Posudek oponenta k diplomové práci
Algebraické nerovnice nad reálnými čísly
bc. Marka Raclavského

Předložená práce se zabývá strukturou semialgebraických množin definovaných nad reálně uzavřeným tělesem R, tedy úplně uspořádaným tělesem, které nemá vlastní algebraické rozšíření jako úplně uspořádané těleso (například $\mathbb{R}$ je reálně uzavřené). Semialgebraické množiny v R^k jsou pak množiny, které lze napsat jako sjednocení řešení soustav nerovností definovaných polynomy v k proměnných s koeficienty v R. Hlavním cílem práce je důkaz Thom-Milnorovy nerovnosti.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. První kapitola shrnuje základní aparát pro práci s reálně uzavřenými tělesy. Stěžejní výsledek Věta 3 (eliminace kvantifikátorů), umožňuje chápat semialgebraické množiny jako množiny definovatelné v jazyce uspořádaných těles.

Druhá kapitola se zabývá pojmem válcového rozkladu, hlavním výsledkem je Věta 19 ukazující existenci válcového rozkladu R^k vzhledem k zadané konečné množině nenulových polynomů z $R[X_1, \dots, X_k]$.

Ve třetí kapitole je pak pro určité typy semialgebraických množin nalezen válcový rozklad R^k takový, že semialgebraická množina je sjednocením některých k-buněk tohoto rozkladu, navíc uzávěry buněk rozkladu jsou opět sjednocením některých buněk rozkladu. Tento hezký rozklad umožňuje zavést triangulaci uzavřené a omezené semialgebraické množiny (Věta 26). Třetí kapitola je uzavřena Hardtovou větou o trivialitě semialgebraického zobrazení (Věta 27) a jejími důsledky. Podle Věty 28 existuje v R^k až na semialgebraický homeomorfismus jen konečně mnoho algebraických množin definovaných polynomy stupně nejvýše d.

V závěrečné kapitole je využita sestrojená triangulace uzavřené semialgebraické množiny k definici Bettiho čísel (přes simpliciální homologii s racionálními koeficienty). Dále je s pomocí Morseho funkce dokázána hlavní Věta 45 - součet Bettiho čísel algebraické množiny v R^k definované polynomy stupně nejvýše d nepřesáhne $d(2d-1)^{k-1}$.

Práce je sice kompilačního charakteru, jedná se ale o kompilaci značně netriviálních výsledků z různých oblastí matematiky (logika, diferenciální geometrie, algebraická topologie). Cílem bylo presentovat důkaz Věty 45 formou přístupnou i čtenáři bez hlubších znalostí reálné algebraické geometrie. Podle mého názoru tohoto cíle bylo dosaženo. Autor však vzhledem k velkému rozsahu tématu musel být poměrně stručný, tato stručnost však mnohde byla na úkor srozumitelnosti textu. Určitě bych uvítal větší pečlivost zejména při definicích pojmů a zavádění značení. Mou jedinou zásadnější výhradou k práci je naprostá absence obrázků a příkladů v malé dimenzi. Proto doporučuji připravit nějaké názorné příklady alespoň k obhajobě.

Pár dalších poznámek:

- na str. 9 není zaveden $||z||$ pro $z \in R[i]$
- výraz $s_i(P, Q)$ na str. 21 asi měl být $\mathrm{sRes}_i(P, Q)$. Pak by měl být subresultant definován obecněji než pro polynomy z $C[X]$, kde $C = R[i]$
- str. 24, důkaz tvrz. 20 - držíme pořád konvenci, že $\xi_{C',0} = -\infty$?
- Koncentrace překlepů v důkazu Věty 29
- Věta 34 vyžaduje, aby H byl definován jako funktor. S tím se podle mě autor dostatečně nevypořádal.
- V textu se poměrně často odkazuje na větu ?.?. Je škoda, že tento evidentně silný výsledek zůstal čtenáři utajen.

Celkově práci Marka Raclavského považuji za zdařilou a doporučuji ji uznat jako práci diplomovou.

V Praze, 7. 6. 2017

Pavel Příhoda