MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Marek Raclavský

Algebraické nerovnice nad reálnými čísly

Katedra algebry

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematické struktury

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. RNDr. Janu Šťovíčkovi, Ph.D. za odborné vedení diplomové práce, za cenné připomínky a v neposlední řadě za jeho optimistický přístup.

Název práce: Algebraické nerovnice nad reálnými čísly

Autor: Marek Raclavský

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: Tato práce zkoumá semialgebraické množiny, tedy množiny definované jako konečná sjednocení řešení konečné soustavy polynomiálních nerovnic. Představíme koncept válcového rozkladu, který využijeme jako nástroj pro sestrojení stratifikačního rozkladu a triangulace semialgebraické množiny. Na tomto základě dokážeme několik důležitých a známých výsledků reálné algebraické geometrie, jako je Hardtova věta o semialgebraické trivialitě nebo Sardova věta. S využitím Morseho teorie nakonec dokážeme Thom-Milnorovu nerovnost na součet Bettiho čísel reálné algebraické množiny.

Klíčová slova: reálná algebraická geometrie, semialgebraická množina, stratifikace, válcový rozklad, Morseho funkce, Thom-Milnorova nerovnost

Title: Algebraic inequalities over the real numbers

Author: Marek Raclavský

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: This thesis analyses the semialgebraic sets, that is, a finite union of solutions to a finite sequence of polynomial inequalities. We introduce a notion of cylindrical algebraic decomposition as a tool for the construction of a semialgebraic stratification and a triangulation of a semialgebraic set. On this basis, we prove several important and well-known results of real algebraic geometry, such as Hardt's semialgebraic triviality or Sard's theorem. Drawing on Morse theory, we finally give a proof of a Thom-Milnor bound for a sum of Betti numbers of a real algebraic set.

Keywords: real algebraic geometry, semialgebraic set, stratification, cylindrical decomposition, Morse function, Thom-Milnor bound

Obsah

Úvod

Řešení systému polynomiálních rovnic a nerovnic je v nějaké podobě už odpradávna předmětem zájmu mnoha matematiků. Upřesněním pojmu řešení se profilují směry matematického zkoumání. Klasická algebraická geometrie zkoumá nuly soustavy nad algebraicky uzavřenými tělesy, ve kterých má každý nekonstantní polynom kořen. Nad reálnými čísly tato vlastnost zřejmě neplatí, není tedy možné použít celou paletu metod a výsledků, které klasická algebraická geometrie nabízí. V reálném případě bude nezbytné zaobírat se při zkoumání soustavy nul polynomiálních rovnic současně soustavou nerovnic. Uvažme kupříkladu rovnici kružnice se zadaným poloměrem. Nad algebraicky uzavřenými tělesy závisí podoba nul této rovnice na tom, zda je poloměr nulový, ale nad reálnými čísly je pro popis chování nul důležité navíc vědět, zda je poloměr kladný nebo záporný. V případě záporného poloměru totiž reálné řešení ani neexistuje. Pro třídu reálných algebraických množin nejsme schopni zaručit ani tak základní vlastnost jako je uzavřenost na doplňcích.

Předmětem našeho zkoumání tedy budou semialgebraické množiny, které odpovídají konečnému sjednocení řešení konečně mnoha polynomiálních rovnic a nerovnic. Ukazuje se, že je to vhodně zvolená třída, neboť kromě uzavřenosti na doplňky a konečné průniky a sjednocení se navíc chová stabilně vůči projekci.

Podobně bude výhodné místo zkoumání řešení výhradně nad reálnými čísly přistoupit obecněji k tzv. reálně uzavřeným tělesům. Tato strategie se osvědčila již ve dvacátých letech dvacátého století, kdy Emil Artin pro tuto třídu těles řeší Hilbertův sedmnáctý problém. Tento přechod není pouze důsledkem motivace dosáhnout co nejobecnějších výsledků, v práci bude použit k dokázání jistých geometrických výsledků.

Představené změny tvoří jádro reálné algebraické geometrie. Na tomto základě rozvíjíme teorii, ve které bude nutné přehodnotit významy starých pojmů a představ, ať už z reálných čísel (např. pojem kompaktnosti) nebo z algebraicky uzavřeného tělesa (např. představu o počtu kořenů polynomu), a zavést semialgebraickou náhradu některých důležitých pojmů.

Poznatky plynoucí ze studia reálné algebraické geometrie často nachází své uplatnění nejen v ostatních matematických disciplínách, ale též napříč různými vědními obory. Reálné algebraické geometrie je využito mimo jiné v robotice, automatickém dokazování, ale také například v ekonomii.

Cílem práce je dokázat tzv. Thom-Milnorovu nerovnost, která omezuje součet Bettiho čísel algebraických množin v reálně uzavřeném tělese v závislosti na stupni a počtu proměnných definujících polynomů. Tato nerovnost speciálně omezuje počet souvislých komponent algebraické množiny a na jejím základě je možné kombinatorickým postupem odvodit nerovnost omezení na počet souvislých komponent semialgebraické množiny, které je jednoduše exponenciální v počtu proměnných. Toho se využívá při snaze o obcházení vysoké algoritmické složitosti válcového rozkladu (dvojitě exponenciální v počtu proměnných). Pro některá praktická využití postačuje algoritmus, který vybere reprezentační bod v každé souvislé komponentě semialgebraické množiny. Horní omezení počtu komponent pak hraje roli v otázkách o složitosti takového algoritmu, neboť ta jistě nemůže být menší než počet komponent semialgebraické množiny v nejhorším případě.

Práce je členěna do čtyř kapitol. První kapitola představuje základní objekty a výsledky reálné algebraické geometrie a podává k nim krátký komentář ve snaze, aby čtenáři méně obeznámenému s reálnou algebraickou geometrií poskytla stručné vysvětlení základů, které lze precizovat nahlédnutím do referované literatury. Podrobněji je zpracována sekce o zárodcích funkcí, neboť se zde jednak v elementární podobě objevují často používané způsoby dokazovaní a jednak je zde prezentována jejich geometrická a algebraická interpretace používaná v úsecích nadcházejících kapitol a moderní algoritmické semialgebraické geometrii.

Ve druhé kapitole prokážeme existenci rozkladu, od kterého požadujeme jistou válcovou strukturu a znaménkovou invarianci jeho částí vzhledem k zadaným polynomům. Důkaz bude probíhat přímou konstrukcí s využitím uzavřenosti semialgebraických množin na projekci. Dostaneme tak přímo návod, jak daný rozklad provést. Zapsaná jako formální algoritmus se konstrukce nazývá válcový rozklad (Cylindrical Algebraic Decomposition). Protože pro nás bude zajímavé především matematické tvrzení o samotné existenci rozkladu, nebudeme rozebírat konkrétní implementaci algoritmu nebo dokazovat jeho složitost. Pokusíme se zpracovat tuto techničtější část tak, aby bylo přehledně rozumět roli jednotlivých matematických předpokladů.

Válcový rozklad ve třetí kapitole rozšiřujeme natolik, aby bylo možné dostatečně porozumět topologické struktuře semialgebraických množin, a dospíváme ke stratifikačnímu rozkladu a triangulaci semialgebraické množiny. To nám umožní dokázat silný a často využívaný výsledek o trivialitě semialgebraického zobrazení. Kapitolu uzavíráme vyvozením několika důsledků pro topologii (semi)-algebraických množin.

V poslední kapitole dokážeme s využitím výsledků Morseho teorie Thom-Milnorovu nerovnost. Bude ovšem nutné upravit výchozí situaci takovým způsobem, abychom Morseho teorii mohli efektivně použít. K tomu budeme potřebovat důkaz Sardovy věty, významného výsledku, která tvrdí, že množina kritických hodnot není v jistém smyslu příliš velká. Abychom mohli mluvit o Bettiho číslech, zavedeme zde homologii uzavřených semialgebraických množin jako simpliciální homologii příslušné triangulace. Dále prokážeme existenci Morseho funkce na omezené nesingulární nadploše, což oprávní použití Morseho teorie v našem případě. Morseho teorie nám v oboru reálných čísel poskytne přehled o topologii algebraické množiny postačující k tomu, abychom byli schopni dokázat Thom-Milnorovu větu pro reálná čísla. Práci uzavřeme důkazem nerovnosti v obecném reálně uzavřeném tělese.

Práce zakládá převážně na výsledcích prezentovaných v knihách [1] a [2]. Kniha [1] zaujímá převážně teoretičtější přístup, s většími myšlenkovými skoky v důkazech. Oproti tomu, kniha [2] se zabývá reálnou algebraickou geometrií především z algoritmického hlediska, přičemž se snaží vybudovat potřebné výsledky od elementárních základů, dokazujíc tak i známé výsledky jiných teorií. Výsledkem je obsáhlé kompendium rozličných drobných i větších výsledků, ve kterém se čtenář, který není předem s problematikou dostatečně obeznámen, nesnadno orientuje. Při postupném pročítání knihy je zase čtenář často zahlcen méně důležitými výsledky, které zpětně znesnadňují pochopení cesty k dané větě a tím ztěžují její úplné pochopení. V práci je věnována péče výběru pokud možno takových výsledků, aby cesta k Thom-Milnorově nerovnosti byla co nejvíce názorná a přímá.

Kapitola 1

Úvod do reálné algebraické geometrie

V této kapitole zavedeme reálně uzavřená tělesa a odůvodníme, proč právě jejich studium je přirozené, máme-li se zabývat řešením soustavy polynomiálních rovnic a nerovnic. První sekce je tvořena přehledovým výběrem z první, druhé a páté kapitoly knihy [1].

1.1 Základní pojmy a výsledky

Definice 1. *Uspořádání tělesa $\mathbb{F}$ je úplné uspořádání $\leq$, kompatibilní s operacemi $+$ a $\cdot$, to jest splňující pro všechna $x,y,z \in \mathbb{F}$:*

1. $x \leq y \implies x + z \leq y + z$
2. $0 \leq x, 0 \leq y \implies 0 \leq xy$.

Dvojici $(\mathbb{F}, \leq)$, kde $\leq$ je uspořádáním tělesa $\mathbb{F}$, nazveme uspořádané (též reálné) těleso.

Definice 2. *Reálně uzavřené těleso je uspořádané těleso, které nemá netriviální uspořádané algebraické rozšíření.*

V práci bude reálně uzavřenému tělesu vyhrazen symbol R.

Povšimněme si, že uspořádaná tělesa mají charakteristiku nula, obsahují tedy nekonečně mnoho prvků.

Věta 1. *Pro $\mathbb{F}$ těleso je následující ekvivalentní:*

1. *$\mathbb{F}$ je reálně uzavřené*
2. *Kladné prvky $\mathbb{F}$ jsou právě čtverce v $\mathbb{F}$ a každý polynom lichého stupně má v $\mathbb{F}$ kořen.*
3. *Je-li $P \in R[X]$ separabilní polynom, $a,b \in R$, $a < b$, a $P(a)P(b) < 0$, pak existuje $x \in R$, $a < x < b$, které je kořenem P.*
4. *Okruh $\mathbb{F}[i] = F[X]/(X^2 + 1)$ je algebraicky uzavřené těleso.*

Důkaz. Důkaz ekvivalence vlastností 1,2,4 lze najít v [1] jako Theorem 1.2.2. a ekvivalence s vlastností 3 v [2] jako věta 2.11. společně s lemmatem 3.12.

□

Uspořádání zde hraje důležitou roli. Pokud bychom pracovali pouze v jazyce okruhů $\{+,\cdot,0,1\}$, připravili bychom se o eliminaci kvantifikátorů, která je úhelným kamenem spojující logiku prvního řádu a řešení polynomiálních nerovnic. K eliminaci formule $\exists z \in R \mid x + z^2 = y$, odpovídající podle druhé podmínky charakterizace reálně uzavřených těles uspořádání $x \leq y$, je nezbytné dokázat v jazyce hovořit o uspořádání.

Definice 3. *Reálným rozšířením uspořádaného tělesa $\mathbb{F}$ nazveme uspořádané těleso $\mathbb{F}' \supseteq \mathbb{F}$, jehož uspořádání rozšiřuje uspořádání na $\mathbb{F}$. Reálný uzávěr je pak algebraické reálné rozšíření, které je zároveň reálně uzavřené.*

Věta 2. *Každé uspořádané těleso $(\mathbb{F}, \leq)$ má reálný uzávěr. Jsou-li R,R' dva reálné uzávěry $(\mathbb{F}, \leq)$, pak existuje jediný $\mathbb{F}$-isomorfismus $R \mapsto R'$.*

Důkaz. Jedná se o větu 1.3.2. v knize [1].

□

Základním příkladem reálně uzavřeného tělesa je těleso reálných čísel $\mathbb{R}$. Dále nám bude užitečné znát v jistém smyslu nejmenšího zástupce této rodiny. Každé těleso charakteristiky nula obsahuje podtěleso izomorfní racionálním číslům $\mathbb{Q}$, jejich reálným uzávěrem jsou reálná algebraická čísla, která budeme značit symbolem R_{alg}. Je tedy $R_{\text{alg}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}[X],\, p \neq 0,\, p(x) = 0\}$.

Obě výše uvedená tělesa jsou archimédovská, my budeme ale potřebovat pracovat také s infinitesimální hodnotou. Důležitým a užitečným příkladem nearchimédovského reálně uzavřeného tělesa jsou tzv. Puiseuxovy řady.

Definice 4. *Puiseuxova řada v proměnné ϵ s koeficienty v tělese $\mathbb{F}$ je formální suma tvaru*

$$a = \sum_{i \geq k} a_i \epsilon^{\frac{i}{q}},$$

kde $k,i \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{F}, q \in \mathbb{N}$. Číslo k/q nazveme řádem řady a.

Těleso Puiseuxových řad v ϵ a s koeficienty v R reálně uzavřeném tělese je reálně uzavřené těleso, označované symbolem $R\langle\langle\epsilon\rangle\rangle$, jehož kladné prvky jsou Puiseuxovy řady s kladným počátečním koeficientem (důkaz je dostupný v sekci 2.6 knihy [2]). Prvek ϵ je kladný a menší, než libovolné kladné $r \in R$, neboť $r - \epsilon > 0$. Říkáme, že je infinitesimální nad R, nebo krátce infinitesimální. V $R(\epsilon)$ lze podobně jediným způsobem zavést uspořádání, ve kterém je ϵ infinitesimální.

My budeme pracovat s reálným uzávěrem $R(\epsilon)$, nazývaným algebraické Puiseuxovy řady $R\langle\epsilon\rangle$, protože prvky tohoto tělesa jsou tvořeno prvky $R\langle\langle\epsilon\rangle\rangle$, které jsou algebraické nad $R(\epsilon)$. Algebraické Puiseuxovy řady nezáporného řádu tvoří valuační okruh označovaný symbolem $R\langle\epsilon\rangle_b$, jenž se skládá z prvků $R\langle\epsilon\rangle$, jejichž absolutní hodnota se dá omezit prvkem z R. Na algebraických Puiseuxových řadách nezáporného řádu má význačné postavení dosazovací okruhový homomorfismus $\lim_\epsilon$ posílající řadu $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i \epsilon^{\frac{i}{q}}$ na koeficient a_0 (tedy dosazující za proměnnou ϵ hodnotu nula).

Pokud nebude uvedeno jinak, považujeme obecné reálně uzavřené těleso R za základní prostředí, ve kterém se pohybujeme.

Následující množiny přirozeně vyvstanou, řešíme-li polynomiální rovnice a nerovnice

Definice 5. *Nechť $\mathscr{P}$ je konečná množina polynomů z $R[X_1, \ldots, X_n]$. Nuly $\mathscr{P}$ definujeme jako*

$$V(\mathscr{P}) = \{x \in R^n \mid \bigwedge_{P \in \mathscr{P}} P(x) = 0\}$$

Algebraická množina v R^n je množina, která je tohoto tvaru pro nějaký soubor polynomů $\mathscr{P}$.

V reálně uzavřeném tělese můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat algebraické množiny jako nuly jediného polynomu. Nuly souboru $\mathscr{P}$ jsou právě nulami polynomu $\sum_{P \in \mathscr{P}} P^2$. Nuly jednoho polynomu P budeme zapisovat jako $V(P)$.

Definice 6. *Semialgebraická množina v R^n je množina tvaru*

$$\bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in R^n \mid P_{i,j} *_{i,j} 0\},$$

kde pro $i = 1, \ldots, s$ a $j = 1, \ldots, r_i$ je $P_{i,j} \in R[X_1, \ldots, X_n]$, a kde symbol $*_{i,j}$ zastupuje jeden ze symbolů $<, =$. Semialgebraickou množinu lze také obecněji definovat nad D uspořádaným poddokruhem R, a to v případě, že koeficienty každého z polynomů $P_{i,j}$ výše jsou z D.

Semialgebraické množiny odpovídají množinám řešení konečných soustav polynomiálních rovnic a nerovnic nad R zadané příslušnými rovnostmi a nerovnostmi. Ekvivalentně můžeme hovořit o nejmenší třídě množin uzavřené na doplňky, konečné průniky a konečná sjednocení obsahující algebraické množiny a množiny tvaru $\{x \in R^n \mid P(x) > 0\}$.
Poznamenejme, že také množiny zadané ostrou nebo neostrou nerovností, tedy například $\{x \in R^n \mid P(x) < 0\}$ nebo $\{x \in R^n \mid P(x) \leq 0\}$, jsou z definice semialgebraické.

Věta 3. *(Eliminace kvantifikátorů) Uvažujme $\phi(X_1, \ldots, X_k)$ formuli prvního řádu v jazyce uspořádaných okruhů $\{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$ s koeficienty v D, uspořádaném podokruhu R. K této formuli existuje formule $\psi(X_1, \ldots, X_k)$ nebsahující kvantifikátory a s koeficienty v D taková, že pro všechna $x \in R^k$ platí $\phi(x)$ právě když platí $\psi(x)$.*

Důkaz. Důkaz probíhá technickým rozborem chování polynomů, vystupující ve formuli ϕ. Pomocí Sturmovy posloupnosti je možné nalézt kořeny polynomu jedné proměnné a určit znaménka na intervalech jimi vymezenými. Cenou za tuto informaci je přidávání dalších polynomů do vyšetřované množiny. Tím dostaneme algoritmus, který postupně prochází vázané proměnné a nahrazuje je novými formulemi, které zaznamenávají, kde je pravdivá. Čtenář může konkrétní podobu nosné části důkazu najít v sekci 1.4 knihy [1] a rozbor jeho důsledků v sekci 5.2 tamtéž.

□

Pro sentence máme speciálně algoritmus, který dovede určit jejich pravdivost. Například sentenci $\phi = \exists a \forall b \forall c \exists x (ax^2 + bx + c = 0)$ nahradí tímto způsobem:

$$\phi \leftrightarrow \exists a \forall b \forall c (b^2 - 4ac \geq \wedge a \neq 0) \vee (a = 0 \wedge b \neq 0) \vee (a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists a \forall b (a = 0 \wedge b \neq 0) \leftrightarrow \perp .$$

Přestože je tento výsledek v teoretické rovině velmi silný, jeho praktické použití sledováním důkazu v této podobě je znemožněno vysokou algoritmickou složitostí, která se nedá exponenciálně omezit.

Eliminaci kvantifikátorů můžeme ihned použít k odvození několika užitečných důsledků. Všechny množiny, které můžeme zapsat formulemi prvního řádu jsou semialgebraické. Definující formuli převedeme do prenexního normálního tvaru, eliminujeme kvantifikátory a upravíme do konjuktivně normálního tvaru.

Důsledek. Semialgebraické množiny jsou právě definovatelné množiny.

Jistě ne všechny množiny jsou semialgebraické. Uveďme například množinu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists n \in \mathbb{N}, y = nx\}$, která není definovatelná, tedy ani semialgebraická (kvantifikujeme přes přirozená čísla). Jiným příkladem je graf exponenciály v $\mathbb{R}^2$.

Projekce $\pi : R^{k+1} \mapsto R^k$ je zobrazení zapomínající poslední souřadnici, to jest přiřazující vektoru $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ vektor $(x_1, \ldots, x_k)$. Projekci množiny $M \in R^{k+1}$ můžeme zapsat jako

$$\pi(M) = \{x \in R^k \mid \exists m \in R, (x,m) \in M\}.$$

To se dá též přepsat pomocí formule a eliminací kvantifikátorů dostáváme další důsledek.

Důsledek. Pro S semialgebraickou množinu v R^{k+1} definovanou nad D je její projekce $\pi(S)$ opět semialgebraická množina definovaná nad D.

Ukazuje se, jak dobře zvolená je definice semialgebraické množiny. Pro algebraické množiny tato vlastnost projekce neplatí. Jednoduchým protipříkladem je jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ se středem v počátku souřadnic, jejíž projekce nám dává uzavřený interval $\langle -1,1 \rangle$, což není algebraická množina.
Další důsledek nám umožní přenášet semialgebraické množiny mezi reálně uzavřenými tělesy.

Důsledek. (Tarskiho-Seidenbergův princip) Mějme R' reálně uzavřené těleso obsahující reálně uzavřené těleso R. Sentence ϕ s koeficienty v R platí v R právě když platí v R'.

Protože každé reálně uzavřené těleso obsahuje racionální čísla $\mathbb{Q}$ a jejich reálný uzávěr R_{alg}, sentence s koeficienty v $\mathbb{Q}$ nebo R_{alg} platí v nějakém reálně uzavřeném tělese právě když platí v libovolném reálně uzavřeném tělese.

Definice 7. *Nechť R a R' jsou reálně uzavřená tělesa tak, že $R \subseteq R'$, a $S \subseteq R^k$ semialgebraická množina definovaná formulí bez kvantifikátorů $\phi(X_1, \ldots, X_k)$. Rozšíření S do R' je semialgebraická množina $Ext(S,R') = \{x \in R'^k \mid \phi(x)\}$.*

Oprávněnost této definice je zaručena Tarskiho-Seidenbergovým principem, který nám garantuje, že nezávisí na výběru definující formule. Jsou-li totiž ϕ, ψ dvě formule definující S, sentence $\exists x \phi(x) \wedge \neg\psi(x)$ neplatí v R, tedy neplatí ani v R'. Podobně se dá ukázat, že přiřazení $S \mapsto Ext(S,R')$ zachovává operace konečných průniků, konečných sjednocení, doplňků a relaci „být podmnožinou“. Viděli jsme, že projekce zachovává semialgebraické množiny. Podívejme se nyní na třídu objektů s touto vlastností.

Definice 8. *Nechť $S \subseteq R^k$ a $T \subseteq R^l$ jsou semialgebraické množiny. Funkci $f : S \mapsto T$ nazveme semialgebraickou funkcí, jestliže její graf Graf(f) je semialgebraická množina v R^{k+l}.*

Tvrzení 4. *Nechť $S \subseteq R^k$,$T \subseteq R^l$,$U \subseteq R^m$, $S' \subseteq S$,$T' \subseteq T$ jsou semialgebraické množiny a $f : S \mapsto T$ a $g : T \mapsto U$ jsou semialgebraická funkce. Pak platí:*

1. *$f(S')$ i $f^{-1}(T')$ jsou semialgebraické množiny,*
2. *$g \circ f$ je semialgebraická funkce,*
3. *semialgebraické funkce z S do R tvoří okruh,*
4. *pro R' reálně uzavřené těleso obsahující R, Ext(f,R') :Ext(S,R') $\mapsto$ Ext(T,R') je semialgebraická funkce s grafem Ext(Graf(f)),*
5. *Ext($f(S')$,R') =Ext(f,R')Ext(S', R').*

Důkaz. Zapíšeme vyšetřované množiny jako jisté projekce a užijeme její stability.

1. Množina $f(S')$ je projekcí množiny $(S' \times T) \cap \mathrm{Graf}(f)$ na T.
2. Graf $g \circ f$ je projekce množiny $(\mathrm{Graf}(f) \times R^m) \cap (R^k \times \mathrm{Graf}(g))$.
3. Součet dvou semialgebraických funkcí z a,b : $S \mapsto R$ se dá vyjádřit jako složení funkce $(a,b) : S \mapsto R^2$ se semialgebraickou funkcí $+ : R^2 \mapsto R$.
4. Vlastnost „být grafem"funkce z S do T lze zapsat pomocí formule prvního řádu.

Zbývající vlastnosti se dokáží podobně.

□

Na R^k zavedeme eukleidovskou topologii, což nám umožní pracovat s vybranými topologickými a analytickými pojmy. Pro $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k, r \in R$, $r > 0, z \in R[i]$ bude v našem značení

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$	eukleidovská norma,
$B_k(x,r) = \{y \in R^k \mid \|y - x\|^2 < r^2\}$	otevřená koule,
$\overline{B}_k(x,r) = \{y \in R^k \mid \|y - x\|^2 \leq r^2$	uzavřená koule,
$S^{k-1}(x,r) = \{y \in R^k \mid \|y - x\|^2 = r^2\}$	$k-1$ sféra,
$D(z,r) = \{w \in R[i] \mid \|z - w\| < r\}$	otevřený disk,
$(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$	otevřený interval s vlastními mezemi,
$\langle a,b \rangle = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	uzavřený interval s vlastními mezemi,
$(a, \infty) = \{x \in R \mid a < x\}$	interval s nevlastní mezí.

Všimněme si,že $B_k(x,r), \overline{B}_k(x,r)$ a $S^{k-1}(x,r)$ jsou semialgebraické množiny. V zájmu lepší čitelnosti vypouštíme ze značení x,r, nebo k, pokud jsou jejich hodnoty zřejmé z kontextu.
S tímto značením můžeme formulovat základní pojmy z topologie a matematické analýzy.

- Množina $U \subseteq R^k$ je otevřená pokud $\forall x \in U\ \exists r \in R, r > 0, B(x,r) \subseteq U$.
- Uzávěrem množiny $S \subseteq R^k$ je míněna množina

$$\overline{S} = \{x \in R^k \mid \forall x > 0\ \exists y \in S :\ \|y - x\|^2 < r^2\}.$$

- Vnitřek množiny $S \subseteq R^k$ je množina

$$S^\circ = \{x \in S \mid \exists r > 0\ \forall y :\ \|y - x\|^2 < r^2 \implies y \in S\}.$$

- Funkce $f : S \mapsto T$ je spojitá, pokud

$$\forall x \in S\ \forall r > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in S :\ \|y - x\| < \delta \implies \|f(y) - f(x)\| < r.$$

- Nechť $U \subseteq R^k$ je otevřená množina, $x_0 \in U$ a $f : U \mapsto R^l$ semialgebraická funkce. Píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ za

$$\forall r > 0 \exists \delta \forall x \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y_0\| < r.$$

- Funkce $f : (a,b) \mapsto R$ má v bodě $x_0 \in (a,b)$ derivaci $f'(x_0)$, pokud

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

  Pro T semialgebraickou množinu dále označme $C^m(U,T)$ množinu semialgebraické funkce, jejíž všechny parciální derivace do řádu m existují. Třídu C^∞ definujeme jako průnik všech $C^m(U,T)$ pro m konečné.

- Diferenciál funkce $f \in C^1$ v bodě x_0 je lineární zobrazení $df(x_0) : R^k \mapsto R^l$ zadané Jacobiho maticí

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{i=1,j=1}^{l,k} (x_0).$$

Pokud množiny U,S,T zmíněné výše jsou semialgebraické a f je semialgebraické zobrazení, lze definice ve výčtu zapsat pomocí formulí prvního řádu. Ukažme například, že formuli $\forall x \in S :\ \phi(x,y)$, kde $\phi(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ je nějaký požadavek vyjádřený formulí prvního řádu lze převést na formuli prvního řádu v jazyce uspořádaných okruhů. Je-li S zadána formulí $\psi(\mathbf{X})$, můžeme formálně psát

$$\forall x_1 \dots \forall x_k \psi(x_1, \dots, x_k) \implies \phi(x_1, \dots, x_k, y).$$

Vyvodíme, že uzávěr(vnitřek) semialgebraické množiny je semialgebraická množina a derivace semialgebraické funkce je semialgebraická funkce. Pozorujme také, že rozšíření se chová pěkně vůči topologii. Rozšíření $\mathrm{Ext}(S,R')$ je otevřená(uzavřená) množina, právě když je S otevřená(uzavřená) a $\mathrm{Ext}(\overline{S},R') = \overline{\mathrm{Ext}(S,R')}$.

Neplatí, že uzávěr množiny dostaneme nahrazením ostrých nerovností v definující formuli neostrými. Uvažujme množinu $\{x \in R \mid x^3 - x^2 > 0\}$. Její uzávěr je množina $\{x \in R \mid x \geq 1\}$, která neobsahuje nulu.

V reálně uzavřených tělesech neplatí, že uzavřené a omezené množiny lze charakterizovat vlastností existence konečného podpokrytí z libovolného otevřeného pokrytí, jako je tomu v $\mathbb{R}^k$. Lze totiž pokrýti uzavřený omezený interval $[0,1] \subseteq R_{alg}$ systémem otevřených množin v $[0,1]$

$$\{[0,r) \cup (s,1] | \; 0 < r < \pi/4 < s < 1; r,s \in R_{alg}\},$$

ze kterého nelze vybrat konečné podpokrytí.

Definice 9. *Říkáme, že semialgebraická množina S je semialgebraicky kompaktní, pokud je uzavřená a omezená.*

V práci budeme používat pojem kompaktní výhradně ve významu semialgebraicky kompaktní. Na konci této kapitoly dokážeme, že obraz kompaktní množiny při spojitém semialgebraickém zobrazení je kompaktní.

Semialgebraická zobrazení tvoří pro naše potřeby příliš širokou třídu. My se budeme v práci zabývat spojitými nebo spojitě diferencovatelnými semialgebraickými zobrazeními (do této třídy patří jistě polynomiální zobrazení, neboť používáme eukleidovskou topologii). Nepostradatelným nástrojem bude semialgebraická verze věty o implicitních funkcích.

Věta 5. *(Věta o implicitních funkcích) Nechť $(x_0,y_0) \in R^{k+l}$, U je otevřené okolí (x_0, y_0) a nechť platí:*

1. $f_i \in C^m(U, R^l)$,
2. $f_i(x_0, y_0) = 0$ *pro všechna* $i = 1, \ldots, l$,
3. $$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Y_1}(x_0, y_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial Y_l}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial Y_1}(x_0, y_0) & \ldots & \frac{\partial f_l}{\partial Y_l}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existují otevřená semialgebraická okolí $U \subseteq R^k$ bodu x_0 a $V \subseteq R^l$ bodu y_0 a funkce $\phi \in C^m(U,V)$ tak, že pro všechna $x \in U$ existuje právě jedno $\phi(x) \in V$ tak, že $f(x, \phi(x)) = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, l$.

Důkaz. Důkaz je možné najít v [1] jako tvrzení 2.9.7, případně jako větu 3.25 v [2].

□

1.2 Zárodky funkcí

Zárodky funkcí jsou jedním z matematických nástrojů v oblasti algebraické geometrie k popisu a porozumění lokálního chování funkcí. Vypracování sekce zakládá na práci prezentované v sekcích 3.3 a 3.4 knihy [2].

Definice 10. *Zárodky (semialgebraických) spojitých funkcí nad R napravo od počátku je množina (semialgebraických) spojitých funkcí s hodnotami v R, definovaných na nějakém intervalu tvaru $(0,t)$ pro $t \in R, t > 0$, modulo ekvivalence $\sim$ zadaná předpisem*

$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists t \in R, t > 0 \ \forall t' \in R, 0 < t' < t : \ f_1(t') = f_2(t').$$

Zárodek s reprezentantem f značíme $[f]_\sim$.

Tvrzení 6. *Zárodky (semialgebraických) spojitých funkcí nad R napravo od počátku tvoří reálně uzavřené těleso. Toto těleso je izomorfní s tělesem $R\langle\epsilon\rangle$.*

Důkaz. Sčítání na zárodcích definujeme jako zárodek součtu reprezentantů a podobně pro zbylé tělesové operace. Pro ilustraci ukážeme podrobněji, jak probíhá invertování zárodku. Máme-li zárodek $[f]_\sim$,kde f je definované na $(0,t)$, je množina nul f na $(0,t)$ semialgebraická, a tedy konečné sjednodení bodů a intervalů. Pokud tato množina obsahuje interval $(0,t')$, pro nějaké $t' \leq t$, jedná se zárodek nulové funkce. Jinak uvažujeme interval $(0,t'')$, na kterém f nenabývá nuly a tedy zde existuje inverze $1/f$, která je semialgebraická a spojitá, a tedy i zárodek $[1/f]_\sim$. Na $(0,t'')$ je navíc f ze spojitosti buď kladná, nebo záporná funkce, zárodky funkcí tedy tvoří reálné těleso.

Dokažme, že těleso je reálně uzavřené tím, že dokážeme vlastnost 3. z věty 1. Mějme separabilní polynom $\overline{P}(X) = [a_p]_\sim X^p + \ldots + [a_0]_\sim$ a zárodky $[a]_\sim, [b]_\sim$ tak, že $[a]_\sim < [b]_\sim$ a $\overline{P}([a]_\sim)\overline{P}([b]_\sim) < 0$. Přistoupením k reprezentantům definovaným na nějakém intervalu $(0,t') \subseteq R$ přepíšeme pro $t \in (0,t')$ polynom $\overline{P}$ na $P(t,Y) = a_p(t) + \ldots + a_0(t) \in R[X]$. Případným zmenšením intervalu jsme schopni zajistit, že $\deg(P) = p, P(t,a(t))P(t,b(t)) < 0$ a $\mathrm{nsd}(P(t,X), \partial P/\partial X(t,X)) = 1$ (může být třeba zmenšit interval natolik, aby na něm byly zárodky funkcí vystupující v rozšířeném Eukleidově algoritmu definované). Tím jsme se situaci přenesli do reálně uzavřeného tělesa R, ve kterém má polynom $P(t,X)$ z věty 1 pro všechna $t \in (0,t')$ kořen v $(a(t), b(t))$.

Formulí prvního řádu

$$\phi_{l,t} = (\exists X_1, \ldots, \exists X_l \ X_1 < \ldots < X_l \wedge P(t,X_1) = 0 \wedge \ldots \wedge P(t,X_l) = 0$$
$$\wedge \ \forall X((P(t,X) = 0) \implies (X = X_1 \vee \ldots \vee X = X_l)))$$

zapisujeme tvrzení, že polynom $P(t,X)$ má právě l různých kořenů. Množiny $S_l = \{t \in (0,t') | \phi_{l,t}\}$, $0 \leq l \leq p$, jsou díky eliminaci kvantifikátorů semialgebraické a tvoří rozklad intervalu $(0,t')$. Interval $(0,t'')$ pro nějaké vhodně malé $t'' \in R$ je obsažen v jedné z těchto množin, řekněme S_m. Pro $1 \leq i \leq m$ definujeme $f_i : (0,t'') \mapsto R$ jako zobrazení přiřazující bodu t intervalu $(0,t'') \subseteq R$ i-tý kořen $P(t,X)$ v daném uspořádání R. Z věty 5 existuje semialgebraická spojitá funkce g_i definovaná na nějakém intervalu obsahujícím bod t, tak, že zde g_i zadává jednoduchý kořen P a $g_i(t) = f_i(t)$. Počet kořenů P je ale na $(0,t'')$ roven fixnímu l, g_i se tedy shoduje s funkcí f_i. Funkce f_i je tedy semialgebraické spojité zobrazení a jelikož existuje $i \in \{1, \ldots, m\}$ tak, že pro všechna $t \in (0,t'')$ je $a(t) < f_i(t) < b(t)$, $[f_i]_\sim$ je požadovaný zárodek a zárodky spojitých funkcí nad R napravo od počátku tvoří reálně uzavřené těleso z věty 1.

Zbývá dokázat, že se až na izomorfismus jedná o těleso $R\langle\epsilon\rangle$. Buď $[g]_\sim$ zárodek funkce napravo od počátku. Graf g definované na $(0,\bar{t}) \subseteq R$ lze jakožto semialgebraickou množinu zapsat jako nuly polynomu $\Pi_{i=1}^{r} Q_i \in R[Y,X]$, $Q_i \neq 0$ pro $i \geq 1, i \leq r$, a jako řešení nějakých polynomiálních nerovnic. Kdyby totiž nebylo možné vzít nenulový polynom definující rovnici, pro zvolené $t \in (0,\bar{t})$ by byl obraz $g(t)$ definován pomocí ostrých nerovností, tedy by to byl interval, což by neodpovídalo tomu, že g je semialgebraická funkce. Protože $\Pi_i Q_i(t,g(t)) = 0$ pro všechna $t \in (0,\bar{t})$, každý zárodek funkce je algebraický nad $R(\epsilon)$ uspořádaném jednoznačně tak, že ϵ je infinitesimální. Tvrzení je důsledkem jednoznačnosti reálných uzávěrů (věta 2).

□

Prvek $\epsilon \in R\langle\epsilon\rangle$ tedy odpovídá zárodku identického zobrazení. Shrňme si obecněji pro vícerozměrné zárodky funkcí, jak se prakticky projeví dualita mezi zárodky funkcí a algebraickými Puiseuxovými řadami.

Důsledek. Buď $S \subseteq R^k$ semialgebraická množina, g semialgebraická funkce na S a $[f]_\sim = ([f_1]_\sim, \ldots, [f_k]_\sim)$. Platí, že

$$[f]_\sim \in \mathrm{Ext}(S,R\langle\epsilon\rangle) \Leftrightarrow \exists t' > 0,\ \forall t:\ 0 < t < t',\ f(t) \in S$$

a

$$[f]_\sim \in \mathrm{Ext}(S,R\langle\epsilon\rangle) \Rightarrow \mathrm{Ext}(g,R\langle\epsilon\rangle)([f]_\sim) = [g \circ f]_\sim.$$

Speciálně, $\mathrm{Ext}(f,R\langle\epsilon\rangle)(\epsilon) = [f]_\sim$.

Důkaz. V důkazu 6 jsme viděli, že pro $P \in R[X_1, \ldots, X_k]$ platí v $R\langle\epsilon\rangle$ rovnost $P([f_1], \ldots, [f_k]) = 0$ právě tehdy, existuje-li interval $(0,t) \subseteq R$ tak, že pro všechna $t' \in (0,t)$ máme $P(f_1(t'), \ldots, f_k(t')) = 0$. Analogický výsledek platí pro nerovnost. Důsledek plyne z definice semialgebraické množiny a jejího rozšíření.

□

Tvrzení 7. *Buď ϕ sentence v jazyce uspořádaných okruhů s koeficienty v $R[\epsilon]$. Sentence ϕ platí v $R\langle\epsilon\rangle$ právě když existuje $t' \in R$ tak, že pro všechna $t \in R, 0 < t < t'$ platí $\phi'(t)$, formule získaná z ϕ substitucí t za výskyty prvku ϵ.*

Důkaz. Množina $S = \{t \in R | \phi'(t)\}$ je semialgebraická a tedy je sjednocením konečně mnoha bodů a intervalů. Pokud existuje $t' \in R$ tak, že $(0,t') \subseteq S$, pak také $(0,t') \subseteq \mathrm{Ext}(S,R\langle\epsilon\rangle)$ jako interval v $R\langle\epsilon\rangle$. Tím ale $\epsilon \in \mathrm{Ext}(S,R\langle\epsilon\rangle)$ a tedy $\phi'(\epsilon) = \phi$ platí v $R\langle\epsilon\rangle$. Pokud takové t' neexistuje, volme t'' tak, aby $(0,t'') \cap S$ byla prázdná. Pak i rozšíření $\mathrm{Ext}((0,t'') \cap S, R\langle\epsilon\rangle))$ je prázdné, a tedy ϕ neplatí v $R\langle\epsilon\rangle$.

□

Řekneme, že zárodek funkce je omezený, jestliže nějaký jeho reprezentant je omezená funkce. Z právě dokázané věty plyne, že je-li zárodek omezený jako prvek $R\langle\epsilon\rangle$, tedy patří-li do $R\langle\epsilon\rangle_b$, pak je omezený i jako zárodek. Na omezených zárodcích je homomorfismus $\lim_\epsilon$ dobře definovaný a má užitečnou geometrickou interpretaci.

Lemma 8. *Spojitou omezenou semialgebraickou funkci $f : (0,t) \mapsto R$ lze v nule spojitě dodefinovat hodnotou* $\lim_\epsilon([f]_\sim)$

Důkaz. Řád řady $\mathrm{Ext}(f,R\langle\epsilon\rangle) - \lim_\epsilon([f]_\sim)$ je ostře větší než nula, a tak je tato řada jako prvek $R\langle\epsilon\rangle$ infinitesimální. Pro všechna $r \in R, r > 0$ je tedy po dosazení ϵ za t splněna formule $\phi_r(t) = |f(t) - \lim_\epsilon([f]_\sim)| \leq r$ a lemma tak plyne z tvrzení 7.

□

Lemma 9. *Nechť g je spojitá semialgebraická funkce definovaná na kompaktní semialgebraické množině $S \subseteq R^k$ a $[f]_\sim = ([f_1]_\sim, \ldots, [f_k]_\sim) \in \mathrm{Ext}(S,R\langle\epsilon\rangle)$. Zárodek $[g \circ f]$ je omezený a*

$$g(\lim_\epsilon([f]_\sim)) = \lim_\epsilon([g \circ f]_\sim).$$

Důkaz. Označme $l = \lim_\epsilon([f]_\sim)$ a $\overline{f}$ funkci vzniklou z f spojitým dodefinováním v nule hodnotou l podle lemmatu 8, což je možné z omezenosti $[f]_\sim$ zaručené předpoklady. Z uzavřenosti S leží l v S. Využijeme opět podobný postup jako v předchozím důkazu a použijeme tvrzení 7 na formuli

$$\phi(s) = \forall r \exists r' : \ (\psi(s) \wedge ||s - l|| < r') \Rightarrow ||g(s) - g(l)|| < r,$$

kde ψ je formule definující S. Tvrzení lemmatu plyne z informace, že $[f]_\sim - l$ je menší než libovolné $r \in R, r > 0$, jelikož totéž platí z tvrzení 7 pro $||g \circ [f]_\sim - g(l)||$.

□

Následující lemma bude hrát důležitou roli ve třetí kapitole při sestavování stratifikačního rozkladu.

Lemma 10 (O výběru křivky)**.** *Nechť $S \subseteq R^k$ je semialgebraická množina a x bod uzávěru $\overline{S}$. Pak existuje spojité semialgebraické zobrazení $\gamma : [0,1) \mapsto R^k$ tak, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma((0,1)) \subseteq S$.*

Důkaz. Je-li $x \in \overline{S}$, pak $B(x,r) \cap S$ je neprázdná pro všechna kladná $r \in R$ a z Tarskiho-Seidenbergova principu tak můžeme volit $[f]_\sim \in B(x,\epsilon) \cap \mathrm{Ext}(S,R\langle\epsilon\rangle)$. Hodnoty funkce f definované na $(0,t')$ náleží $B(x,r) \cap S$. Podle lemmatu 8 můžeme f spojitě dodefinovat v nule, a odtud po patřičném přeškálování intervalu obdržet požadovanou křivku.

□

Věta 11. *Obraz kompaktní semialgebraické množiny S při spojitém semialgebraickém zobrazení g je kompaktní.*

Důkaz. Dokažme nejdříve, že $g(S)$ je uzavřená množina. Z předchozího lemmatu můžeme pro $x \in \overline{g(S)}$ volit $[f]_\sim \in \mathrm{Ext}(g(S),R\langle\epsilon\rangle)$ tak, že $\lim_\epsilon([f]_\sim) = x$. Z páté vlastnosti tvrzení 4 existuje $[f']_\sim \in \mathrm{Ext}(S,R\langle\epsilon\rangle)$ tak, že $[g \circ f']_\sim = [f]_\sim$. Uvažujme $\overline{f'}$ funkci vzniklou z f' spojitým dodefinováním v nule podle lemmatu 8, jehož předpoklady jsou splněny díky kompaktnosti S. Uzavřeme, že $g(\lim_\epsilon([f']_\sim)) = \lim_\epsilon([f]_\sim) = x$ z lemmatu 9, tedy $x \in g(S)$.

Množina $g(S)$ je rovněž omezená. Tvrdíme, že množina $T = \{t \in R | \ \exists x \in S : \ ||g(x)|| = t\}$ neobsahuje interval tvaru (t', ∞) pro $t' \in R, t' > 0$. Kdyby tomu tak bylo, množina $\mathrm{Ext}(T,R\langle\epsilon\rangle)$ by obsahovala prvek $1/\epsilon$, ale to by bylo ve sporu s lemmatem 9, ze kterého pro všechny $[f]_\sim \in \mathrm{Ext}(S,R\langle\epsilon\rangle)$ platí, že $[g \circ f]$ omezený.

$\square$

Kapitola 2

Válcový rozklad

Tato kapitola vychází z původního Collinsova článku [3], ale je poučena zpracováním knihy [2] (sekce 5.1) a knihy [1] (sekce 2.3, 4.2).

2.1 Přípravné práce

Buďte $P = a_p X^p + \ldots + a_0$ a $Q = b_q X^q + \ldots + b_0$ polynomy s koeficienty v $C = R[i]$, $p > q$ a pro $C[X]$ fixujme standardní monomiální bázi $\ldots, X^n, \ldots, X, 1$. Podle ní budeme ztotožňovat polynomy s vektorem koeficientů.

Definice 11. *Sylvestrova matice Syl*(P,Q) *je čtvercová matice*

$$\begin{pmatrix}
a_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\
b_q & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & b_q & \cdots & \cdots & \cdots & b_0
\end{pmatrix}$$

s $p+q$ *řádky a* $p+q$ *sloupci. Resultant polynomů* P *a* Q *Res* (P,Q) *je determinant Syl*(P,Q).

Pro $j \leq q, j \geq 0$, uvažujme zobrazení $s_j : C^{p-j} \times C^{q-j} \mapsto C^{p+q-j}$ dané předpisem $U,V \mapsto UP + VQ$.

Sylvestrova matice $\mathrm{Syl}(P,Q)$ odpovídá transponované matici zobrazení s_0. Pokud je navíc $j \geq 1$ můžeme matici transponovanou k matici zobrazení s_j najít v $\mathrm{Syl}(P,Q)$ jako podmatici s $p+q-2j$ řádky a $p+q-j$ sloupci vzniklou vypuštěním řádků a sloupců odpovídající restrikci na zúženou bázi.

Definice 12. *Vezměme prvních* $p + q - 2j$ *sloupců z právě popsané matice. Determinant této čtvercové matice budeme nazývat* j*-tý subresultant* P,Q *a značit jej* $sRes_j(P,Q)$. *Dodefinujme* $sRes_j = 0$ *pro* $q < j < p$ *a* $sRes_p = sgn(a_p)$.

Z interpretace j-tého subresultantu jako determinantu matice zobrazení s_j dostaneme následující lemma.

Lemma 12. *Platí, že*

$$\deg(\text{nsd}(P,Q)) = \min\{j \in \mathbb{N}_0 \mid sRes_j(P,Q) \neq 0).$$

Speciálně, $Res(P,Q) = 0$ právě když polynomy P a Q mají společného dělitele kladného stupně.

Důkaz. Viz větu 2 v článku [3] nebo tvrzení 4.24 v [2].

□

Nadále buďte P a Q monické. Uvažujme nyní zobrazení $m : C^p \times C^q \mapsto C^{p+q}$ na monických polynomech realizující jejich násobení, tedy

$$(a_{p-1}, \ldots, a_0, b_{q-1}, \ldots, b_0) \mapsto (c_{p+q-1}, \ldots, c_0),$$

$$c_j = \sum_{p-i+q-k=j} a_{p-i} b_{q-k},$$

pro $j = p+q-1, \ldots, 0$. Jacobiho matice tohoto zobrazení odpovídá transponované matici $\text{Syl}(P,Q)$.

Lemma 13. *Buďte P_0,Q_1,Q_2 monické polynomy stupňů po řadě p,q,r, Q_1,Q_2 nesoudělné, takové, že $P_0 = Q_1Q_2$. Pak existují okolí $U_1 \in C^p, U_2 \in C^q, U \in C^{p+q}$ tak, že každý monický polynom P z U lze jednoznačně zapsat jako součin $Q_1'Q_2'$, kde $Q_1' \in U_1, Q_2' \in U_2$ jsou monické nesoudělné polynomy.*

Důkaz. Z diskuze výše jsou P,Q nesoudělné právě když je $\text{Res}(P,Q)$ nenulový a to nastává právě když je nenulový Jakobián m. Tvrzení lemmatu pak plyne z věty 5 (o implicitních funkcích) po ztotožnění $C = R^2$.

□

2.2 Válcový rozklad

Po zbytek kapitoly budeme S značit semialgebraickou souvislou množinu v R^{k-1} a $\mathscr{P}$ neprázdnou konečnou množinu nenulových polynomů z $R[X_1, \ldots, X_k]$. Pro odlehčení zápisu budeme o polynomu $P \in \mathscr{P}$ říkat, že má na S nějakou vlastnost, pokud pro všechna $s \in S$ ji má polynom jedné proměnné $P(s, X_k)$. Dále budeme předpokládat, že žádný z polynomů $P \in \mathscr{P}$ se na S nenuluje.

Definice 13. *Množina $C \subseteq R^k$ je $\mathscr{P}$-invariantní, jestliže znaménko libovolného polynomu z $\mathscr{P}$ je na C konstantní.*

Definice 14. *Válec nad S je množina $S \times R$.*

Našim cílem bude rozložit prostor R^k na konečně mnoho buněk, tvořených souvislými semialgebraickými množinami, tak, aby mu byla vtisknuta jistá válcovitá struktura.

Definice 15. *Válcový rozklad R^k je posloupnost $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$, kde pro $i = 1, \ldots, k$ je $\mathcal{C}_i$ rozklad R^i na konečně mnoho semialgebraických množin, nazývaných i-buňky, splňující:*

- *Každá 1-buňka je buď bod nebo otevřený interval.*
- *Ke každé i-buňce C existuje konečně mnoho semialgebraických funkcí*

$$\xi_{C,1}, \ldots, \xi_{C,m_C} : C \mapsto R,$$

$$\xi_{C,1} < \ldots < \xi_{C,m_C}$$

  tak, že válec nad C je disjunktním sjednocením buněk z $\mathcal{C}_{i+1}$, které jsou dvou typů:

  1. *Graf jedné z funkcí $\xi_{C,i}$, nazývaný sekce.*
  2. *Část válce vymezená zdola $\xi_{C,i}$ a shora $\xi_{C,i+1}$ pro $i = 0, \ldots m_C$, kde $\xi_{C,0} = -\infty$ a $\xi_{C,m_C+1} = +\infty$. Tuto část budeme nazývat sektor.*

Válcový rozklad R^k vzhledem k $\mathscr{P}$ je válcový rozklad, jehož k-buňky jsou $\mathscr{P}$ invariantní.

Je-li $C' \subseteq R^{i+1}$ sekce nebo sektor válce nad i-buňkou C, projekce $\pi(C')$ je C. Válec nad C je disjunktním sjednocením svých sekcí a sektorů.
Algoritmus na hledání válcového rozkladu R^k vzhledem k $\mathscr{P}$ je rekurzivní a probíhá ve dvou fázích. V projekční fázi ze zadané množiny $\mathscr{P}$ polynomů v k-proměnných vytvoříme novou množinu polynomů v $k-1$ proměnných. Těchto nových polynomů bude typicky více, protože si budeme potřebovat uchovat informaci o chování v eliminované souřadnici. Opakováním tohoto postupu se dostaneme k množině polynomů jedné proměnné, vzhledem k níž umíme udělat válcový rozklad R.
Úkolem druhé, konstrukční fáze je sestrojit pro válce nad i-buňkami sekce a sektory tak, aby výsledkem byl válcový rozklad R^{i+1} vzhledem k množině polynomů v $i+1$ proměnných, která se nachází na zásobníku rekurze.

2.3 Konstrukční fáze

Nejprve budeme zkoumat, jaké podmínky musí být splněny, aby mohla proběhnout konstrukční fáze. To nás dovede k požadavkům na projekční operátory.

Definice 16. *Polynom $P \in R[X_1, \ldots, X_k]$, $k \geq 2$ je vymezitelný na $S \subseteq R^{k-1}$, pokud existuje $l,m \in \mathbb{N}_0$, $e_1, \ldots, e_l \in \mathbb{N}$ a spojité semialgebraické funkce $\xi_1, \ldots, \xi_m : S \mapsto R$, $\xi_1 < \ldots < \xi_m$ tak pro všechna $s \in S$ platí:*

1. *Polynom $P(s, X_k)$ má právě l různých komplexních kořenů násobností $e_1, \ldots, e_l$.*
2. *Reálné kořeny $P(s, X_k)$ jsou právě $\{\xi_1(s), \ldots, \xi_m(s)\}$.*

O funkcích $\xi_1, \ldots, \xi_m$ říkáme, že vymezují reálné kořeny. Množina $\mathscr{P}$ je vymezitelná, pokud jsou vymezitelné kořeny $\Pi_{P \in \mathscr{P}} P$

Pokud je P vymezitelný, má na S z definice konstantní stupeň, tedy vedoucí člen $P(s, X_k$ se pro $s \in S$ neznuluje, a konstantní počet komplexních kořenů. Ukážeme, že tato nutná podmínka je zároveňi postačující.
Vymezitelnost množiny polynomů si lze představit jako požadavek na neprotínání se grafů vymezujících funkcí příslušných různým polynomům. Vymezitelnost P na S zřejmě odpovídá vybudování k-buněk nad S příslušných cylindrickému rozkladu R^k vzhledem k P, pokud S je nějaká jeho $k-1$ buňka.

Lemma 14. *Pro komplexní kořen x polynomu $P = a_p X^p + \ldots + a_0$ s nenulovým vedoucím koeficientem a_p platí*

$$|x| \leq \max_{i=1,\ldots,p} \left(p \frac{|a_{p-1}|}{|a_p|} \right)^{\frac{1}{i}} =: M.$$

Důkaz. Je-li $z \in C$ a $|z| > M$, pak $|a_{p-i}| < |a_p||z|^i/p$ pro $i = 1, \ldots, p$. Odtud

$$|a_{p-1}z^{p-1} + \ldots + a_0| \leq |a_{p-1}||z|^{p-1} + \ldots + |a_0| < |a_p z^p|,$$

tedy $P(z) \neq 0$.

□

Věta 15. *Nechť* $\deg(P)$ *je konstantní na S. Pro zvolené $s \in S$ označme $z_1, \ldots, z_m$ po dvou různé (komplexní) kořeny $P(s, X_k)$ násobností $e_1, \ldots, e_m$. Oddělíme-li tyto kořeny disjunktními disky $D(z_i, r)$ s jednotným poloměrem r, najdeme okolí V bodu s tak, že pro každé $v \in V \cap S$ má $P(v,X_k)$ právě e_i kořenů v $D(z_i, r)$.*

Důkaz. Buď $P_0 = (X - z_1)^{e_1} \ldots (X - z_m)^{e_m}$. Z lemmatu 13 máme okolí $U \in C^{e_1+\ldots+e_m}, U_1 \in C^{e_1}, \ldots, U_m \in C^{e_m}$ polynomů $P_0, (X - z_1)^{e_1}, \ldots, (X - z_m)^{e_m}$ tak, že libovolný monický polynom $R \in U$ lze jednoznačně zapsat jako součin $Q_1 \ldots Q_m$ kde $Q_i \in U_i$, $i = 1, \ldots, m$.
Z lemmatu 14 se můžeme v U_i omezit na okolí U_i', ve kterém má každý monický polynom kořen v $D(z_i,r)$. Tím dáme vzniknout okolí $U' \subseteq U$, kde můžeme jednoznačně zapsat každý monický polynom jako součin monických polynomů z U_i'.
Volíme-li okolí V bodu s dostatečně malé na to, aby $P(s', X_k)$ patřilo do U' pro všechna $s' \in V \cap S$, dostáváme tvrzení věty.

□

Lemma 16. *Lokálně konstantní semialgebraická funkce $f : S \mapsto R$ na souvislé množině S je konstantní.*

Důkaz. Nechť f není konstatní. Pro $c \in f(S)$ jsou $f^{-1}(c)$ a $f^{-1}(f(S) \setminus \{c\})$ otevřené neprázdné disjunktní množiny, jejichž sjednocení je S.

□

Nyní jsme připraveni dokázat postačující podmínku pro vymezitelnost množiny polynomů.

Věta 17. *Nechť platí:*

1. *Pro všechny $P \in \mathscr{P}$ je* $\deg(P)$ *a počet různých komplexních kořenů konstantní na S.*

2. *Pro všechny $P, Q \in \mathscr{P}$ je* $\deg(\gcd(P,Q))$ *je konstantní na S.*

Pak $\mathscr{P}$ je vymezitelná.

Důkaz. Větu dokážeme pro $\mathscr{P} = \{P,Q\}$, obecný případ je pak nasnadě. Nechť $s \in S$ a $z_1, \ldots, z_l$ označují po dvou různé komplexní kořeny součinu $PQ(s, X_k)$ a čísla $e_1, \ldots, e_l$ po řadě jejich násobnosti jako kořeny polynomu $P(s,X_k)$ a $f_1, \ldots, f_l$ jejich násobnosti jako kořeny polynomu $Q(s, X_k)$. Volme $r > 0$ tak, aby $D(z_i, r)$ byly disjunktní. To je jistě možné pro r dostatečně malé, konkrétně $r < min_{i,j \in \{0,\ldots l\}} |z_i - z_j|/2$.
Prozkoumáme situaci, kdy je z_i kořenem obou polynomů P a Q. Tím pochopíme i to, co se děje v jednodušším případě, kdy je z_i kořenem právě jednoho z těchto polynomů. Potřebovali bychom vědět, že se lokálně kořeny nepřekříží, jejich násobnosti se nezmění a reálný kořen přejde na reálný kořen.
Z věty 15 a předpokladu 1 existuje okolí V bodu s tak, že P a Q mají na V v každém $D(z_i, r)$ právě jeden kořen násobnosti e_i,f_i. Z téže věty a předpokladu 2 existuje okolí V' bodu s tak, že $\mathrm{nsd}(P,Q)$ má právě jeden kořen násobnosti $\min(e_i, f_i)$ na těch $D(z_i, r)$, kde $\min(e_i, f_i) > 0$. Alespoň na těchto $D(z_i, r)$ a okolí $V \cap V' \cap S$ tyto kořeny splývají. Uvažujme nyní takový disk $D(z_i,r)$, $v \in V \cap V' \cap S$ a označme w_i tento jeden kořen $PQ(v, X_k)$ příslušný tomuto disku.
Pokud je z_i reálné, je nutně i w_i reálné. Kdyby nebylo, $\overline{w_i}$ by náleželo $D(z_i,r)$ a to není možné.
Pokud z_i není reálné, ani w_i není reálné. Kdyby bylo, $w_i \in D(z_i,r) \cap D(\overline{z_i},r)$, což opět není možné.
Na zbylých $D(z_i,r)$, kde z_i kořenem právě jednoho polynomu, například P, lze tento argument použít s dodatečnou informací, že Q nemá na disku kořen, kterou můžeme simulovat položením $Q = 1$. K tomuto je zřejmě třeba pouze prvního předpokladu.
Odtud pozorujeme, že zobrazení z S do R přidělující bodu $s \in S$ počet různých reálných kořenů $PQ(s, X_k)$ je lokálně konstantní. Na souvislé množině S je podle věty 16 konstantní.
Označíme-li tuto konstantu m a kořeny příslušné $PQ(s, X_k)$ $r_{s,1}, \ldots, r_{s,m}$ tak, že

$$r_{s,1} < \ldots < r_{s,m},$$

můžeme zadat funkce $\xi_1, \ldots, \xi_m$ předpisem $\xi_i : s \mapsto r_i$ pro $i = 1, \ldots, m$.
Funkce $\xi_1, \ldots, \xi_m$ jsou spojité, jelikož argument výše je platný pro libovolně malé r, a semialgebraické. Graf ξ_i lze totiž zapsat formulí

$$\begin{gathered}\psi(X_1, \ldots, X_k) = \phi(X_1, \ldots, X_{k-1}) \wedge (\exists Y_1, \ldots, \exists Y_m Y_1 < \ldots < Y_m \\ \wedge PQ(X_1, \ldots, X_{k-1}, Y_1) = 0 \wedge \ldots \wedge PQ(X_1, \ldots, X_{k-1}, Y_m) = 0) \\ \wedge \forall Y (PQ(X_1, \ldots, X_{k-1}, Y) = 0 \implies (Y = Y_1 \vee \ldots \vee Y = Y_m)) \wedge X_k = Y_i,\end{gathered}$$

kde ϕ je formule definující S.

$\square$

Pro vymezitelnost jednoho polynomu je zapotřebí předpokladu 1. Pro vymezitelnost množiny polynomů je třeba předpokladu 2.

2.4 Projekční fáze

Za těchto dvou podmínek můžeme vytvářet polynom-invariantní sekce a sektory válců nad buňkami. S využitím prvního přípravného oddílu přepíšeme nyní potřebné požadavky, aby je bylo možné zabezpečit v projekční fázi.
Protože se některé koeficienty P mohou na S vynulovat, bude nutné polynom ořezat. Polynomy k-proměnných nyní vnímáme jako prvky $R[X_1, \ldots, X_{k-1}][X_k]$. Vedoucí člen takového polynomu budeme značit $\mathrm{lcof}(P)$.
Ořez P, tj. polynom $P - \mathrm{lcof}_k(P)$, značíme $\mathrm{red}(P)$. Dále definujeme $\mathrm{red}^0(P) = P$, $\mathrm{red}^i(P) = red(red^{(i-1)}(P))$ pro $i \geq 1$ a množiny

$$\mathcal{R}(\mathscr{P}) = \{\mathrm{red}^i(P) | i \geq 0, \mathrm{red}^i(P) \neq 0, P \in \mathscr{P}\},$$

$$\mathcal{S}(\mathscr{P}) = \{s_i(P,Q) | 0 \leq i \leq \min(\deg(P), \deg(Q)\}.$$

Věta 18. *Pokud jsou všechny polynomy z množin*

$$\mathrm{PROJ}_1(\mathscr{P}) = \bigcup_{P \in \mathcal{R}(\mathscr{P})} \Big(\{\mathrm{lcof}(P)\} \cup \mathcal{S}(P, \partial P / \partial X_k)\Big),$$

$$\mathrm{PROJ}_2(\mathscr{P}) = \bigcup_{P,Q \in \mathcal{R}(\mathscr{P})} \mathcal{S}(\{P,Q\})$$

invariantní na S, pak jsou kořeny $\mathscr{P}$ na S vymezitelné.

Důkaz. Dokážeme, že invariance PROJ_1, resp. PROJ_2 na S implikuje splnění předpokladu 1, resp. 2 věty 17.
Uvažujme $P \in \mathscr{P}$. Ne všechny koeficienty P se na S nulují, existuje tedy polynom $P' \in \mathcal{R}(\mathscr{P})$ tak, že $\mathrm{lcof}(P') \neq 0$ a $\deg(P') = \deg(P)$ na S. Protože $\mathrm{lcof}(P)$ a $s_j(P, \partial P / \partial X_k)$ jsou v PROJ_1 a počet různých komplexních kořenů $P'(s, X_k)$ pro $s \in S$ se dá zapsat jako

$$\deg(P'(s, X_k)) - \deg(\mathrm{nsd}(P'(s, X_k), \partial P / \partial X_k(s, X_k))$$

je z lemmatu 12 splněn předpoklad 1 věty 17.
Podobně najdeme pro dvojici $P, Q \in \mathscr{P}$ polynomy $P', Q' \in \mathcal{R}(\mathscr{P})$. Protože $s_i(P', Q') \in \mathrm{PROJ}_2$, je invariantní na S, podle lemmatu 12 je $\deg(\gcd(P,Q))$ konstantní na S.

□

2.5 Existence válcového rozkladu

Definice 17. *Collinsův projekční operátor* PROJ *definujeme na $\mathscr{P}$ jako* $\mathrm{PROJ}(\mathscr{P}) = PROJ_1(\mathscr{P}) \cup \mathrm{PROJ}_2(\mathscr{P})$.

Collinsův projekční operátor není jediný projekční operátor, se kterým algoritmus na hledání válcového rozkladu funguje. Hledání efektivnějších operátorů, i za cenu dodatečných předpokladů na výchozí podmínky, je předmětem výzkumu a mimo záběr této práce.
Označíme $\mathrm{PROJ}^0(\mathscr{P}) = \mathscr{P}$, $\mathrm{PROJ}^i(\mathscr{P}) = \mathrm{PROJ}(\mathrm{PROJ}^{i-1}(\mathscr{P}))$ pro $i \geq 1$.

Věta 19. *Pro každou $\mathscr{P}$ neprázdnou konečnou množinu nenulových polynomů z $R[X_1, \ldots, X_k]$ existuje válcový rozklad R^k vzhledem k $\mathscr{P}$.*

Důkaz. Rozklad $\mathcal{C}_1$ zkonstruujeme z $\mathrm{PROJ}^{k-1}(\mathscr{P})$ tím, že najdeme konečně mnoho kořenů těchto polynomů jedné proměnné v R. Buňky jsou pak tvořeny těmito kořeny a otevřenými intervaly jimi vymezenými.
Rozklad $\mathcal{C}_i$ pro $i \geq 2, i \leq k$ zkonstruujeme z existujícího rozkladu C_{i-1} a polynomů PROJ^{k-i} podle vět 18 a 17, když nebudeme brát potaz v polynomy, které se vynulují na dané $i-1$-buňce.

□

Kapitola 3

Topologie semialgebraických množin

V minulé kapitole jsme představili základní verzi algoritmu válcového rozkladu. Naším cílem nyní bude dozvědět se něco více o topologické struktuře semialgebraických množin, kterou budeme zkoumat prostřednictvím vylepšování a zjemňování válcového rozkladu, což může prodloužit čas, který algoritmus ke svému běhu potřebuje. Jelikož v této práci budeme algoritmus využívat zejména z teoretické stránky, jsme ochotni tuto cenu zaplatit. Nové funkce budeme přidávat postupně, aby pokud možno nedošlo k zamlžení jednak jejich významu, jednak role, kterou sehrají přidané předpoklady.

V prostředí reálné algebraické geometrie bude roli homeomorfismu, tohoto ústředního pojmu algebraické topologie, hrát semialgebraický homeomorfismus, tedy homeomorfismus, který je navíc semialgebraické zobrazení. Ke zlepšení plynulosti textu bude výhodné přetížit pojem a označit slovem homeomorfismus semialgebraický homeomorfismus (a podobně u spřízněných pojmů, jako je homeomorfní apod.).

Nejdříve ukážeme, že již základní verze válcového rozkladu vytváří v jistém smyslu topologicky elementární části, seznáme totiž, že buňky rozkladu jsou homeomorfní otevřeným hyperkrychlím. Tento popis nám umožní zavést pojem dimenze semialgebraické množiny. V další, poněkud techničtější pasáži, prozkoumáme, co se s buňkami děje při přechodu mezi různými válci rozkladu a za jakých podmínek je možné zapsat uzávěr buňky jako sjednocení buněk. Toto snažení vyústí v triangulaci (kompaktních) semialgebraických množin. Vrcholem této kapitoly pak bude Hardtova věta o trivialitě semialgebraických zobrazení.

Kapitola je vystavěna na základě kapitoly 5 knihy [2] a kapitol 2 a 9 z knihy [1].

3.1 Rozklad semialgebraické množiny

Definice 18. *Válcový rozklad vzhledem k semialgebraickým množinám* $S_1, \ldots, S_n \subseteq R^k$ *je válcový rozklad* R^k *takový, že každá z těchto množin je sjednocením některých buněk tohoto rozkladu.*

Tento rozklad máme k dispozici, neboť rozklad vzhledem k semialgebraickým množinám zadaným podmínkami na znaménka rodiny polynomů $\mathscr{P}$ je válcový rozklad vzhledem k $\mathscr{P}$, jehož existenci jsme prokázali v předešlé kapitole.

Připomeňme, že válec nad buňkou válcového rozkladu se skládá ze dvou typů objektů - sekcí a sektorů.

Tvrzení 20. *Buňka C nějakého válcového rozkladu R^k je semialgebraicky homeomorfní otevřené hyperkrychli $(0{,}1)^d$, kde $d \in \{0, \ldots, k\}$ a $(0{,}1)^0$ dodefinujeme jako bod. Navíc, je-li C i-buňka, je $d \leq i$.*

Důkaz. Pokud je C 1-buňka, z definice se jedná buď o bod nebo otevřený interval a tvrzení platí.
Jestliže je C i-buňka kde $1 < i \leq k$, C je buď sekcí nebo sektorem válce $C' \times R$ pro $(i-1)$-buňku $C' = \pi(C)$.
Je-li C sekce příslušná funkci ξ, máme homeomorfismus zobrazující $x \in C'$ na $(x,\xi(x)) \in C$, který je semialgebraický, protože ξ je semialgebraická funkce a C' semialgebraická množina. C je tedy semialgebraicky homeomorfní C'.
Je-li C sektor omezený $\xi_{C',j}$ a $\xi_{C',j+1}$, předepíšeme k němu podle jeho umístění semialgebraický homeomorfismus. Zobrazme $(x,t) \in C' \times (0{,}1)$ na

- $(x,(1-t)\xi_{C',j}(x) + t\xi_{C',j+1}(x))$, pokud $0 < j \leq m_{C'}$,
- $(x,\frac{t-1}{t} + \xi_{C',j}(x))$ pro $j = 0, m_{C'} \neq 0$,
- $(x,\frac{t}{1-t} + \xi_{C',j+1}(x))$ kde $0 \neq j = m_{C'}$,
- $(x,\frac{-1}{t} + \frac{1}{1-t})$ pro $j = 0 = m_{C'}$.

Odtud již tvrzení plyne indukcí.

□

Důsledek 1. *Každá semialgebraická množina v R^k je disjunktním sjednocením konečně mnoha semialgebraických množin, které jsou homeomorfní otevřeným hyperkrychlím rozměru nejvýše k.*

Každá semialgebraická funkce je po částech spojitá, protože její graf lze až na homeomorfismus rozložit na sjednocení otevřených (semialgebraických) hyperkrychlí, které jsou grafy spojitých semialgebraických zobrazení. Odtud následující důsledek.

Důsledek 2. *Buď $f : S \mapsto R^k$ semialgebraické zobrazení, ne nutně spojité, na semialgebraické množině S. Pak existuje rozklad $S = \cup_{i=1}^m S_i$ tak, že pro každé $i \leq m, i \geq 1$, je restrikce f na S_i semialgebraické spojité zobrazení.*

3.2 Dimenze semialgebraické množiny

Zjistili jsme, jak vypadají buňky příslušné válcovému rozkladu semialgebraické množiny. V tomto je obsažena i informace, že se buňky od sebe liší - některé jsou otevřené intervaly v R a některé jsou mnohadimenzionální hyperkrychle. Takto jsme schopni diferencovat i mezi semialgebraickými množinami - dvě takové množiny v R^k, z nichž jedna se skládá výlučně z buněk podobných intervalům a druhá obsahuje krychli si představíme jinak. Mohli bychom očekávat, že pojem rozměru, který se nám nabídne u hyperkrychlí, by se dal tímto intuitivním způsobem rozšířit na semialgebraické množiny.

Pokud bychom ale definovali dimenzi jako "největší"buňku vystupující v rozkladu, museli bychom se přesvědčit, že na něm nezávisí. Elegantnější způsob vynechává tohoto prostředníka a definuje dimenzi jako schopnost semialgebraické množiny obsáhnout danou hyperkrychli.

Definice 19. *Dimenze semialgebraické množiny S je největší hodnota d taková, že existuje semialgebraické vnoření $\iota : (0,1)^d \hookrightarrow S$.*

Všimněme si, že (neprázdné) otevřené množiny v R^k mají dimenzi k. To lze nahlédnout jednoduchou indukcí, ve které indukční krok využije toho, že v otevřené množině v R^k lze nalézt kartézský součin intervalu a otevřené množiny v R^{k-1}. Opačně, semialgebraické množiny dimenze k obsahují z definice (neprázdnou) otevřenou množinu v R^k.

Ukáže se, že náš způsob zavedení dimenze semialgebraické množiny se shoduje s dimenzí zavedenou přes její válcový rozklad. Následující lemma je nejdůležitější krok k důkazu tohoto tvrzení.

Lemma 21. *Buď $\iota : S \hookrightarrow R^k$ prosté semialgebraické zobrazení, kde $S \subseteq R^k$ je semialgebraická množina s neprázdným vnitřkem v R^k. Pak též $\iota(S)$ má neprázdný vnitřek v R^k.*

Důkaz. Dokazujeme indukcí podle k. Pro $k = 1$ je množina S nekonečné mohutnosti, injekce $\iota(S)$ je tedy taky taková a protože je sjednocením konečně mnoha bodů a intervalů, obsahuje interval.
Pro $k > 1$ nejdříve využijeme důsledek 2, díky kterému můžeme nadále považovat bez újmy na obecnosti ι za spojitou na S. Z důsledku 1 dostaneme rozklad $\iota(S) = \cup_{i=1}^{m} C_i$. Má-li $\iota(S)$ prázdný vnitřek v R^k, není žádná C_i otevřená v R^k a její dimenze nedosahuje k. Protože $S = \cup_{i=1}^{m} \iota^{-1}(C_i)$ má neprázdný vnitřek v R^k, existuje buňka $C' \in \{C_1, \ldots, C_m\}$ tak, že $\iota^{-1}(C')$ má neprázdný vnitřek. V jejím rozkladu najdeme buňku C v R^k dimenze k.
Restrikce ι na C dává spojité prosté semialgebraické zobrazení z C na C', což jsou ovšem buňky rozkladu, tedy homeomorfní otevřeným hyperkrychlím. Patřičným složením dostaneme zobrazení $\iota' : (0,1)^k \hookrightarrow (0,1)^l$, kde $l < k$. Uvažme zobrazení $\iota_a : (0,1)^l \hookrightarrow (0,1)^l$ dané předpisem $\iota_a(x) := \iota'(a, x)$ a bodem $a = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) \in R^{k-l}$, na které použijeme indukční předpoklad. To nám umožní vybrat bod z vnitřku $\iota_a((0,1)^l)$, který je obrazem nějakého bodu b při zobrazení ι_a. Díky spojitosti jsou body na dostatečně malém okolí bodu (a,b) rovněž zobrazeny do tohoto vnitřku, vyberme tedy nějaký bod (d,b) z takového okolí, tak aby $d \neq a$. K němu existuje bod $e \in (0,1)^l$, pro který $\iota'(d,b) = \iota_a(e) = \iota'(a,e)$, to je ale spor s injektivitou ι'.

□

Nyní už jsme připraveni ukázat, že námi zavedená dimenze se chová podle očekávání a navíc je vždy konečná.

Tvrzení 22. *Buďte S,T semialgebraické množiny. O dimenzi tvrdíme následující:*

1. *Dimenze je invariantní vůči semialgebraickým bijekcím, speciálně také vůči homeomorfismu.*

2. *Dimenze otevřené hyperkrychle* $(0,1)^d$ *je* d.

3. *Pokud* $S \subseteq T$*, pak* $\dim(S) \leq \dim(T)$.

4. *Pokud* $S,T \subseteq R^k$*, pak* $\dim(S \cup T) = \max(\dim(S), \dim(T))$.

5. $\dim(S \times T) = \dim(S) + \dim(T)$.

6. *Pro* $S \subseteq R^k$ *je* $\dim(S)$ *konečná a rovna maximální dimenzi, které nabude buňka ve válcovém rozkladu vzhledem k* S.

7. *Pro semialgebraické zobrazení* $f : S \mapsto R^l, S \subseteq R^k$ *platí dim*$(f(S) \leq$*dim*(S) *a rovnost nastává pro* f *prosté.*

Důkaz. 2. Kdybychom měli $\dim((0,1)^d) = e > d$, pak existuje semialgebraické injektivní zobrazení $(0,1)^e \hookrightarrow (0,1)^d \hookrightarrow (0,1)^d \times \{0\}^{e-d}$, což je nemožné z lemmatu 21.
4. Mějme semialgebraické vnoření $\iota(0,1)^d \hookrightarrow S \cup T$ a uvažujme válcové rozklady R^d vzhledem k množinám $\iota^{-1}(S)$ a $\iota^{-1}(T)$. Alespoň v jednom z těchto rozkladů najdeme $d-$buňku, kterou umíme vnořit do patřičné množiny zobrazením ι. Tím je dokázána nerovnost $\dim(S \cup T) \leq \max(\dim(S), \dim(T))$, opačná plyne přímo z 3.
5. Množiny S,T můžeme ze 4. bodu považovat za buňky, a ty zase z bodu 1. za otevřené hyperkrychle, na kterých je rovnost patrná z bodu 2 a vlastnosti součinu hyperkrychlí $(0,1)^d \times (0,1)^e = (0,1)^{d+e}$.
6. Z existence válcového rozkladu R^k vzhledem k S a výše uvedených vlastností dimenze.
7. Bereme $G \subseteq R^{k+l}$ graf f, pro který z vlastnosti 1. platí $\dim(G)$ =$\dim(S)$, a indukcí podle l dokážeme pro projekční zobrazení z válcové struktury rozkladu.

□

3.3 Stratifikace

Stratifikace bude nejsilnějším rozkladem semialgebraické množiny a posledním vylepšením dekompozičního algoritmu, které zde budeme prezentovat. Obecně je stratifikace rozklad topologického prostoru na disjunktní části, které jsou varietami a které do sebe v jistém smyslu dobře zapadají. Pokud jsou části dobře zvoleny a charakterizovány, jako tomu bude v našem případě, nachází tento rozklad využití při zkoumání singularit.

Nás bude zajímat chování buněk při přechodu mezi sousedními válci. Ideálně bychom chtěli zajistit, že buňky sousedí zase s buňkami, které dány dohromady tvoří její uzávěr. Dále by bylo vhodné, aby válcový rozklad byl schopen rozlišit mezi topologicky odlišnými semialgebraickými množinami. To bude vyžadovat dodatečné předpoklady, o kterých však zjistíme, že nebudou ubírat na obecnosti, bude k nim možné přejít změnou souřadnic. Dospějeme tedy ke stratifikaci obecné semialgebraické množiny.

Nejdříve ale musíme být schopni identifikovat buňky jinak, než jen indexem ve válcovém rozkladu. Buňky jsou semialgebraické množiny, tedy podmínky na znaménka nějakého souboru polynomů. Hledáme soubor takových polynomů, aby byly schopny zadaním příslušných rovností a nerovností zadat všechny buňky rozkladu. Ukážeme, že ke splnění tohoto požadavku stačí vstupní polynomy uzavřít na derivace.

Definice 20. *Nechť $\mathscr{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ je množina n polynomů z $R[X_1, \ldots, X_k]$. Podmínka $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ na znaménka $\mathscr{P}$ je prvek $\{0{,}1, -1\}^n$. Realizací této podmínky nazveme množinu*

$$S_\epsilon = \{x \in R^k | \bigwedge_{1 \le i \le n} sgn(P_i(x)) = \epsilon_i\},$$

kde sgn odpovídá přirozenému zobecnění reálné funkce signum na reálně uzavřené těleso R.
Dále zavedeme podmínku $\overline{\epsilon} = (\overline{\epsilon_1}, \ldots, \overline{\epsilon_n})$ jako

$$\overline{\epsilon_i} = \begin{cases} \{1{,}0\} \text{ pokud } \epsilon_i = 1 \\ \{-1{,}0\} \text{ pokud } \epsilon_i = -1 \\ \{0\} \text{ pokud } \epsilon_i = 0. \end{cases}$$

Realizací této podmínky je analogicky množina

$$S_{\overline{\epsilon}} = \{x \in R^k | \bigwedge_{1 \le i \le n} sgn(P_i) \in \overline{\epsilon_i}\}.$$

Lemma 23 (Thomovo lemma)**.** *Buď $\mathscr{P}$ soubor nenulových polynomů z $R[X]$ mohutnosti n uzavřený na derivace a ϵ podmínka na tento soubor. Pak realizace S_ϵ je buď prázdná množina, bod nebo otevřený interval a $S_{\overline{\epsilon}}$ je buď prázdná množina, bod nebo uzavřený interval s vnitřkem S_ϵ.*

Důkaz. Indukcí podle počtu polynomů v $\mathscr{P}$. Pro $n = 1$ je ten jediný polynom konstantní (a nenulový) a tvrzení platí. Pro $n > 1$ vyberme polynom nejvyššího stupně, řekněme P_n, uvažujeme soubor $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \setminus \{P_n\}$, ten je rovněž uzavřený na derivace, a aplikujeme indukční předpoklad na $\mathscr{P}'$ a ϵ', restrikci podmínky ϵ na $\mathscr{P}'$.
Máme

$$S_\epsilon = S_{\epsilon'} \cap \{x \in R | \operatorname{sgn}(P_n(x)) = \epsilon_n\}.$$

Pokud je $S_{\epsilon'}$ prázdná nebo bod, je také S_ϵ prázdná nebo bod. Pokud je $S_{\epsilon'}$ otevřený interval a P_n není konstantní, je zde ryze monotonní, neboť $P_n' \in \mathscr{P}'$. Stejně lze rozebrat případ $S_{\overline{\epsilon}}$.

□

Poznamenejme, že pokud je S_ϵ bod, je nutně některé ze znamének ϵ_i nulové. Na druhou stranu, je-li S_ϵ interval, žádné ze znamének ϵ_i není nula. Můžeme si také všimnout, že všechny neprázdné realizace S_ϵ jsou souvislé množiny.

Důsledek 3. *Buď $\mathscr{P} = \bigcup_{i=1,\ldots k} \mathscr{P}_i$ konečná množina nenulových polynomů tak, že*

- *pro všechna $i \in \{1, \ldots k\}$ je množina $\mathscr{P}_i \subseteq R[X_1, \ldots, X_i]$ uzavřená na derivace vzhledem k X_i,*

- $\mathscr{P}_i$ *obsahuje* $PROJ(\mathscr{P}_{i+1})$ *pro* $i < k, i \geq 1$.

Pak máme válcový rozklad $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ *prostoru* R^k*, jehož i-buňky jsou všechny tvaru*

$$\{x \in R^i | \bigwedge_{0<j\leq i} \bigwedge_{P \in \mathscr{P}_j} sgn(P(\pi^{i-j}(x))) = \epsilon_P, \epsilon_P \text{ je podmínka na } P\},$$

kde π^{i-j} *je složení* $i - j$ *projekcí na poslední souřadnici. Každá z těchto buněk je navíc homeomorfní nějaké otevřené hyperkrychli.*

Tím máme dokončen semialgebraický popis buněk, a tak můžeme přistoupit ke zkrocení chování buněk na uzávěrech. V první kapitole jsme viděli příklad podmínky ϵ na znaménko polynomu, kde realizace $S_{\overline{\epsilon}}$ nebyla uzávěrem množiny S_ϵ. Z Thomova lemmatu známe podmínky, za kterých k tomuto chování v jednorozměrném případě nedochází. Zobecněním do vyšších dimenzí dostaneme popis uzávěru buňky jako sjednocení s buňkami nižších dimenzí.

Definice 21. *Polynom* $P \subseteq R[X_1, \ldots, X_k]$ *je kvazi-monický vzhledem k* X_n*, pokud je vedoucí koeficient lcof*(P) *(kde* P *vnímáme jako polynom z* $R[X_1, \ldots, X_{k-1}][X_k]$*) konstantní.*

Lemma 24. *Buď* $\mathscr{P}$ *konečná množina* n *nenulových polynomů z* $R[X_1, \ldots, X_k]$ *a* C,C' $k-1$ *buňky rozkladu* R^k *vzhledem k* $\mathscr{P}$*. Označme* $\xi_i : C \mapsto R$ *funkce příslušné sekcím válce* $C \times R$*, kde* $1 \leq j \leq m_C$*, a* $\xi'_i : C' \mapsto R$ *funkce příslušné sekcím válce* $C' \times R$*, kde* $1 \leq j \leq m'_C$*. Nechť je dále splněno, že*

- $\mathscr{P}$ *je uzavřená na derivace vzhledem k* X_k*,*
- *každý polynom z* $\mathscr{P}$ *je kvazi-monický vzhledem k* X_k*,*
- $C' \subseteq \overline{C}$.

Pak platí následující:

1. *Každou funkci* ξ_j *můžeme spojitě rozšířit na* C'*, kde souhlasí s* $\xi'_{j'}$ *pro nějaké* $j' \geq 1, j' \leq m_{C'}$.
2. *Ke každé funkci* $\xi'_{j'}$ *lze najít* $j \geq 1, j \leq m_C$ *takové, že spojité rozšíření* ξ_j *na* C' *zde souhlasí s funkcí* $\xi'_{j'}$.
3. *Je-li* $\epsilon = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ *podmínka na* $\mathscr{P}$ *a* S_ϵ*, položme* $C_\epsilon = S_\epsilon \cap (C \times R)$*. Pokud je* C_ϵ *neprázdná, pak je to sekce nebo sektor válce* $C \times R$*. Podobně je-li* $C_{\overline{\epsilon}}$ *neprázdná, je to buď sekce nebo uzávěr nějakého sektoru v* $C \times R$ *a platí, že* $\overline{C_\epsilon} \cap (C \times R) = C_{\overline{\epsilon}}$*.*
   Pro $C'_\epsilon = S_\epsilon \cap (C' \times R)$ *platí analogické vztahy.*
4. *Platí* $\overline{C_\epsilon} \cap (C' \times R) = C'_{\overline{\epsilon}}$.

Důkaz. 1. Zvolme $x' \in C'$ a nějakou sekci ξ_j nad C. Soubor $\mathscr{P}$ je uzavřený na derivace, a tedy můžeme vybrat polynom $P \in \mathscr{P}$ tak, že $\xi_j(x)$ je pro $x \in C$

jednoduchým kořenem $P(x, X_k)$. Označme a_p jeho vedoucí člen, ten je konstantní, neboť P je kvazimonický. Konstanta

$$M(x') = \max_{i=1,\ldots,p}\left(p\frac{|a_{p-1}(x')|}{|a_p|}\right)^{\frac{1}{i}} + 1,$$

která je závislá na počáteční volbě x', nám podle lemmatu 14 vymezuje rozptyl kořenů $P(x', X_k)$. Navíc ze spojitosti existuje okolí $U \subseteq R^{k-1}$ takové, že pro $x \in C \cap U$ máme $\xi_j(x) \in [-M(x'), M(x')]$. Z lemmatu 10 vybereme spojité semialgebraické zobrazení $\gamma : [0,1) \mapsto R^k$ tak, že $\gamma(0) = x'$ a $\gamma((0,1)) \subseteq C \cap U$. Složení $f = \xi_j \circ \gamma$ je díky volbě křivky omezená semialgebraická funkce, která má z věty 8 spojité rozšíření do nuly, a je tedy $x'_k := \overline{f}(0) \in [-M(x'), M(x')]$. Tím máme dobrého kandidáta na rozšíření, musíme ovšem ověřit, že pro jinou křivku nedostaneme jiné rozšíření. To provedeme pomocí zaznamenání jistých znamének.

Vytvořme podmínku $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_p)$ na znaménka polynomu $P(x',X_k)$ a jeho derivací položením $\epsilon_i =$sgn$(P^{(i)}(x,\xi_j(x))$ pro $i \geq 0, i \leq p$ a nějaké $x \in C$ (znaménka jsou díky uzavřenosti $\mathscr{P}$ na derivace podle X_k konstantní na C). Každý bod (x',x'_m) náležící uzávěru grafu ξ_j tedy musí splňovat sgn$(P^{(i)}(x',x'_m)) \in \overline{\epsilon_i}$ pro $i \geq 0, i \leq p$. Jelikož $\epsilon_0 = 0$, je z lemmatu 23 takový bod nejvýše jeden. Námi nalezené spojité rozšíření ξ_j na x' hodnotou x'_k tedy zadává spojité rozšíření ξ_j na C', kde se shoduje s nějakou funkcí ξ'_j.

2. K funkci $\xi'_{j'}$ existuje polynom $P \in \mathscr{P}$ tak, že $\xi'_{j'}$ je na C' jeho jednoduchým kořenem($\mathscr{P}$ je totiž uzavřená na derivace). Z charakterizace násobnosti kořenu přes derivace můžeme použít větu 5, ze které existuje okolí $U \in R^{k-1}$ bodu $x' \in C'$ a semialgebraická spojitá funkce ξ, která je kořenem P na $U \cap C$. Na tomto okolí se tedy shoduje s nějakou ξ_j, funkcí na C, kterou z bodu 1 umíme spojitě rozšířit na C'.

3. Lemma 23 pro množinu $\mathscr{P}$ na C nám dává, že neprázdná C_ϵ jsou sekce nebo sektory a neprázdná $C_{\overline{\epsilon}}$ jsou sekce nebo uzávěry sektorů. C je totiž PROJ($\mathscr{P}$)-invariantní a polynomy z $\mathscr{P}$ mají na sekcích a sektorech válce $C \times R$ z vlastnosti válcového rozkladu konstantní znaménko. Máme tedy $\overline{C_\epsilon} \cap (C \times R) = C_{\overline{\epsilon}}$. Analogicky postupujeme pro C'.

4. $\overline{C_\epsilon} \cap (C' \times R) \subseteq C'_{\overline{\epsilon}}$. Srovnáme objekty vystupující na stranách dokazované rovnosti. Levá strana $\overline{C_\epsilon} \cap (C' \times R)$ je z bodů 1,2 a 3 sekce nebo uzávěr sektoru válce $C' \times R$. Z bodu 3 platí to samé pro $C'_{\overline{\epsilon}}$. Pokud je $C'_{\overline{\epsilon}}$ uzávěr sektoru $C' \times R$, všechna ϵ_i musí být nenulová. Existuje tedy okolí $V \subseteq R^k$ bodu x' náležícího tomuto sektoru, na kterém je každý z polynomů ze souboru $\mathscr{P}$ nenulový, a tedy $V \cap (C \times R) \subseteq C_\epsilon$, odkud $x' \in \overline{C_\epsilon}$.

$\square$

Důsledek 4. *Buď $\mathscr{P} = \bigcup_{i=1,\ldots k} \mathscr{P}_i$ konečná množina nenulových polynomů tak, že*

- *pro všechna $i \in \{1, \ldots k\}$ je množina $\mathscr{P}_i \subseteq R[X_1, \ldots, X_i]$ uzavřená na derivace vzhledem k X_i a kvazimonická vzhledem k X_i,*
- *$\mathscr{P}_i$ obsahuje PROJ$(\mathscr{P}_{i+1})$ pro $i < k, i \geq 1$.*

Pak máme válcový rozklad $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ prostoru R^k, pro který platí:

- *Každá jeho i-buňka, kde $i \in \{1, \ldots k\}$, je realizace nějaké podmínky na množinu $\bigcup_{0 \leq j \leq i} \mathscr{P}_i$.*
- *Každá buňka C_i je homeomorfní nějaké otevřené hyperkrychli $(0,1)^{d(i)}$.*
- *Uzávěrem buňky C_i je buňka C_i společně s nějakými buňkami C_j pro které platí $d(j) < d(i)$.*

Dále nebudeme měnit podmínky na vstupní soubor polynomů do algoritmu válcového rozkladu, pro snazší referenci si je pojmenujeme.

Definice 22. *Soubor polynomů splňující předpoklady důsledku 4 nazveme stratifikačním souborem.*

Nabízí se prozkoumat, jak tíživá je podmínka na kvazi-monicitu polynomu. Přesněji, je-li semialgebraická množina zadána znaménky na množinu obecně zadaných polynomů, je možné najít množinu kvazimonických polynomů zadávajících stejnou množinu? Následující tvrzení dává kladnou odpověď.

Tvrzení 25. *Buď $\mathscr{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ soubor polynomů z $R[X_1, \ldots, X_k]$. Existuje lineární automorfismus $u : R^k \mapsto R^k$ a stratifikační soubor $\mathscr{Q}$ polynomů z $R[X_1, \ldots, X_k]$ tak, že $P(u(X_1, \ldots, X_k)) \in \mathscr{Q}$.*

Důkaz. Uvažujme lineární automorfismus

$$v(X_1, \ldots, X_k) = (X_1 + a_1X_k, X_2 + a_2X_k \ldots, X_{k-1} + a_{k-1}X_k, X_k),$$

kde $a_1, \ldots, a_{k-1} \in R^{k-1}$. Zapíšeme-li $H_i(\mathbf{X})$ homogenní část $P_i(\mathbf{X})$ nejvyššího stupně d_i, je po změně souřadnic $P_i(v(\mathbf{X})) = H_i(a_1, \ldots, a_{k-1}, 1)X_k^{d_i} + P_i'$, kde $\deg(P_i') < \deg(P_i)$, kde polynomy vnímáme jako prvky $R[X_1, \ldots, X_{k-1}][X_k]$. Zvolme $a_1, \ldots, a_{k-1}$ tak, aby byla všechna H_i nenulová pro $i \geq 1, i \leq n$, což lze udělat, neboť $\Pi_{i=1}^n H_i$ není identicky nula (přesný důvod lze najít jako nápovědu u cvičení 1.4 v knize [4]).

Uzavřeme nový soubor polynomů $P_1(v(\mathbf{X})), \ldots, P_n(v(\mathbf{X}))$ na derivace podle X_k a na takto získanou množinu aplikujeme operátor $PROJ$. Tvrzení pak plyne indukcí.

□

3.4 Triangulace

Definice 23. *Mějme $a_0, \ldots, a_d$ body R^k, které nejsou všechny obsaženy v affinním podprostoru dimenze $d - 1$. Pak d-simplexem σ na vrcholech $a_0, \ldots, a_d$ nazveme množinu*

$$\sigma = [a_0, \ldots, a_d] = \{x \in R^k | \exists \lambda_0, \ldots, \lambda_d \in [0,1] : \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \text{ a } x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i\}$$

a otevřeným d-simplexem $\mathring{\sigma}$ k σ množinu

$$\mathring{\sigma} = (a_0, \ldots, a_d) = \{x \in R^k | \exists \lambda_0, \ldots, \lambda_d \in (0,1] : \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \text{ a } x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i\}.$$

Barycentrum $d-$simplexu σ je bod $bar(\sigma) \in \sigma$ daný předpisem

$$bar(\sigma) = 1/(d+1) \sum_{0 \le i \le d} a_i.$$

Stěnou simplexu s míníme nějaký e-simplex $b_0, \dots b_e$, pro který $\{b_0, \dots, b_e\} \subseteq \{a_0, \dots, a_d\}$.
Simpliciální komplex K v R^k je konečný soubor simplexů $\{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ pro který navíc neprázdný průnik $\sigma_i \cap \sigma_j$ je stěna společná σ_i a σ_j a každá stěna σ_i je rovněž v K, pro všechna i,j, kde $1 \le i \le s, 1 \le j \le s$,.
Realizace tohoto komplexu K je $|K| = \bigcup_{1 \le i \le s} \sigma_i$. Barycentrické dělení K je simpliciální komplex obsahující simplexy $[bar(\sigma_{j_1}), \dots, bar(\sigma_{j_i})]$ pro každou posloupnost indexů $j_1, \dots, j_i$ takovou, že $\sigma_{j_{m-1}}$ je stěnou σ_{j_m}.
Triangulací semialgebraické množiny $S \subseteq R^k$ budeme nazývat dvojici (K,h), kde K je simpliciální komplex v R^k homeomorfní s S skrze homeomorfismus $h : K \mapsto S$.

Všimněme si, že $d-$simplexy jsou semialgebraické množiny dimenze d , a tedy také realizace simpliciálního komplexu je semialgebraická množina, jejíž dimenze se shoduje s největší dimenzí simplexu z komplexu. Dále poznamenejme, že z definice a konvence je otevřený $0-$simplex bod R^k, nejedná se tedy o otevřenou množinu, jak by název mohl napovídat.

Věta 26. *Buď $S \subseteq R^k$ kompaktní semialgebraická množina a $S_1, \dots, S_m$ její semialgebraické podmnožiny. Existuje triangulace (K,h) množiny S tak, že vrcholy K mají racionální souřadnice, a že každou podmnožinu S ve výčtu výše lze zapsat jako sjednocení obrazů otevřených simplexů z K při zobrazení h, tedy množin ve tvaru $h(\mathring{\sigma})$, kde $\sigma \in K$.*

Důkaz. Postupujeme indukcí podle k.

Pro $k = 1$ je množina S i její podmnožiny konečným sjednocením bodů a otevřených intervalů, které jsou navíc díky kompaktnosti S omezené. Můžeme volit otevřené simplexy K jako prvky tohoto sjednocení a h jako identické zobrazení, abychom dostali triangulaci S. Až na homeomorfismus lze navíc přesunout vrcholy K tak, aby měly racionální souřadnice.

Pro $k > 1$ nejdříve provedeme úpravu množiny polynomů zadávající S a $S_1, \dots, S_m$ na stratifikační soubor, což je možné z tvrzení 25. Z věty 11 je $\pi(S) \subseteq R^{k-1}$ kompaktní semialgebraická množina, která je zároveň sjednocením $k-1$-buněk z válcového rozkladu S. Z indukčního předpokladu aplikovaného na $\pi(S)$ a podmnožiny tvořené těmito $k-1$ buňkami dostáváme triangulaci (L,g) takovou, že $k-1$-buňky, a tedy i $\pi(S_i)$ lze pro $i \le m, i \ge 1$ zapsat jako sjednocení otevřených množin ve tvaru $g(\mathring{\tau})$, kde $\tau \in L$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $k-1$-buňky rozkladu jsou přímo ve tvaru $g(\mathring{\tau})$, příslušnou buňku bychom mohli rozdělit podle triangulace.

Zvolme pevně simplex $\tau = [b_0, \dots, b_d] \in L$ tak, že $g(\mathring{\tau})$ je $k-1$ buňka. Sestavíme postupně triangulaci (K_τ, h_τ) množiny $\overline{S \cap (g(\mathring{\tau}) \times R)}$. Nad válcem $g(\mathring{\tau}) \times R$ se S rozkládá na sekce a sektory, začněme popisem sekce příslušné nějakému zobrazení ξ.

Z věty 24, jejíž předpoklady jsou splněné díky úvodní úpravě souboru polynomů, můžeme ξ spojitě rozšířit na $\overline{\xi}$ definované na $g(\tau)$. Definujme $a_i =$

$(b_i,\overline{\xi}(b_i)) \in R^k$ vrcholy nového simplexu $\sigma_\xi = [a_0, \dots, a_d]$. Zde definujeme h_τ předpisem

$$h_\tau(\sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i) = (g(\sum_{i=0}^{d} \lambda_i b_i), \overline{\xi}(g(\sum_{i=0}^{d} \lambda_i b_i))),$$

kde koeficienty λ_i jsou svázané podmínkou $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i b_i = 1$.

Mohlo by se stát, že pro jinou funkci ξ' by takto zvolené simplexy σ_{xi} a $\sigma_{\xi'}$ byly totožné. To je pro další postup nežádoucí situace, které se vyhneme tak, že zajistíme, aby se tato zobrazení alespoň v jednom vrcholu lišila. Postačuje vzít barycentrické dělení simplexu τ, neboť $\xi(g(\mathrm{bar}(\tau))) \neq \xi'(g(\mathrm{bar}(\tau)))$ z vlastnosti sekcí válcového rozkladu.

Přikročíme k triangulaci sektoru, který je omezen sekcemi ξ a ξ', kde $\xi < \xi'$, ke kterým již umíme zkonstruovat simplexy $\sigma_\xi = [a_0, \dots, a_d]$ a $\sigma_{\xi'} = [a'_0, \dots, a'_d]$. Označme

$$K_{\xi,\xi'} = \{\sigma | \exists i, 0 \leq i \leq d, \sigma \text{ je stěnou } [a_0, \dots, a_i, a'_i, \dots, a'_d]\},$$

kde v případě, že nastane $a_i = a'_i$ máme na mysli odpovídající $d-1$ simplex. Realizace $K_{\xi,\xi'}$ je hranol, vzniklý konvexním obalem simplexů σ_ξ a $\sigma_{\xi'}$.Triangulaci sektoru dokončíme popisem h_τ na $K_{\xi,\xi'}$, kde zvolíme to jediné afinní zobrazení mezi úsečkami

$$[\sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^{d} \lambda'_i a'_i]$$

a

$$[(g(\sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i), h_\tau(g(\sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i))), (g(\sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i), h_\tau(g(\sum_{i=0}^{d} \lambda_i a'_i)))].$$

Přes případné barycentrické dělení jsme v diskuzi výše zaručili, že oba výrazy jsou úsečka právě tehdy, když je úsečkou jeden z nich. Zobrazení h_τ je homeomorfismus, jeho graf je semialgebraická množina, jedná se tedy skutečně o semialgebraické zobrazení.

Na daném válci můžeme konstrukci dokončit sjednocením $K_\tau = \cup K_{\xi,\xi'}$, kde sjednocení běží přes sekce válce, přičemž z kompaktnosti se nemusíme zabývat limitními případy. Tímto obdržíme $(K_\tau, h_\tau)_{\tau \in L}$ triangulaci válce, zbývá ověřit, že lze triangulace odpovídající různým válcům odpovídajícím způsobem slepit na triangulaci celé S.

Zvolme pevně lineární uspořádání na vrcholech L. Ukážeme proveditelnost lepení pro nějaký simplex $\tau \in L$ a jeho stěnu ρ, což nám zaručí proveditelnost všude, protože z definice komplexu simplexy L se potkávají zase jen v simplexu L. Buď $\sigma_\zeta \in K_\rho$ simplex, který odpovídá sekci ζ válce $h_\rho(\mathring{\rho}) \times R$ a pro který $\sigma_\zeta \cap |K_\tau| \neq \emptyset$. Z druhé části lemmatu 24 existuje sekce η válce $h_\tau(\mathring{\tau}) \times R$ tak, že $\overline{\eta}$ souhlasí na $h_\rho(\mathring{\rho})$ se sekcí ζ, tedy h_τ a h_ρ souhlasí z konstrukce také na nějakém sektoru válce $h_\rho(\mathring{\rho}) \times R$ a tedy také na celém $|K_\tau| \cup |K_\rho|$. Rozklad

$$K_{\xi,\xi'} = \cup_{i=0}^{d} [a_0, \dots, a_i, a'_i, \dots, a'_d].$$

indukuje rozklad $K_{\xi,\xi'} \cup (\rho \times R)$, je-li zachovaný předpis rozkladu a lineární uspořádání na vrcholech, to jest pokud platí $(v,u) < (v',u')$ v novém komplexu právě tehdy když $v < v'$ v L.

Vrcholy komplexu je ze struktury válcového rozkladu opět možné převést do racionálních souřadnic.

$\square$

3.5 Trivialita semialgebraického zobrazení

Věta 27. *Buď $f : S \mapsto T$ semialgebraické (spojité) zobrazení, kde $S \subseteq R^l$ a $T \subseteq R^k$ jsou semialgebraické množiny. K zadaným množinám $S_1, \dots, S_m \subseteq S$ existuje konečný rozklad $T = \bigcup_{i=1}^r T_i$ a homeomorfismy q_i tak, že pro zvolené $x_i \in T_i$ je zajištěna komutativita diagramu*

$$\begin{tikzcd} T_i \times f^{-1}(x_i) \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "\text{projekce } T_i \times f^{-1}(x_i) \mapsto T_i"'] & f^{-1}(T_i) \arrow[d, "f"] \\ & T_i \end{tikzcd}$$

Navíc, označíme-li $F_i = f^{-1}(x_i)$ lze nalézt semialgebraické množiny $F_{i,1}, \dots, F_{i,m} \subseteq F_i$ tak, že $q_i(T_i \times F_{i,j}) = S_j \cap f^{-1}(T_i)$ pro $i,j \geq 1, i \leq r, j \leq m$.

Důkaz. Využijeme skutečnosti, že chování množin zkoumáme „až na homeomorfismus"a situaci bez újmy na obecnosti převedeme do vhodnější podoby. Dále tedy buďte S,T omezené (jinak lze využít homeomorfismu jako ve větě 20), $S \subseteq R^{l+k}$ a f projekce na posledních k souřadnic definovaná na S (jinak lze za S lze volit graf f, který je s ní homeomorfní, využíváme zde spojitost funkce f).

Pokračujeme indukcí podle dvojic (l,k) v lexikografickém uspořádaní. Označme $\mathscr{P}$ konečnou množinu polynomů z $R[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ vystupujících v popisu $S, S_1, \dots, S_m$. Využijeme tvrzení 25, abychom změnou souřadnic $Y_1, \dots, Y_k$ převedli každý $P \in \mathscr{P}$ do tvaru

$$g_{P,d(P)}(\mathbf{X})Y_k^{d(P)} + g_{P,d(P)-1}(\mathbf{X}, Y_1, \dots, Y_{k-1})Y_k^{d(P)-1} + \dots + g_{P,0}(\mathbf{X},Y_1, \dots, Y_{k-1}),$$

kde $g_{P,d(P)}$ nejsou identicky nulové a $d(P)$ značí stupeň P vzhledem k Y_k. Prostor T rozdělíme na semialgebraické množiny

$$T' = \left\{ x \in T | \prod_{P \in \mathscr{P}} g_{P,d(P)}(x) \neq 0 \right\} \text{ a } T'' = \left\{ x \in T | \prod_{P \in \mathscr{P}} g_{P,d(P)}(x) = 0 \right\}$$

a pro každou zvlášť najdeme rozklad splňující tvrzení věty. To k důkazu postačí, neboť jistě $T = T' \cup T''$.

Dimenze T'' je ostře menší než l, z existence válcového rozkladu vzhledem k zadávajícím polynomům T'' a důsledku 1 je T'' sjednocení množin homeomorfních otevřeným hyperkrychlím dimenze ostře menší než l, na které můžeme použít indukční předpoklad abychom dostáli tvrzení věty pro T''.

Obraťme nyní pozornost k T'. Přenásobíme polynomy z $\mathscr{P}$ vhodnou kombinací polynomů $g_{P,d(P)}(X)$ tak, aby každý polynom $P \in \mathscr{P}$ měl u vedoucího členu $Y_k^{d(P)}$ koeficient $\prod_{P \in \mathscr{P}} g_{P,d(P)}$. Jelikož tento koeficient nenabývá na T' nuly, změna souřadnic $\prod_{P \in \mathscr{P}}(X)Y_k g_{P,d(P)} \mapsto Z_k$ zadává homeomorfismus $S \cap (R^l \times T')$ na $S' \subseteq R^{l+k}$ a $S'_i \cap (R^l \times T')$ na $S'_i \subseteq R^{l+k}$. Polynomy zadávající S',$S'_1, \dots, S'_m$ jsou nyní kvazimonické v Y_k. Další změnou souřadnic, tentokrát v proměnných $X_1, \dots, X_l, Y_1, \dots, Y_{k-1}$ podle tvrzení 25 vytvoříme stratifikační soubor polynomů

$\mathscr{P}'$, jenž ihned využijeme k charakterizaci uzávěru podle lemmatu 24. Dostáváme, že $\overline{S'}$ je daná podmínkami na znaménka $\mathscr{P}'$.

Semialgebraická množina $\overline{S'}$ je kompaktní, je tedy také $\pi(\overline{S'})$ kompaktní(věta 11), existuje triangulace (K,h) resp. (L,g) množiny $\overline{S'}$ resp. $\pi(\overline{S'})$, kde navíc každé $S'_1, \ldots, S'_m$ je sjednocení množin tvaru $h(\mathring{\sigma})$ pro $\sigma \in K$ (věta 26).

Aplikujeme indukční předpoklad na restrikci projekce $R^{l+k-1} \mapsto R^k$ na množinu $\pi(\overline{S'}) \subseteq R^{l-1+k}$, kterou si označíme symbolem f', na množinu $\pi(\overline{S'})$ a konečně mnoho jejích podmnožin $g(\mathring{\tau})$ za každý simplex $\tau \in L$. Až na homeomorfismus dostáváme rozklad $T' = \bigcup_{i=1}^{r'} T'_i$, množiny $G_{i,j} \subseteq f'^{-1}(x_i)$ pro x_i zvolené v T'_i a homeomorfismy $q'_i : T'_i \times f'^{-1}(x_i) \mapsto f^{-1}(T'_i)$ splňující tvrzení věty. Nyní na tomto základě zkonstruujeme množiny F_i tvořící rozklad T' a homeomorfismy q_i, abychom větu dokázali pro vstupy $f,\overline{S'},S'_1, \ldots, S'_m$ a tím provedli indukční krok.

Definujme $F_i := f^{-1}(x_i)$ a $F_{i,j} := f^{-1}(x_i) \cap S'_j$. Bod z G_i se souřadnicemi (x_i, y) patří do $g(\mathring{\tau}_i)$ pro nějaké $\tau_i \in L$. Posuneme-li se z bodu x_i do nějakého bodu $x \in T'_i$, $q'_i(x,(x_i,y))$ zůstane v $g(\mathring{\tau}_i)$ z vlastnosti q'_i zaručené indukčním předpokladem. Ze zachování válcové struktury v konstrukci triangulace budou úsečky

$$\pi^{-1}(x_i,y) \cap S' \text{ a } \pi^{-1}(q'_i(x,(x_i,y))) \cap \overline{S'}$$

triangulací rozděleny stejným způsobem. Definujeme tedy q_i jako to jediné afinní semialgebraické zobrazení přenášející úsečku

$$\{x\} \times (\pi^{-1}(x_i,y) \cap h(\sigma)) \subseteq T'_i \times F_i$$

na úsečku

$$\pi^{-1}((q'_i(x,(x_i,y))) \cap h(\sigma) \subseteq f^{-1}(T'_i),$$

kde $\sigma \in K$. Protože každé S'_j lze zapsat jako sjednocení obrazů otevřených simplexů v K, je také splněna vlastnost restrikce $q_i(T'_i \times F_{i,j}) = f^{-1}(T'_i) \cap S'_j$, kde $1 \leq j \leq m$.

$\square$

Hardtova semialgebraická trivialita má několik důležitých důsledků, které využijeme v další kapitole. Nejprve ukažme, že existuje pouze konečně mnoho topologických typů algebraických množin v R^k definovaných rovnicemi stupně nejvýše d.

Věta 28. *Pro každé kladné celočíselné d a k existuje kladné číslo $m(d,k)$ a algebraické množiny $V_1, \ldots, V_m \subseteq R^k$ definované pomocí polynomů stupně nejvýše d tak, že pro libovolnou algebraickou množinu $V' \subseteq R^k$ existuje $i \geq 1, i \leq m$, a homeomorfismus $h : R^k \mapsto R^k$ tak, že $h(V_i) = V'$.*

Důkaz. Připomeňme, že každá algebraická množina může být zadána jediným polynomem jako součet kvadrátů zadávajících polynomů. Ztotožněme polynom P stupně nejvýše $2d$ s vektorem jeho koeficientů. Označme $W = \{(P,x) \in R^N \times R^k | P(x) = 0\}$ a $\Pi : R^N \times R^k \mapsto R^N$ projekci na prvních N souřadnic. Použijeme větu 27 na zobrazení Π a množinu $W \subseteq R^N \times R^k$, odkud máme množiny $F_i, i \geq 1, i \leq m(d,k)$, a homeomorfismy q_i tak, že pro polynom Q stupně nejvýše $2d$ existuje $j \in \{1, \ldots, m(d,k)\}$ tak, že

$$q_j : \{Q\} \times F_j \mapsto W \cap \Pi^{-1}(Q) = \{Q\} \times V(Q).$$

$\square$

Dále zjišťujeme, že semialgebraické množiny mají z topologického hlediska lokálně jistou kuželovitou strukturu.

Věta 29. *Buď $S \subseteq R^k$ semialgebraická množina a $s \in S$ její neizolovaný bod. Existuje $r > 0$ a homeomorfismus $h : S \cap \overline{B}(s,r) \mapsto C_r$, $C_r = \{x \in R^k | \ \exists \lambda \in [0,1],\ \exists t \in S^{k-1}(s,r) \cap S, x = \lambda s + (1-\lambda t)\}$(tj. jedná se o kužel s vrcholem v s a se základnou $S^{k-1}(s,r) \cap S$), takový, že*

- $||h(x) - s|| = ||x - s||$ *pro všechna* $x \in S \cap \overline{B}(s,r)$,
- $h\Big|_{S \cap S_{k-1}(s,r)}$ *je identické zobrazení*

Důkaz. Použijeme větu 27 na zobrazení $f : S \mapsto R$ zadané předpisem $f(x) = ||x - s||$. Pro dostatečně malé r umíme zajistit, aby interval $(0,r]$ náležel jedné části rozkladu R zajištěném touto větou, a tak dostáváme homeomorfismus

$$q : (0,r] \times S^{k-1}(s,r) \mapsto \overline{B}(s,r) \setminus \{x\} = f^{-1}((0,r]),$$

pro jehož inverz platí $q^{-1}(x) = (||x - s||, \tilde{q}(x))$, kde $\tilde{q}$ je na $S \cap \overline{B}(s,r)$ identické zobrazení. Požadovaný homeomorfismus pak lze sestrojit předpisem

$$h(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{||x-s||}{r}\right)s + \frac{||x-s|}{r}\tilde{g}(x)) \text{ pro } x \neq s \\ id(x) \text{ pro } x = s. \end{cases}$$

$\square$

Kapitola 4

Omezení pro součet Bettiho čísel algebraické množiny

Cílem této kapitoly je dokázat tzv. Thom-Milnorovu nerovnost, která omezuje součet Bettiho čísel algebraické množiny. Abychom dokázali hovořit o Bettiho číslech, bude nejprve nutné zavést homologii pro semialgebraické množiny. V naší práci se omezíme na popis homologie uzavřených semialgebraických množin, jehož zavedení bude přirozeným zobecněním klasické simpliciální homologie, které bude možné provést díky práci provedené v předchozích kapitolách.

Omezení součtu Bettiho čísel bude vyžadovat netriviální porozumění topologii semialgebraické množiny. K tomu využijeme Morseho teorii, která zkoumá souvislost mezi varietou a funkcemi, které na nich lze definovat, aby prostřednictvím tohoto vztahu porozuměla topologii dané variety. Ústředním pojmem této teorie je tzv. Morseho funkce, což je funkce, jejíž kritické body splňují jisté výhodné podmínky. Pokud je možné takovou funkci na dané varietě definovat, Morseho teorie nám poskytuje prostředky, jak porozumět její topologii.

Cesta k důkazu Sardovy věty zakládá na čtení závěru kapitoly 5 v knize [2], zavedení homologie je volně inspirované úseky kapitoly 6 tamtéž. Myšlenka využití Morseho teorie pochází ze sekce 11.5 knihy [1], v kapitole 7 [2] je možné nalézt provedení i s rozpracováním Morseho teorie, klasicky je teorie představena v knize [5].

4.1 Semialgebraická množina jako varieta

Nejprve zavedeme semialgebraickou verzi pojmu hladká varieta a prozkoumáme vlastnosti, které vyvstanou oproti obecné varietě. Vrcholem oddílu je důkaz Sardovy věty, velmi významného výsledku i mimo rámec této práce, o dimenzi kritických bodů zobrazení mezi semialgebraickými varietami. Jeho znalost využijeme při dokazování existence Morseho funkce.

Definice 24. *Semialgebraická množina M je (hladká) varieta v R^k dimenze d, pokud pro každý bod $x \in M$ existuje jeho (semialgebraické) otevřené okolí $V \subseteq R^k$, (semialgebraické) otevřené okolí nuly $U \subseteq R^k$ a difeomorfismus $f : U \mapsto V$ tak, že $f(0) = x$ a $f(U \cap (R^d \times 0^{k-d})) = M \cap V$.*

Hladká varieta M v R^k dimenze d má jako semialgebraické množina dimenzi d, což lze nahlédnout přímo z definice a vlastnosti (semialgebraické) dimenze prezentované ve větě 21.

Tvrzení 30. *Buď $f : S \mapsto T$ lokální homeomorfismus a S,T semialgebraické množiny. Pak existuje konečné pokrytí $S = \cup_{i=1}^{n} U_i$, kde množiny U_i jsou otevřené v S pro $1 \leq i \leq n$ a $f|_{U_i}$ je homeomorfismus.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme T omezenou. Dále můžeme podobně jako v důkazu věty 27 předpokládat, že příslušný rozklad $T = \bigcup_{i=1}^{r} T_i$, který věta dává pro zobrazení f je indukován triangulací (K,h) množiny $\overline{T}$, neboli každá pro $i \geq 1, i \leq r$ existuje simplex $\sigma \in K$ tak, že $T_i = h(\mathring{\sigma})$. Nahraďme cílový prostor T prostorem $T' = \bigcup_{i=1}^{r} |\mathring{\sigma}_i|$ a zobrazení f lokálním homeomorfismem $g = h^{-1} \circ f : S \mapsto T'$.

Z věty 27 dostáváme pro $i \geq 1, i \leq r$, množiny F_i a homeomorfismy $q_i : \mathring{\sigma}_i \times F_i \mapsto g^{-1}(\mathring{\sigma}_i)$ tak, že $g \circ q_i$ je příslušná projekce. Jelikož q_i je homeomorfismus, je nutně dimenze F_i nulová, jinak by nedošlo k zachování dimenze semialgebraických množin při zobrazení homeomorfismem dokázané ve větě 21. Protože F_i je semialgebraická, jedná se o konečnou množinu bodů $x_{i,1}, \ldots, x_{i,m_i}$. Uvažujme k simplexu $\sigma_i \subseteq T'$ simplex $\sigma_{i'} \subseteq T'$ obsahující $\sigma_{i'}$ jako stěnu. K bodu $x \in F_i$ existuje právě jeden bod $x' \in F_{i'}$ tak, že

$$q_i(\mathring{\sigma}_i \times \{x\}) = \overline{q_{i'}(\mathring{\sigma}_{i'} \times \{x'\})} \cap g^{-1}(\mathring{\sigma}_i).$$

Sestrojme za použití této notace ke zvolenému $i \geq 1, i \leq r$ množinu

$$U_{i,x} = \bigcup_{\substack{\sigma_i \text{ je stěnou } \sigma_{i'} \\ \sigma_{i'} \subseteq T'}} q_{i'}(\mathring{\sigma}_{i'} \times \{x'\}).$$

Restrikce g na $U_{i,x}$ je homeomorfismus a konečný systém množin $U_{i,x}$ tvoří otevřené pokrytí S.

$\square$

Důsledek 5. *Buď M hladká varieta v R^k dimenze d. Existuje konečné pokrytí $M = \cup_{i=1}^{n} M_i$ semialgebraickými otevřenými množinami tak, že na každém $M_i, 1 \leq i \leq n$ lze vyjádřit $k - d$ souřadnic jako hladkou funkci ve zbylých d souřadnicích.*

Důkaz. Buď Π projekce na prvních d souřadnic. Sestavme množinu $M' \subseteq M$ z těch bodů $p \in M$, ve kterých Π zadává izomorfismus $T_p(M) \mapsto R^d$. Restrikce Π na M je lokální homeomorfismus, podle tvrzení 30 lze M' pokrýt konečně mnoha obrazy lokálních inverzů $\Pi\Big|_{M'}$, které jsou otevřené v R^d. Hladkost funkcí je zaručena větou 5. Tento postup opakujeme pro projekce na všechny kombinace d souřadnic.

$\square$

Definice 25. *Buď $f : N \mapsto M$ hladká funkce mezi dvěma hladkými varietami. Bod $x \in N$ nazveme kritickým bodem zobrazení f, pokud je hodnost $df(x)$ ostře menší než dim(M), a bod $y \in M$ kritickou hodnotou f, je-li obraz nějakého kritického bodu pod zobrazením f. Regulární bod f je bod N, který není kritickým bodem f a regulární hodnota je bod M, který není kritickou hodnotou f.*

K důkazu Sardovy věty využijeme následující klasický výsledek, jehož důkaz je dostupný například v [6] (věta 7.1) a platí v našem semialgebraickém případě díky semialgebraické větě o implicitních funkcích, případně lze důkaz najít v semialgebraické podobě jako větu 5.57 v [2].

Věta 31. *Buď $S \subseteq R^k$ semialgebraická množina, $x \in S$ její bod a $f : S \mapsto R^m$ funkce třídy C^∞ splňující navíc, že hodnost df je rovna konstantě p na S. Pak existuje otevřené okolí $U \subseteq S$ bodu x, difeomorfismus $u : U \mapsto (-1{,}1)^k$, otevřená semialgebraická množina $V \supseteq f(U)$ a difeomorfismus $v : (-1{,}1)^m \mapsto V$ tak, že $f|_U = v \circ g \circ u$, kde $g : (-1{,}1)^k \mapsto (-1{,}1)^m$ je zobrazení $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$.*

Věta 32 (Sard)**.** *Buď $f : N \mapsto M$ hladká semialgebraická funkce mezi dvěma hladkými varietami. Množina kritických hodnot f je semialgebraická podmnožina M, jejíž dimenze je ostře menší než dim(M)=: m.*

Důkaz. Z důsledku 30 je M také semialgebraická otevřená množina v R^k. Množina $S \subseteq N$ kritických bodů f je semialgebraická, protože f je hladké a protože pro derivace semialgebraické funkce umíme najít semialgebraický popis. Ze stratifikačního rozkladu je $S = \bigcup_{i=1}^r S_i = \bigcup_{i=1}^r \iota_i((0{,}1)^{d(i)})$, kde S_i jsou podvariety S. Hodnost diferenciálu $g_i = f \circ \iota_i : (0{,}1)^{d(i)} \mapsto M$ je menší než m z definice kritického bodu. Zbývá ukázat, že v takovém případě je i dimenze obrazu menší než m.

Předpokládejme, že tomu tak není, neboli $\dim(g((0{,}1)^{d(i)})) = m$. Z důsledku 5 můžeme v $g((0{,}1)^{d(i)})$ najít otevřené okolí U, které je otevřená v R^m. Z Hardtovy triviality (věta 27) existuje množina F a homeomorfismus $q : U \times F \mapsto g^{-1}(U)$ tak, že g je na $g^{-1}(U)$ složením q^{-1} a příslušné projekce, g je tedy speciálně otevřené zobrazení na $g^{-1}(U)$. Zvolme $x \in g^{-1}(U)$ tak, že hodnost $dg(x)$ je maximální na $g^{-1}(U)$, dg je na dostatečně malém otevřeném okolí x konstantní. Obraz libovolného otevřeného okolí x je otevřené okolí $g(x)$ dimenze m díky otevřenosti g, což je ve sporu s větou 31, podle které existuje otevřené okolí x, které g zobrazí na otevřené okolí dimenze ostře menší než m.

□

4.2 Homologie uzavřených semialgebraických množin

Kompaktní semialgebraické množiny umíme triangulovat, přirozeně se tedy nabízí zavedení simpliciální homologie. S výhodou použijeme simpliciální homologii s racionálními koeficienty.

Mějme triangulaci (K,h) kompaktní semialgebraické množiny S a zvolme pevné uspořádání vrcholů, kterým určíme orientaci simplexů v K. Označme pro $p \geq 0$ konečně-dimenzionální vektorový prostor $C_p(K)$ nad $\mathbb{Q}$ generovaný orientovanými simplexy z K, jeho prvky jsou (konečné) lineární kombinace $\sum_{\substack{\sigma \in K \\ dim(\sigma)=p}} q_\sigma \sigma$, $q_\sigma \in \mathbb{Q}$ nazývané p-řetězce. Hranice p-řetězce pro $p > 0$ je jeho obraz pod operátorem ∂_p, zadaný na generátorech předpisem

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{0 \leq i \leq p} (-1)^i [a_0, \ldots, a_{i-1}, \hat{a}_i, a_{i+1}, \ldots, a_p],$$

kde $\hat{a}_i$ značí vynechání dané souřadnice a kde $\sigma = [a_0, \ldots, a_p]$. Pro $p < 0$ dodefinujeme $\partial_p = 0$. Prvky Ker ∂_p se nazývají p-cykly.

Definujeme p-tou homologickou grupu jako

$$\mathrm{H}_p(S) := \mathrm{H}_p(K) = \frac{\mathrm{Ker}\ \partial_p}{\mathrm{Im}\ \partial_{p+1}}.$$

Homologii

$$\ldots \xrightarrow{0} H_p \xrightarrow{0} H_{p+1} \xrightarrow{0} \ldots$$

nazveme homologií S a označíme $H(S)$. Dimenze $H_p(S)$ jako vektorového prostoru nad racionálními čísly je konečné číslo označované jako p-té Bettiho číslo $b_p(S)$. Sumou Bettiho čísel kompaktní množiny S rozumíme hodnotu $b(S) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} b_i(S)$.

Definice 26. *O spojitých semialgebraických funkcích $f,g : S \mapsto T$ na S,T kompaktních semialgebraických množinách řekneme, že jsou (semialgebraicky) homotopické, jestliže existuje spojitá semialgebraická funkce $F : S \times [0,1] \mapsto T$ tak, že $F(x,0) = f(x)$ a $F(x,1) = g(x)$ pro všechna $x \in S$. V takovém případě píšeme $f \sim_h g$. Množiny S,T jsou (semialgebraicky) homotopicky ekvivalentní, jestliže existují funkce $h : S \mapsto T, i : T \mapsto S$ tak, že $h \circ i \sim_h id_T$ a $i \circ h \sim_h id_S$.*
Semialgebraická deformační retrakce S uzavřené, ale ne nutně omezené semialgebraické množiny na T je spojité semialgebraické zobrazení $F : S \times [0,1] \mapsto S$ tak, že $F(x,0) = id_S(x)$ a $F(S,1) \subseteq T$ a pro všechny $x \in T$ a $t \in [0,1]$ je $F(x,t) = x$.

Hlavním úkolem této sekce je ukázat, že takto definovaná homologie nezávisí na triangulaci, tedy že je dobře definovaná v nějakém reálně uzavřeném tělese R. Pro $R = \mathbb{R}$ je tento výsledek známý, dohledatelný například v [7] (kapitola 2, využíváme ekvivalenci simpliciální a singulární homologie, věta 2.27), pro nás pak bude výhodná následující formulace (tvrzení 2.19 v [7]).

Věta 33. *Jsou-li $K \subseteq \mathbb{R}^k, L \subseteq \mathbb{R}^l$ dva simpliciální komplexy a $f,g : |K| \mapsto |L|$ spojitá (ale ne nutně semialgebraická) zobrazení, která jsou navíc (ne nutně semialgebraicky) homotopické. Pak $H(f) = H(g)$ zadává zobrazení $H(K) \mapsto H(L)$.*

Požadované rozšíření do reálně uzavřeného tělesa provedeme tak, že ukážeme, že dovedeme popsat homotopii formulí prvního řádu. Před samotným důkazem nejdříve připomeňme, že jsme v triangulaci kompaktní semialgebraické množiny dokázali zaručit, že vrcholy simpliciálního komplexu jsou v racionálních souřadnicích. To ale znamená, že v popisu tohoto komplexu jako semialgebraické množiny zadané lineárními rovnicemi a nerovnicemi vystupují pouze racionální koeficienty. Pro libovolné reálně uzavřené těleso R má tedy význam hovořit o $\mathrm{Ext}(|K|,R)$.

Věta 34. *Jsou-li $K \subseteq \mathbb{R}^k, L \subseteq \mathbb{R}^l$ dva simpliciální komplexy s vrcholy v racionálních souřadnicích a $f,g : Ext(|K|,R) \mapsto Ext(|L|,R)$, pak $H(f) = H(g)$.*

Důkaz. Postačí ukázat, že homotopii mezi zobrazeními mezi $\mathrm{Ext}(|K|,\mathbb{R}_{alg})$ a $\mathrm{Ext}(|L|,\mathbb{R}_{alg})$ lze přenést na homotopii mezi zobrazeními mezi $\mathrm{Ext}(|K|,R)$ a $\mathrm{Ext}(|L|,R)$ a naopak, tvrzení pak vyplyne z věty 33.

Viděli jsme, že spojitost zobrazení můžeme vyjádřit formulí prvního řádu. Homotopie je z definice semialgebraické zobrazení, a tedy ji lze přenést z R_{alg} do R, neboť koeficienty příslušné formule náleží $R_{alg} \subseteq R$.

Naopak, máme-li homotopii F mezi f,g :Ext($|K|$,R) $\mapsto$ Ext($|L|$,R), tomuto přenosu brání fakt, že se v semialgebraickém popisu grafů F,f,g mohou vyskytovat koeficienty z R, které nejsou racionální. Ukážeme jak budeme postupovat u F, pro zobrazení f,g je to stejné. Zaznamenejme si neracionální koeficienty formulí popis do vektoru $c = (c_1, \dots c_N) \in R^N$. Ve formuli, která popisuje graf F nahraďme každý výskyt konstanty $c_i, 1 \leq i \leq N$, novou proměnnou, řekněme Y_i. V nové formuli se vyskytují pouze racionální koeficienty.

Zbývá svázat nové proměnné formulí prvního řádu s racionálními koeficienty, která zaznamená naše požadavky na daná zobrazení. V případě f,g popíšeme formulí, že se jedná o semialgebraické spojité funkce. V případě F zaznamenáme, že F má být homotopie mezi f a g, což je nyní možné prostřednictvím připraveného popisu f,g pomocí formule prvního řádu s racionálními koeficienty.

Tato formule je splnitelná v R a její koeficienty jsou racionální, z Tarskiho-Seindebergova principu je tato formule splnitelná také v $\mathbb{R}_{alg}$. Existuje tedy vektor $c' = (c'_1, \dots c'_N) \in \mathbb{R}_{alg}^N$ splňující, že po příslušném dosazení namísto nových proměnných dostaneme požadovanou homotopii v $\mathbb{R}_{alg}$.

□

Právě dokázané tvrzení nám umožní převést několik klasických výsledků o homologiích na semialgebraické množiny v reálně uzavřeném tělese.

Důsledek 6. *Jsou-li S,$T \subseteq R^k$ kompaktní semialgebraické množiny, které jsou homotopicky ekvivalentní, pak $H(S) \cong H(T)$.*

Speciálním případem homotopické ekvivalence je homeomorfismus. Homologie tedy nezávisí na triangulaci, neboť pokud máme dvě triangulace $(K,h), (L,h')$ kompaktní semialgebraické množiny S, pak $h'^{-1}h : |K| \mapsto |L|$ je homeomorfismus, a z výše uvedeného důsledku jsou $H(K)$ a $H(L)$ izomorfní.

Dále dostáváme, že homologické grupy jsou invariantní vůči rozšíření semialgebraických množin. Konkrétně, máme-li $R \subseteq R'$ dvě reálně uzavřená tělesa, a S semialgebraickou množinu v R^k, je $H(S) = H(\mathrm{Ext}(S, R')$, neboť je-li (K,h) triangulace S, za triangulaci Ext(S,R') můžeme zvolit dvojici (Ext(K,R'), Ext(h,R')), kde Ext(K,R') je rozšíření jednotlivých simplexů do R'.

Dalším speciálním případem homotopie je deformační retrakce. Z důkazu věty 29 vyplývá, že pokud ta platí na poloměru $r' > 0$, pak platí i na všech menších poloměrech $0 < r < r'$. Použijeme-li homeomorfismus $||x||^2/x$ na $R^k \setminus \{0\}$ a větu 29, dostaneme výsledek, který nám umožní zavést homologii také na neomezených uzavřených množinách.

Důsledek 7. *Buď S uzavřená semialgebraická množina, ne nutně omezená. Pak existuje $r' \in R, r' > 0$, tak, že pro všechna $r \geq r'$ existuje retrakce S na $S \cap \overline{B}(0,r)$ a retrakce $S \cap \overline{B}(0,r)$ na $S \cap \overline{B}(0,r')$.*

Tento důsledek nám tímto společně s větou 34 umožňuje definovat homologii uzavřené, ale ne nutně omezené množiny následujícím způsobem. Vezmeme si poloměr $r > 0$, na kterém je zaručena platnost tvrzení a definujme $H(S) := H(S \cap \overline{B}(0,r))$. To je dobře definované, neboť máme-li $r' > r$, existuje deformační retrakce $S \cap \overline{B}(0,r')$ na $S \cap \overline{B}(0,r)$, a tedy také $H(S \cap \overline{B}(0,r')) \cong H(S \cap \overline{B}(0,r))$ z věty 34.

Věta 35 (Mayer-Vietoris)**.** *Buďte $K, K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ simpliciální komplexy takové, že $K_1 \subseteq K, K_2 \subseteq K$. Existuje exaktní posloupnost*

$$\cdots \mapsto H_p(K_1) \oplus H_k(K_2) \mapsto H_p(K_1 \cup K_2) \mapsto H_{p-1}(K_1 \cap K_2) \mapsto \cdots .$$

Důkaz. Lze najít v [7] na stranách 149-150.

□

Tvrzení 36. *Buďte S_1, S_2 uzavřené semialgebraické množiny v R^k. Pak pro $i \in \mathbb{N}$ platí*

- $b_i(S_1) + b_i(S_2) \leq b_i(S_1 \cup S_2) + b_i(S_1 \cap S_2)$,
- $b_i(S_1 \cup S_2) \leq b_i(S_1) + b_i(S_2) + b_{i-1}(S_1 \cap S_2)$.

Důkaz. Buďte nejdříve S_1, S_2 navíc omezené. Použijeme větu 26 na kompaktní množinu $S_1 \cup S_2$ a její podmnožiny $S_1, S_2, S_1 \cap S_2$, abychom obdrželi triangulaci (K,h) množiny $S_1 \cup S_2$, ke které umíme najít komplexy $K_1, K_2 \subseteq K$ tak, aby $(K_i, h\big|_{K_i})$ byla triangulací S_i pro $i \in \{1,2\}$ (tj. triangulace (K,h) je v tomto smyslu zároveň triangulací S_1, S_2 i $S_1 \cap S_2$). Požadované nerovnosti pak plynou z věty 35 a invariance homologie na rozšířeních.

V případě, že některá ze zadaných množin není omezená, využijeme definici homologie pro neomezené množiny.

□

Důležitou roli bude hrát interpretace nultého Bettiho čísla neprázdné kompaktní semialgebraické množiny jakožto počtu jejích souvislých komponent.

Příklad. Nulté Bettiho číslo B_k a S^k je rovno jedné, protože obě množiny mají jednu komponentu souvislosti. Ostatní Bettiho čísla množiny B_k jsou nulová, protože B_k je kontrahovatelná. Kromě nultého je jedině k-té Bettiho číslo S^k nenulové, přičemž navíc platí $b_k(S^k) = 1$. To lze nahlédnout za pomocí Mayer-Vietorisovy posloupnosti aplikované na rozklad sféry na dvě polokoule.

Morseho lemmata nám až na homotopickou ekvivalenci popisují nesingulární nadplochu jako objekt, který vznikne vhodným slepením koulí vhodné dimenze. Od této informace bychom chtěli přejít k homologickému popisu.

4.3 Existence Morseho funkce na nesingulární omezené nadploše

Nebudeme se snažit prokázat přímo existenci Morseho funkce na obecné varietě. Místo toho zvolíme vhodnou redukci, zakládající na dosavadních výsledcích této práce, zjednodušující a zpřehledňující dokazování existence Morseho funkce. Jelikož standardní výsledky Morseho teorie jsou známy v případě, že reálně uzavřeným tělesem jsou reálná čísla $\mathbb{R}$, první redukce spočívá ve volbě reálných čísel jako výchozího tělesa po zbytek kapitoly, kde dokážeme Thom-Milnorovu nerovnost nejprve pro reálná čísla, a teprve potom rozšíříme výsledek i na obecná reálně uzavřená tělesa.

Druhá redukce spočívá v omezení se na tzv. nesingulární omezenou nadplochu.

Definice 27. *Nadplocha $V(P)$, kde $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ je nesingulární, pokud gradient P není v žádném bodě $V(P)$ nulový vektor. Říkáme, že S je vymezena nesingulární nadplochu $V(P)$, jestliže hranice S je $V(P)$.*

Možnost této redukce je ospravedlněna následujícím tvrzením. Jestliže k porozumění homologii obecné algebraické množiny stačí porozumět homologii nesingulární nadplochy (případně jí vymezené množiny), vystačíme si s použitím Morseho teorie na tento speciální případ.

Tvrzení 37. *Nechť $V(\mathscr{P}) \subseteq \mathbb{R}^k$ je algebraická množina zadána polynomy z $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$, jejichž stupeň nepřesahuje d. Pak existuje omezená nesingulární algebraická nadplocha W zadaná polynomem stupně nejvýše $2d$ a jí vymezená množina W' tak, že $b(V) = b(W')$.*

Důkaz. Z kuželovité struktury semialgebraické množiny dostaneme deformační retrakci $V(P_1, \dots, P_n)$ na kompaktní $V' = V(P_1, \dots, P_n) \cap \overline{B_k}(0,r)$. Použijeme větu 32 na zobrazení

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i^2(x)}{r^2 - ||x||^2},$$

abychom zjistili, že množina kritických hodnot $f : V' \mapsto \mathbb{R}$ má dimenzi nula, to jest jedná se o konečnou množinu bodů na reálné ose. Umíme tedy najít taková kladné $a \in \mathbb{R}$, aby interval $(0,a)$ neobsahoval žádnou kritickou hodnotu. Definujme

$$P(\mathbf{X},Y) = \sum_{i=1}^n P_i^2(\mathbf{X}) + Y(||\mathbf{X}||^2 - r^2).$$

Pro $c \in (0,a)$ je množina $W_c = \{x \in \mathbb{R}^k | P(x,c) = 0\}$ nesingulární nadplocha v R^k, neboť ukážeme, že kdyby byly v bodě $p \in W_c$ derivace P podle $X_1, \dots, X_k$ nulové, byla by splněna polynomiální soustava

$$P(p,c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial X_1}(p,c) = \dots = \frac{\partial P}{\partial X_k}(p,c),$$

ale tím pak rovněž splněna soustava

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_k}(p) = 0$$

a $f(p) = c$. Bod c by byl ale kritickou hodnotou f, což je v rozporu s jeho výběrem.

Z rovnice $P(p,c) = 0$ vyvodíme, že

$$r^2 - \|p\|^2 = \sum_{i=1}^n P_i^2(p) \cdot c^{-1} \tag{4.1}$$

a tedy $f(p) = c$. Z rovnice $\partial P / \partial X_j(p,c) = 0$ dostaneme

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^n P_i^2)}{\partial X_j}(p) = -2cp_j. \tag{4.2}$$

Píšeme

$$\frac{\partial f}{\partial X_j}(p) = \frac{\partial(\sum_{i=1}^n P_i^2)}{\partial X_j}(p) \cdot (r^2 - \|p\|^2)^{-1} + \frac{2p_j \sum_{i=1}^n P_i^2(p)}{(r^2 - \|p^2\|)^2}, \tag{4.3}$$

což po dosazení z rovnic 4.1 a 4.2 dává nulu pro všechna $j \geq 1, j \leq k$. Množina W_c je tedy opravdu nesingulární nadplocha.

Označme $K_b = \{x \in \mathbb{R}^k | P(x,b) \leq 0\}$ kompaktní množinu vymezenou W_b a $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{k+1} | P(x,y) \leq 0\}$. K dokončení důkazu nyní sestrojíme homotopickou ekvivalenci V' s K_b pro nějaké b, tvrzení věty pak bude důsledkem invariance homologie na homotopicky ekvivalentních množinách.

Použijeme větu 27 na projekci $\pi_Y : K \mapsto \mathbb{R}$ na poslední souřadnici a podmnožinu $V' \times (0,b] \subseteq K$. Pro dostatečně malé b umíme zařídit, aby celý interval $(0,b]$ náležel jedné části rozkladu reálné osy vytvořeného touto větou. Dostáváme k dispozici homeomorfismus

$$q : \pi_Y^{-1}(b) \times (0,b] = K_b \times (0,b] \mapsto \pi_Y^{-1}((0,b])$$

tak, že $\pi_Y(q(x,y)) = y$, kde navíc pro restrikci q na $V' \times (0,b]$ (je totiž $V' \subseteq K_b$) máme $q(V' \times (0,b]) = V' \times (0,b] \cap \pi_Y^{-1}((0,b]) = V' \times (0,b]$ a tak je q zároveň zobrazení z $V' \times (0,b]$ do sebe.

Požadovanou homotopickou ekvivalenci mezi V' a K_b dostaneme přes vnoření $i : V' \hookrightarrow K_b$ a zobrazení $h = \lim_{y \to 0^+} \pi_{\mathbf{X}}(q(x,y))$. Je totiž

$$g \circ i \sim_h id_{V'} \text{ a } i \circ g \sim_h id_{K_b}$$

skrze homotopii

$$F(x,y) = \begin{cases} \pi_{\mathbf{X}}(q(x,y), & \text{pokud } y \in (0,b) \\ h(x), & \text{pokud } y = 0. \end{cases}$$

□

Využijme nyní této redukce. Pojmenování nadplocha je dobře volené, neboť z věty o implicitní funkci lze na nesingulární nadploše zavést strukturu $k-1$-dimenzionální variety. Zaveďme konkrétní notaci, která bude sloužit po zbytek kapitoly. V bodě $p = (p_1, \ldots, p_k) \in V(P)$ je alespoň jedna z derivací P v bodě p nenulová, řekněme $\partial P / \partial X_1(p) \neq 0$, a tak můžeme za lokální souřadnice zvolit $X_2, \ldots, X_k$, protože z věty 5 máme okolí $U \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ bodu $p' = (p_2, \ldots, p_k)$ a zobrazení $\Phi : U \mapsto R$ takové, že $\Psi : x' \mapsto (\Phi(x'), x') = x$ je diffeomorfismus z U na $\Psi(U) \subseteq V(P)$. Derivace Φ lze vyjádřit pomocí derivací P prostřednictvím vztahu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_i}(x') = -\frac{\frac{\partial P}{\partial X_i}}{\frac{\partial P}{\partial X_1}}(x), \tag{4.4}$$

kde $2 \leq i \leq k$.

Budeme zkoumat kritické body projekce $\pi : (x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1$ na první souřadnici. Pro nějakou množinu $S \subseteq R^k$ a $x \in R$ budeme značit $S_x := S \cap \pi^{-1}(x)$, $S_{<x} := S \cap \pi^{-1}(-\infty, x)$ a $S_{\leq x} := S \cap \pi^{-1}(-\infty, x]$. Posloužit nám může neformální představa, používaná často k ilustraci Morseho teorie, ve které interpretujeme π jako výškovou funkci vzhledem k první souřadnici, kterou vnímáme vertikálně, a množinu $S_{\leq x}$ jako "obrys"množiny S ponořené až do "výšky"x do kapaliny.

Gradient P v bodě p je kolmý k tečnému prostoru $T_p(V(P))$ a tedy p je kritickým bodem π, právě když $\partial P / \partial X_i = 0$ pro $i \leq k, i \geq 2$.

O kritickém bodu π řekneme, že je nedegenerovaný, jestliže v námi zavedené parametrizaci je Hessova matice

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial X_i \partial X_j}(p')\right), 2 \leq i \leq k, 2 \leq j \leq k$$

invertibilní. Jakožto reálná symetrická matice je Hessova matice diagonalizovatelná, a je-li navíc invertibilní, vlastní čísla na diagonále matice náleží $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definujme index takového kritického bodu jako počet kladných vlastních čísel Hessovy matice. Z lineární algebry víme, že ortogonální transformace neovlivní nedegenerovanost a index bodu.

Definice 28. *Hladkou funkci $f : M \mapsto \mathbb{R}$ na varietě M nazýváme Morseho funkcí, jestliže všechny její kritické body jsou nedegenerované a ve vláknu $f^{-1}(x)$ se nachází nejvýše jeden kritický bod pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.*

Dokážeme, že projekce π je Morseho funkcí na $V(P)$. To jistě neplatí obecně, tj. pro všechny lokální souřadnice (např. dvojitý torus umístěný vertikálně vůči souřadnici na kterou projektujeme má dva kritické body na jednu kritickou hodnotu), ale ukážeme, že tento problém lze vyřešit vhodnou změnou souřadnic. Musíme ovšem dávat pozor na to, abychom zachovali vlastní čísla Hessiánu, a tedy i index kritického bodu, budeme tedy hledat ortogonální změnu souřadnic.

Ze Sardovy věty víme, že kritických hodnot zobrazení π je konečně mnoho. Podobný finitární výsledek pro kritické body π upřesníme omezením počtu kritických bodů pomocí stupňů polynomů definujících nesingulární nadplochu. Toto omezení provedeme pomocí následujícího klasického výsledku algebraické geometrie.

Věta 38 (Bézout)**.** *Buďte $\mathscr{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ polynomy z $R[i][X_1, \ldots, X_k]$ stupňů $d_1, \ldots, d_k$. Pak počet nesingulárních nul $\mathscr{P}$, tj. takových $x \in R[i]^k$, že hodnost Jacobiho matice příslušné $\{P_1, \ldots, P_k\}$ v bodě x rovna k, je nejvýše $d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$.*

Důkaz. Důkaz je možné nalézt v [2] u věty 4.106.

□

Tvrzení 39. *Předpokládejme, že všechny kritické body π jsou nedegenerované na nesingulární nadploše $V(P)$, kde P je stupně d. V takovém případě je kritických bodů π nejvýše $d(d-1)^{k-1}$.*

Důkaz. Množina kritických bodů zobrazení π je algebraická množina zadaná nulami polynomiálního systému $\mathscr{P} = \{P, \frac{\partial P}{\partial X_2}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial X_k}\}$. K důkazu bude stačit ověřit, že tyto nuly jsou nesingulární, pak totiž z věty 38 dostaneme, že počet kritických bodů π je nejvýše roven hodnotě

$$\deg(P)\deg(\frac{\partial P}{\partial X_2})\ldots\deg(\frac{\partial P}{\partial X_k}) = d(d-1)^{k-1}.$$

Ověřme tedy, že Jakobián $\mathscr{P}$ je v bodě $p \in \mathbb{R}^k$, kde p je nulou systému $\mathscr{P}$, nenulový. Z podoby implicitní derivace, prezentované vztahem 4.4, po úpravě a derivaci podle X_j obdržíme vzorec

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X_j \partial X_i}(p) = -\frac{\partial P}{\partial X_1}(p)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_j \partial X_i}(p'),$$

kde $2 \leq i \leq k, 2 \leq j \leq k$. Jelikož $\partial P/\partial X_1(p) \neq 0$ a $\partial P/\partial X_i(p) = 0$ pro $i \geq 2, i \leq k$, můžeme použít rozvoj podle prvního sloupce Jacobiho matice, abychom došli ke zjištění, že Jakobián $\mathscr{P}$ v bodě p je roven nenulovému násobku Hessiánu π v bodě p. Bod p je tedy nesingulární nulou, neboť je z předpokladu nedegenerovaný.

$\square$

Tento výsledek je jen částečně uspokojivý bez dodatku, že požadavek nedegenerovanosti neubírá na obecnosti.

Tvrzení 40. *Existuje ortogonální změna souřadnic tak, že v nových souřadnicích má zobrazení π pouze nedegenerované kritické body.*

Důkaz. Využijeme Gaussovo zobrazení $g : V(P) \mapsto S^{k-1}$ definované předpisem

$$g(x) := \frac{\text{Grad}(P(x))}{||\text{Grad}(P(x))||} = \pm \frac{(-1, \frac{\partial \Phi}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial X_k})}{\sqrt{1 + (\sum_{i=2}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial X_i}(x'))^2}},$$

kde zápis v lokálních souřadnicích plyne z rovnice pro implicitní derivaci 4.4 a toho, že v kritickém bodě p zobrazení π je $g(p) = (\pm 1, 0, \dots, 0)$. Derivujeme-li g_j, $j-$tou složku zobrazení g, podle X_i obdržíme vztah

$$\frac{\partial g_j}{\partial X_i}(p) = \pm \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_i \partial X_j}(p'), \ 2 \leq i \leq k, 2 \leq j \leq k,$$

ze kterého pozorujeme, že $(\partial g_i/\partial X_i(p))_{i,j=2}^{k}$ je invertibilní právě když je p nedegenerovaný bod π.

S využitím této charakterizace nyní stačí ukázat, že na sféře S^{k-1} dokážeme najít dva protilehlé body, které jsou regulárními hodnotami zobrazení g, pak totiž po příslušné rotaci souřadnicového systému, jež je zároveň ortogonální transformací, je možné zajistit, aby body $(1, 0, \dots, 0)$ a $(-1, 0, \dots, 0)$ byly regulárními hodnotami zobrazení Gaussova zobrazení. Tím bude tvrzení dokázáno.

Předpokládejme, že takové dva body nelze najít. Ze Sardovy věty (věta 32) je dimenze množiny kritických bodů rovna nejvýše číslu $k - 2$, a tak najdeme otevřenou množinu regulárních hodnot dimenze $k - 1$. Uvažujeme-li k ní protilehlé body, zjistíme, že tvoří otevřenou množinu totožné dimenze kritických hodnot g , ale to popírá tvrzení Sardovy věty.

$\square$

Věta 41. *Projekce π je až na ortogonální změnu souřadnic Morseho funkcí na omezené nesingulární nadploše $V(P)$.*

Důkaz. Z tvrzení 40 víme, že kritické body π jsou až na ortogonální změnu souřadnic nedegenerované a z tvrzení 39 je jich pouze konečný počet. Bez újmy na obecnosti budeme dále předpokládat, že se všechny kritické body liší v souřadnici X_2, čehož můžeme dosáhnout ortogonální změnou souřadnic $X_2, \dots, X_k$ díky konečnému počtu kritických bodů. Zbývá zajistit, že každé kritické hodnotě odpovídá právě jeden kritický bod.

Uvažujme ortogonální změnu souřadnic pro ϵ novou proměnnou

$$\overline{X_1} = X_1 + \epsilon X_2, \overline{X_2} = X_2 - \epsilon X_1, \overline{X_3} = X_3, \overline{X_4} = X_4, \ldots, \overline{X_k} = X_k$$

a v novém systému souřadnic projekci $\overline{\pi}$ na souřadnici $\overline{X_1}$. Ukážeme, že v nadtrženém systému je splněno, že ve vlákně příslušné kritické hodnoty se nachází pouze jediný kritický bod.

Označme $\overline{p} \in \mathbb{R}\langle\epsilon\rangle^k$ nulu polynomu P v reálně uzavřeném tělese $\mathbb{R}\langle\epsilon\rangle$. Protože $V(P)$ je omezená, je $\lim_\epsilon(\overline{p})$ dobře definovaná, označme tuto limitu p. Pokud je $\mathrm{Grad}(P)(\overline{p})$ nějakým nenulovým reálným násobkem vektoru $(1,\epsilon, 0 \ldots,0)$, pak p je kritický bod π, o kterém navíc víme, že je nedegenerovaný. Z charakterizace nedegenerovaných bodů z důkazu tvrzení 40 existuje semialgebraické okolí U bodu $p' = (p_2, \ldots, p_k)$ tak, že $g \circ \Psi$ je diffeomorfismus zobrazující U na okolí bodu $(1, 0, \ldots, 0) \in S^{k-1}$, kde g je Gaussovo zobrazení a $\Psi : x' \mapsto (\Phi(x'), x') = x$ je diffeomorfismus z U na $\Psi(U) \subseteq V(P)$. Buď

$$\mathrm{Ext}(g^{-1},\mathbb{R}\langle\epsilon\rangle) : \mathrm{Ext}(g \circ \Phi(U),\mathbb{R}\langle\epsilon\rangle) \mapsto \mathrm{Ext}(\Phi(U),\mathbb{R}\langle\epsilon\rangle)$$

přenesení inverzního zobrazení ke g definované na příslušné restrikci do $\mathbb{R}\langle\epsilon\rangle$. Jeho prostřednictvím umíme k bodu p jednoznačně najít bod v $\mathrm{Ext}(\Phi(U),\mathbb{R}\langle\epsilon\rangle)$, ve kterém je gradient úměrný $(1, \epsilon, 0 \ldots, 0)$. Tímto bodem je ale $\overline{p}$, neboť tento požadavek splňuje.

K dalšímu postupu budeme potřebovat odhadnout řád řady $\overline{p}_i - p_i$. Využijeme větu o střední hodnotě pro vícerozměrné funkce aplikovanou na

$$\mathrm{Ext}(g^{-1},\mathbb{R}\langle\epsilon\rangle)((1 + \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}(1, \epsilon, 0, \ldots, 0)) - \mathrm{Ext}(g^{-1},\mathbb{R}\langle\epsilon\rangle)(1, 0, \ldots, 0),$$

odkud můžeme zapsat řád $\overline{p} - p$ jako řád

$$(1 + \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}(1, \epsilon, 0, \ldots, 0) - (1, 0, \ldots, 0), \tag{4.5}$$

neboť Jakobián $\mathrm{Ext}(g^{-1},\mathbb{R}\langle\epsilon\rangle)$ je v bodě $(1,0, \ldots, 0)$ nenulové reálné číslo J, a tedy také pro $\hat{p} \in \mathrm{Ext}(S^{k-1}(0,1),\mathbb{R}\langle\epsilon\rangle)$ infinitesimálně blízko bodu $(1,0, \ldots, 0)$ je obraz Jakobiánu v bodě $\hat{p}$ při zobrazení $\lim_\epsilon$ roven tomuto číslu J. Ze zápisu 4.5 použitím Taylorova rozvoje $(1+\epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$ vyvozujeme, že řád $\overline{p}_i - p_i$ je na nenulových složkách roven alespoň jedné. Navíc pozorujeme, že jelikož J je nenulové, je $\overline{p}$ nedegenerovaný bod právě když p je nedegenerovaný.

Z varianty Taylorova rozvoje pro vícerozměrné funkce máme rozvoj Φ v bodě p'

$$\overline{p_1} = p_1 + \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=2}^{k} \frac{\partial^2\Phi}{\partial X_i \partial X_j}(p')(\overline{p_i} - p_i)(\overline{p_j} - p_j) + c,$$

kde c zastupuje členy s řádem alespoň dva. V rozvoji nefiguruje lineární člen, neboť ten je nulový z rovnosti pro derivace implicitní funkce 4.4. Řád $(\overline{p_i} - p_i)(\overline{p_j} - p_j)$ je alespoň dva, můžeme tedy psát

$$\overline{\pi}(\overline{p}) = \overline{p_1} + \epsilon\overline{p_2} = p_1 + \epsilon p_2 + c.$$

Jelikož se ve starých souřadnicích liší kritické body ve druhé souřadnici, v nových souřadnicích nemají dva kritické body $\overline{\pi}$ stejnou první souřadnici. Na závěr zvolíme prvek $e \in \mathbb{R}$ tak, aby formule prvního řádu popisující vlastnost, že dva kritické body $\overline{\pi}$ nemají stejnou první souřadnici, platila v $\mathbb{R}$, jehož existence je zaručena tvrzením 7.

V nových souřadnicích, jejichž změnu jsme nyní provedli konkrétně s dosazením $\epsilon = e$ je tedy $\overline{\pi}$ Morseho funkcí na nadploše $V(P)$.

□

Existence Morseho funkce na nesingulární omezené reálné nadploše je prokázána, z Morseho teorie zavedené v knize [5] obdržíme následující výsledky, které jsou v ní reprezentovány větami 3.1 a 3.2. Buď S vymezená $V(P)$ podmínkou $P \geq 0$.

Věta 42 (Morse Lemma A)**.** *Buď $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ interval neobsahující žádnou kritickou hodnotu π na $V(P)$. Pak $S_{[a,b]}$ je homeomorfní $S \times [a,b]$ a $S_{\leq a}$ je homotopicky ekvivalentní s $S_{\leq b}$.*

Věta 43 (Morse Lemma B)**.** *Buď π Morseho funkce na $V(P)$ a c její kritická hodnota příslušná bodu p s indexem λ. Volíme-li ϵ dostatečně malé a*

- *pokud $(\partial Q/\partial X_1)(p) < 0$, pak $S_{c+\epsilon}$ je homotopicky ekvivalentní $S_{c-\epsilon}$,*
- *pokud $(\partial Q/\partial X_1)(p) > 0$, pak $S_{c+\epsilon}$ je homotopicky ekvivalentní $S_{c-\epsilon}$ s $k - 1 - \lambda$-rozměrnou koulí přilepenou podél její hranice $S^{k-1-\lambda}$.*

4.4 Thom-Milnorova nerovnost

Viděli jsme, že pro algebraickou množinu máme jen konečně mnoho topologických typů, to jest algebraických množin $V_1, \ldots, V_{m(d,k)}$ takových, že libovolná algebraická množina V v R^k definovaná polynomy stupně nejvýše d je některé z nich homeomorfní. Speciálně tedy platí, že $b(V) \leq \max_{1 \leq i \leq m(d,k)}(V_i)$. Označme $b(k,d,R)$ hodnotu, které shora omezuje $b(V)$ pro všechny algebraické množiny $V \subseteq R^k$ zadané polynomy stupně nejvýše d.

Příklad. Hodnota $b(k,d,R)$ je alespoň d^k. Můžeme totiž uvažovat soubor polynomů

$$\mathscr{P} = \{(X_1 - 1)(X_1 - 2) \ldots (X_1 - d), \ldots, (X_k - 1)(X_k - 2) \ldots (X_k - d)\},$$

jehož nuly v R^k tvoří d^k izolovaných bodů. Nulté Bettiho číslo této algebraické množiny je tedy rovno d^k, přičemž ostatní Bettiho čísla jsou nulová.

Tvrzení 44. *Je-li π Morseho funkce na nesingulární omezené nadploše V, a S je množina vymezená V, pak suma Bettiho čísel S nepřesahuje polovinu počtu kritických bodů.*

Důkaz. Označme $v_1, \ldots, v_l$ kritické hodnoty π tak, že $v_1 < \ldots < v_l$, a $p_1, \ldots, p_l$ jim odpovídající kritické body, tedy tak, že $\pi(p_i) = v_i$, přičemž bod p_i má jako kritický bod index λ_i. Dokážeme, že $b(V_{\leq v_i}) \leq i$ pro $i = 1, \ldots l$.

Mimo kritické hodnoty nedochází podle lemmatu 42 ke změně Bettiho čísel, přesněji $V_{\leq v_i + \epsilon}$ je homotopicky ekvivalentní s $V_{\leq v_{i+1} - \epsilon}$ pro dostatečně malé ϵ a pro všechna $i = 1, \ldots, k - 1$. Vyšetříme tedy situaci kolem kritických hodnot.

Pro $i = 1$ je $b(V_{\leq v_1}) = 1$, neboť $V_{\leq v_1} = \{p_1\}$ a π je Morseho funkce na V.

Při přechodu od $V_{\leq v_i-\epsilon}$ k $V_{\leq v_i+\epsilon}$ se nám podle lemmatu 43 může stát, že k $V_{\leq v_i-\epsilon}$ budeme potřebovat přilepit kouli dimenze $k-1-\lambda_i$. Z tvrzení 36 dostáváme

$$b_i(V_{\leq v_i-\epsilon} \cup B_{k-1-\lambda_i}) \leq b_i(V_{\leq v_i-\epsilon}) + b_i(B_{k-1-\lambda_i}) + b_{i-1}(V_{\leq v_i-\epsilon} \cap B_{k-1-\lambda_i}), \quad (4.6)$$

kde $i \geq 1$. Z interpretace nultého Bettiho čísla jako počtu souvislých komponent dostáváme též, že

$$b_0(V_{\leq v_i-\epsilon} \cup B_{k-1-\lambda_i}) \leq b_0(V_{\leq v_i-\epsilon}) + b_0(B_{k-1-\lambda_i}) - 1 = b_0(V_{\leq v_i-\epsilon}), \quad (4.7)$$

neboť $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ a tedy ve sjednocení dojde ke spojení alespoň dvou komponent.

Z příkladu 4.2 je člen $b_i(B_{k-1-\lambda_i})$ v rovnici 4.6 nulový pro všechna $i \geq 1$ a člen $b_{i-1}(V_{\leq v_i-\epsilon} \cap B_{k-1-\lambda_i}) = b_i(S^{k-1-\lambda_i})$ je nenulový jen pro $b_{k-1-\lambda_i}$. Nulté Bettiho číslo se z rovnice 4.7 nezmění. Pro $k-1-\lambda_i > 1$ je odtud

$$b(V_{\leq v_i+\epsilon}) \leq b(V_{\leq v_i-\epsilon}) + 1 \quad (4.8)$$

Pro $k-1-\lambda_i = 1$, tedy lepíme-li úsečku, nám u prvního Bettiho čísla tento odhad dostatečně nepomůže. Jelikož však přilepení úsečky ke komplexu změní počet $1-$cyklů nejvýše o jedna, odhad 4.8 platí z definice.

Zbývá ukázat, že lze zajistit, aby k tomuto lepení došlo nejhůře v polovině kritických bodů, tedy že $\partial P/\partial X_1(p_i) > 0$ v nejvýše polovině bodů $p_1, \ldots, p_l$. Kdyby tomu tak nebylo, můžeme vyměnit směr osy X_1, tedy procházet objekt z opačné strany.

□

Věta 45 (Oleinik-Petrovski,Thom, Milnor)**.** *V reálně uzavřeném tělese R platí*

$$b(k,d,R) \leq d(2d-1)^{k-1}.$$

Důkaz. Nerovnost nejdříve dokážeme pro reálná čísla. Je-li $V(\mathscr{P}) \subseteq \mathbb{R}^k$ zadaná polynomy stupně nejvýše d, můžeme podle tvrzení 37 přistoupit ke kompaktní množině K vymezené nějakou omezenou nesingulární nadplochou W zadanou polynomem stupně nejvýše $2d$, pro kterou $b(V) = b(K)$. Na W existuje Morseho funkce π podle věty 41, můžeme tedy oprávněně použít výsledky Morseho teorie reprezentované lemmaty 42 a 43, které jsme použili při sestavování odhadu, ve větě 44. Odtud je $b(K)$ shora omezena nejvýše polovinou počtu kritických bodů π na W. Těchto kritických bodů je podle tvrzení 39 nejvýše $2d(2d-1)^{k-1}$. Uzavřeme, že

$$b(k,d,\mathbb{R}) \leq d(2d-1)^{k-1}.$$

Nyní přeneseme tuto nerovnost do libovolného reálně uzavřeného tělesa. Podobně jako v důkazu konečnosti topologických typů ztotožníme systém $\mathscr{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ polynomů z $\mathbb{R}_{\text{alg}}[X_1, \ldots, X_k]$ stupně nejvýše d s vektorem jejich koeficientů, tj. prvkem $\mathbb{R}^N_{\text{alg}}$. Definujme semialgebraickou množinu

$$S = \{(P_1, \ldots, P_n, x) \in \mathbb{R}^N_{\text{alg}} \times \mathbb{R}^k_{\text{alg}} | \bigwedge_{i=1}^{n} P_i(x) = 0\}$$

a $\Pi : S \mapsto \mathbb{R}_{\text{alg}}^N$ projekci na prvních N souřadnic. Z věty 27 dostaneme rozklad $\mathbb{R}_{\text{alg}}^N = \bigcup_{i=1}^r T_i$, algebraické množiny $F_i = \Pi^{-1}(x_i) \subseteq \mathbb{R}_{\text{alg}^n}$ pro nějaké $x_i \in T_i, 1 \leq i \leq r$, a homeomorfismus $q_i : T_i \times F_i \mapsto \Pi^{-1}(T_i)$ tak, že složení q^{-1} s projekcí $T_i \times F_i \mapsto T_i$ souhlasí s restrikcí projekce Π na $\Pi^{-1}(T_i)$. Množiny F_i jsou pro $i \geq 1, i \leq r$, algebraické množiny zadané polynomy z $\mathbb{R}_{\text{alg}}[X_1, \ldots, X_k]$ stupně nejvýše d, z první části důkazu tedy platí

$$b(\text{Ext}(F_i),\mathbb{R}) \leq b(k,d,\mathbb{R}) \leq d(2d-1)^{k-1}.$$

Z invariance homologie na rozšířeních do reálně uzavřeného tělesa je $b(\text{Ext}(F_i),R) \leq d(2d-1)^{k-1}$ pro libovolné reálně uzavřené těleso R.

K dokončení důkazu ukážeme, že algebraická množina $V \subseteq R^k$ definovaná polynomy $Q_1, \ldots, Q_n$ z $R[X_1, \ldots, X_k]$ stupně nejvýše d je homeomorfní $\text{Ext}(F_i, R)$ pro nějaké $i \geq 1, i \leq r$. Bod $(Q_1, \ldots, Q_n) \in R^N$ náleží $\text{Ext}(T_i,R)$ pro nějaké $i \geq 1, i \leq r$ a

$$\text{Ext}(\Pi^{-1},R)(Q_1, \ldots, Q_n) = \{(Q_1, \ldots, Q_n)\} \times V.$$

Požadovaný homeomorfismus $V \mapsto \text{Ext}(F_i,R)$ je indukován homeomorfismem $\text{Ext}(q^{-1}, R)$.

$\square$

Závěr

Dokázali jsme Thom-Milnorovo omezení na součet Bettiho čísel algebraické množiny. Dále se dá pokračovat několika směry. S využitím Thom-Milnorovy nerovnosti je možné pomocí kombinatorických metod dokázat omezení pro součet Bettiho čísel obecné semialgebraické množiny (zde můžeme čtenáře odkázat na sekci 7.5 knihy [2]). Jak již bylo nastiněno v úvodu, z důvodu vysoké složitosti algoritmu válcového rozkladu existuje snaha, řešit vybrané problémy jiným způsobem. Myšlenky přítomné (nejen) v poslední kapitole se využívají pro efektivnější algoritmické řešení některých problému. V kapitolách 12-16 knihy [2] je možné najít například algoritmus na hledání bodů souvislých komponent reálné algebraické množiny, ale i efektivnější algoritmus pro eliminaci kvantifikátorů. Také by bylo možné pokusit se dále vylepšit Thom-Milnorovu nerovnost. Viděli jsme ale, že horní závora nemůže být řádově menší než jednoduše exponenciální v počtu proměnných. Naše strategie pro dokazování Thom-Milnorovy nerovnosti zakládala na tom, že jsme polynomy definující algebraickou množinu reprezentovali jedním polynomem. Tím jsme ztratili informaci o stupních jednotlivých polynomů, která by pro takové vylepšení odhadu mohla být užitečná.

Literatura

[1] J. Bochnak, M. Coste, and M. F. Roy. *Real algebraic geometry.* Springer, Berlin Heidelberg, 1998.

[2] S. Basu, R. Pollack, and M. F. Roy. *Algorithms in real algebraic geometry.* Druhé vydání. Springer, Berlin Heidelberg, 2003,2006.

[3] G. E. Collins. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. *Lecture Notes in Computer Science*, 33:134–183, 1975.

[4] W. Fulton. *Algebraic curves.* Addison-Wesley, 1989.

[5] J. Milnor. *Morse theory.* Princeton University Press, Princeton, 1963.

[6] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry.* Academic Press, Inc., New York, 1975.

[7] A. Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.