

Posudek vedoucího na diplomovou práci

Marek Raclavský: Algebraické nerovnice nad reálnými čísly

Předložená práce se zabývá algebraickou geometrií nad reálnými čísly a obecněji (a z hlediska důkazů výhodněji) nad reálně uzavřenými tělesy. Tato oblast, která úzce souvisí s řešením Hilbertova 17. problému, se zdá být poněkud stranou hlavního zájmu algebraické geometrie.

Hlavní cíl, který si práce klade, je podat ucelený a srozumitelný důkaz Thomovy-Milnorovy nerovnosti: Je-li V algebraická množina v \mathbb{R}^k zadaná polynomy stupně nejvýše d , pak součet Bettiho čísel (a tedy i obloukových komponent) V je omezen číslem $d(2d - 1)^{k-1}$. Ve skutečnosti je analogické tvrzení dokazováno pro libovolné reálně uzavřené těleso.

I když tvrzení může působit na pohled poněkud banálně, důkaz jako celek je dosti náročný. Obsahuje zhruba řečeno následující 4 komponenty:

1. Algebraická část: manipulace s polynomy a Puiseuxovými řadami, vztah s derivacemi, uspořádáním, (sub)resultanty apod.
2. Výsledky z logiky: především jde o úplnou eliminaci kvantifikátorů reálně uzavřených těles v jazyce uspořádaných okruhů. To má za následek velice silné důsledky na konečnost v dalších částech důkazu (počínaje tím, že každá definovatelná funkce je po částech spojitá v eukleidovské topologii, a konče tím, že existuje pouze konečně mnoho homotopických typů algebraických množin v \mathbb{R}^k zadaných polynomy stupně nejvýše d).
3. Topologická část: zde jde především o algebraickou topologii, simplicialní komplexy a celulární homologii.
4. Diferenciálně geometrická část: Morseho teorie a odhady Bettiho čísel algebraické množiny V pomocí počtu kritických bodů funkcí na V . Tato část propojuje algebru a topologii a umožní dokončit důkaz Thomovy-Milnorovy věty.

Když se vezme v úvahu relativně nevyvážená dostupná literatura, samotné hlubší pochopení a zpracování důkazu odpovídá rozsahu diplomové práce.

Autor práce se problému zhostil velice dobře, prokázal jeho pochopení i schopnost samostatné práce. Výsledkem je ucelený a přehledný důkaz Thomovy-Milnorovy nerovnosti a řady dalších potřebných výsledků. Práce obsahuje určité množství překlepů a nepřesností, které ale v elektronické verzi práce nepřesahuje rozumnou míru.

Určitou připomínku bych měl ke členění kapitol. V poměrně krátké a elementární druhé kapitole je podrobně diskutován důkaz válcového rozkladu semialgebraické množiny. Ovšem vcelku snadným důsledkem válcového rozkladu je mimo důsledků pro homologii i úplná eliminace kvantifikátorů zmíněná v kapitole první. Možná tedy nebylo nutné na eliminaci kvantifikátorů pouze odkazovat, ale prohození kapitol by ji umožnilo za celkem mírnou cenu i dokázat a ještě lépe zdůraznit zásadní význam válcového rozkladu.

Je mi potěšením práci **doporučit k obhajobě** a návrh hodnocení přikládám zvlášť.

V Praze dne 6. 6. 2017

doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.