) \, db + \\
& + \int_0^z \frac{(z-c)^2}{2!} f_{0,0,3}(0, 0, c) \, dc + xy f_{1,1,0}(0, 0, 0) + xz f_{1,0,1}(0, 0, 0) + \\
& + yz f_{0,1,1}(0, 0, 0) + \frac{y}{2} \int_0^x f_{2,1,0}(a, 0, 0) \, da + \\
& + \frac{x}{2} \int_0^y f_{1,2,0}(0, b, 0) \, db + \frac{z}{2} \int_0^x f_{2,0,1}(a, 0, 0) \, da + \\
& + \frac{x}{2} \int_0^z f_{1,0,2}(0, 0, c) \, dc + \frac{z}{2} \int_0^y f_{0,2,1}(0, b, 0) \, db + \\
& + \frac{y}{2} \int_0^z f_{0,1,2}(0, 0, c) \, dc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y [(x-a) f_{2,1,0}(a, b, 0) + (y-b) f_{1,2,0}(a, b, 0)] \, db \, da + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^y \int_0^z [(y-b) f_{0,2,1}(0, b, c) + (z-c) f_{0,1,2}(0, b, c)] \, dc \, db + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^x [(z-c) f_{1,0,2}(a, 0, c) + (x-a) f_{2,0,1}(a, 0, c)] \, da \, dc +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^z \int_0^y \int_0^x f_{1,1,1}(a, b, c) da db dc = \\
= & f(0, 0, 0) + x f_{1,0,0}(0, 0, 0) + y f_{0,1,0}(0, 0, 0) + z f_{0,0,1}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{x^2}{2!} f_{2,0,0}(0, 0, 0) + \frac{y^2}{2!} f_{0,2,0}(0, 0, 0) + \frac{z^2}{2!} f_{0,0,2}(0, 0, 0) + \\
& + xy f_{1,1,0}(0, 0, 0) + yz f_{0,1,1}(0, 0, 0) + xz f_{1,0,1}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{x^3}{3!} f_{3,0,0}(0, 0, 0) + \frac{y^3}{3!} f_{0,3,0}(0, 0, 0) + \frac{z^3}{3!} f_{0,0,3}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{x^2 y}{2} f_{2,1,0}(0, 0, 0) + \frac{x y^2}{2} f_{1,2,0}(0, 0, 0) + \frac{y^2 z}{2} f_{0,2,1}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{y z^2}{2} f_{0,1,2}(0, 0, 0) + \frac{x^2 z}{2} f_{2,0,1}(0, 0, 0) + \frac{x z^2}{2} f_{1,0,2}(0, 0, 0) + \\
& + xyz f_{1,1,1}(0, 0, 0) + \\
& + \int_0^x \frac{(x-a)^3}{3!} f_{4,0,0}(a, 0, 0) da + \int_0^y \frac{(y-b)^3}{3!} f_{0,4,0}(0, b, 0) db + \\
& + \int_0^z \frac{(z-c)^3}{3!} f_{0,0,4}(0, 0, c) dc + y \int_0^x \frac{(x-a)^2}{2!} f_{3,1,0}(a, 0, 0) da + \\
& + x \int_0^y \frac{(y-b)^2}{2!} f_{1,3,0}(0, b, 0) db + y \int_0^z \frac{(z-c)^2}{2!} f_{0,1,3}(0, 0, c) dc + \\
& + z \int_0^y \frac{(y-b)^2}{2!} f_{0,3,1}(0, b, 0) db + x \int_0^z \frac{(z-c)^2}{2!} f_{1,0,3}(0, 0, c) dc + \\
& + z \int_0^x \frac{(x-a)^2}{2!} f_{3,0,1}(a, 0, 0) da +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^x \int_0^y (x-a)(y-b)f_{2,2,0}(a,b,0) db da + \\
& + \int_0^y \int_0^z (y-b)(z-c)f_{0,2,2}(0,b,c) dc db + \\
& + \int_0^z \int_0^x (x-a)(z-c)f_{2,0,2}(a,0,c) da dc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \int_0^z (x-a)f_{2,1,1}(a,b,c) dc db da + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \int_0^z (y-b)f_{1,2,1}(a,b,c) dc db da + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \int_0^z (z-c)f_{1,1,2}(a,b,c) dc db da
\end{aligned}$$

Nejprve se budeme zabývat případem pro $k = 1$. Na první z výše uvedených rovností aplikujeme chybový funkcionál E_m a dostaneme rovnost:

$$\begin{aligned}
E_m f(x, y, z) & = E_m^{x,y,z}(1)f(0, 0, 0) + E_m(x)f_{1,0,0}(0, 0, 0) + \\
& + E_m^{x,y,z}(y)f_{0,1,0}(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(z)f_{0,0,1}(0, 0, 0) + \\
& + \int_0^1 E_m^{x,y,z}(x-a)_+^1 f_{2,0,0}(a, 0, 0) da + \\
& + \int_0^1 E_m^{x,y,z}(y-b)_+^1 f_{0,2,0}(0, b, 0) db + \\
& + \int_0^1 E_m^{x,y,z}(z-c)_+^1 f_{0,0,2}(0, 0, c) dc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z}(x-a)_+^0 (y-b)_+^0 f_{1,1,0}(a, b, 0) dadb +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} (y-b)_+^0 (z-c)_+^0 f_{0,1,1}(0, b, c) dbdc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} (x-a)_+^0 (z-c)_+^0 f_{1,0,1}(a, 0, c) dadc.
\end{aligned}$$

Následující definice zavádí pojem Sardových jader pro $k = 1$.

Definice 5.6.

Nechť platí:

$$\begin{aligned}
K_1(a) &= E_m^{x,y,z} \left((x-a)_+^1 \right) \\
K_1(b) &= E_m^{x,y,z} \left((y-b)_+^1 \right) \\
K_1(c) &= E_m^{x,y,z} \left((z-c)_+^1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{0,0}(a, b) &= E_m^{x,y,z} \left((x-a)_+^0 (y-b)_+^0 \right) \\
K_{0,0}(b, c) &= E_m^{x,y,z} \left((y-b)_+^0 (z-c)_+^0 \right) \\
K_{0,0}(a, c) &= E_m^{x,y,z} \left((x-a)_+^0 (z-c)_+^0 \right)
\end{aligned}$$

Pak funkce $K_1(a)$, $K_1(b)$, $K_1(c)$ nazveme jednorozměrnými Sardovými jádry a funkce $K_{0,0}(a, b)$, $K_{0,0}(b, c)$, $K_{0,0}(a, c)$ dvojrozměrnými Sardovými jádry kubатурní formule $C_m f$.

Věta 5.7.

Nechť funkce $f \in C^2([0, 1]^3)$, kubaturní formule C_m má algebraický stupeň přesnosti roven 1. Pak pro chybový $E_m f$ člen kubaturní formule C_m platí rovnost

$$\begin{aligned}
E_m f &= \int_0^1 K_1(a) f_{2,0,0}(a, 0, 0) da + \int_0^1 K_1(b) f_{0,2,0}(0, b, 0) db + \\
& + \int_0^1 K_1(c) f_{0,0,2}(0, 0, c) dc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}(a, b) f_{1,1,0}(a, b, 0) dadb + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}(b, c) f_{0,1,1}(0, b, c) dbdc +
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}(a, c) f_{1,0,1}(a, 0, c) \, dadc.$$

Důkaz. Je-li funkce f třídy $\mathcal{C}^2([0, 1]^3)$, pak z předchozích úvah víme, že pro chybový člen kubaturní formule C_m platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} E_m f(x, y, z) &= E_m^{x,y,z}(1) f(0, 0, 0) + E_m(x) f_{1,0,0}(0, 0, 0) + \\ &+ E_m^{x,y,z}(y) f_{0,1,0}(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(z) f_{0,0,1}(0, 0, 0) + \\ &+ \int_0^1 E_m^{x,y,z}(x-a)_+^1 f_{2,0,0}(a, 0, 0) \, da + \\ &+ \int_0^1 E_m^{x,y,z}(y-b)_+^1 f_{0,2,0}(0, b, 0) \, db + \\ &+ \int_0^1 E_m^{x,y,z}(z-c)_+^1 f_{0,0,2}(0, 0, c) \, dc + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z}(x-a)_+^0 (y-b)_+^0 f_{1,1,0}(a, b, 0) \, dadb + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z}(y-b)_+^0 (z-c)_+^0 f_{0,1,1}(0, b, c) \, dbdc + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z}(x-a)_+^0 (z-c)_+^0 f_{1,0,1}(a, 0, c) \, dadc. \end{aligned}$$

Nyní využijeme předpokladu, že kubaturní formule C_m má algebraický stupeň přesnosti rovný 1.

$$\begin{aligned} E_m f &= \int_0^1 K_1(a) f_{2,0,0}(a, 0, 0) \, da + \int_0^1 K_1(b) f_{0,2,0}(0, b, 0) \, db + \\ &+ \int_0^1 K_1(c) f_{0,0,2}(0, 0, c) \, dc + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}(a, b) f_{1,1,0}(a, b, 0) \, da db + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}(b, c) f_{0,1,1}(0, b, c) \, db dc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}(a, c) f_{1,0,1}(a, 0, c) \, da dc.
\end{aligned}$$

Čímž je důkaz proveden. \square

Podrobně nyní rozebereme případ $k = 3$. Na poslední z rovnost z výše uvedeného odvození aplikujeme funkcionál chyby E_m , čímž dostaneme rovnost:

$$\begin{aligned}
E_m f(x, y, z) & = E_m^{x,y,z}(1) f(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(x) f_{1,0,0}(0, 0, 0) + \\
& + E_m^{x,y,z}(y) f_{0,1,0}(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(z) f_{0,0,1}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{1}{2!} E_m^{x,y,z}(x^2) f_{2,0,0}(0, 0, 0) + \frac{1}{2!} E_m^{x,y,z}(y^2) f_{0,2,0}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{1}{2!} E_m^{x,y,z}(z^2) f_{0,0,2}(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(xy) f_{1,1,0}(0, 0, 0) + \\
& + E_m^{x,y,z}(yz) f_{0,1,1}(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(xz) f_{1,0,1}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{1}{3!} E_m^{x,y,z}(x^3) f_{3,0,0}(0, 0, 0) + \frac{1}{3!} E_m^{x,y,z}(y^3) f_{0,3,0}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{1}{3!} E_m^{x,y,z}(z^3) f_{0,0,3}(0, 0, 0) + \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(x^2 y) f_{2,1,0}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(xy^2) f_{1,2,0}(0, 0, 0) + \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(y^2 z) f_{0,2,1}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(yz^2) f_{0,1,2}(0, 0, 0) + \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(x^2 z) f_{2,0,1}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(xz^2) f_{1,0,2}(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(xyz) f_{1,1,1}(0, 0, 0) + \\
& + \frac{1}{3!} \int_0^1 E_m^{x,y,z}(x-a)_+^3 f_{4,0,0}(a, 0, 0) \, da +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (y-b)_+^3 f_{0,4,0}(0, b, 0) db + \\
& + \frac{1}{3!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (z-c)_+^3 f_{0,0,4}(0, 0, c) dc + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (y(x-a)_+^2) f_{3,1,0}(a, 0, 0) da + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (x(y-b)_+^2) f_{1,3,0}(0, b, 0) db + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (y(z-c)_+^2) f_{0,1,3}(0, 0, c) dc + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (z(y-b)_+^2) f_{0,3,1}(0, b, 0) db + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (x(z-c)_+^2) f_{1,0,3}(0, 0, c) dc + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (z(x-a)_+^2) f_{3,0,1}(a, 0, 0) da + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^1 (y-b)_+^1) f_{2,2,0}(a, b, 0) dadb + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((y-b)_+^1 (z-c)_+^1) f_{0,2,2}(0, b, c) dbdc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^1 (z-c)_+^1) f_{2,0,2}(a, 0, c) dadc +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^1 (y-b)_+^0 (z-c)_+^0) f_{2,1,1}(a,b,c) \, dadbdc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^0 (y-b)_+^1 (z-c)_+^0) f_{1,2,1}(a,b,c) \, dadbdc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^0 (y-b)_+^0 (z-c)_+^1) f_{1,1,2}(a,b,c) \, dadbdc.
\end{aligned}$$

Následuje definice Sardových jader pro $k = 3$.

Definice 5.8.

Nechť platí:

$$\begin{aligned}
K_3(a) &= E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^3) \\
K_3(b) &= E_m^{x,y,z} ((y-b)_+^3) \\
K_3(c) &= E_m^{x,y,z} ((z-c)_+^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2(a) &= E_m^{x,y,z} (y(x-a)_+^2) = E_m^{x,y,z} (z(x-a)_+^2) \\
K_2(b) &= E_m^{x,y,z} (x(y-b)_+^2) = E_m^{x,y,z} (x(y-b)_+^2) \\
K_2(c) &= E_m^{x,y,z} (x(z-c)_+^2) = E_m^{x,y,z} (x(z-c)_+^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1,1}(a,b) &= E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^1 (y-b)_+^1) \\
K_{1,1}(b,c) &= E_m^{x,y,z} ((y-b)_+^1 (z-c)_+^1) \\
K_{1,1}(a,c) &= E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^1 (z-c)_+^1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1,0,0}(a,b,c) &= E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^1 (y-b)_+^0 (z-c)_+^0) \\
K_{0,1,0}(a,b,c) &= E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^0 (y-b)_+^1 (z-c)_+^0) \\
K_{0,0,1}(a,b,c) &= E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^0 (y-b)_+^0 (z-c)_+^1)
\end{aligned}$$

Pak funkce $K_j(a)$, $K_j(b)$, $K_j(c)$, pro $j = 2, 3$ nazveme jednorozměrnými Sardovými jádry, funkce $K_{1,1}(a,b)$, $K_{1,1}(b,c)$, $K_{1,1}(a,c)$ nazveme dvojrozměrnými Sardovými jádry a funkce $K_{1,0,0}(a,b,c)$, $K_{0,1,0}(a,b,c)$, $K_{0,0,1}(a,b,c)$ trojrozměrnými Sardovými jádry kubaturní formule $C_m f$.

Věta 5.9.

Nechť funkce $f \in C^4([0, 1]^3)$, kubaturní formule C_m má algebraický stupeň přesnosti roven 3. Pak pro chybový $E_m f$ člen kubaturní formule C_m platí rovnost

$$\begin{aligned}
E_m f &= \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3(a) f_{4,0,0}(a, 0, 0) da + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3(b) f_{0,4,0}(0, b, 0) db + \\
&\quad + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3(c) f_{0,0,4}(0, 0, c) dc + \\
&\quad + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(a) f_{3,1,0}(a, 0, 0) da + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(a) f_{3,0,1}(a, 0, 0) da + \\
&\quad + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(b) f_{1,3,0}(0, b, 0) db + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(b) f_{0,3,1}(0, b, 0) db + \\
&\quad + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(c) f_{1,0,3}(0, 0, c) dc + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(c) f_{0,1,3}(0, 0, c) dc + \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}(a, b) f_{2,2,0}(a, b, 0) da db + \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}(b, c) f_{0,2,2}(0, b, c) db dc + \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}(a, c) f_{2,0,2}(a, 0, c) da dc + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{1,0,0}(a, b, c) f_{2,1,1}(a, b, c) da db dc + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,1,0}(a, b, c) f_{1,2,1}(a, b, c) da db dc +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0,1}(a, b, c) f_{1,1,2}(a, b, c) da db dc.$$

Důkaz. Je-li funkce f třídy $\mathcal{C}^4([0, 1]^3)$, pak z předchozích úvah víme, že pro chybový člen kubaturní formule C_m platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} E_m f(x, y, z) &= E_m^{x,y,z}(1) f(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(x) f_{1,0,0}(0, 0, 0) + \\ &+ E_m^{x,y,z}(y) f_{0,1,0}(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(z) f_{0,0,1}(0, 0, 0) + \\ &+ \frac{1}{2!} E_m^{x,y,z}(x^2) f_{2,0,0}(0, 0, 0) + \frac{1}{2!} E_m^{x,y,z}(y^2) f_{0,2,0}(0, 0, 0) + \\ &+ \frac{1}{2!} E_m^{x,y,z}(z^2) f_{0,0,2}(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(xy) f_{1,1,0}(0, 0, 0) + \\ &+ E_m^{x,y,z}(yz) f_{0,1,1}(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(xz) f_{1,0,1}(0, 0, 0) + \\ &+ \frac{1}{3!} E_m^{x,y,z}(x^3) f_{3,0,0}(0, 0, 0) + \frac{1}{3!} E_m^{x,y,z}(y^3) f_{0,3,0}(0, 0, 0) + \\ &+ \frac{1}{3!} E_m^{x,y,z}(z^3) f_{0,0,3}(0, 0, 0) + \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(x^2 y) f_{2,1,0}(0, 0, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(xy^2) f_{1,2,0}(0, 0, 0) + \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(y^2 z) f_{0,2,1}(0, 0, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(yz^2) f_{0,1,2}(0, 0, 0) + \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(x^2 z) f_{2,0,1}(0, 0, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} E_m^{x,y,z}(xz^2) f_{1,0,2}(0, 0, 0) + E_m^{x,y,z}(xyz) f_{1,1,1}(0, 0, 0) + \\ &+ \frac{1}{3!} \int_0^1 E_m^{x,y,z}(x-a)_+^3 f_{4,0,0}(a, 0, 0) da + \\ &+ \frac{1}{3!} \int_0^1 E_m^{x,y,z}(y-b)_+^3 f_{0,4,0}(0, b, 0) db + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (z-c)_+^3 f_{0,0,4}(0,0,c) dc + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (y(x-a)_+^2) f_{3,1,0}(a,0,0) da + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (x(y-b)_+^2) f_{1,3,0}(0,b,0) db + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (y(z-c)_+^2) f_{0,1,3}(0,0,c) dc + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (z(y-b)_+^2) f_{0,3,1}(0,b,0) db + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (x(z-c)_+^2) f_{1,0,3}(0,0,c) dc + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 E_m^{x,y,z} (z(x-a)_+^2) f_{3,0,1}(a,0,0) da + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^1 (y-b)_+^1) f_{2,2,0}(a,b,0) dadb + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((y-b)_+^1 (z-c)_+^1) f_{0,2,2}(0,b,c) dbdc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^1 (z-c)_+^1) f_{2,0,2}(a,0,c) dadc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^1 (y-b)_+^0 (z-c)_+^0) f_{2,1,1}(a,b,c) dadbdc +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^0 (y-b)^1 (z-c)_+^0) f_{1,2,1}(a,b,c) \, dadbdc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 E_m^{x,y,z} ((x-a)_+^0 (y-b)_+^0 (z-c)_+^1) f_{1,1,2}(a,b,c) \, dadbdc
\end{aligned}$$

Nyní využijeme předpokladu, že kubaturní formule C_m má algebraický stupeň přesnosti rovný 3, tedy po vynulování příslušných členů dostáváme

$$\begin{aligned}
E_m f &= \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3(a) f_{4,0,0}(a, 0, 0) \, da + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3(b) f_{0,4,0}(0, b, 0) \, db + \\
& + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3(c) f_{0,0,4}(0, 0, c) \, dc + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(a) f_{3,1,0}(a, 0, 0) \, da + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(a) f_{3,0,1}(a, 0, 0) \, da + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(b) f_{1,3,0}(0, b, 0) \, db + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(b) f_{0,3,1}(0, b, 0) \, db + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(c) f_{1,0,3}(0, 0, c) \, dc + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2(c) f_{0,1,3}(0, 0, c) \, dc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}(a, b) f_{2,2,0}(a, b, 0) \, dadb + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}(b, c) f_{0,2,2}(0, b, c) \, dbdc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}(a, c) f_{2,0,2}(a, 0, c) \, dadc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{1,0,0}(a, b, c) f_{2,1,1}(a, b, c) \, dadbdc +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,1,0}(a,b,c) f_{1,2,1}(a,b,c) \, dadbdc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0,1}(a,b,c) f_{1,1,2}(a,b,c) \, dadbdc.
\end{aligned}$$

Čímž je důkaz proveden. □

5.5 Sardovo jádro Rombergovy kubaturní formule na krychli

Nyní se budeme zabývat Rombergovými kubaturními formulami na jednotkové krychli. Budeme postupovat obdobně jako v jedno a dvojrozměrném případě, tedy k odvození Rombergových kubaturních vzorců použijeme Tschématu, pro $N = 3$. Nejprve se budeme věnovat lichoběžníkovému pravidlu $T_{0,0}^{(3)}$ na jednotkové krychli. Jde zřejmě o pozitivní kubaturní formuli s osmi různými uzlovými body, které leží ve vrcholech krychle $[0, 1]^3$.

$$\begin{aligned}
T_{0,0}^{(3)} &= \frac{1}{8} (f(0, 0, 0) + f(1, 0, 0) + f(0, 1, 0) + f(0, 0, 1) + f(1, 1, 0) + \\
&+ f(1, 0, 1) + f(0, 1, 1) + f(1, 1, 1))
\end{aligned}$$

Nejprve určíme podrobně algebraický stupeň přesnosti kubaturní formule $T_{0,0}^{(3)}$, u zbylých kubaturních vzorců $T_{0,k}^{(3)}$, kde $k \in \mathbb{N}$, podrobné výpočty uvádět nebudeme.

Tato kubatura zřejmě integruje přesně konstanty, neboť platí

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1 \, dxdydz = 1$$

a zároveň

$$T_{0,0}^{(3)} 1 = \frac{1}{8} [1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1] = 1,$$

tedy

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1 \, dxdydz - T_{0,0}^{(3)} 1 = 0.$$

Kubатурní formule $T_{0,0}^{(3)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 0, což nám umožní použít k odhadu jejího chybového členu Sardova jádra. Snadným dosazením zjistíme, že tento kubатурní vzorec integruje přesně i polynomy prvního stupně, což dokládají následující výpočty. Platí rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x \, dx dy dz = \frac{1}{2},$$

a současně

$$T_{0,0}^{(3)}x = \frac{1}{8}[0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1] = \frac{1}{2},$$

tedy odečtením dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x \, dx dy dz - T_{0,0}^{(3)}x = 0.$$

Stejně postupujeme i pro proměnnou y a opět získáme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy dz = \frac{1}{2}$$

a dosazením do kubатурního vzorce $T_{0,0}^{(3)}$

$$T_{0,0}^{(3)}y = \frac{1}{8}[0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1] = \frac{1}{2}.$$

Je zřejmé, že odečtením těchto výrazů opět dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy dz - T_{0,0}^{(3)}y = 0.$$

Zcela analogicky postupujeme i pro proměnnou z . Dostaneme tedy rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z \, dx dy dz = \frac{1}{2}$$

a dosazením do kubaturního vzorce $T_{0,0}^{(3)}$

$$T_{0,0}^{(3)}y = \frac{1}{8}[0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1] = \frac{1}{2}.$$

jejichž odečtením získáme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z \, dx dy dz - T_{0,0}^{(3)}z = 0.$$

Kubaturní formule $T_{0,0}^{(3)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 1. Stejným způsobem pokračujeme dále pro polynomy druhého stupně (připomeňme, že se jedná o polynomy tvaru x^2, y^2, z^2, xy, yz a xz). Problém nastává u polynomů druhého stupně tvaru x^2, y^2 a z^2 . Výpočet provedeme pouze pro polynom x^2 . Zřejmě platí

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 \, dx dy dz = \frac{1}{3},$$

$$T_{0,0}^{(3)}x^2 = \frac{1}{8}[0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1] = \frac{1}{2},$$

tedy odečtením právě získaného dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 \, dx dy dz - T_{0,0}^{(3)}x^2 \neq 0.$$

Kubaturní formule $T_{0,0}^{(3)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven 1.

$$\begin{aligned} E_8 f &= \int_0^1 K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(a) f_{2,0,0}(a, 0, 0) \, da + \int_0^1 K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(b) f_{0,2,0}(0, b, 0) \, db + \\ &+ \int_0^1 K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(c) f_{0,0,2}(0, 0, c) \, dc + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(a, b) f_{1,1,0}(a, b, 0) \, da \, db + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(b, c) f_{0,1,1}(0, b, c) \, db \, dc + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(a, c) f_{1,0,1}(a, 0, c) \, da \, dc. \end{aligned}$$

Pro odhad chybového členu $E_8 f$ lichoběžníkového pravidla $T_{0,0}^{(3)}$ potřebujeme spočítat jednorozměrná Sardova jádra $K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(a)$, $K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(b)$, $K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(c)$ a dvojrozměrná Sardova jádra $K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(a,b)$, $K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(b,c)$, $K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(a,c)$. Nejprve spočteme jednorozměrná Sardova jádra kubaturní formule $T_{0,0}^{(3)}$. Jejich vzorce dostaneme ve tvaru

$$K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(a) = \frac{a^2}{2} - \frac{7a}{8} + \frac{3}{8},$$

$$K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(b) = \frac{b^2}{2} - \frac{7b}{8} + \frac{3}{8},$$

$$K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(c) = \frac{c^2}{2} - \frac{7c}{8} + \frac{3}{8}.$$

Pro dvojrozměrná Sardova jádra lichoběžníkového pravidla $T_{0,0}^{(3)}$ získáme vzorce

$$K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(a,b) = ab - a - b + \frac{7}{8},$$

$$K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(b,c) = bc - b - c + \frac{7}{8},$$

$$K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(a,c) = ac - a - c + \frac{7}{8}.$$

Uvedená Sardova jádra dosadíme do vztahu pro chybový člen $E_8 f$ kubaturní formule $T_{0,0}^{(3)}$, tedy do vzorce

$$\begin{aligned} E_8 f &= \int_0^1 K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(a) f_{2,0,0}(a, 0, 0) da + \int_0^1 K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(b) f_{0,2,0}(0, b, 0) db + \\ &+ \int_0^1 K_1^{T_{0,0}^{(3)}}(c) f_{0,0,2}(0, 0, c) dc + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(a,b) f_{1,1,0}(a, b, 0) da db + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(b,c) f_{0,1,1}(0, b, c) db dc + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,0}^{(3)}}(a,c) f_{1,0,1}(a, 0, c) da dc. \end{aligned}$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ získáme odhad

$$|E_8 f| \leq 1,225 \cdot \|f\|_{2,2},$$

kde pod symbolem $\|g\|_{2,2}$ rozumíme toto

$$\|g\|_{2,2} = \|g_{0,0,2}\|_2 + \|g_{0,2,0}\|_2 + \|g_{0,0,2}\|_2 + \|g_{1,1,0}\|_2 + \|g_{1,0,1}\|_2 + \|g_{0,1,1}\|_2.$$

Opět, jako v předchozích případech, nejprve určíme algebraický stupeň přesnosti této kubaturní formule.

$$\begin{aligned} T_{0,1}^{(3)} &= \frac{1}{64} [f(0,0,0) + f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) + f(1,1,0) + \\ &\quad + f(1,0,1) + f(0,1,1) + f(1,1,1) \\ &\quad + 2(f(0,0,\frac{1}{2}) + f(0,\frac{1}{2},0) + f(\frac{1}{2},0,0) + f(1,1,\frac{1}{2}) + f(1,\frac{1}{2},1) + \\ &\quad + f(\frac{1}{2},1,1) + f(0,1,\frac{1}{2}) + f(1,0,\frac{1}{2}) + f(0,\frac{1}{2},1) + f(1,\frac{1}{2},0) + \\ &\quad + f(\frac{1}{2},0,1) + f(\frac{1}{2},1,0)) + \\ &\quad + 4(f(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) + f(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}) + \\ &\quad + f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)) + \\ &\quad + 8f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})] \end{aligned}$$

Kubaturní formule $T_{0,1}^{(3)}$ má také algebraický stupeň přesnosti roven 1, což by se ukázalo zcela analogicky jako v případě lichoběžníkového pravidla $T_{0,0}^{(3)}$.

$$\begin{aligned} E_{27} f &= \int_0^1 K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(a) f_{2,0,0}(a,0,0) da + \int_0^1 K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(b) f_{0,2,0}(0,b,0) db + \\ &\quad + \int_0^1 K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(c) f_{0,0,2}(0,0,c) dc + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(a,b) f_{1,1,0}(a,b,0) dadb + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(b,c) f_{0,1,1}(0,b,c) dbdc + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(a, c) f_{1,0,1}(a, 0, c) \, da \, dc.$$

Pro odhad chybového členu $E_{27}f$ lichoběžníkového pravidla $T_{1,0}^{(3)}$ potřebujeme spočítat jednorozměrná Sardova jádra $K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(a)$, $K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(b)$, $K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(c)$ a dvojrozměrná Sardova jádra $K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(a, b)$, $K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(b, c)$, $K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(a, c)$. Pro jednorozměrná Sardova jádra kubaturní formule $T_{0,1}^{(3)}$ dostaneme vzorce

$$K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(a) = \begin{cases} \frac{a^2}{2} - \frac{61a}{64} + \frac{15}{32}, & a \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{a^2}{2} - \frac{63a}{64} + \frac{31}{64}, & a \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(b) = \begin{cases} \frac{b^2}{2} - \frac{61b}{64} + \frac{15}{32}, & b \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{b^2}{2} - \frac{63b}{64} + \frac{31}{64}, & b \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(c) = \begin{cases} \frac{c^2}{2} - \frac{61c}{64} + \frac{15}{32}, & c \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{c^2}{2} - \frac{63c}{64} + \frac{31}{64}, & c \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Vzorce pro dvojrozměrná Sardova jádra složeného lichoběžníkového pravidla $T_{0,1}^{(3)}$ mají tvar

$$K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(a, b) = \begin{cases} ab - a - b - \frac{55}{64}, & a \in [0, \frac{1}{2}), b \in [0, \frac{1}{2}) \\ ab - a - b + \frac{61}{64}, & a \in [0, \frac{1}{2}), b \in [\frac{1}{2}, 1] \\ ab - a - b + \frac{61}{64}, & a \in [\frac{1}{2}, 1], b \in [0, \frac{1}{2}) \\ ab - a - b + \frac{63}{64}, & a \in [\frac{1}{2}, 1], b \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(b, c) = \begin{cases} bc - b - c - \frac{55}{64}, & b \in [0, \frac{1}{2}), c \in [0, \frac{1}{2}) \\ bc - b - c + \frac{61}{64}, & b \in [0, \frac{1}{2}), c \in [\frac{1}{2}, 1] \\ bc - b - c + \frac{61}{64}, & b \in [\frac{1}{2}, 1], c \in [0, \frac{1}{2}) \\ bc - b - c + \frac{63}{64}, & b \in [\frac{1}{2}, 1], c \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(a, c) = \begin{cases} ac - a - c - \frac{55}{64}, & a \in [0, \frac{1}{2}), c \in [0, \frac{1}{2}) \\ ac - a - c + \frac{61}{64}, & a \in [0, \frac{1}{2}), c \in [\frac{1}{2}, 1] \\ ac - a - c + \frac{61}{64}, & a \in [\frac{1}{2}, 1], c \in [0, \frac{1}{2}) \\ ac - a - c + \frac{63}{64}, & a \in [\frac{1}{2}, 1], c \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_{27}f &= \int_0^1 K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(a) f_{2,0,0}(a, 0, 0) da + \int_0^1 K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(b) f_{0,2,0}(0, b, 0) db + \\ &+ \int_0^1 K_1^{T_{0,1}^{(3)}}(c) f_{0,0,2}(0, 0, c) dc + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(a, b) f_{1,1,0}(a, b, 0) dadb + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(b, c) f_{0,1,1}(0, b, c) dbdc + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,1}^{(3)}}(a, c) f_{1,0,1}(a, 0, c) dadc. \end{aligned}$$

Použitím Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ získáme odhad

$$|E_{27}f| \leq 1,411 \cdot \|f\|_{2,2}.$$

Dále se budeme zabývat kubaturní formulí $T_{0,2}^{(3)}$, jejíž vzorec má tvar:

$$\begin{aligned}
T_{0,2}^{(3)} = & \frac{1}{512} [f(0,0,0) + f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) + f(1,1,0) + \\
& + f(1,0,1) + f(0,1,1) + f(1,1,1) + \\
& + 2(f(0,0,\frac{1}{4}) + f(0,0,\frac{1}{2}) + f(0,0,\frac{3}{4}) + f(0,\frac{1}{4},0) + f(0,\frac{1}{2},0) + \\
& + f(0,\frac{3}{4},0) + f(\frac{1}{4},0,0) + f(\frac{1}{2},0,0) + f(\frac{3}{4},0,0) + f(0,1,\frac{1}{4}) + \\
& + f(0,1,\frac{1}{2}) + f(0,1,\frac{3}{4}) + f(1,0,\frac{1}{4}) + f(1,0,\frac{1}{2}) + f(1,0,\frac{3}{4}) + \\
& + f(0,\frac{1}{4},1) + f(0,\frac{1}{2},1) + f(0,\frac{3}{4},1) + f(1,\frac{1}{4},0) + f(1,\frac{1}{2},0) + \\
& + f(1,\frac{3}{4},0) + f(\frac{1}{4},0,1) + f(\frac{1}{2},0,1) + f(\frac{3}{4},0,1) + f(\frac{1}{4},1,0) + \\
& + f(\frac{1}{2},1,0) + f(\frac{3}{4},1,0) + f(1,1,\frac{1}{4}) + f(1,1,\frac{1}{2}) + f(1,1,\frac{3}{4}) + \\
& + f(1,\frac{1}{4},1) + f(1,\frac{1}{2},1) + f(1,\frac{3}{4},1) + f(\frac{1}{4},1,1) + f(\frac{1}{2},1,1) + \\
& + f(\frac{3}{4},1,1)) + \\
& + 4(f(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}) + f(0,\frac{1}{4},\frac{1}{2}) + f(0,\frac{1}{4},\frac{3}{4}) + f(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4}) + f(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + \\
& + f(0,\frac{1}{2},\frac{3}{4}) + f(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}) + f(0,\frac{3}{4},\frac{1}{2}) + f(0,\frac{3}{4},\frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4}) + \\
& + f(\frac{1}{4},0,\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4},0,\frac{3}{4}) + f(\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},0,\frac{3}{4}) + \\
& + f(\frac{3}{4},0,\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4},0,\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4},0,\frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0) + f(\frac{1}{4},\frac{1}{2},0) + \\
& + f(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0) + f(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0) + f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) + f(\frac{1}{2},\frac{3}{4},0) + f(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0) + \\
& + f(\frac{3}{4},\frac{1}{2},0) + f(\frac{3}{4},\frac{3}{4},0) + f(1,\frac{1}{4},\frac{1}{4}) + f(1,\frac{1}{4},\frac{1}{2}) + f(1,\frac{1}{4},\frac{3}{4}) + \\
& + f(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}) + f(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(1,\frac{1}{2},\frac{3}{4}) + f(1,\frac{3}{4},\frac{1}{4}) + f(1,\frac{3}{4},\frac{1}{2}) + \\
& + f(1,\frac{3}{4},\frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4},1,\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4},1,\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4},1,\frac{3}{4}) + f(\frac{1}{2},1,\frac{1}{4}) + \\
& + f(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},1,\frac{3}{4}) + f(\frac{3}{4},1,\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4},1,\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4},1,\frac{3}{4}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) + \\
& +f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1\right) + \\
+ & 8\left(f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) + \right. \\
& +f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + \\
& +f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) + \\
& +f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + \\
& +f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \\
& \left. +f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right].
\end{aligned}$$

Složené lichoběžníkové pravidlo $T_{0,2}^{(3)}$ má také algebraický stupeň přesnosti roven 1, což by se ukázalo zcela analogicky jako v případě kubaturního vzorce $T_{0,0}^{(3)}$.

$$\begin{aligned}
E_{64}f &= \int_0^1 K_1^{T_{0,2}^{(3)}}(a) f_{2,0,0}(a, 0, 0) da + \int_0^1 K_1^{T_{0,2}^{(3)}}(b) f_{0,2,0}(0, b, 0) db + \\
& + \int_0^1 K_1^{T_{0,2}^{(3)}}(c) f_{0,0,2}(0, 0, c) dc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,2}^{(3)}}(a, b) f_{1,1,0}(a, b, 0) dadb + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,2}^{(3)}}(b, c) f_{0,1,1}(0, b, c) dbdc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,2}^{(3)}}(a, c) f_{1,0,1}(a, 0, c) dadc.
\end{aligned}$$

Jednorozměrná Sardova jádra složeného lichoběžníkového pravidla $T_{0,2}^{(3)}$ mají vzorce

$$K_1^{T_{0,2}^{(3)}}(a) = \begin{cases} \frac{a^2}{2} - \frac{505a}{512} + \frac{63}{128}, & a \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{a^2}{2} - \frac{509a}{512} + \frac{505}{1024}, & a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{a^2}{2} - \frac{255a}{256} + \frac{507}{1024}, & a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{a^2}{2} - \frac{511a}{512} + \frac{255}{512}, & a \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$K_1^{T_{0,2}^{(3)}}(b) = \begin{cases} \frac{b^2}{2} - \frac{505b}{512} + \frac{63}{128}, & b \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{b^2}{2} - \frac{509b}{512} + \frac{505}{1024}, & b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{b^2}{2} - \frac{255b}{256} + \frac{507}{1024}, & b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{b^2}{2} - \frac{511b}{512} + \frac{255}{512}, & b \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$K_1^{T_{0,2}^{(3)}}(c) = \begin{cases} \frac{c^2}{2} - \frac{505c}{512} + \frac{63}{128}, & c \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{c^2}{2} - \frac{509c}{512} + \frac{505}{1024}, & c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{c^2}{2} - \frac{255c}{256} + \frac{507}{1024}, & c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{c^2}{2} - \frac{511c}{512} + \frac{255}{512}, & c \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Vzorce dvojrozměrných Sardových jader dostaneme ve tvaru

$$K_{0,0}^{T_{0,2}^{(3)}}(a,b) = \left\{ \begin{array}{l} ab - a - b + \frac{463}{512}, \quad a \in [0, \frac{1}{4}), b \in [0, \frac{1}{4}) \\ ab - a - b + \frac{477}{512}, \quad a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), b \in [0, \frac{1}{4}) \\ ab - a - b + \frac{477}{512}, \quad a \in [0, \frac{1}{4}), b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ ab - a - b + \frac{487}{512}, \quad a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ ab - a - b + \frac{491}{512}, \quad a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), b \in [0, \frac{1}{4}) \\ ab - a - b + \frac{491}{512}, \quad a \in [0, \frac{1}{4}), b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ ab - a - b + \frac{497}{512}, \quad a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ ab - a - b + \frac{497}{512}, \quad a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ ab - a - b + \frac{503}{512}, \quad a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ ab - a - b + \frac{505}{512}, \quad a \in [\frac{3}{4}, 1], b \in [0, \frac{1}{4}) \\ ab - a - b + \frac{505}{512}, \quad a \in [0, \frac{1}{4}), b \in [\frac{3}{4}, 1] \\ ab - a - b + \frac{507}{512}, \quad a \in [\frac{3}{4}, 1], b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ ab - a - b + \frac{507}{512}, \quad a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), b \in [\frac{3}{4}, 1] \\ ab - a - b + \frac{509}{512}, \quad a \in [\frac{3}{4}, 1], b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ ab - a - b + \frac{509}{512}, \quad a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), b \in [\frac{3}{4}, 1] \\ ab - a - b + \frac{511}{512}, \quad a \in [\frac{3}{4}, 1], b \in [\frac{3}{4}, 1] \end{array} \right.$$

$$K_{0,0}^{T_{0,2}^{(3)}}(b,c) = \left\{ \begin{array}{l} bc - b - c + \frac{463}{512}, \quad b \in [0, \frac{1}{4}), c \in [0, \frac{1}{4}) \\ bc - b - c + \frac{477}{512}, \quad b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), c \in [0, \frac{1}{4}) \\ bc - b - c + \frac{477}{512}, \quad b \in [0, \frac{1}{4}), c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ bc - b - c + \frac{487}{512}, \quad b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ bc - b - c + \frac{491}{512}, \quad b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), c \in [0, \frac{1}{4}) \\ bc - b - c + \frac{491}{512}, \quad b \in [0, \frac{1}{4}), c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ bc - b - c + \frac{497}{512}, \quad b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ bc - b - c + \frac{497}{512}, \quad b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ bc - b - c + \frac{503}{512}, \quad b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ bc - b - c + \frac{505}{512}, \quad b \in [\frac{3}{4}, 1], c \in [0, \frac{1}{4}) \\ bc - b - c + \frac{505}{512}, \quad b \in [0, \frac{1}{4}), c \in [\frac{3}{4}, 1] \\ bc - b - c + \frac{507}{512}, \quad b \in [\frac{3}{4}, 1], c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ bc - b - c + \frac{507}{512}, \quad b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), c \in [\frac{3}{4}, 1] \\ bc - b - c + \frac{509}{512}, \quad b \in [\frac{3}{4}, 1], c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ bc - b - c + \frac{509}{512}, \quad b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), c \in [\frac{3}{4}, 1] \\ bc - b - c + \frac{511}{512}, \quad b \in [\frac{3}{4}, 1], c \in [\frac{3}{4}, 1], \end{array} \right.$$

$$K_{0,0}^{T_{0,2}^{(3)}}(a,c) = \left\{ \begin{array}{l} ac - a - c + \frac{463}{512}, \quad a \in [0, \frac{1}{4}), c \in [0, \frac{1}{4}) \\ ac - a - c + \frac{477}{512}, \quad a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), c \in [0, \frac{1}{4}) \\ ac - a - c + \frac{477}{512}, \quad a \in [0, \frac{1}{4}), c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ ac - a - c + \frac{487}{512}, \quad a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ ac - a - c + \frac{491}{512}, \quad a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), c \in [0, \frac{1}{4}) \\ ac - a - c + \frac{491}{512}, \quad a \in [0, \frac{1}{4}), c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ ac - a - c + \frac{497}{512}, \quad a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ ac - a - c + \frac{497}{512}, \quad a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ ac - a - c + \frac{503}{512}, \quad a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ ac - a - c + \frac{505}{512}, \quad a \in [\frac{3}{4}, 1], c \in [0, \frac{1}{4}) \\ ac - a - c + \frac{505}{512}, \quad a \in [0, \frac{1}{4}), c \in [\frac{3}{4}, 1] \\ ac - a - c + \frac{507}{512}, \quad a \in [\frac{3}{4}, 1], c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ ac - a - c + \frac{507}{512}, \quad a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), c \in [\frac{3}{4}, 1] \\ ac - a - c + \frac{509}{512}, \quad a \in [\frac{3}{4}, 1], c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ ac - a - c + \frac{509}{512}, \quad a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), c \in [\frac{3}{4}, 1] \\ ac - a - c + \frac{511}{512}, \quad a \in [\frac{3}{4}, 1], c \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{array} \right.$$

Získaná Sardova jádra kubaturní formule $T_{0,2}^{(3)}$ dosadíme do vzorce pro chybový člen $E_{64}f$ této kubatury, tedy do vzorce

$$\begin{aligned}
 E_{64}f &= \int_0^1 K_1^{T_{0,2}^{(3)}}(a) f_{2,0,0}(a, 0, 0) da + \int_0^1 K_1^{T_{0,2}^{(3)}}(b) f_{0,2,0}(0, b, 0) db + \\
 &+ \int_0^1 K_1^{T_{0,2}^{(3)}}(c) f_{0,0,2}(0, 0, c) dc + \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,2}^{(3)}}(a, b) f_{1,1,0}(a, b, 0) dadb + \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,2}^{(3)}}(b, c) f_{0,1,1}(0, b, c) dbdc + \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0}^{T_{0,2}^{(3)}}(a, c) f_{1,0,1}(a, 0, c) dadc.
 \end{aligned}$$

Aplikací Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ získáme odhad

$$|E_{27}f| \leq 0,957 \cdot \|f\|_{2,2}.$$

Nyní odvodíme vzorec pro Rombergovu kubaturní formuli. Stejně jako v případě Rombergovy kvadratury a dvojrozměrné Rombergovy kubatury, využijeme k tomuto odvození tvz. T-schematu:

$$\begin{array}{cccc}
 T_{0,0}^{(3)} & & & \\
 T_{0,1}^{(3)} & T_{1,0}^{(3)} & & \\
 T_{0,2}^{(3)} & T_{1,1}^{(3)} & T_{2,0}^{(3)} & \\
 \vdots & & \ddots & \\
 T_{0,m}^{(3)} & \dots & \dots & T_{m,0}^{(3)},
 \end{array}$$

kde kubaturní formuli $T_{m,k}^{(3)}$ položíme rovnu

$$T_{m,k}^{(3)} = \frac{1}{4^m - 1} (4^m T_{m-1,k+1}^{(3)} - T_{m-1,k}^{(3)}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Aplikací vzorce (5.3) pro $k = 0$ a $m = 1$ snadno získáme vzorec pro Rombergovu kubaturu $T_{1,0}^{(3)}$, tedy

$$\begin{aligned}
 T_{1,0}^{(3)} &= \frac{1}{48}[-(f(0,0,0) + f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) + f(1,1,0) + \\
 &\quad + f(1,0,1) + f(0,1,1) + f(1,1,1)) + \\
 &\quad + 2(f(0,0,\frac{1}{2}) + f(0,\frac{1}{2},0) + f(\frac{1}{2},0,0) + f(1,1,\frac{1}{2}) + f(1,\frac{1}{2},1) + \\
 &\quad + f(\frac{1}{2},1,1) + f(0,1,\frac{1}{2}) + f(1,0,\frac{1}{2}) + f(0,\frac{1}{2},1) + f(1,\frac{1}{2},0) + \\
 &\quad + f(\frac{1}{2},0,1) + f(\frac{1}{2},1,0)) + \\
 &\quad + 4(f(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) + f(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}) + \\
 &\quad + f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)) + \\
 &\quad + 8f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})]
 \end{aligned}$$

Poznamenejme, že Rombergova kubaturní formule není pozitivní kubaturou.

Určeme nyní podrobně algebraický stupeň přesnosti Rombergovy kubaturní formule $T_{1,0}^{(3)}$. Tento kubaturní vzorec zřejmě integruje přesně konstanty, neboť

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1 \, dx dy dz = 1$$

a zároveň

$$\begin{aligned}
 T_{1,0}^{(3)}1 &= \frac{1}{48}[-(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) + \\
 &\quad + 2(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) + \\
 &\quad + 4(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) + 8(1)] = 1,
 \end{aligned}$$

odečtením těchto rovností snadno získáme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1 \, dx dy dz - T_{1,0}^{(3)}1 = 0.$$

Kubатурní formule $T_{1,0}^{(3)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti alespoň roven 0, tato skutečnost je pro nás velmi důležitá, neboť nám umožňuje využít při odhadu chybového členu Sardova jádra. Přímým dosazením zjistíme, že Rombergův kubатурní vzorec $T_{1,0}^{(3)}$ integruje přesně i polynomy prvního stupně, jak vidíme na následujících výpočtech: Pro proměnnou x dostaneme přímým dosazením rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x \, dx dy dz = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} T_{1,0}^{(3)}x &= \frac{1}{48}[-(0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1) + \\ &+ 2(0 + 0 + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + 0 + 1 + 0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + \\ &+ 4(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + 8(\frac{1}{2})] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odečtením právě uvedených rovností získáme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x \, dx dy dz - T_{1,0}^{(3)}x = 0.$$

V případě proměnné y postupujeme zcela analogicky, tedy platí

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy dz = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} T_{1,0}^{(3)}y &= \frac{1}{48}[-(0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1) + \\ &+ 2(0 + \frac{1}{2} + 0 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 1) + \\ &+ 4(\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}) + 8(\frac{1}{2})] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odečtením dostáváme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy dz - T_{1,0}^{(3)}y = 0.$$

Stejně tak pro proměnnou z dostáváme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z \, dx dy dz = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} T_{1,0}^{(3)} z &= \frac{1}{48} [-(0+0+0+1+0+1+1+1) + \\ &+ 2(\frac{1}{2}+0+0+\frac{1}{2}+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+0+1+0) + \\ &+ 4(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1) + 8(\frac{1}{2})] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odečtením dostáváme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z \, dx dy dz - T_{1,0}^{(3)} z = 0.$$

Rombergova kubatura $T_{1,0}^{(3)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 1.

Nyní se budeme zabývat polynomy druhého stupně, tedy x^2, y^2, z^2, xy, yz a xz . Snadno zjistíme, že kubaturní formule $T_{1,0}^{(3)}$ integruje přesně všech šest zmiňovaných funkcí, jak je zřejmě vidět z následujících výpočtů. Dosazením funkce xy získáme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx dy dz = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} T_{1,0}^{(3)} xy &= \frac{1}{48} [-(0+0+0+0+1+0+0+1) + \\ &+ 2(0+0+0+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+0+0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}) + \\ &+ 4(0+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) + 8(\frac{1}{4})] = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Jejich odečtením dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx dy dz - T_{1,0}^{(3)} xy = 0.$$

Pro funkce yz a xz dostáváme zcela analogické výsledky, což je způsobeno symetrií Rombergovy kubaturní formule $T_{1,0}^{(3)}$. Proto zde výpočty pro zmíněné funkce neuvádíme. Stejně postupujeme pro funkci x^2 , kde po dosazení získáme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 \, dx dy dz = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} T_{1,0}^{(3)} x^2 &= \frac{1}{48} [-(0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1) + \\ &+ 2(0 + 0 + \frac{1}{4} + 1 + 1 + \frac{1}{4} + 0 + 1 + 0 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \\ &+ 4(0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + 8(\frac{1}{4})] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Po odečtení tedy platí

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 \, dx dy dz - T_{1,0}^{(3)} x^2 = 0.$$

Zcela analogicky bychom postupovali v případě funkcí y^2 a z^2 . Díky symetrii kubaturního vzorce $T_{1,0}^{(3)}$ je zřejmé, že i tyto funkce jsou jím integrovány přesně. Rombergova kubaturní formule $T_{1,0}^{(3)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 2. Stejným způsobem budeme postupovat pro polynomy třetího stupně. Připomeňme, že se jedná o funkce typu $x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, xy^2, y^2z, xz^2, yz^2$ a xyz . Dosazením funkce x^3 získáme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^3 \, dx dy dz = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} T_{1,0}^{(3)} x^3 &= \frac{1}{48} [-(0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1) + \\ &+ 2(0 + 0 + \frac{1}{8} + 1 + 1 + \frac{1}{8} + 0 + 1 + 0 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \\ &+ 4(0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + 8(\frac{1}{8})] = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Jejich odečtením dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^3 dx dy dz - T_{1,0}^{(3)} x^3 = 0.$$

Zcela analogicky postupujeme v případě funkcí y^3 a z^3 . Obdobně jako výše je zde uvádět nebudeme. Dosazením funkce x^2y snadno dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2y dx dy dz = \frac{1}{6},$$

$$\begin{aligned} T_{1,0}^{(3)} x^2y &= \frac{1}{48}[-(0+0+0+0+0+1+0+0+1) + \\ &+ 2(0+0+0+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+0+0+0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}) + \\ &+ 4(0+0+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}) + 8(\frac{1}{8})] = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Rozdílem právě získaných rovností tedy obdržíme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2y dx dy dz - T_{1,0}^{(3)} x^2y = 0.$$

Pro funkce xy^2 , y^2z , xz^2 a yz^2 bychom postupovali zcela analogicky, tyto výsledky zde proto neuvádíme. Stejně tak po dosazení funkce xyz dostaneme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xyz dx dy dz = \frac{1}{8},$$

$$\begin{aligned} T_{1,0}^{(3)} xyz &= \frac{1}{48}[-(0+0+0+0+0+0+0+0+1) + \\ &+ 2(0+0+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+0+0+0+0+0) + \\ &+ 4(0+0+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) + 8(\frac{1}{8})] = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

pro jejichž rozdíl opět platí

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xyz \, dx dy dz - T_{1,0}^{(3)} xyz = 0.$$

Kubатурní formule $T_{1,0}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven alespoň 3. Problém nastává pro polynomy stupně 4, což doložíme na příkladu funkce x^4 . Dosazením této funkce získáme rovnosti

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^4 \, dx dy dz = \frac{1}{5},$$

$$\begin{aligned} T_{1,0}^{(3)} x^4 &= \frac{1}{48} [-(0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1) + \\ &+ 2(0 + 0 + \frac{1}{16} + 1 + 1 + \frac{1}{16} + 0 + 1 + 0 + 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + \\ &+ 4(0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + 8(\frac{1}{16})] = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

Jejich odečtením dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^4 \, dx dy dz - T_{1,0}^{(3)} x^4 \neq 0.$$

Rombergova kubaturní formule $T_{1,0}^{(3)}$ má tedy algebraický stupeň přesnosti roven právě 3. Využijeme tvrzení věty 5.9 a dostáváme odhad chybového členu ve tvaru

$$\begin{aligned} E_{27} f &= \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(a) f_{4,0,0}(a, 0, 0) \, da + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(b) f_{0,4,0}(0, b, 0) \, db + \\ &+ \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(c) f_{0,0,4}(0, 0, c) \, dc + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(a) f_{3,1,0}(a, 0, 0) \, da + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(a) f_{3,0,1}(a, 0, 0) \, da + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(b) f_{1,3,0}(0, b, 0) db + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(b) f_{0,3,1}(0, b, 0) db + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(c) f_{1,0,3}(0, 0, c) dc + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(c) f_{0,1,3}(0, 0, c) dc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b) f_{2,2,0}(a, b, 0) dadb + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(b, c) f_{0,2,2}(0, b, c) dbdc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, c) f_{2,0,2}(a, 0, c) dadc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{1,0,0}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{2,1,1}(a, b, c) dadbdc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,1,0}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{1,2,1}(a, b, c) dadbdc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{1,1,2}(a, b, c) dadbdc.
\end{aligned}$$

Pro odhad chybového členu $E_{27}f$ Rombergovy kubaturní formule $T_{1,0}^{(3)}$ tedy potřebujeme spočít:

jednorozměrná Sardova jádra $K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(a)$, $K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(b)$, $K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(c)$, $K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(a)$, $K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(b)$, $K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(c)$,

dvojměrná Sardova jádra $K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b)$, $K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(b, c)$, $K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, c)$

a trojměrná Sardova jádra $K_{1,0,0}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c)$, $K_{0,1,0}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c)$, $K_{0,0,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c)$.

Nejprve spočteme jednorozměrná Sardova jádra

$$K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(a) = \begin{cases} \frac{a^4}{4} - \frac{47a^3}{48} + \frac{3a^2}{2} - \frac{33a}{32} + \frac{17}{64}, & a \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{a^4}{4} - \frac{49a^3}{48} + \frac{25a^2}{16} - \frac{17a}{16} + \frac{13}{48}, & a \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(b) = \begin{cases} \frac{b^4}{4} - \frac{47b^3}{48} + \frac{3b^2}{2} - \frac{33b}{32} + \frac{17}{64}, & b \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{b^4}{4} - \frac{49b^3}{48} + \frac{25b^2}{16} - \frac{17b}{16} + \frac{13}{48}, & b \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(c) = \begin{cases} \frac{c^4}{4} - \frac{47c^3}{48} + \frac{3c^2}{2} - \frac{33c}{32} + \frac{17}{64}, & c \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{c^4}{4} - \frac{49c^3}{48} + \frac{25c^2}{16} - \frac{17c}{16} + \frac{13}{48}, & c \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(a) = \begin{cases} -\frac{a^3}{6} + \frac{23a^2}{48} - \frac{a}{2} + \frac{17}{96}, & a \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{a^3}{6} + \frac{25a^2}{48} - \frac{13a}{24} + \frac{3}{16}, & a \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(b) = \begin{cases} -\frac{b^3}{6} + \frac{23b^2}{48} - \frac{b}{2} + \frac{17}{96}, & b \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{b^3}{6} + \frac{25b^2}{48} - \frac{13b}{24} + \frac{3}{16}, & b \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(c) = \begin{cases} -\frac{c^3}{6} + \frac{23c^2}{48} - \frac{c}{2} + \frac{17}{96}, & c \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{c^3}{6} + \frac{25c^2}{48} - \frac{13c}{24} + \frac{3}{16}, & c \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Pro dvojrozměrná Sardova jádra Rombergovy kubarutní formule $T_{1,0}^{(3)}$ dostaneme vzorce

$$K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{41ab}{48} - \frac{5a}{12} - \frac{5b}{12} + \frac{5}{24}, \\ a \in [0, \frac{1}{2}), b \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{47ab}{48} - \frac{a}{2} - \frac{23b}{48} + \frac{1}{4}, \\ a \in [0, \frac{1}{2}), b \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{47ab}{48} - \frac{23a}{48} - \frac{b}{2} + \frac{1}{4}, \\ a \in [\frac{1}{2}, 1], b \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{49ab}{48} - \frac{25a}{48} - \frac{25b}{48} + \frac{13}{48}, \\ a \in [\frac{1}{2}, 1], b \in [\frac{1}{2}, 1], \end{array} \right.$$

$$K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(b, c) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{41bc}{48} - \frac{5b}{12} - \frac{5c}{12} + \frac{5}{24}, \\ b \in [0, \frac{1}{2}), c \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{47bc}{48} - \frac{b}{2} - \frac{23c}{48} + \frac{1}{4}, \\ b \in [0, \frac{1}{2}), c \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{47bc}{48} - \frac{23b}{48} - \frac{c}{2} + \frac{1}{4}, \\ b \in [\frac{1}{2}, 1], c \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{49bc}{48} - \frac{25b}{48} - \frac{25c}{48} + \frac{13}{48}, \\ b \in [\frac{1}{2}, 1], c \in [\frac{1}{2}, 1], \end{array} \right.$$

$$K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, c) = \begin{cases} \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{41ac}{48} - \frac{5a}{12} - \frac{5c}{12} + \frac{5}{24}, \\ a \in [0, \frac{1}{2}), c \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{47ac}{48} - \frac{a}{2} - \frac{23c}{48} + \frac{1}{4}, \\ a \in [0, \frac{1}{2}), c \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{47ac}{48} - \frac{23a}{48} - \frac{c}{2} + \frac{1}{4}, \\ a \in [\frac{1}{2}, 1], c \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{49ac}{48} - \frac{25a}{48} - \frac{25c}{48} + \frac{13}{48}, \\ a \in [\frac{1}{2}, 1], c \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Pro usnadnění a zpřehlednění vzorců zavedeme následující značení, které použijeme při zápisu trojrozměrných Sardových jader $K_{1,0,0}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c)$, $K_{0,1,0}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c)$ a $K_{0,0,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c)$ Rombergovy kubaturní formule $T_{1,0}^{(3)}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= [0, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{2}) & \mathcal{V} &= [0, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \mathcal{II} &= [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{2}) & \mathcal{VI} &= [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{2}, 1] \\ \mathcal{III} &= [0, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}) & \mathcal{VII} &= [0, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1] \\ \mathcal{IV} &= [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}) & \mathcal{VIII} &= [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]. \end{aligned}$$

Vzorce pro trojrozměrná Sardova jádra Rombergovy kubaturní formule $T_{1,0}^{(3)}$ mají tvar

$$K_{1,0,0}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2bc}{2} - \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2c}{2} - abc - \frac{a^2}{2} - ab - ac + \frac{bc}{2} - \frac{23a}{48} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{1}{6}, \\ a, b, c \in \mathcal{I} \\ \frac{a^2bc}{2} - \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2c}{2} - abc - \frac{a^2}{2} - ab - ac + \frac{bc}{2} - \frac{41a}{48} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{17}{48}, \\ a, b, c \in \mathcal{II} \\ \frac{a^2bc}{2} - \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2c}{2} - abc - \frac{a^2}{2} - ab - ac + \frac{bc}{2} - \frac{43a}{48} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{7}{16}, \\ a, b, c \in \mathcal{III} \\ \frac{a^2bc}{2} - \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2c}{2} - abc - \frac{a^2}{2} - ab - ac + \frac{bc}{2} - \frac{47a}{48} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{23}{48}, \\ a, b, c \in \mathcal{IV} \\ \frac{a^2bc}{2} - \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2c}{2} - abc - \frac{a^2}{2} - ab - ac + \frac{bc}{2} - \frac{43a}{48} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{7}{16}, \\ a, b, c \in \mathcal{V} \\ \frac{a^2bc}{2} - \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2c}{2} - abc - \frac{a^2}{2} - ab - ac + \frac{bc}{2} - \frac{47a}{48} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{23}{48}, \\ a, b, c \in \mathcal{VI} \\ \frac{a^2bc}{2} - \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2c}{2} - abc - \frac{a^2}{2} - ab - ac + \frac{bc}{2} - \frac{47a}{48} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{1}{2}, \\ a, b, c \in \mathcal{VII} \\ \frac{a^2bc}{2} - \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2c}{2} - abc - \frac{a^2}{2} - ab - ac + \frac{bc}{2} - \frac{49a}{48} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{25}{48}, \\ a, b, c \in \mathcal{VIII}, \end{array} \right.$$

$$K_{0,1,0}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c) = \left\{ \begin{array}{l}
\frac{ab^2c}{2} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^2c}{2} - abc - \frac{b^2}{2} - ab - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{23b}{48} - \frac{c}{2} + \frac{1}{6}, \\
a, b, c \in \mathcal{I} \\
\frac{ab^2c}{2} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^2c}{2} - abc - \frac{b^2}{2} - ab - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{43b}{48} - \frac{c}{2} + \frac{7}{16}, \\
a, b, c \in \mathcal{II} \\
\frac{ab^2c}{2} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^2c}{2} - abc - \frac{b^2}{2} - ab - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{41b}{48} - \frac{c}{2} + \frac{17}{48}, \\
a, b, c \in \mathcal{III} \\
\frac{ab^2c}{2} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^2c}{2} - abc - \frac{b^2}{2} - ab - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{47b}{48} - \frac{c}{2} + \frac{23}{48}, \\
a, b, c \in \mathcal{IV} \\
\frac{ab^2c}{2} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^2c}{2} - abc - \frac{b^2}{2} - ab - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{43b}{48} - \frac{c}{2} + \frac{7}{16}, \\
a, b, c \in \mathcal{V} \\
\frac{ab^2c}{2} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^2c}{2} - abc - \frac{b^2}{2} - ab - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{47b}{48} - \frac{c}{2} + \frac{1}{2}, \\
a, b, c \in \mathcal{VI} \\
\frac{ab^2c}{2} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^2c}{2} - abc - \frac{b^2}{2} - ab - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{47b}{48} - \frac{c}{2} + \frac{23}{48}, \\
a, b, c \in \mathcal{VII} \\
\frac{ab^2c}{2} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^2c}{2} - abc - \frac{b^2}{2} - ab - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{49b}{48} - \frac{c}{2} + \frac{25}{48}, \\
a, b, c \in \mathcal{VIII},
\end{array} \right.$$

$$K_{0,0,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c) = \left\{ \begin{array}{l}
\frac{abc^2}{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{bc^2}{2} - abc - \frac{c^2}{2} - ac - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{23c}{48} + \frac{1}{6}, \\
a, b, c \in \mathcal{I} \\
\frac{abc^2}{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{bc^2}{2} - abc - \frac{c^2}{2} - ac - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{43c}{48} + \frac{7}{16}, \\
a, b, c \in \mathcal{II} \\
\frac{abc^2}{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{bc^2}{2} - abc - \frac{c^2}{2} - ac - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{43c}{48} + \frac{7}{16}, \\
a, b, c \in \mathcal{III} \\
\frac{abc^2}{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{bc^2}{2} - abc - \frac{c^2}{2} - ac - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{47c}{48} + \frac{1}{2}, \\
a, b, c \in \mathcal{IV} \\
\frac{abc^2}{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{bc^2}{2} - abc - \frac{c^2}{2} - ac - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{41c}{48} + \frac{17}{48}, \\
a, b, c \in \mathcal{V} \\
\frac{abc^2}{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{bc^2}{2} - abc - \frac{c^2}{2} - ac - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{47c}{48} + \frac{23}{48}, \\
a, b, c \in \mathcal{VI} \\
\frac{abc^2}{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{bc^2}{2} - abc - \frac{c^2}{2} - ac - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{47c}{48} + \frac{23}{48}, \\
a, b, c \in \mathcal{VII} \\
\frac{abc^2}{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{bc^2}{2} - abc - \frac{c^2}{2} - ac - bc + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{49c}{48} + \frac{25}{48}, \\
a, b, c \in \mathcal{VIII}.
\end{array} \right.$$

Právě uvedená Sardova jádra kubaturní formule $T_{1,0}^{(3)}$ dosadíme do vzorce pro chybový člen $E_{27}f$ této Rombergovy kubatury, tedy do vzorce

$$\begin{aligned}
E_{27}f &= \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(a) f_{4,0,0}(a, 0, 0) da + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(b) f_{0,4,0}(0, b, 0) db + \\
&+ \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{1,0}^{(3)}}(c) f_{0,0,4}(0, 0, c) dc + \\
&+ \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(a) f_{3,1,0}(a, 0, 0) da + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(a) f_{3,0,1}(a, 0, 0) da + \\
&+ \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(b) f_{1,3,0}(0, b, 0) db + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(b) f_{0,3,1}(0, b, 0) db + \\
&+ \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(c) f_{1,0,3}(0, 0, c) dc + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{1,0}^{(3)}}(c) f_{0,1,3}(0, 0, c) dc + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b) f_{2,2,0}(a, b, 0) dadb + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(b, c) f_{0,2,2}(0, b, c) dbdc + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, c) f_{2,0,2}(a, 0, c) dadc + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{1,0,0}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{2,1,1}(a, b, c) dadbdc + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,1,0}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{1,2,1}(a, b, c) dadbdc + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0,1}^{T_{1,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{1,1,2}(a, b, c) dadbdc.
\end{aligned}$$

Použitím Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ získáme odhad

$$|E_{27}f| \leq 0,513 \cdot \|f\|_{4,2}.$$

Pomocí tvz. T-schématu odvodíme Rombergovu kubaturní formuli $T_{2,0}^{(3)}$, jejíž vzorec následuje:

$$\begin{aligned} T_{2,0}^{(3)} &= \frac{1}{720} [-(f(0,0,0) + f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) + f(1,1,0) + \\ &\quad + f(1,0,1) + f(0,1,1) + f(1,1,1)) - \\ &\quad - 6(f(0,0,\frac{1}{2}) + f(0,\frac{1}{2},0) + f(\frac{1}{2},0,0) + f(0,1,\frac{1}{2}) + f(1,0,\frac{1}{2}) + \\ &\quad + f(0,\frac{1}{2},1) + f(1,\frac{1}{2},0) + f(\frac{1}{2},0,1) + f(\frac{1}{2},1,0) + f(1,1,\frac{1}{2}) + \\ &\quad + f(1,\frac{1}{2},1) + f(\frac{1}{2},1,1)) + \\ &\quad + 4(f(0,0,\frac{1}{4}) + f(0,0,\frac{3}{4}) + f(0,\frac{1}{4},0) + f(0,\frac{3}{4},0) + f(\frac{1}{4},0,0) + \\ &\quad + f(\frac{3}{4},0,0) + f(0,1,\frac{1}{4}) + f(0,1,\frac{3}{4}) + f(1,0,\frac{1}{4}) + f(1,0,\frac{3}{4}) + \\ &\quad + f(0,\frac{1}{4},1) + f(0,\frac{3}{4},1) + f(1,\frac{1}{4},0) + f(1,\frac{3}{4},0) + f(\frac{1}{4},0,1) + \\ &\quad + f(\frac{3}{4},0,1) + f(\frac{1}{4},1,0) + f(\frac{3}{4},1,0) + f(1,1,\frac{1}{4}) + f(1,1,\frac{3}{4}) + \\ &\quad + f(1,\frac{1}{4},1) + f(1,\frac{3}{4},1) + f(\frac{1}{4},1,1) + f(\frac{3}{4},1,1)) - \\ &\quad - 12(f(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) + f(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}) + \\ &\quad + f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)) + \\ &\quad + 8(f(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}) + f(0,\frac{1}{4},\frac{1}{2}) + f(0,\frac{1}{4},\frac{3}{4}) + f(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4}) + f(0,\frac{1}{2},\frac{3}{4}) + \\ &\quad + f(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}) + f(0,\frac{3}{4},\frac{1}{2}) + f(0,\frac{3}{4},\frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4},0,\frac{1}{2}) + \\ &\quad + f(\frac{1}{4},0,\frac{3}{4}) + f(\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2},0,\frac{3}{4}) + f(\frac{3}{4},0,\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4},0,\frac{1}{2}) + \\ &\quad + f(\frac{3}{4},0,\frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0) + f(\frac{1}{4},\frac{1}{2},0) + f(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0) + f(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0) + \\ &\quad + f(\frac{1}{2},\frac{3}{4},0) + f(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0) + f(\frac{3}{4},\frac{1}{2},0) + f(\frac{3}{4},\frac{3}{4},0) + f(1,\frac{1}{4},\frac{1}{4}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +f(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + f(1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}) + f(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + f(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + f(1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) + \\
& +f(1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}) + f(1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}) + \\
& +f(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}) + f(\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}) + \\
& +f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1) + f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1) + f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1) + f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1) + \\
& +f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1) + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1) + f(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1) - \\
& - 24f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \\
& + 16(f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) + \\
& +f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + \\
& +f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}) + \\
& +f(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}) + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}) + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}) + \\
& +f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}) + f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) + \\
& +f(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})).
\end{aligned}$$

I v tomto případě se nejedná o pozitivní kubaturní formuli. Rombergův kubaturní vzorec $T_{2,0}^{(3)}$ má algebraický stupeň přesnosti roven 3, což by se ukázalo zcela analogicky jako v případě kubaturního vzorce $T_{1,0}^{(3)}$.

$$\begin{aligned}
E_{64}f &= \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(a) f_{4,0,0}(a, 0, 0) da + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(b) f_{0,4,0}(0, b, 0) db + \\
& + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(c) f_{0,0,4}(0, 0, c) dc + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(a) f_{3,1,0}(a, 0, 0) da + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(a) f_{3,0,1}(a, 0, 0) da +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(b) f_{1,3,0}(0, b, 0) db + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(b) f_{0,3,1}(0, b, 0) db + \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(c) f_{1,0,3}(0, 0, c) dc + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(c) f_{0,1,3}(0, 0, c) dc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b) f_{2,2,0}(a, b, 0) da db + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(b, c) f_{0,2,2}(0, b, c) db dc + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, c) f_{2,0,2}(a, 0, c) da dc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{1,0,0}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{2,1,1}(a, b, c) da db dc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,1,0}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{1,2,1}(a, b, c) da db dc + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{1,1,2}(a, b, c) da db dc.
\end{aligned}$$

Pro odhad chybového členu $E_{64}f$ Rombergovy kubaturní formule $T_{2,0}^{(3)}$ tedy potřebujeme spočít:

jednorozměrná Sardova jádra $K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(a)$, $K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(b)$, $K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(c)$, $K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(a)$, $K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(b)$, $K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(c)$,

dvojrozměrná Sardova jádra $K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b)$, $K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(b, c)$, $K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, c)$

a trojrozměrná Sardova jádra $K_{1,0,0}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c)$, $K_{0,1,0}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c)$, $K_{0,0,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c)$.

Pro jednorozměrná Sardova jádra Rombegrovy kubatury $T_{2,0}^{(3)}$ dostaneme vzorce

$$K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(a) = \begin{cases} \frac{a^4}{4} - \frac{719a^3}{720} + \frac{3a^2}{2} - a + \frac{1}{4}, & a \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{a^4}{4} - \frac{241a^3}{240} + \frac{361a^2}{240} - \frac{961a}{960} + \frac{2881}{11520}, & a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{a^4}{4} - \frac{239a^3}{240} + \frac{179a^2}{120} - \frac{289a}{192} + \frac{2869}{11520}, & a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{a^4}{4} - \frac{721a^3}{720} + \frac{361a^2}{240} - \frac{241a}{240} + \frac{180}{720}, & a \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

$$K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(b) = \begin{cases} \frac{b^4}{4} - \frac{719b^3}{720} + \frac{3b^2}{2} - b + \frac{1}{4}, & b \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{b^4}{4} - \frac{241b^3}{240} + \frac{361b^2}{240} - \frac{961b}{960} + \frac{2881}{11520}, & b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{b^4}{4} - \frac{239b^3}{240} + \frac{179b^2}{120} - \frac{289b}{192} + \frac{2869}{11520}, & b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{b^4}{4} - \frac{721b^3}{720} + \frac{361b^2}{240} - \frac{241b}{240} + \frac{180}{720}, & b \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

$$K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(c) = \begin{cases} \frac{c^4}{4} - \frac{719c^3}{720} + \frac{3c^2}{2} - c + \frac{1}{4}, & c \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{c^4}{4} - \frac{241c^3}{240} + \frac{361c^2}{240} - \frac{961c}{960} + \frac{2881}{11520}, & c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{c^4}{4} - \frac{239c^3}{240} + \frac{179c^2}{120} - \frac{289c}{192} + \frac{2869}{11520}, & c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{c^4}{4} - \frac{721c^3}{720} + \frac{361c^2}{240} - \frac{241c}{240} + \frac{180}{720}, & c \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

$$K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(a) = \begin{cases} -\frac{a^3}{6} + \frac{359a^2}{720} - \frac{a}{2} + \frac{1}{6}, & a \in [0, \frac{1}{4}) \\ -\frac{a^3}{6} + \frac{121a^2}{240} - \frac{181a}{360} + \frac{481}{2880}, & a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ -\frac{a^3}{6} + \frac{119a^2}{240} - \frac{89a}{180} + \frac{95}{576}, & a \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -\frac{a^3}{6} + \frac{361a^2}{720} - \frac{181a}{360} + \frac{121}{720}, & a \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

$$K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(b) = \begin{cases} -\frac{b^3}{6} + \frac{359b^2}{720} - \frac{b}{2} + \frac{1}{6}, & b \in [0, \frac{1}{4}) \\ -\frac{b^3}{6} + \frac{121b^2}{240} - \frac{181b}{360} + \frac{481}{2880}, & b \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ -\frac{b^3}{6} + \frac{119b^2}{240} - \frac{89b}{180} + \frac{95}{576}, & b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -\frac{b^3}{6} + \frac{361b^2}{720} - \frac{181b}{360} + \frac{121}{720}, & b \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

$$K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(c) = \begin{cases} -\frac{c^3}{6} + \frac{359c^2}{720} - \frac{c}{2} + \frac{1}{6}, & c \in [0, \frac{1}{4}) \\ -\frac{c^3}{6} + \frac{121c^2}{240} - \frac{181c}{360} + \frac{481}{2880}, & c \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ -\frac{c^3}{6} + \frac{119c^2}{240} - \frac{89c}{180} + \frac{95}{576}, & c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -\frac{c^3}{6} + \frac{361c^2}{720} - \frac{181c}{360} + \frac{121}{720}, & c \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Vzorce dvojrozměrných Sardových jader kubaturní formule $T_{2,0}^{(3)}$ mají tvar

$$K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{133ab}{144} - \frac{83a}{180} - \frac{83b}{180} + \frac{83}{360}, \quad a, b \in \mathcal{A} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{77ab}{80} - \frac{29a}{60} - \frac{113b}{240} + \frac{17}{72}, \quad a, b \in \mathcal{B} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{691ab}{720} - \frac{43a}{90} - \frac{169b}{360} + \frac{7}{30}, \quad a, b \in \mathcal{C} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{719ab}{720} - \frac{a}{2} - \frac{359b}{720} + \frac{1}{4}, \quad a, b \in \mathcal{D} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{77ab}{80} - \frac{113a}{240} - \frac{29b}{60} + \frac{17}{72}, \quad a, b \in \mathcal{E} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{713ab}{720} - \frac{353a}{720} - \frac{353b}{720} + \frac{347}{1440}, \quad a, b \in \mathcal{F} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{703ab}{720} - \frac{347a}{720} - \frac{29b}{60} + \frac{341}{1440}, \quad a, b \in \mathcal{G} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{241ab}{240} - \frac{361a}{720} - \frac{121b}{240} + \frac{181}{720}, \quad a, b \in \mathcal{H} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{691ab}{720} - \frac{169a}{360} - \frac{43b}{90} + \frac{7}{30}, \quad a, b \in \mathcal{I} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{703ab}{720} - \frac{29a}{60} - \frac{347b}{720} + \frac{341}{1440}, \quad a, b \in \mathcal{J} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{47ab}{48} - \frac{29a}{60} - \frac{29b}{60} + \frac{341}{1440}, \quad a, b \in \mathcal{K} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{239ab}{240} - \frac{179a}{360} - \frac{119b}{240} + \frac{89}{360}, \quad a, b \in \mathcal{L} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{719ab}{720} - \frac{359a}{720} - \frac{b}{2} + \frac{1}{4}, \quad a, b \in \mathcal{M} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{241ab}{240} - \frac{121a}{240} - \frac{361b}{720} + \frac{181}{720}, \quad a, b \in \mathcal{N} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{239ab}{240} - \frac{119a}{240} - \frac{179b}{360} + \frac{89}{360}, \quad a, b \in \mathcal{O} \\ \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b}{2} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{721ab}{720} - \frac{361a}{720} - \frac{361b}{720} + \frac{181}{720}, \quad a, b \in \mathcal{P}, \end{array} \right.$$

$$K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(b, c) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{b^2c^2}{4} - \frac{c^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{133bc}{144} - \frac{83b}{180} - \frac{83c}{180} + \frac{83}{360}, \quad b, c \in \mathcal{A} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{77bc}{80} - \frac{29b}{60} - \frac{113c}{240} + \frac{17}{72}, \quad b, c \in \mathcal{B} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{691bc}{720} - \frac{43b}{90} - \frac{169c}{360} + \frac{7}{30}, \quad b, c \in \mathcal{C} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2b}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{719bc}{720} - \frac{b}{2} - \frac{359c}{720} + \frac{1}{4}, \quad b, c \in \mathcal{D} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{77bc}{80} - \frac{113b}{240} - \frac{29c}{60} + \frac{17}{72}, \quad b, c \in \mathcal{E} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{713bc}{720} - \frac{353b}{720} - \frac{353c}{720} + \frac{347}{1440}, \quad b, c \in \mathcal{F} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{703bc}{720} - \frac{347b}{720} - \frac{29c}{60} + \frac{341}{1440}, \quad b, c \in \mathcal{G} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{241bc}{240} - \frac{361b}{720} - \frac{121c}{240} + \frac{181}{720}, \quad b, c \in \mathcal{H} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{691bc}{720} - \frac{169b}{360} - \frac{43c}{90} + \frac{7}{30}, \quad b, c \in \mathcal{I} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{703bc}{720} - \frac{29b}{60} - \frac{347c}{720} + \frac{341}{1440}, \quad b, c \in \mathcal{J} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{47bc}{48} - \frac{29b}{60} - \frac{29c}{60} + \frac{341}{1440}, \quad b, c \in \mathcal{K} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{239bc}{240} - \frac{179b}{360} - \frac{119c}{240} + \frac{89}{360}, \quad b, c \in \mathcal{L} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{719bc}{720} - \frac{359b}{720} - \frac{c}{2} + \frac{1}{4}, \quad b, c \in \mathcal{M} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{241bc}{240} - \frac{121b}{240} - \frac{361c}{720} + \frac{181}{720}, \quad b, c \in \mathcal{N} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{239bc}{240} - \frac{119b}{240} - \frac{179c}{360} + \frac{89}{360}, \quad b, c \in \mathcal{O} \\ \frac{b^2c^2}{4} - \frac{b^2c}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{721bc}{720} - \frac{361b}{720} - \frac{361c}{720} + \frac{181}{720}, \quad b, c \in \mathcal{P}, \end{array} \right.$$

$$K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, c) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{133ac}{144} - \frac{83a}{180} - \frac{83c}{180} + \frac{83}{360}, \quad a, c \in \mathcal{A} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{77ac}{80} - \frac{29a}{60} - \frac{113c}{240} + \frac{17}{72}, \quad a, c \in \mathcal{B} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{691ac}{720} - \frac{43a}{90} - \frac{169c}{360} + \frac{7}{30}, \quad a, c \in \mathcal{C} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{719ac}{720} - \frac{a}{2} - \frac{359c}{720} + \frac{1}{4}, \quad a, c \in \mathcal{D} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{77ac}{80} - \frac{113a}{240} - \frac{29c}{60} + \frac{17}{72}, \quad a, c \in \mathcal{E} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{713ac}{720} - \frac{353a}{720} - \frac{353c}{720} + \frac{347}{1440}, \quad a, c \in \mathcal{F} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{703ac}{720} - \frac{347a}{720} - \frac{29c}{60} + \frac{341}{1440}, \quad a, c \in \mathcal{G} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{241ac}{240} - \frac{361a}{720} - \frac{121c}{240} + \frac{181}{720}, \quad a, c \in \mathcal{H} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{691ac}{720} - \frac{169a}{360} - \frac{43c}{90} + \frac{7}{30}, \quad a, c \in \mathcal{I} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{703ac}{720} - \frac{29a}{60} - \frac{347c}{720} + \frac{341}{1440}, \quad a, c \in \mathcal{J} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{47ac}{48} - \frac{29a}{60} - \frac{29c}{60} + \frac{341}{1440}, \quad a, c \in \mathcal{K} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{239ac}{240} - \frac{179a}{360} - \frac{119c}{240} + \frac{89}{360}, \quad a, c \in \mathcal{L} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{719ac}{720} - \frac{359a}{720} - \frac{c}{2} + \frac{1}{4}, \quad a, c \in \mathcal{M} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{241ac}{240} - \frac{121a}{240} - \frac{361c}{720} + \frac{181}{720}, \quad a, c \in \mathcal{N} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{239ac}{240} - \frac{119a}{240} - \frac{179c}{360} + \frac{89}{360}, \quad a, c \in \mathcal{O} \\ \frac{a^2c^2}{4} - \frac{a^2c}{2} - \frac{ac^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{721ac}{720} - \frac{361a}{720} - \frac{361c}{720} + \frac{181}{720}, \quad a, c \in \mathcal{P}. \end{array} \right.$$

Vzorce trojrozměrných Sardových jader $K_{1,0,0}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c)$, $K_{0,1,0}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c)$ a $K_{0,0,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c)$ jsou dlouhé a značně komplikované, proto je zde neuvádíme.

Tyto funkce dosadíme do vzorce pro chybový člen $E_{64}f$ Rombergovy kubaturní formule $T_{2,0}^{(3)}$, tedy do vzorce

$$\begin{aligned}
E_{64}f &= \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(a) f_{4,0,0}(a, 0, 0) da + \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(b) f_{0,4,0}(0, b, 0) db + \\
&+ \frac{1}{3!} \int_0^1 K_3^{T_{2,0}^{(3)}}(c) f_{0,0,4}(0, 0, c) dc + \\
&+ \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(a) f_{3,1,0}(a, 0, 0) da + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(a) f_{3,0,1}(a, 0, 0) da + \\
&+ \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(b) f_{1,3,0}(0, b, 0) db + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(b) f_{0,3,1}(0, b, 0) db + \\
&+ \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(c) f_{1,0,3}(0, 0, c) dc + \frac{1}{2!} \int_0^1 K_2^{T_{2,0}^{(3)}}(c) f_{0,1,3}(0, 0, c) dc + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b) f_{2,2,0}(a, b, 0) dadb + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(b, c) f_{0,2,2}(0, b, c) dbdc + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 K_{1,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, c) f_{2,0,2}(a, 0, c) dadc + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{1,0,0}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{2,1,1}(a, b, c) dadbdc + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,1,0}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{1,2,1}(a, b, c) dadbdc + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{0,0,1}^{T_{2,0}^{(3)}}(a, b, c) f_{1,1,2}(a, b, c) dadbdc.
\end{aligned}$$

Použitím Hölderovy nerovnosti pro $p = 2$ získáme odhad

$$|E_{64}f| \leq 0.560 \cdot \|f\|_{4,2}.$$

5.6 Shrnutí

V této kapitole jsem se zabývali studiem Rombergovy kubaturní formule na jednotkovém čtverci a na jednotkové krychli. Zajímali jsme se především o to, zda se dobré vlastnosti Rombergovy kvadraturní formule přenášejí na její vícerozměrný případ.

Jak je vidět z výše uvedených vzorců, Rombergova kubaturní formule není obecně pozitivní kubaturou. Na jednotkovém čtverci ztrácí Rombergův kubaturní vzorec $T_{k,0}^{(2)}$, kde $k \in \mathbb{N}$, pozitivitu poprvé pro $k = 2$, u Rombergovy kubaturní formule $T_{k,0}^{(3)}$, kde $k \in \mathbb{N}$, dochází k této ztratě již pro $k = 1$. Nemáme tedy zaručenu konvergenci těchto kubaturních formulí pro spojitě funkce.

Sardova jádra Rombergovy kubaturní formule i pro vyšší řády mění své znaménko, což dokládají vzorce těchto jader a jejich grafy.

Dobrou vlastností, která zůstává pro vícerozměrný případ Rombergovy kubatury zachována, je vyšší algebraický stupeň přesnosti než u lichoběžníkového pravidla.

Závěr

V práci jsme definovali Peanovo jádro kvadraturní formule, která operuje pouze s funkčními hodnotami integrované funkce v uzlových bodech. Popisali jsme některé jeho vlastnosti a ukázali jsme, jak je možné využít Peanovo jádro k odhadu chybového členu kvadraturního vzorce a to v případě, kdy má Peanovo jádro na celém intervalu integrace konstantní znaménko, i v případě, že Peanovo jádro znaménko mění. Dále jsme zobecnili pojem stupně přesnosti kvadraturní formule a tím i pojem Peanova jádra, které nyní umíme nalézt i pro kvadraturní formule obsahující kromě funkčních hodnot integrované funkce i hodnoty jejích derivací.

Dále jsme se v práci zabývali hledáním optimální kvadraturní formule. Zavedli jsme pojmy optimální kvadraturní formule v Sardově, v Markovově a v Nikolského smyslu. Přičemž nalezení poslední jmenované kvadratury jsme se podrobně věnovali jak pro kvadraturní formule neobsahující hodnoty derivací integrované funkce, tak i pro kvadratury operující s těmito hodnotami. Pro jednoduchost jsme se zabývali aproximací integrálu pouze s jednotkovou váhovou funkcí. Všechny úvahy by bylo možné zobecnit pro netriviální váhové funkce.

Dalším tématem, kterým jsme se zabývali, bylo hledání Rombergovy kvadraturní a posléze i kubaturní formule. Zavedli jsem pojem Sardových jader kubaturní formule na čtverci a na krychli. Podrobně jsme se věnovali lichoběžníkovému pravidlu a Rombergově kubaturní formuli a příslušným Sardovým jádrům, která jsme poté využili k odhadu chybového členu těchto kubatur.

Literatura

- [1] David P., Rabinowitz P.: *Numerical integration*, Blaidell, Boston, 1967.
- [2] Engles H.: *Numerical quadrature and cubature*, Academia Press, London, 1980.
- [3] Ghizzetti A., Ossicini A.: *Quadrature formulae*, Academie-Verlang, Berlin, 1970.
- [4] Girshovich J., Levin M.: *Optimal quadrature formulas*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979.
- [5] Sard A.: *Linear approximation*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1963.
- [6] Segethová J.: *Základy numerické matematiky*, Karolinum, Praha, 2002
- [7] Valešová P.: *Peanovo jádro kvadrurní formule*, Bakalářská práce, 2007.
- [8] Vitásek E.: *Numerické metody*, SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987.