

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. Tomáš Zadražil

**Ruleta a herní systémy**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Učitelství fyziky a matematiky

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Ruleta a herní systémy

Autor: Bc. Tomáš Zadražil

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Cílem této práce je čtenáři přiblížit historii hazardních her, v kontextu rulety pak vyložit základní i pokročilejší partie teorie pravděpodobnosti s jejich pomocí pak rozhodnout o funkčnosti několika vybraných populárních ruletových systémů. Při analýze je využito zejména střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny, homogenních Markovových procesů s diskrétním časem a simulací provedených v jazyce R. Konkrétní výstupy práce spočívají v přesně vypočtených středních hodnotách zisku v daných spinech při zvoleném omezení i jim odpovídající odhady poskytnuté simulací. Na základě obdržných výsledků pak práce vymezuje, které systémy jsou limitně funkčními a které nejsou funkčními vůbec. Hlavní přínos textu přitom spočívá v didakticky názorném uchopení populární problematiky ruletových systémů pomocí základních i pokročilejších partií teorie pravděpodobnosti.

Klíčová slova: ruleta, ruletové systémy, pravděpodobnost, Markovovské řetězce, náhodné procesy

Title: Roulette and its strategies

Author: Bc. Tomáš Zadražil

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: Objective of this thesis is to describe history of gambling, in a context of roulette to explain basic and advanced parts of probability theory which allow to the reader to decide about function of several popular roulette systems. There was mainly used expected value of discrete random variable, homogenous discrete-time Markov chain and simulations made in programming language R. Concrete output of the thesis are in precisely calculated expected values of a profit with fixed spins and with chosen limitation and corresponding estimations provided by simulation. On the basis of that it's possible to decide which systems are functional and which are not. Main contribution of this text is in didactical approach which helps to describe popular problematics of roulette systems by using basic and advanced areas of probability theory.

Keywords: roulette, roulette strategies, probability, Markov chains, stochastic process

Rád bych na tomto místě poděkoval RNDr. Jakubu Staňkovi, Ph. D. a své rodině za pomoc a podporu při vypracovávání této práce.

# Obsah

Úvod	3
<b>1 Historie hazardních her, obzvláště pak rulety</b>	<b>6</b>
1.1 Hazardní hry	6
1.2 Hrací kostky	7
1.3 Hrací karty	7
1.4 Mincové hry	8
1.5 Kola štěstěny a loterie	9
1.6 Hrací automaty	9
1.7 Kasina	9
1.8 Společnost a hazardní hry	10
1.9 Ruleta	11
1.9.1 Historie rulety	11
1.9.2 Muži, jež porazili ruletu	13
<b>2 Jak se hraje ruleta</b>	<b>16</b>
2.1 Ruleta	16
2.2 Herní procedura a pravidla	17
2.3 Základní sázky	17
2.4 Francouzská kontra americká verze rulety	18
2.5 Ruletové systémy	20
2.5.1 Martingale	22
2.5.2 Great Martingale	23
2.5.3 Anti-Martingale	23
2.5.4 D’Alambert	23
2.5.5 Labouchere	23
2.5.6 Anti-Labouchere	24
2.5.7 Fibonacci	24
2.5.8 Bondovská sázka	24
<b>3 Teoretická rukověť</b>	<b>27</b>
3.1 Základní pojmy	27
3.2 Pravděpodobnost a pravděpodobnostní prostor	27
3.3 Nezávislost, podmíněná a násobná pravděpodobnost	28
3.4 Náhodná veličina, její rozdělení a střední hodnota	30
3.5 Užitečná diskrétní rozdělení	32
3.5.1 Rovnoměrné rozdělení	32
3.5.2 Alternativní rozdělení	33
3.5.3 Binomické rozdělení	33
3.5.4 Geometrické rozdělení	34
3.6 Podmíněná střední hodnota	34
3.6.1 Podmíněné rozdělení náhodné veličiny	34
3.6.2 Střední hodnota podmíněná jevem	35
3.6.3 Střední hodnota podmíněná diskrétní náhodnou veličinou	36

3.7	Náhodné procesy . . . . .	36
3.7.1	Náhodný proces s diskretním časem . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Ruletové systémy z hlediska matematiky náhody</b>	<b>46</b>
4.1	Martingale . . . . .	46
4.1.1	„Jak zaručeně vyhrát v ruletě“ aneb jak inzerovat Martingale	46
4.1.2	Neomezený Martingale . . . . .	47
4.1.3	Omezený Martingale . . . . .	52
4.2	Bondovská sázka . . . . .	61
4.3	D’Alambert . . . . .	63
4.3.1	Neomezený D’Alambert . . . . .	63
4.3.2	Omezený D’Alambert . . . . .	64
4.4	Fibonacci . . . . .	68
4.4.1	Neomezený Fibonacci . . . . .	68
4.4.2	Omezený Fibonacci . . . . .	69
4.5	Simulační studie několika dalších ruletových systémů . . . . .	72
	<b>Závěr</b>	<b>75</b>
	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>76</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>78</b>
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>80</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>81</b>

# Úvod



Obrázek 1: Vítězství čísla nula [13]

*Představa o možnosti numerického vyčíslení šance je poměrně mladá. Po dlouhý čas převládal názor, že něco takového nepřísluší lidským silám a je tedy pouze v rukou bohů. Není se proto čemu divit, že se naléhavější požadavky o ryze vědecký přístup k náhodě datují až do první poloviny 17. století, do období renesance. Někdejší italské hazardní hráče trápila řada otázek spjatých s hrou v kostky, na něž si sami nebyli schopni odpovědět. Hráči tak s žádostí o pomoc oslovili celou řadu soudobých učenců. Mezi oslovenými byl i samotný Galileo Galilei, jež nakonec shledal tyto „herní problémy“ studování vhodnými. Přestože se Galileo nedobral odpovědí na všechny vznesené otázky, jeho spis *Considerazione sopra il giuoco dei dadi*, zabývající se hrou v kostky, můžeme ze zpětného hlediska rodící se matematiky náhody považovat za průlomovou.*

*Ne o mnoho let později, tentokrát ve Francii, došla historie pověstného „Déjà vu“. Chevalier de Méré, šlechtic a vášnivý hráč hazardních her, předložil podobné otázky<sup>1</sup>, jako jeho italští předchůdci Galileovi, svému příteli Blaise Pascalovi. Pascal pocházel ze zámožné a vzdělané libé rodiny. Zabýval se matematikou, fyzikou, psaním, teologií a filozofií. Konečně právě jemu se podařilo nalézt řešení de Méré-*

<sup>1</sup> de Méré pravidelně vyhrával sázku, že při čtyřech hodech kostkou vrhne šestku. Týž úspěch však nesklízel při sázce na vrh dvou šestek ve dvaceti čtyřech hodech dvěma kostkami. Věděl totiž, že z šesti možných výsledků při hodu jednou kostkou je pro něj jeden příznivý a jeho šance je tedy  $1/6$ . Dále se však mylně domníval, že při čtyřech hodech se tato šance prostě vynásobí čtyřmi a výsledná pravděpodobnost tedy činí  $4 \cdot 1/6 = 2/3$ . Obdobně uvažoval i ve druhém případě, kdy příznivému výsledku při jednom hodu dvojice kostek přiřadil pravděpodobnost  $1/36$ , kterou poté pro 24 hodů opět mylně vyčísлил jako  $24 \cdot 1/36 = 2/3$ . Prostým středoškolským výpočtem můžeme ověřit, nakolik tragický byl tento omyl pro jeho peněženku. [17]

ových otázek a ze svých závěrů poté vydestilovat i nové odvětví matematiky, teorii pravděpodobnosti. Paradoxně Pascal sám plně neakceptoval veškeré důsledky své vlastní teorie. Od útlého dětství v něm soupeřilo racionální matematické já se silnými sklony k mystice. Jeho duševní konflikt nakonec vyvrcholil nehodou na předměstí Paříže, kdy se mu při vyjíždce splášili koně a jeho kočár unikl chladnému obětí řeky Seiny jen díky zábradlí, na němž zůstal viset. V prožité události spatřoval Pascal varování a od toho dne se již věnoval výhradně náboženství a filozofii.

Zrod teorie pravděpodobnosti by však nebyl ani zdaleka tak rychlý nebýt ještě jednoho francouzského matematika, Pascalova současníka, otce teorie čísel, Pierre de Fermata. Ačkoli byl Fermat profesí právník a sám sebe za skutečného matematika nikdy nepovažoval, jeho přínos matematice zůstává patrný dodnes. A byla to právě korespondence v létě a na podzim roku 1654 mezi jím a Pascalem, jejímž předmětem byly mimo jiné i zmiňované de Méréovy otázky, jež poměrně značně urychlila Pascalovu práci. Konečně, Fermat sám dospěl odlišným způsobem k týmž závěrům jako Pascal, nikdy je však nepublikoval, jak již bylo pro jeho dílo příznačné. Duu Pascal–Fermat také vděčíme za správné řešení legendární úlohy o rozdělení sázek<sup>2</sup>. [9]

Pojmy jako šance, risk, hazard, náhoda, štěstí, smůla a jim podobné se staly nedílnou součástí našeho každodenního života. Drtivá většina běžné populace přitom neovládá ani ty nejelementárnější základy teorie pravděpodobnosti.

Daří-li se nám v riskantních situacích, svůj úspěch mnohdy přisuzujeme štěstí. Naopak nedaří-li se nám, svůj neúspěch nezřídka přisuzujeme smůle. Výsledek našeho počínání tak podléhá spíše subjektivní vůli vyšších principů než objektivní a nestranné vědní disciplíně.

Mnozí z nás se nechávají zlákat příslibem snadného zisku v podobě zaručeně funkční ruletové strategie, aniž by si uvědomovali, jaké jsou ve skutečnosti jejich šance na výhru a jak se tyto šance mění s každým otočením rulety. Samotný internet je bohatý na usměvavé muže v popředí luxusních aut, vyzývající nás dát se všanc pošetilé hře v příslibu lepších zitrků.

Tato práce si klade za cíl přiblížit čtenáři základní pojmy a principy teorie pravděpodobnosti a Markovových řetězců, rozebrat nejběžnější herní ruletové systémy a konečně pak zhodnotit jejich reálnou efektivitu v duchu objektivnosti matematiky náhody.

S ohledem na didaktické pojetí je první kapitola textu věnována historii hazardních her, významný prostor je přitom věnován ruletě. Navazující kapitola čtenáři představuje základní mechaniky a pravidla rulety. Třetí kapitola nás poté seznamuje s elementárními pojmy teorie pravděpodobnosti, podmíněné pravděpodobnosti a náhodných procesů v kontextu rulety. Závěrečná čtvrtá kapitola je věnována nejznámějším ruletovým systémům, jejich analýze a objektivnímu zhodnocení.

---

<sup>2</sup> Pověstnou úlohou o rozdělení sázek se, pravda, zabýval již Fra Luca Pacioli, žijící na přelomu 15. a 16. století. Jeho řešení uvedené ve spisu *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* ovšem bylo chybné, neboť si neuvědomoval pravděpodobnostní podstatu problému. Chybné řešení této úlohy uvedl následně ve své knize *General trattato di numeri et misura* také Niccolo Tartaglia. Dnes existují dohady, že úlohu s sebou do Evropy přinesli Arabové a datum jejího vzniku lze tedy jen stěží odhadovat. [1]



V zájmu zvýšení celkové čitelnosti je práce prokládána kurzívou psanými pasážemi „atmosférického-rozšiřujícího“ textu a *ilustračních příkladů*. Takto označený text je možno při čtení práce přeskakovat, aniž by došlo k nepochopení předkládané problematiky.

# 1. Historie hazardních her, obzvláště pak rulety

*„V domech hazardních hráčů je mnoho lehkých žen, ale oni při hře v kostky ani tyto ženy nikdy nevsadí. Jsou k nim vždy laskaví. A ty jsi vsadil a prohrál veškeré naše drahokamy, šperky, zlato, brnění, zvířata, zbraně a vše ostatní, co nám patřilo, včetně nás samotných. Ani nad tím jsem však nevzplál hněvem. Zato tvůj hazard s Draupadí považují za odporný. Tato nevinná dívka nás dostala za manžely a nezaslouží si takto trpět. Jen kvůli tobě ji nyní obtěžují tito nízcí, opovrženíhodní, krutí a podlí Kuruovci. Ačkoliv jsi můj pán, jen stěží ovládám svůj hněv vůči tobě.“ [21]*

*Tak zněla slova, jimiž dle staroindického eposu Mahábhárata, spílal bájný Pándůvec Bhíma svému bratru králi Judhištirovi krátce po prohrané hře v kostky s Kuruovcem Durjódhanou. Zrádná hra měla za následek nejen ztrátu veškerého majetku, vlivu a postavení rodu Pánduovců, ale po třinácti letech jejich vyhnanství vyústila v krvavou řež na Kuruovském poli. Po této legendární bitvě se Judištira stal opět králem a spolu se svými čtyřmi bratry svrchovaně vládl mnoho dalších let. Svým stářím a obsahem dává Mahábhárata tušit, nakolik úzce je historie hazardní her spjata s kolébkami lidských civilizací.*

Na výsledky náhodných událostí sázeli muži a ženy od nepaměti. Malby a hrnčířské výrobky ze starého Egypta pocházející z doby více než 3500 let př. n. l., jež zobrazují bohy či smrtelníky při hře v kostky, jsou tomu zřejmým důkazem. [17]

## 1.1 Hazardní hry

Za hazardní hru budeme v rámci této práce považovat každou hru, ve které je pravděpodobnostní předpověď nakloněna spíše banku než-li hráči, tj. každou hru, u které nejsou v náš prospěch poměry vsazených částek ku částkám vyplaceným.

Můžeme ovšem narazit i na jiné definice. Mnohdy bývá zmiňována například tato: „Hazardní hra je taková hra šancí nebo dovedností, jejíž výsledek závisí výhradně nebo převážně na náhodě.“

Česká legislativa pak poskytuje následující definice: „Hazardní hrou se rozumí hra, sázka nebo los, do nichž sázející vloží sázku, jejíž návratnost se nezaručuje, a v nichž o výhře nebo prohře rozhoduje zcela nebo zčásti náhoda nebo neznámá okolnost.“

Je třeba si uvědomit, že například poker není z hlediska první uvedené definice pro absenci banku považován za hazardní hru. Úspěšnost v pokeru navíc nezávisí toliko na náhodě jako spíše na zkušenostech a hráčových schopnostech<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Z hlediska české legislativy je poker hazardní hra. Jeden z důvodů striktnější definice hazardu, a tedy i zařazení pokeru mezi hazardní hry, může být krom větší možnosti regulace i snaha ministerstva financí o podíl na zisku z pokerových turnajů.

## 1.2 Hrací kostky

Prehistorická naleziště dokazují, že jako první používané hrací kostky sloužily malé čtyřstěnné kosti z kotníků koz nebo ovcí, zvané též astragal. Šestistěnnou hrací kostkou se poprvé házelo v Indii a Iráku v době přibližně 3000 let př. n. l. Moderní uspořádání čísel na kostce, kdy součet hodnot na protějších stěnách dává vždy výsledek sedm, bylo zavedeno zhruba 1400 let př. n. l. [17]

Krom Egypťanů, Iráčanů a Indů byli vášnivými hráči kostek také staří Řekové. O této skutečnosti svědčí například věhlasná amfora, zobrazující Achilea a Aiaxe při hře v kostky, od slavného řeckého umělce Exekiasa, pocházející přibližně z roku 530 př. n. l. Od Řeků převzali hrací kostky Římané. Na dochovaných freskách v Pompejích můžeme dodnes pozorovat nakolik byli Římané touto neřestí uchváteni. Spolu s římskými legiemi se poté hra v kostky rozšířila do celé Evropy. [8]

Mezi nejpobulárnějšími hazardními kostkovými hrami dnes vyčnívá obzvláště craps. Herní stoly craps patří v kasínech k těm zdaleka nejživějším. Při některých sázkách je na straně banku výhoda okolo pouhého procenta, pravidla jsou poměrně jednoduchá a herní klima zásadně uvolněné. Málodko ovšem ví, že název craps je francouzskou zkomoleninou anglického slova „crabs“, volně přeloženo jako „mrňata“, a kdysi sloužil pro označení nejnižšího možného hozeného výsledku. Craps má totiž svůj původ v anglické hře s více než příznačným názvem hazard, o níž se zmiňuje již Geoffrey Chaucer ve svém díle *Canterbury Tales* ze 14. století. [8]

*„Největší výhoda hazardních her spočívá v tom, že je nemusíte vůbec hrát,“ pravil slavný italský matematik Gerolamo Cardano. Vzápětí však dodal: „Nehrál jsem způsobem začnu a skončím, ale s politováním musím říci, že každý den.“ Cardano, proslulý zejména díky svému sporu o nárok na způsob řešení kubické rovnice s Niccolò Tartagliou, si hazardem často vypomáhal z finanční tísně. Pro teorii pravděpodobnosti je ovšem významná obzvláště jeho práce Liber de ludo aleae, kterou napsal okolo roku 1526. Za svého života ji však nikdy nepublikoval. Byla otištěna až v 1. svazku sebraných spisů rukopisné pozůstalosti vydaném roku 1663. (De ludo aleae je zřejmě první prací obsahově spadající do teorie pravděpodobnosti.)[9][17]*

## 1.3 Hrací karty

Dnes přesně nevíme, zda-li karty pocházejí ze staré Korey, Indie nebo Číny. Nejpravděpodobnější variantou se však jeví, že byly odvozeny od čínských papírových peněz. Do karet této verzi hraje zejména skutečnost, že byl papír objeven právě v Číně a že tamní papírové peníze disponovaly čtveřicí různých „barev“. Do Evropy se skrze hedvábnou stezku dostaly hrací karty, podobné těm dnešním, kolem roku 1370. Z roku 1377 pak pochází rukopis zmiňující se o balíčku čítajícím 52 karet. Karty byly rozlišeny do „barev“ mincí, pohárů, mečů a holí. Každou barvu tvořily tři takzvané obrazové či dvorské karty a postupka od 1 do 10. Zpočátku ryze abstraktní motivy dvorských karet nabyly vlivem středověké

kultury podoby krále, sloužícího<sup>2</sup> a rytíře, po čase vystřídáno dárou. Původně byly hrací karty zdobeny překreslenými figurami z manuskriptů. Následný vynález knihtisku v patnáctém století však jejich vývoj poměrně značně urychlil. Barvy a symboly karet začaly získávat národnější podoby. V Německu se objevují rolničky, žaludy, srdce a listy, zatímco v Itálii zůstávají mince, poháry, meče a hole. Dnes známé motivy srdce, piky, kára a kříže pocházejí z Francie. [8]

Svým počtem, barevnou a motivovou variabilitou karty vybízely ke vzniku celé řady originálních hazardních her. V Evropě patřila mezi nejoblíbenější hry například italská baccara. Řada zámožných šlechticů při hraní této hry ztratila nemalé jmění. Z Itálie se baccara záhy dostala do Francie, kde byla známa pod názvem chemin de fer<sup>3</sup>. Z Francie se poté v lehkých obměnách rozšířila dále do Evropy, Anglie a Ameriky. Dnes ji můžeme v kasinech nalézt pod názvem punto baco. [8]

Větší popularity než baccara se však dnes těší zejména poker. Poker v sobě snoubí prvky francouzského poque a německého poch. Nejblíže má ale k perské karetní hře as nas, která se dostala k New Orleanským osadníkům po perských obchodních lodích. Samotná as nas má ovšem prapůvod v římské kostkové hře tali, založené na přebíjení hozených hodnot. Ač dříve sloužil zejména k obírání movitých zaoceánských hostů, dnes se řadí turnaje v pokeru mezi ty nejprestižnější světové soutěže. [8]

Korunním princem karetních kasinových her a nejhranější hrou u hracích stolů je však dnes bezesporu black jack. Hra samotná má původ v Sieben und Vier nebo také twenty-one. Protože zpočátku black jack nebyl příliš populární, začala kasina nabízet výhodnější sázečí poměr, bude-li hodnoty 21 dosaženo dvěma prvními taženými kartami<sup>4</sup>. Poté, co byla roku 1956 vydána Rogerem Baldwinem kniha *The Optimum Strategy in Black Jack*, roku 1962 pak Edwardem Thorpem kniha o počítačích technikách karet *Beat the Dealer* a konečně pak kniha *Playing Blackjack as a Business* Julianem Braunem, popularita black jacku dramaticky vzrostla. Kasina na technikami vyzbrojené hráče zareagovala zotřením herních podmínek. Dokonce byli často vyhazováni hráči podezřelí z počítání karet, ač soud na této taktice neshledal nic nelegálního. [8]

## 1.4 Mincové hry

Objev mince s sebou přinášel nejen výhody univerzálního platidla, ale také otevřel možnosti novým hazardním hrám. Každého ihned napadá, že házet jednou mincí by nebylo až tak hazardní vzhledem k zjevně rovným šancím. Proto se již v ulicích starého Říma při hře two-up sázelo na výsledek současného hodu dvou mincí. V Anglii se z two-up stala pitch and toss, kde namísto dvou sesterců sloužily dvě penny. Spolu s anglickými kolonisty se poté pitch and toss dostávala do zbytku světa. Výjimečné popularity dosáhla v Austrálii. Této hře propadli zejména příslušníci australsko-novozélandského armádního sboru Anzak během

---

<sup>2</sup> Sloužící byli v Anglii známi jako „Jack“, odkud pochází i označení „J“.

<sup>3</sup> V doslovném překladu z francouzštiny „železnice“. Tato přezdívka má původ v držáku na karty, který se po stole pohyboval po miniaturních „kolejích“.

<sup>4</sup> Konkrétně jedním esem a křížovým nebo pikovým, tedy černým, klukem. Ostatně, právě díky tomu hra nese své jméno black jack.

první světové války. Na památku obětí tohoto válečného konfliktu se dodnes two-up tradičně hraje během tzv. Anzac day. [8]

## 1.5 Kola štěstěny a loterie

Hra keno byla před více než dvěma tisíci lety vynalezena v Číně Čung Chun-gem za účelem získávání prostředků pro budování armády své provincie. Loterie se mezi Číňany záhy stala natolik populární, že se výtěžky z ní významně podílely na financování stavby Velké čínské zdi. V 19. století se takzvaná „čínská loterie“ dostala spolu s čínskými dělníky přes oceán do USA. Po založení Las Vegas byla pravidla hry přizpůsobena potřebám kasina, kde se dnes keno běžně hraje u herních stolů. [8]

Vojáci v antickém Řecku si krátili žold a dlouhou chvíli zvláštní hrou. Na hrotu oštěpu či šípů roztočili štít rozdělený do čtyř vyznačených úseků a sázeli se, ve kterém z nich se štít zastaví. Hru posléze převzali Římané, kteří však namísto štítu roztáčeli kolo od vozu. Římská varianta byla jen krokem k populární jarmareční hře kola Štěstěny, matce kasinové hry big wheel six. [8]

## 1.6 Hrací automaty

Ač původně v kasinech sloužily spíše jako hlučná blikající zábava pro manželky a přítelkyně tzv. high rollerů<sup>5</sup>, dnes jsou hrací automaty mnohem populárnější než hrací stoly. V roce 2004 bylo jen v Las Vegas takřka 170 tisíc hracích automatů. První hrací automat „Liberty Bell“ zkonstruoval roku 1899 Charles Fey. Ze zjevných důvodů se tomuto stroji začalo přezdívát „jednoruký bandita“. Liberty Bell byl vybaven třemi otáčivými válci se symboly a jako akceptované platidlo pro hru sloužily výhradně mince. Původní hrací automaty fungovaly zároveň i jako automaty na ovocné žvýkačky. Právě proto jsou dnes otáčivé válce hracích automatů zdobeny ovocem. Tradiční symbol zvonu je poté zcela pochopitelně odkazem slavného Liberty Bell. [8]

## 1.7 Kasina

V éře před kasiny museli hazardní hráči své oblíbené hry provozovat přímo v ulicích, ve svých domovech, u přátel, případně v klubech. Nevýhodou tohoto modelu byla zjevná horní hranice pro maximální výhru limitovaná finančními prostředky zúčastněných hráčů. Teprve v 17. století došly hazardní hry formálnější podoby a hrály se na speciálních akcích, kde hráči získali možnost sázet proti „domu“<sup>6</sup>, který fungoval jako bank, tj. propadaly mu veškeré prohry a vyplácel všechny výhry.

Mezi nejstarší evropská kasina se řadí například německé kasino Baden-Baden, které bylo otevřeno roku 1748 Edouardem Benazetem. Na jeho vskutku pompézním interiéru se podílela celá řada dobových francouzských umělců a řemeslníků. Baden-Baden dodnes patří mezi nejznámější kasina na světě.

<sup>5</sup> Jako high roller je označován hráč běžně hrající v kasinu o velmi vysoké sumy. Kasina mají pro tyto hráče obvykle připravenou pestrou paletu benefitů.

<sup>6</sup> Slovo „casino“ má kořeny v italském slově „casa“, neboli „dům“.

Další věhlasné evropské kasino Casino de Spa funguje od roku 1763 v belgickém lázeňském městě Spa.

Nejnámějším evropským kasinem současnosti je však bezesporu monacké Monte Carlo. Roku 1867 jej nechal otevřít monacký kníže Karel III. za zistným účelem zlepšení stavu státní pokladny. S takřka neomezeným rozpočtem bylo kasino postaveno pod taktovkou Françoise Blanka, zkušeného francouzského podnikatele v oblasti hazardních her. Na stavbě se podílel mimo jiných i sám Charles Garnier, tvůrce pařížské opery. Mezi známé návštěvníky Monte Carla patřili například italský tenor Enrico Caruso a anglický král Eduard VII.

Dnes je však za Mekku hazardních her považováno, se svými více než padesáti kasiny, které ročně navštíví přes 30 milionů návštěvníků, americké Las Vegas. První americká kasina byla zakládána v průběhu 19. století na březích řeky Mississippi v New Orleansu. Profesionální hráči zde obírali movitější pasažéry zaoceánských lodí. Hazardní hry se v USA šířily spolu s železnicí a svého největšího rozkvětu dosáhly v období zlaté horečky. Za rozkvětem lasvegaského kasinového průmyslu stál gangster Benjamin „Bugsy“ Siegel. Siegelovy se podařilo nadchnout své mafiánské kumpány pro financování luxusního Flamingo hotelu v Las Vegas. Sklizení ovoce se však již nedožil. Mafie jej odstranila, protože se následkem jeho hrabivosti stavba kasina zásadním způsobem prodražila. Příkladem Flamingo hotelu následovalo roku 1950 Desert Inn Casino, roku 1952 Sands Casino a roku 1955 kasina Dunen a Riviera. K nejslavnějším ilegálním kasinům v letech 1929–1950 patřil Big House, vedený společníky nechvalně proslulého Al Capona. V padesátých letech řídila drtivou většinu lasvegaských kasin mafie. Kasina tak byla synonymem korupce a daňových podvodů. Roku 1965 se ale situace změnila. Zákon umožnil vlastnictví kasin. Jako první se příležitosti chopil multimilionář Howard Hughes, následovaný MGM Grand, Hilton a Holiday Inn. Roku 1978 uznal Nejvyšší soud právo původních amerických obyvatel provozovat ve svých rezervacích tzv. indiánská kasina. Dodnes jich bylo v rezervacích založeno více než 300 a je známo, že největší kasino na světě Foxwoods Resort v Connecticutu, řízené kmenem Mashantucket, ročně navštíví přes 16 milionů návštěvníků. Foxwood zaujímá plochu přibližně 140 tisíc m<sup>2</sup>, z toho 28 tisíc m<sup>2</sup> slouží hazardu, je tvořeno dvěma hotely a patnácti dílčími kasiny. Současné průzkumy ukazují, že většinu zákazníků kasina tvoří zaměstnaní lidé s nadprůměrným platem, že tři ze čtyř návštěvníků hrají za účelem zisku a přibližně 57 procent zákazníků hledá v kasinu jen odreagování a zábavu. Moderní záležitost představují on-line kasina. Pro nedostatečnou možnost kontroly a povětšinou nevypátratelnou identitu jejich vlastníka však byl několikrát vznesen požadavek pro jejich zákaz. [8]

## 1.8 Společnost a hazardní hry

Postoj k hazardním hrám se měnil jak s časem, tak se zeměpisnou polohou. Hazardní hry byly v kontextu aktuálního společensky-nábožensky-kulturního klimatu střídavě povolovány a zakazovány. Každý jejich zákaz však paradoxně vedl k rozkvětu ilegálních kasin, a tedy k ochuzení státní poklady. V Římské říši bylo dokonce období, kdy byly hazardní hry povoleny pouze jeden týden v roce - o saturnáliích. To však hráče jen motivovalo k hraní v soukromých domech či klubech. Pokuta za porušení tohoto zákazu činila až čtyřnásobek vkladu. Na toto opatření reagovali římsští hazardní hráči zavedením hliněných destiček, jakousi

obdobou prvních hracích žetonů. Ve středověké Evropě narazily na značnou nevoli zejména hrací karty. Krátce po svém příchodu z Orientu roku 1377 byly ve Francii zakázány a v Itálii dokonce spolu s hracími kostkami hromadně páleny jako dílo ďáblů. Své nejznámější bitvy však hazardní hry sehrály v USA, kde jsou dodnes jedním ze symbolů korupce. [8]

## 1.9 Ruleta

*Svého času praktikovali ruští carští důstojníci prazvláštní zábavu, dnes známou jako ruská ruleta. Do jedné z komor, povětšinou šestiranného, revolveru zasunuli ostrý náboj, zbývající komory ponechali prázdné. Nabitě zbraně se následně chopil jeden z účastníků seance, řádně roztočil válec, namířil si ji na hlavu a stiskl spoušť. Hazardér se buď stal na místě sebevrahem, nebo se dočkal bouřlivých ovací přihlížejících spoluúčastníků. Na první pohled by se mohlo zdát, že pro přežití střelce hovořila pravděpodobnost 5:6, což je zaokrouhleně 0,83. Zohledneme-li ovšem také hmotnost náboje a ono řádné roztočení, naše šance na přežití ještě o něco stoupnou.*

Sledujeme-li filmovou scénu z prostředí kasina, jeden z prvních záběrů pravděpodobně bude věnován detailu dutě poskakující kuličky na tiše rotujícím ruletovém kole. Ruleta, královna hazardních her, je se svým zeleným plátnem, tichým napětím přihlížejících a vybraným chováním krupiérů, nedílnou konturou scenérie každého kasina.



Obrázek 1.1: Společnost hrající ruletu [5]

### 1.9.1 Historie rulety

V roce 1745 britský parlament postavil mimo zákon hru zvanou roly poly. Tehdejší texty se o této hře zmiňují jako o „zaručeně zhoubné hře zvané roly poly nebo též roulet“. Podobnost mezi dnešní ruletou a roly poly spočívá zejména

v horizontálně umístěném hracím kole, jež pro účely této hry vynalezl neznámý Londýňan pravděpodobně již okolo roku 1720. V roly poly se sázelo na zastavení slonovinové kuličky v jednom z černých nebo v jednom z bílých polí hracího kola. Kolo bylo ovšem opatřeno také dvěma poli znamenajícími propad vkladů ve prospěch banku. Po čase se další bezejmenný Londýňan rozhodl vylepšit hrací kolo roly poly v duchu dobově populární karetní hry faro<sup>7</sup> a pole hracího kola opatřil vybranými hodnotami hracích karet. [4]

V roce 1739, opět v Anglii, vynalezl jistý Cook hru jménem even odd. Hrací kolo této hry bylo rozděleno ve čtyřicet napůl černých a napůl bílých polí, z nichž dvě patřila banku. Stejně jako roly poly i even odd byla roku 1745 postavena mimo zákon. Tato skutečnost ovšem nikterak nebránila nárůstu její popularity. Přibližně roku 1788 se již even odd hrála v pařížských hostincích. Francouzi hru následně překřtili na „roulette“, v překladu „malé kolo“. [4]

Kolem roku 1648 představil kardinál Mazarin francouzskému lidu italskou hru jménem hoca. Hrací deska této hry byla opatřena třiceti čísly, na které hráči sázeli, nicméně neumožňovala takzvané rovné sázky (například černá–bílá). Po umístění sázek bankéř zatřepal váčkem, z něhož následně vyjmul jednu z třiceti neoznačených koulí opatřenou kousíčkem kůže s číslicí. Později se do Paříže dostala podobná italská hra – biribiso. Francouzi této hře říkali biribi. Hrací deska biribi obsahovala tentokrát sedmdesát čísel a umožňovala dokonce i rovné sázky (černé/červené, vyšší/nížší, sudé/liché). Aby se dala hrací deska biribi rychle sklidit v případě policejní razie, vznikla později z praktických důvodů i její menší přenosná verze s třiceti šesti čísly a rovnými sázkami na párová čísla nebo velikost. Jak hoca, tak biribi dosahovaly svého času poměrně značné popularity. [4]

Konečně roku 1796 se v pařížském Palais Royal objevila ruleta v provedení velmi podobném tomu dnešnímu. Královna kasinových her tak vykrytalizovala na mezinárodní spolupráci francouzského důvtipu a elegance, italské herní desky a anglického horizontálního hracího kola. Autorem rulety byl velmi pravděpodobně neznámý francouzský hazardní hráč. Některé teorie dokonce za autora rulety považují samotného Blaise Pascala. Ať už byl ale tvůrcem kdokoli, jeho záměrem bylo nahradit neelegantní a nešikovné losování z koženého vážku v biribi hracím kolem z even odd. Políčka náležící banku byla označena jednou nulou a dvojicí nul, černo-bílé zbarvení kola vystřídalo ladění černo-červené. [4]

Dne 14. července 1840 přicházejí dvojčata Francoise a Louise Blancovi do německého městečka Bad Homburgu. O tři roky později zde otevírají velmi přepyčovou hernu pyšníci se světovou raritou; ruletou s třiceti šesti čísly, ale pouze jednou jedinou nulou. Nápad rulety s jednou nulou je dnes připisován F. Blancovi. Za svůj následný raketový úspěch ovšem Blancové nevděčili jediné nule. Roku 1837 totiž Ludvík Orleanský nechal zavřít pařížské herny. Na straně Blanců tak stál náhlý nárůst popularity kasin v lázeňských střediscích a profesionální personál, jež si s sebou přivedli z Palais Rooyal. [4]

Roku 1872 však byla uzavřena i německá kasina. Několik let před touto událostí se ovšem F. Blancovi podařilo přesunout své podnikání do monackého knížectví. Díky Blancovi se následně Monte Carlo stalo nejslavnějším a nejvelkolepějším kasinem světa a Monako tak začalo vzkvétat. [4]

---

<sup>7</sup> Faro je jednou z nejstarších a zároveň jednou z nejpůvodnějších evropských aristokratických karetních hazardních her. Mezi vášnivé hráče fara patřili například hudební skladatel Mozart a americký prezident Buchanan.



V současné době je ruleta jednou z nejrozšířenějších a nejoblíbenějších kasinových her. V roce 1996 patřilo z celkového počtu přes 70 tisíc herních stolů na světě přibližně 12 tisíc, tj. zhruba 17 procent, rulet. První byl black jack s více než 35 tisíci stoly a třetí baccarat s 9 tisíci stoly. V Německu nemá u herních stolů francouzská ruleta konkurenci. Její roční výnos je zde přibližně desetkrát větší než z black jacku. V USA se ruleta co do popularity umísťuje za black jackem a crapssem na pomyslném třetím místě. V roce 1984 zde dokonce zavítala k ruletovým stolům pouhá 2 procenta všech návštěvníků [6]. V Británii činí výnosy z angloamerické verze rulety přibližně 70 procent výnosů ze „stolových her“ v kasinu, ve Španělsku pak 50 procent. V Evropě celkově je ruleta dodnes považována za kasinovou královnu, byť jí stále neúprosněji šlape na paty v poměru 3:2 black jack. Aktuálně se v Evropě vyskytuje odhadem okolo 2900 ruletových stolů. Z tohoto počtu patří jedna třetina francouzské variantě. Uvážíme-li pořizovací cenu 230000–400000 Kč na jeden ruletový stůl s vybavením, prostým výpočtem dojdeme k pořizovací sumě přesahující tři čtvrtě miliardy. [4]

### 1.9.2 Muži, jež porazili ruletu

Prvním hráčem, který na ruletě vydělal nemalou sumu, byl Angličan Joseph Jagers. Jagers se živil jako mechanik vřetenových soustrojí pro zpracování bavlny. Na základě svých profesních zkušeností tušil, že by se i na ruletových mechanismech mohly časem projevat známky opotřebení soustavným užíváním. V zimě roku 1873 tak navštívil kasino Monte Carlo. Krátce po svém příjezdu najal šestici pozorovatelů, kteří pro něj po několik dní zapisovali veškerá vyhrávající čísla na šesti herních stolech. Z přibližně 55 spinů za hodinu získal Jagers denně během 8 hodinového provozu rulety okolo 3000 výherních čísel. Koncem týdne již měl Jagers na základě získané statistiky vytipovaný stůl, u kterého ruleta vykazovala zvýšenou pravděpodobnost určité sady čísel. Sérii skromných sázek si Jagers ověřil správnost svých výsledků a v poměrně krátké době vyhrál okolo 10 tisíc dolarů. Když ten večer Jagers opouštěl hernu, kasino bylo lehčí o 70 tisíc dolarů. Druhého dne již Jagers vyhrál okolo 300 tisíc dolarů nehledě na to, že pro zmatení přítomných herních inspektorů sázel mimo svých čísel i zcela nahodile. Jeden z inspektorů si však všiml, že Jagers hraje stále u stejného stolu a na základě tohoto zjištění kasino večer rulety mezi stoly přeházelo. Než si Jagers dalšího dne tuto skutečnost uvědomil, ztratil u svého domnělého stolu přes 200 tisíc dolarů. Díky své dobré paměti a nepatrné rýze však svou defektní ruletu poměrně rychle opět našel a svůj aktuální kapitál opět navýšil na 450 tisíc dolarů. Vedení kasina bylo jasné, že je třeba jednat rychle. S vadným ruletovým kolem byl proto k pařížskému výrobcovi vypraven spěšný kurýr. Zjištěný defekt spočíval v opotřebení napevno namontovaných kovových zarážek oddělujících políčka separátoru. Tyto zarážky byly bleskově nahrazeny novou nastavitelnou variantou, umožňující herně operativní seřízení všech hracích kol. Jaggerse tato úprava stála přibližně 75 tisíc dolarů. Díky své strízlivosti si ale celkem rychle uvědomil, že přes noc došlo k zásadní modifikaci herních podmínek. Přestal proto hrát a Monte Carlo opustil s částkou přibližně 325 tisíc. [4]

Ani nové nastavitelné zarážky ovšem nebyly zcela bezchybné. Šroubky, jimiž byly uchyceny, se po čase uvolňovaly. Této slabiny využila v Monte Carlu na podzim roku 1880 osmnáctičlenná skupina Italů. Obdobně jako dříve Jagers Italové

sázeli malé sázky a celé dny si vedli pečlivé statistiky výherních čísel u jednotlivých stolů. Po čase se i jim spolehlivě podařilo detekovat jedno defektní kolo. Na rozdíl od Jaggerse jednotliví Italové pracovali na směny a své výherní série vedli v kratších časových intervalech. Nevzbuzovali proto jako celek v očích kasina velké podezření. Po čase bylo vedení herny dokonce nuceno zvednout kapitál inkriminovaného stolu, aby na něm tak často nedocházelo k uzavření hry. Vytrvalým Italům se celkem dlouhou dobu dařilo unikat pozornosti herních inspektorů. Nakonec ovšem kasino jejich hru prokouklo a defektní stůl z herny odstranilo. Dobovým tiskem pojmenovaný „italský syndikát“ kasino připravil celkem o 180 tisíc dolarů. Italové však, pro své hráčské vášně, získané peníze poměrně záhy Monte Carlu zase vrátili u jiných herních stolů. [4]

Posledním z nejznámějších hráčů, kteří pro svou hru využívali defektního ruletového kola<sup>8</sup>, byl obchodník s ojetými auty a lasvegaský-atlantský high roller William. T. Walters. V červnu roku 1986 navrhl Walters vedení kasina Golden Nugget v Atlantic city, že pokud mu v ruletě svolí navýšit herní sázky, složí pro účely této hry při vstupu do herny do hry typu freeze-out<sup>9</sup> 2 miliony dolarů v hotovosti. Golden Nugget na Waltersovu hru přistoupilo a ten se zanedlouho poté dostavil i s penězi a spoluhráčem do kasina. Dle dohody s kasinem si Walters mohl zvolit libovolný z hracích stolů a po celou dobu měl jeho hru řídit týž personál. Walters sázel vždy 2000 dolarů na 5 stejných čísel. Při každém spinu rulety měl tak dohromady vsazeno 10 tisíc dolarů. Tímto způsobem hrála dvojice celkem 38 hodin, z toho 18 hodin čistého herního času, až se nakonec domluvili s vedením kasina na ukončení hry. Každou hodinou své hry připravil Walters Golden Nugget o rovných 100 tisíc dolarů, celkově si odnesl takřka 4 miliony dolarů a jeho hra je dodnes jednou z nejvyšších výher dosažených v ruletě v tak krátkém časovém intervalu. Waltersův úspěch se prakticky automaticky připisoval defektnímu kolu. Krátce po hře také na veřejnost vyplula skutečnost, že před Waltersem dorazil do Golden Nugget šestičlenný tým, který pro něj vedl pečlivé statistiky o výsledcích na herních kolech. Svůj kousek Walters zopakoval o tři roky později, 23. června 1989, v kasinu Cladridge. První den své hry proměnil počátečních 50 tisíc dolarů v 200 tisíc. Stejně jako dříve v Golden Nugget i nyní těžil ze statistiky, kterou pro něj pořídil jeho šestičlenný předvoj, který do kasina dorazil o tři dny dříve. Vedení herny navzdory doporučení vyměnit okamžitě všechna svá ruletová kola pouze provedlo opravu těch poškozených. Tato chyba následně stála kasino přinejmenším dalších 300 tisíc dolarů v další Waltersově hře, nepočítaje výhry hráčů, jež kopírovali jeho sázky. [4]

Patrně nejznámější je dnes ale příběh dalšího Angličana D. Charlese Wellse, který roku 1891 „rozbil bank“<sup>10</sup> v Monte Carlu. Wells si po příchodu do herny vyměnil žetony v hodnotě přibližně 2 tisíce dolarů a u jednoho z ruletových stolů začal sázet malá čísla. Za poměrně krátkou dobu tímto způsobem rozbil bank. Téhož dne se mu ve stejném duchu podařilo rozbít bank dohromady dvanáctkrát. Následující dva dny ve svém zlatonosném tažení pokračoval s nezměněnou úspěšností, a tak nakonec kasino opouštěl bohatší o přibližně 200 tisíc dolarů. Wellsova

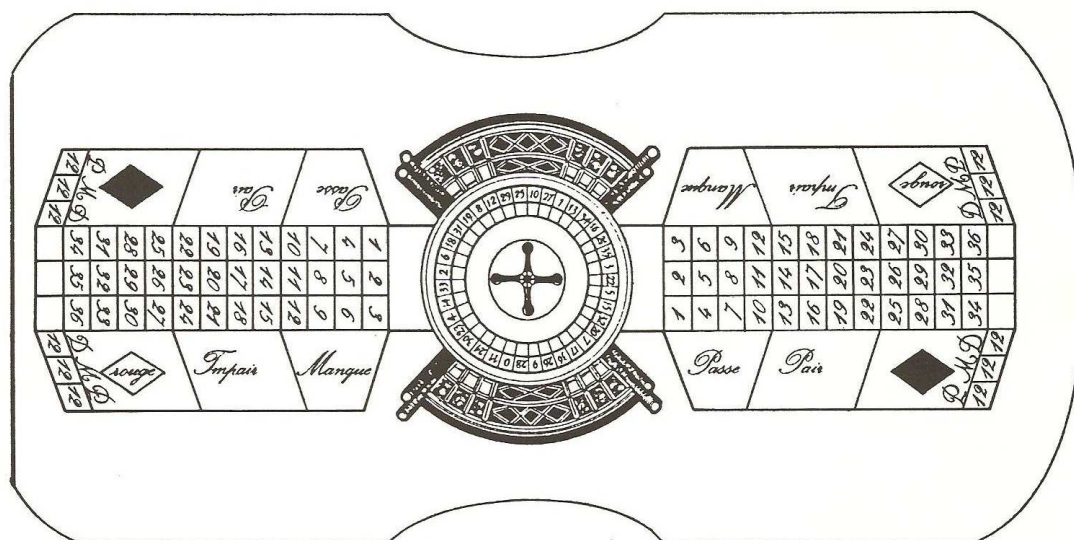
<sup>8</sup> V kasinové terminologii označované jako biased wheel

<sup>9</sup> Typ hry známý z pokeru, kdy oba hráči složí stejné vklady, o které poté hrají, dokud jeden z nich vše neprohráje.

<sup>10</sup> Termínem „rozbít bank“ se v kasinové mluvě rozumí při hře vyhrát tak vysokou sumu, že již bank u příslušného herního stolu nemá čím vyplácet.

„strategie“ byla následně bezvýsledně napodobována mnoha dalšími hráči. Díky Wellsovi se Monte Carlo stalo nejznámější hernou světa a paradoxně tak na jeho výhrách značně zbohatlo. Chasles Coburn dokonce složil na počest Wellsovy hry píseň *The Man Who Broke the Bank at Monte Carlo*. Roku 1892 navštívil Wells Monte Carlo ještě jednou, tentokrát však prohrával. V roce 1922 následně přiznal, že zprvu neměl žádnou strategii a sázel výlučně na základě své intuice; na podruhé již hrál se strategií a prohrával. Roku 1926 Wells umírá v Paříži zcela bez prostředků. [4]

Wells ovšem rozhodně nepatří mezi nejslavnější ruletové „poražence“. Dne 6. března 1974 v Monte Carlu prohrál nejmenovaný italský průmyslník v pětihodinové hře bezmála 2 miliony dolarů.



Obrázek 1.2: Stůl evropské rulety [10]

## 2. Jak se hraje ruleta

„Kolem ruletových stolů i na druhém konci sálu, kde byl stůl s *trente et quarante*, tísnilo se v několika řadách asi sto padesát nebo dvě stě hráčů. Ti, kterým se podařilo protlačit se až ke stolu, stáli obyčejně vytrvale na místě a neodcházeli, dokud všechno neprohráli, neboť stát tam jako pouhý divák a zbůhdarma zabírat místo se nedovoluje. Kolem stolu jsou sice židle, ale málokterý hráč se posadí, zvlášť když je velký nával, protože vstojí je možno víc se stěsnat, a tedy také lépe najít místo a šikovněji sázet. Druhá a třetí řada se mačkala za první, čekali, až na ně dojde, ale z netrpělivosti natahovali někdy ruce přes první řadu a sázeli. Dokonce z třetí řady si občas někdo troufal propašovat takovým způsobem sázku. Proto neminulo ani deset, ba ani pět minut, aby na některém konci stolu nevy-pukla hádka o sporné sázky. Ostatně policie je v herně dosti dobrá. Návalu se ovšem nelze vyhnout, naopak je vítáno, když se nahrne mnoho lidí, protože to hodně vynáší. Ale osm croupierů, sedících kolem stolu dává na sázky dobrý pozor, vyplácejí výhry a vznikne-li spor, dělají rozhodčí. V krajním případě zavolají policii a věc je za chvíličky vyřízena. Policisté v civilních šatech jsou roztroušeni mezi diváky, takže je nelze poznat. Speciálně dohlížejí na zloděje a podvodníky z povolání, kterých je u rulety neobyčejně mnoho, protože je tu lov tak neobyčejně snadný. Skutečně, všude jinde musí zloděj krást z kapes nebo ze zamčených pokladen – a nepovede-li se mu to, mívá to velice mrzuté následky. Kdežto tady stačí postavit se k ruletě, začít hrát a najednou, docela veřejně, vzít cizí výhru a zastrčit do kapsy. Dojde-li ke sporu, šejdř vykřikuje na celé kolo, že sázka byla jeho. Provede-li se to obratně a svědci jsou na vahách, často se zloději povede si peníze odnést – ovšem nejde-li o mimořádně velkou sumu. V tom případě si jí croupier nebo někdo z hráčů povšimne už předem. Ale není-li suma právě značná, bývá někdy pravému majiteli skandál nepříjemný, omrzí ho pokračovat v hádce a odejde. Když se ovšem podaří zloděje odhalit, ihned ho s ostudou vyvedou.“ [3]

Těmito řádky vyobrazil věhlasný ruský spisovatel Fjodor Michajlovič Dostojevskij roku 1867 ve svém částečně autobiografickém díle *Hráč* atmosféru u ruletového stolu před přibližně 150 lety.

### 2.1 Ruleta

Ruleta je herní zařízení, tvořené dvojicí soustředných kol, z nichž menší je otáčivé a větší nehybné. Menší vnitřní kolo je u evropské rulety rozděleno v 37 očíslovaných políček od 0 do 36, u americké verze pak dodatečně 38. políčko tvoří dvojice nul 00. Pole banku 0 a 00 mívají obvykle zelenou barvu, zbývající pole jsou střídavě černá a červená. Během hry vhazuje krupiér kuličku po vnějším nehybném kole proti směru rotace vnitřního kola. Po několika obězích kulička zpomalí až úplně zastaví na jednom z číslovaných polí. V každém kole pak hráči sázejí na výherní číslo umístěním sázky na herní plán. [12]

## 2.2 Herní procedura a pravidla

Ruleta je jednou z nejtradičtějších her kasina. Každé její otočení je proto spjato s velmi specifickou procedurou, kterou lze rozdělit v následujících pět kroků [20]:

1. V reakci na pobídku krupiéra (*kupříkladu proslulé „Faites vos jeux, messieurs“ Francoise Blanca*) hráči umístí dle pravidel na hrací plátno své sázky. Při sázení je třeba dbát minimálních a maximálních sázek pro jednotlivé sázkové možnosti u příslušného ruletového stolu. Jakékoli sázky nevyhovující těmto limitům jsou považovány za neplatné. Sázeční limity se liší nejen kasino od kasina, ale obvykle i v rámci herny stůl od stolu.
2. Krupiér otočí kolem tak rychle, aby hráči stále mohli pouhým zrakem rozeznat jednotlivá čísla. Následně proti směru otáčení vhodí kuličku. Před dopadem by kulička měla alespoň čtyřikrát až sedmkrát oběhnout kolo.
3. Po určité době, ještě před dopadem kuličky, oznámí krupiér konec sázek (*„Rien ne va plus“, přidržíme-li se opět francouzské tradice*). Od tohoto okamžiku již nejsou hráčům žádné další sázky povoleny.
4. Kulička dopadne na vyhrávající číslo. Krupiér toto číslo oznámí a označí jej pomocí viditelného markeru (Dolly).
5. Nakonec jsou krupiérem shrábnuty veškeré prohrávající sázky a vítězům jsou vyplaceny v předepsaném pořadí jejich výhry.

Krom kroků jedna až pět k ruletové proceduře neodmyslitelně patří ještě oznámení posledních tří her manažerem herny (*ve francouzských kasínech například zvoláním „A la dernier“*). Existují ovšem i herny, kde se ruletovým kolem otáčí nepřetržitě čtyřadvacet hodin denně sedm dní v týdnu.

Vždy je však dobré mít na paměti poučku „jiný kraj jiný mrav“ a předem si zjistit specifická pravidla chování u ruletového stolu v dané herně. Vyhneme se tak možnosti zákazu vstupu a ocitnutí se na takzvané černé listině kasina.

## 2.3 Základní sázky

*„Pokud to šlo, vyložil jsem, co znamenají ty různé způsoby sázení na route et noir, červená a černá, pair et impart, manques et passe, nízká a vysoká čísla, a konečně rozmanité kombinace čísel. Stařena pozorně naslouchala, snažila se zapamatovat si to, znovu se vyptávala a zaučovala se. Na každý způsob sázení mohl jsem hned uvést příklad, takže se mnohému rychle a brzy naučila a zapamatovala si to. Byla velice spokojena.*

*„A co znamená 'zéro'? Tamhleten kudrnatý croupier, ten hlavní, vykřikl právě zéro. Proč shrábně všechno, co bylo na stole? Taková hromada, a on to všechno sebral. Co to má být?“*

*„Zéro, nula, je výhra banku. Padne-li kulička na nulu, náleží banku bez počítání všechno co bylo vsazeno.“*



Obrázek 2.1: G. Peck jako Dostojevskij ve filmu The Great Sinner [20]

*„To je pěkné! A já nedostanu nic?“*

*„To ne, babičko, vsadila-li jste předtím na zero, dostanete vyplaceno pětatřicetkrát tolik.“*

*„Cože, pětatřicetkrát? A vyjde to často? Proč, hlupáci, na to nesázejí?“*

*„Šestatřicet šancí je proti, babičko“*

*„Hlouposti! Potapyči! Potapyči! Počkej, mám nějaké peníze u sebe – tady jsou!“  
Vytáhla z kapsy nabitou peněženku a vzala z ní fridrichsdor. „Tu máš, vsaď na zero!“*

*„Babičko, zero právě vyšlo,“ řekl jsem „pravděpodobně teď dlouho nevyjde. Prosázíte příliš mnoho, počkejte alespoň chvíli.“*

*„Neplácej a sázej!““ [3]*

Než přikročíme k sázení samému, bude třeba směnit naše hodnotové žetony, případně i hotovost, za herní žetony ruletového stolu, u něhož se chystáme hrát. Jedině s těmito žetony je totiž možno vstoupit do hry. Žetony navíc bývají barevně rozlišeny v sady pro jednotlivé hráče, čímž jsou předcházeny možné spory o vyhrávající sázku představené v úryvku Dostojevského na úvod této kapitoly.

Příložený anglicko-francouzsko-český přehled základních dvanácti sázek v ruletě spolu s příloženým komentářem je kompletně převzat z [17].

Pro účely této práce je uvedený přehled více než postačující. Velmi pestrou paletu dalších speciálních sázkových možností je možno vyhledat například ve zdroji [20] na stranách 73–92, ve zdroji [8] na straně 51 nebo ve zdroji [17] na stranách 16–18.

Veškeré sázky realizujeme umístěním kýžené hodnoty v žetonech na příslušné místo hracího plánu, viz obrázek 2.2.

## 2.4 Francouzská kontra americká verze rulety

Co se ruletových systémů týče, budou ve středu našeho zájmu zejména takzvané rovné sázky. Tedy sázky s vypláceným poměrem 1:1. Některé odlišnosti mezi americkou a evropskou verzí hry mají ovšem zásadní dopad právě na tento typ sázek. Tyto rozdíly bude proto nutno, alespoň zevrubně, uvést.

Anglicky	Francouzsky	Česky	Vyplácený poměr
Single number (Straight)	En plein	Jedno číslo	35:1
Two numbers (Split)	A cheval	Dvojice	17:1
Three numbers (Street)	Transversale pleine	Trojice	11:1
Four numbers* (Square, corner)	En Carré	Čtyři čísla (čtverec)	8:1
Six numbers (Line bet)	Sixtaine <i>nebo</i> transversale simple	Šest čísel (řada)	5:1
Dozen (1st, 2nd, 3rd)	Douzaine (premiere, moyenne, derniere)	Tucet (první, druhý, třetí)	2:1
Adjacent dozens (dozens)	Douzaine à cheval	Sousední tucty	1:2
Column dozens	Colonne	Sloupec	2:1
Adjacent columns	Colonne à cheval	Sousední sloupce	1:2
Red <i>nebo</i> black	Rouge <i>nebo</i> noire	Červené <i>nebo</i> černé	1:1
Odd <i>nebo</i> even	Impair <i>nebo</i> pair	Liché <i>nebo</i> sudé	1:1
High (19–36) <i>nebo</i> low (1–18)	Passe <i>nebo</i> manque	Vysoké <i>nebo</i> nízké	1:1

*Pozn: \*Sázka na čtyři čísla 0, 1, 2, 3 na franc. tabuli je sázkou na pět čísel.*

Tabulka 2.1: Sázecí poměry

Pomineme-li odlišné designové prvky a různé uspořádání čísel na ruletových kolech (kompletní přehledová tabulka sousedních čísel na americké i francouzské ruletě je uvedena například ve zdroji [17] na straně 17), první zásadní odlišností ovlivňující dynamiku hry samé, je přítomnost dvojitě nuly v americké verzi hry. Jinými slovy, kolo francouzské rulety disponuje jedinou nulou symbolizující výhru banku, kdežto kolo americké rulety kráší ještě jedno dodatečné výherní pole banku. Padne-li tedy 0 nebo 00, je dle typu hry, situace vyhodnocena následovně [20]:

1. V případě ortodoxní americké rulety veškeré sázky prohrávají s výjimkou sázek na nulu, dvojitou nulu a jakékoli kombinace nuly obsahující.
2. V případě francouzské rulety je pro hráče situace výrazně pozitivnější. Padne-li nula, neprohrávají okamžitě spolu se sázkami obsahující nulu ještě rovné sázky. Rovné sázky jsou v takovém případě buď takzvaně zmrazeny do dalšího kola (pro tento stav existuje francouzský termín *en prison*) nebo okamžitě ztratí polovinu své hodnoty (pro tento stav existuje francouzský

termín *le partage*). Zablokované sázky buď ponecháme na svém místě, nebo je můžeme přesunout na pole jiné z rovných sázek a o jejich osudu pak rozhodne další otočení rulety. Padne-li následně opět nula, jednou zmrazená sázka je zmrazena dvojitě a padne-li nula i potřetí, okamžitě propadá banku. Pravděpodobnější je ale situace, kdy namísto druhé nuly padne nějaké jiné číslo. V tomto případě je buď zmrazená sázka výherní, a my si ji můžeme vzít zpět v její plné výši bez jakéhokoli vyplaceného bonusu, nebo proherní, a tedy kompletně propadá banku.

3. Další možností je kombinace předchozích dvou variant. Jestliže padne nula, banku okamžitě propadne polovina hodnoty všech rovných sázek, zbylá polovina je zmrazena a je s ní nakládáno jako v předchozím bodě.
4. Poslední možností, jak nakládat s rovnými sázkami v případě padnutí nuly, je okamžitá ztráta poloviny hodnoty rovné sázky a odblokování druhé poloviny. Tj. polovina hodnoty rovné sázky se v tomto případě vrací zpět do našeho vlastnictví.

Při hraní rulety je důležité mít neustále na paměti, že jsme v pozici riskujícího hazardního hráče, kdežto kasino je v roli vydávajícího investora. Americká varianta hry garantuje banku 5,26% podíl, francouzská pak 2,7% zisk pro jakýkoli typ sázek s výjimkou sázek rovných. V případě rovných sázek totiž ve francouzské verzi hry tento podíl, díky výše uvedenému pravidlu o zmrazení či půlení sázek, klesá na pouhých přibližně 1,35 %. Je tedy zjevné, že bychom při volbě verze hry měli preferovat tu francouzskou. Z pohledu pravděpodobnosti kasino na každé naší sázce vždy vydělává! [17]

## 2.5 Ruletové systémy

*„Bylo čtvrt na jedenáct; vstoupil jsem do kasina s tak pevnou nadějí, ale zároveň v takovém rozčilení, jaké jsem ještě nikdy nezažil. V hernách bylo lidí ještě dost, třebaže o polovinu méně než dopoledne. Po desáté hodině zůstávají u hracích stolů skuteční, náruživí hráči, pro které v lázních neexistuje nic než ruleta, kteří přijeli jen za ní, nevědí skoro, co se kolem nich děje, celou sezonu se o nic nezajímají, jenom hrají od rána do noci, a kdyby to šlo, hráli by i celou noc až do svítání. Jen neradi se rozcházejí, když se ve dvanáct hodin ruleta zavírá. A když kolem dvanácté hodiny, než ruleta skončí, vyvolává nejstarší croupier: „Les trois derniers coups, messieurs!“, nejraději by v těch třech hrách vsadili všechno, co mají v kapse. Skutečně se v této chvíli nejvíc prohrává. Došel jsem k tomu stolu, kde předtím seděla babička. Nebyl zvláštní nával, a tak jsem brzy dostal u stolu místo k stání. Rovnou přede mnou bylo na zeleném sukňě napsáno slovo „Passe“. „Passe“, to je řada čísel od devatenácti do třiceti šesti. První řada, od jedničky až po osmnáctku, se jmenuje „Manque“ – ale co mně bylo potom? Neuvažoval jsem, ani jsem dokonce neposlouchal, jaké číslo naposled vyšlo, ani jsem se na to nezeptal, než jsem začal hrát, jak by to udělal každý jen trochu přemýšlející hráč. Vytáhl jsem všech svých dvacet fridrichsdorů a hodil je na „passe“, které jsem měl před sebou. „Vingt deux“, vyvolal croupier. Vyhrál jsem a zase jsem vsadil všechno: to co jsem měl předtím, i výhru. „Trente et un,“ ohlásil croupier. Zase výhra! Měl jsem už osmdesát fridrichsdorů. Vsadil jsem všech osmdesát na*



dvanať prostředních čísel (trojnásobná výhra, ale dvojnásobná pravděpodobnost prohry). Kolo se roztočilo a vyšlo čtyřadvacet. Vyplatili mi tři balíčky po padesáti fridrichsdorech a deset zlatých mincí. Dohromady s tím, co jsem měl předtím, se u mě sešlo dvě stě fridrichsdorů. Byl jsem jako v horečce, položil jsem tu hromadu peněz na červenou – a najednou jsem přišel k sobě. A pouze jedinkrát za celý ten večer, za celou hru mě zamrazilo strachem a roztráslly se mi ruce a nohy. S hrůzou jsem pocítil a na okamžik si uvědomil, co by teď pro mne znamenala prohra. Celý můj život byl v sázce! „Rouge,“ vyvolal croupier a já si oddychl; palcivé mravenčení mi projíždělo celým tělem. Vyplatili mě v bankovkách; měl jsem tedy už čtyři tisíce florinů a osmdesát fridrichsdorů. (Doposud jsem byl schopen to spočítat.) Potom jsem, jak si vzpomínám, vsadil opět dva tisíce florinů na dvanať středních a prohrál jsem; vsadil jsem své zlato a osmdesát fridrichsdorů a prohrál. Posedla mě zuřivost: popadl jsem poslední dva tisíce florinů, co mi zbyly, a vsadil dvanať prvních – jen tak namátkou, nazdařbůh, bez uvažování. V jednom okamžiku čekání jsem prožil podobné dojmy, jaké asi prožívala Mme Blanchard, když v Paříži padala z hořícího balónu. „Quatre,“ vyvolal croupier. Dohromady s předchozí sázkou jsem měl za šest tisíc florinů. Hleděl jsem už jako vítěz, ničeho jsem se v té chvíli nebál a hodil jsem čtyři tisíce florinů na černou. Asi devět lidí honem vsadilo po mně také na černou. Croupieři si vyměňovali pohledy i několik slov. Všichni kolem o tom mluvili a vyčkávali. Černá vyšla. Dál už se nepamatuji, kolik jsem sázel a jak šly sázky za sebou. Vzpomínám jen jako ze sna, že jsem už měl vyhráno asi šestnáct tisíc florinů. Potom jsem z nich ve třech nešťastných kolech o dvanať přišel. Poslední čtyři tisíce jsem vsadil na „passe“ (ale nic jsem už při tom nevnímal, jen mechanicky, bezmyšlenkovitě jsem vyčkával) – a zase jsem vyhrál. Potom jsem vyhrál ještě čtyřikrát za sebou. Pamatuji si jen, že jsem shraboval peníze po tisících. Vzpomínám také, že nejčastěji padalo dvanať prostředních, kterých jsem se také držel. Ta čísla vycházela s jakousi pravidelností – určitě tiskrát nebo čtyřikrát za sebou, potom na dvakrát zmizela a zase se na třikrát nebo čtyřikrát vracela. Tato podivná pravidelnost se někdy vyskytuje v dlouhých řadách – a to také mate zapisující hráče, počítající s tužkou v ruce. A jaký hrozný výsměch osudu se při tom někdy objeví! Myslím, že neuplynulo víc než půl hodiny od chvíle, kdy jsem přišel. Vtom mi croupier oznámil, že jsem vyhrál třicet tisíc florinů, a ježto bank najednou víc nevyplácí, že ruleta se do zítřka do rána zavírá. Pobral jsem všechno své zlato, nasypal je do kapes, sebral všechny bankovky a odešel k jinému stolu, do druhého sálu, kde byla druhá ruleta. Celý zástup táhl za mnou. Tam mi hned uvolnili místo a já začal sázet nazdařbůh a bez uvažování. Nechápu, co mě zachránilo. Ostatně chvílemi mi začínalo probleskovat hlavou něco jako početní úvaha. Držel jsem se některých čísel a šancí, ale brzy je opouštěl a znovu sázel skoro v bezvědomí. Patrně jsem byl velmi roztržitý. Vzpomínám si že croupieři několikrát mou hru opravovali. Dělal jsem hrubé chyby. Skráně jsem měl zmáčené potem a ruce se mi tráslly. Poláčci nabízeli své služby, ale já jsem nikoho neposlouchal. Štěstí nebralo konce. Najednou se kolem rozlehlo hlasité volání a smích. „Bravo, bravo!“ křičeli všichni a někteří dokonce zatleskali. I tady jsem urval třicet tisíc florinů a zase uzavřeli do zítřka. „Odejděte, odejděte!“ šeptal mi zprava něčí hlas. Byl to jakýsi frankfurtský žid. Celou tu dobu stál vedle mne a patrně mi chvílemi při hře pomáhal. „Odejděte, proboha!“ zašeptal mi jiný hlas nad levým uchem...“ [3]

Tou dobou disponoval Dostojevskij přibližně šedesáti tisíci floriny. Avšak jeho hráčská posedlost nebrala konce. V herně nebyla dostupná žádná další ruleta, přesunul se proto ke hře trente et quarante, jejíž pravidla vůbec neznal. I tato hra ovšem umožňovala sázku na černou nebo červenou, které se držel. Musel zkrátka hrát! Sázel proto neustále na červenou, jež k jeho štěstí vyšla čtrnáctkrát za sebou. Z deliria jej probrala až věta: „Monsieur a gagné déja cent mille florins.“ (Pán už vyhrál 100 tisíc florinů.) Kasino toho večera opustil s více než 100 tisíci floriny. Kolik je na celém příběhu pravdy, ví jen sám Dostojevskij. Hráčskou horečku při hraní rulety ovšem vyobrazil naprosto bravurně a bezkonkurenčně. Mimo herního šílenství však úryvek nádherně ilustruje i hru bez jakékoli strategie. Nyní si ukážeme její přesný protiklad – ruletové systémy.

### 2.5.1 Martingale

Albert Einstein jednou prohlásil: „Pokud vůbec lze na ruletě vyhrát, pak pouze tím způsobem, že se ukradnou peníze ze stolu, když se krupiér nedívá.“ Paralelně ovšem připouštěl, že jistou nadějí skýtá prosté zdvojnásobování sázky po každém prohraném spinu. Právě na principu zdvojnásobování sázek je založen snad nejznámější ruletový systém vůbec – legendární Martingale.

Název Martingale vznikl zkomolením jména anglického hráče Henryho Martindalea žijícího v 18. století. Jak již bylo řečeno, základní podstata systému Martingale tkví ve zdvojnásobování rovné sázky po každém prohraném kole. Začínáme-li tedy například na jedné jednotce vsazené na červenou, bude třeba po první prohře vsadit dvě, po druhé čtyři a po třetí prohře pak osm jednotek na červenou. Vzestupný trend nás v případě deseti proher v sérii přivede k sázce 1024 jednotek na červenou. Jinými slovy, pokud bychom začínali se sázkou 200 Kč na červenou barvu, museli bychom po desáté prohře riskovat částku rovných 204 tisíc 800 Kč v sázce na červenou, abychom v případě úspěchu získali jedinou jednotku, tj. pouhých 200 Kč, neboť

$$-200(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512) + 200(1024) = 200(1) = 200.$$

Po každém úspěšném spinu přitom začínáme opět od jedné jednotky. Nutno poznamenat, že maximální možná rovná sázka se v lepších pražských kasinech pohybuje průměrně okolo 6 tisíc Kč, minimální možná rovná sázka pak průměrně okolo 200 Kč. V případě uvedených mezí by tak naše proherní série dospěla svého nešťastného konce již po páté prohře, neboť bychom v takové chvíli museli vsadit částku 6400 Kč, která by přesahovala horní hranici stolu pro rovné sázky. [17] [20]

*Ze statistiky, kterou během měsíce monitorování her u jednoho ruletového stolu v nejmenovaném kasinu v Macau vedl slavný ruletový hráč Paddy O' Neil-Dunne spolu se svým týmem vyplynulo, že červená padla osmkrát a více za sebou celkem ve 43 hrách. Dále bylo zaznamenáno třináct nepřerušovaných sérií červené o délce přesahující deset spinů. Nejdelší nepřetržitá série jedné barvy na ruletě byla zaznamenána v roce 1943, kdy padla 32 krát za sebou červená. Dne 17. července 1934 padla, vskutku přízračně, červená barva 17 krát za sebou u stolu číslo 5*

v kasinu Monte Carlo. Dne 9. července 1959 byla pak v hotelu El San Juan zaznamenána prokazatelně nejdelší nepřerušovaná série téhož čísla, kdy padlo šestkrát za sebou číslo 10. Zmiňované série by se hráčům systému Martingale mohly pevně prodražit. [20]

### 2.5.2 Great Martingale

System Great Martingale vychází z dříve uvedeného Martingale. S tím rozdílem, že po každé prohře, krom zdvojnásobení prohrané sázky, přidáme navrch ještě jednu jednotku. Po výherním spinu sázíme opět zvolenou počáteční jednotku. [20]

### 2.5.3 Anti-Martingale

Na rozdíl od Martingale zdvojnásobujeme ve hře Anti-Martingale svou sázku po každé výhře. Délku série si přitom stanovujeme sami s ohledem na možné maximum stolu. Po každé prohrané hře přitom opět začínáme počáteční sázkou jednotkou. Je třeba zmínit, že úskalí tohoto systému zcela nepochybně tkví v předem neodhadnutelném počtu proher před první výhrou. [20]

### 2.5.4 D'Alambert

Základní podstata systému D'Alambert spočívá v přidání jedné jednotky k naší počáteční sázce po každé prohře a naopak v odebrání jedné jednotky po každé výhře. V praxi to funguje tak, že si během hry zaznamenáváme posloupnost výher a proher. Pokud například třikrát prohrajeme, poté vyhrajeme a nakonec opět prohrajme, získáme posloupnost *pppvp* a naše další sázka bude odpovídat počáteční sázce navýšené o  $+3 - 1 + 1 = +3$  jednotky. Dostaneme-li se kontrolním součtem na potřebnou sázku  $0J$ , začínáme opět od jedné jednotky. Je důležité mít na paměti, že délka proherní série závisí výlučně na naší soudnosti. [17] [20]

### 2.5.5 Labouchere

System Labouchere stojí na principu rušení a přidávání sázek. Před zahájením hry si zvolíme konečnou posloupnost libovolných přirozených čísel. V každém kole přitom učiníme rovnou sázku odpovídající hodnotě součtu prvního a posledního čísla naší aktuální posloupnosti. Vyhrajeme-li, přidáme získanou hodnotu na konec naší posloupnosti. Je-li pro nás naopak spin proherní, vyškrtneme první a poslední číslo aktuální posloupnosti. Tímto způsobem pokračujeme, dokud buď nevyškrtneme všechna čísla naší posloupnosti (v takovém případě prohrajeme hodnotu odpovídající součtu všech čísel počáteční posloupnosti), nebo dokud se nerozhodneme ukončit svou výherní sérii a začít nanovo s novou posloupností. Stanovíme-li si například svou počáteční posloupnost 1-2-2-3, pak naší první sázkou budou  $1 + 3 = 4$  jednotky. Vyhrajeme-li, herní posloupnost nabyde podoby 1-2-2-3-4. Naše další sázka poté bude činit  $1 + 4 = 5$  jednotek. Pokud spin prohrajeme, vyškrtneme první a poslední číslo a získáme tak posloupnost 2-2-3. Naše další sázka by pro následující spin činila  $2 + 3 = 5$  jednotek. [17] [20]

## 2.5.6 Anti-Labouchere

Obdobně jako v případě systémů Martingale a Anti-Martingale, souvisejí spolu velmi blíže i systémy Labouchere a Anti-Labouchere. V systému Anti-Labouchere totiž v okamžiku výhry škrtnete první a poslední číslo posloupnosti, a naopak v případě prohry přepisujete proherní hodnotu na konec naší aktuální posloupnosti. Jakmile vyškrtneme poslední číslo posloupnosti, začínáme nanovo. Výhodou této metody je, že v případě dostatečně dlouhé výherní série, zaručeně získáme počet jednotek odpovídající hodnotě součtu členů naší počáteční posloupnosti. Naopak, nestojí-li při nás štěstěna, jsme opět odkázáni výlučně na naši soudnost. [17] [20]

## 2.5.7 Fibonacci

Sázecí systém Fibonacci nese jméno po slavném matematikovi italského původu, Leonardu Pisánském, zvaném též Fibonacci (*fillus Bonacci* znamená *syn Bonacciův*). Leonardův přínos matematice by se jen těžko vměstnal do několika skrovných řádků tohoto odstavce. Pro naše účely však postačí pouhá znalost tzv. Fibonacciho čísel, tj. posloupnosti o rekurentním určení

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; \quad F_1 = F_2 = 1.$$

Jinými slovy, každé další Fibonacciho číslo získáme jako součet dvou čísel předchozích. Konkrétně

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 12, \dots$$

Základní podstata systému Fibonacci tkví v navyšování rovných sázek po každé prohrané hře v duchu Fibonacciho čísel. Během sázení si dle daných pravidel vedeme bokem Fibonacciho posloupnost, vždy přitom sázíme součet posledních dvou zapsaných čísel. Prohrajeme-li, přidáme do našeho seznamu další Fibonacciho číslo. Vyhrajeme-li, pak vyškrtneme poslední zapsané číslo. Na začátku hry nemáme zapsané žádné číslo a sázíme jednu jednotku. Vyškrtneme-li všechna čísla, začínáme opět od začátku. Po 3 výhrách, 6 prohrách a 2 výhrách tedy budeme mít posloupnost 1, 1, 2, 3, naše další sázka bude odpovídat  $2 + 3 = 5$  jednotkám a celkový zisk této série bude roven  $1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 + 12 + 8 = 3$  jednotkám.

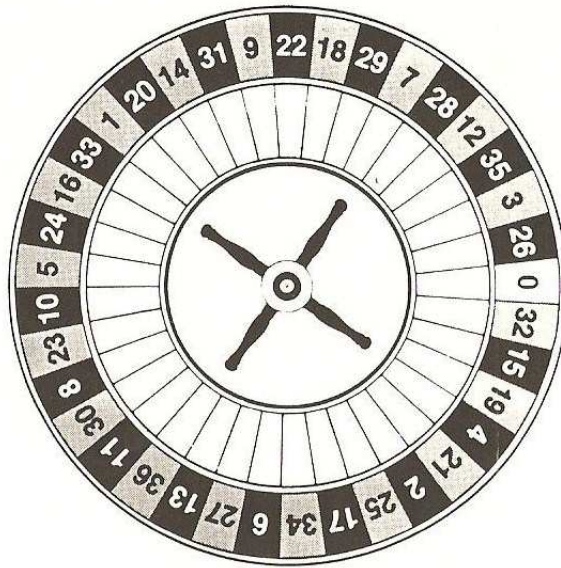
## 2.5.8 Bondovská sázka

Krom technických vymožeností a krásných žen holdoval agent jejího veličenstva James Bond také ruletě. V knize Iana Fleminga *Casino Royal* vsadil na první dva tučty po 100 tisících francích. Tímto způsobem pokryl 2/3 hracího plánu. Na tučty se vyplácí v poměru 2:1, tj. v případě výhry by činil Bondův zisk 100 tisíc franků. Pokud by ale Bond méně riskoval a více se zabýval sázecími poměry, jistě by si uvědomil, že se mu nabízela mnohem výnosnější možnost, jak roz distribuovat svůj vklad. Pod termínem Bondovská sázka bývají proto prezentovány systémy založené na distribuci 200 jednotek při každé sázce tak, aby byly pokryty 2/3 hracího plánu. [17]

Nejčastěji je přitom zmiňována sázka 140 jednotek na vysoká čísla (tj. rovná sázka na spodní čísla plánu 19–36) v kombinaci se sázkou 50 jednotek na šestici jiných čísel (například 13–18) a umístěním zbývajících 10 jednotek na pole nuly. Touto cestou bychom opět pokryli 2/3 hracího plánu. V případě, že by vyhrálo vysoké číslo, náš zisk by činil 80 jednotek. Kdyby vyhrálo jedno číslo z námi zvolené šestice, získali bychom 100 jednotek. Pokud by padla nula, získali bychom okamžitě 160 jednotek a naše rovná sázka na vysoká čísla by byla zmrazena do příštího spinu. Kdyby poté při nás v následujících dvou otočeních opět stálo štěstí, získali bychom zpět i 140 původně vsazených jednotek a náš čistý zisk by tak celkově činil celých 300 jednotek. Navíc bychom nemuseli dokládat 140 jednotek namísto zmrazené rovné sázky. Potenciální zisk by tak byl vyšší než Bondův, a to za menšího rizika. Alternativně bychom mohli distribuovat pouhých 20 jednotek, případně namísto vysokých čísel sázet na čísla nízká a volit jinou šestici. [20]

Druhou nejčastěji uváděnou možností bondovské distribuce 200 jednotek je rovná sázka 150 jednotek na nízká čísla (tj. na horní čísla plánu 1–18) v kombinaci se sázkou 50 jednotek na šestici jiných čísel. Kdyby vyhrálo nízké číslo nebo jedno z čísel námi zvolené šestice, získali bychom, stejně jako Bond, 100 jednotek. Následkem padnutí nuly bychom ovšem nyní, na rozdíl od agenta 007, okamžitě nepřišli o celou naši sázku. Svou roli by opět sehrálo pravidlo o zmrazení rovných sázek a pokud bychom měli štěstí, příští dva spiny by nám potenciálně mohly vrátit 150 vsazených jednotek na nízká čísla. Naše celková ztráta by tak činila pouhých 50 jednotek. Stejně jako v předchozím případě bychom i nyní mohli, namísto nízkých, sázet vysoká čísla a namísto 200 jednotek distribuovat v podobném duchu 20 jednotek. [20]

Stejně jako celá řada hráčů před námi se i my můžeme ruletu pokoušet parazit pátráním po defektech, „počítáním krupiéra“, odhadem místa dopadu kuličky z rotace kola a její dosavadní trajektorie, jak uvádí zdroj [6], podvodem (o podvádění v ruletě se můžeme dočíst například v [20] na stranách 127–133) nebo také mnou oblíbenou metodou železné kuličky a příhodně umístěného magnetu na spodní straně kola, představenou ve finální čtvrtině italského westernu *Trumfové eso* z roku 1968 režiséra Giuseppe Colizziho. V této práci se ale dále přidržíme ryze matematického přístupu k problematice ruletových systémů.



0					
PASSE	1	2	3	MANQUE	
	4	5	6		
	7	8	9		
	10	11	12		
PAIR	13	14	15	IMPAIR	
	16	17	18		
	19	20	21		
	22	23	24		
◆	25	26	27	◆	
	28	29	30		
	31	32	33		
	34	35	36		
$P^{12}$	$M^{12}$	$D^{12}$	$D^{12}$	$M^{12}$	$P^{12}$

Obrázek 2.2: Hrací plán a kolo [16]

# 3. Teoretická rukověť

## 3.1 Základní pojmy

**Náhodným pokusem** rozumíme pokus, jehož výsledek není jednoznačně determinován podmínkami, za nichž je prováděn, ale závisí též na náhodě.

Pod **náhodným jevem**  $A$  (dále jen jevem) rozumíme výsledek náhodného pokusu.

Pro jevy má smysl uvažovat jejich **průnik** (situaci, kdy nastanou zároveň) a jejich **sjednocení** (situaci, kdy nastane alespoň jeden z nich). Dále můžeme hovořit o **jevu doplňkovém** (opačném), o **jevu jistém**  $\Omega$  (nastane vždy a za jakýchkoli okolností) a **jevu nemožném**  $\emptyset$  (nenastane nikdy).

Konečně řekneme, že **jevy** jsou **neslučitelné**, je-li jejich průnikem jev nemožný (speciálně jevy nazveme **po dvou neslučitelné**, jsou-li každé dva z těchto neslučitelné) a jev  $A$  poté prohlásíme **podjevem** jevu  $B$ , jestliže pokud nastane  $B$ , nastane rovněž i jev  $A$ . [22]

*Vhodným příkladem náhodného pokusu budiž výsledek jednoho roztočení rulety, jevem  $A$  vítězství červené barvy, jevem  $B$  vítězství černé barvy, jevem  $C$  vítězství čísla 0 a konečně jevem  $D$  vítězství červeného čísla 1. Průnikem jevů  $A$  a  $B$  je jev nemožný, jelikož nemůže zvítězit zároveň černá i červená barva – jedná se proto o jevy neslučitelné ( $A \cap B = \emptyset$ ). Sjednocení jevů  $A$ ,  $B$  a  $C$  ( $A \cup B \cup C = \Omega$ ) přísluší jev jistý, jelikož jevy pokrývají všechny možné výsledky jednoho spinu rulety. Doplňkem jevu  $A$  jest sjednocení jevů  $B$  a  $C$ , neboť nepadne-li červená, musí logicky zvítězit černá barva či číslo nula  $\bar{A} = B \cup C$ . Konečně jev  $D$  je podjevem jevu  $A$  ( $D \subset A$ ), vyhraje-li totiž číslo 1, pak zvítězí rovněž i červená barva.*

## 3.2 Pravděpodobnost a pravděpodobnostní prostor

Budiž  $\Omega$  prostor, jehož prvky tvoří po dvou neslučitelné jevy  $\omega$ . Různé  $\omega$  od sebe můžeme odlišit pomocí různých dolních indexů. O  $\omega$  od tohoto okamžiku hovoříme jako o elementárních jevech a o prostoru  $\Omega$  poté jako o prostoru elementárních jevů. Uvažme dále systém podmnožin  $\Omega$ , tedy systém náhodných jevů popsatečných jevy elementárními, jež na  $\Omega$  tvoří  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{A}$ , tj. strukturu splňující:

- (a) systém  $\mathcal{A}$  je neprázdný;
- (b) je-li jev  $A \in \mathcal{A}$  pak i k němu doplňkový jev  $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ;
- (c) jsou-li jevy  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$  poté i jejich sjednocení  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

Nyní můžeme zavést pravděpodobnost  $P$  jako reálnou funkci na  $\mathcal{A}$ , na niž klademe následující požadavky

- (**normovanost**)  $P(\Omega) = 1$ , tj. jev jistý určitě nastane;
- (**nezápornost**)  $P(A) \geq 0$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ , neboť bychom jen těžko smysluplně zdůvodňovali jev nastávající se zápornou pravděpodobností;
- ( **$\sigma$ -aditivitu**) jsou-li jevy  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$  navzájem neslučitelné, pak  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ , tj. pravděpodobnost sjednocení navzájem neslučitelných jevů je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů.

Trojici  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  nazvěme pravděpodobnostní prostor. Jednoduchým způsobem můžeme přitom přejít k středoškolské definici. Uvážíme-li  $\Omega$  tvořený pouze konečným počtem  $n$  stejně pravděpodobných jevů, tj.  $P(\{w_1\}) = P(\{w_2\}) = \dots = P(\{w_n\})$ , pak z **normovanosti** a ze  **$\sigma$ -aditivity pravděpodobnosti** vyplne

$$P(w_i) = \frac{1}{n}; \quad i = 1, \dots, n.$$

[22][1]

V tomto případě, kdy je elementárních jevů konečný počet a všechny nastávají se stejnou pravděpodobností, mluvíme o **klasické pravděpodobnosti**.

Poznamenejme na závěr, že namísto zápisu  $P(A)$  budeme často užívat stručnější variantu  $p_A$ .

*Přidržíme-li se předchozího příkladu (jev  $A$  značí vítězství červené, jev  $B$  vítězství černé a jev  $C$  vítězství čísla nula (zelené)), můžeme uvažovat prostor elementárních jevů  $\Omega = \{A, B, C\}$ . Sigma algebrou v tomto případě bude systém všech podmnožin  $\Omega$  (jak tomu bývá u konečných prostorů elementárních jevů). Pro dílčí pravděpodobnosti elementárních jevů platí  $p_A = p_B = 18/37$  a  $p_C = 1/37$ , neboť 18 z 37 polí přísluší červené, 18 černé a pouze jedno pole zelenému číslu 0. Kdybychom zamýšleli stejnou situaci modelovat středoškolsky, byli bychom nuceni uvažovat prostor elementárních jevů tvořený 37 jevy reprezentujícími vítězství jednotlivých čísel a sledované jevy definovat jako sjednocení příslušných jevů elementárních.*

### 3.3 Nezávislost, podmíněná a násobná pravděpodobnost

Uvažme pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a jevy  $A, B \in \mathcal{A}$ , přičemž jev  $B$  nastává s nenulovou pravděpodobností, poté **podmíněnou pravděpodobnost** jevu  $A$  za podmínky, že nastal jev  $B$  definujeme jako

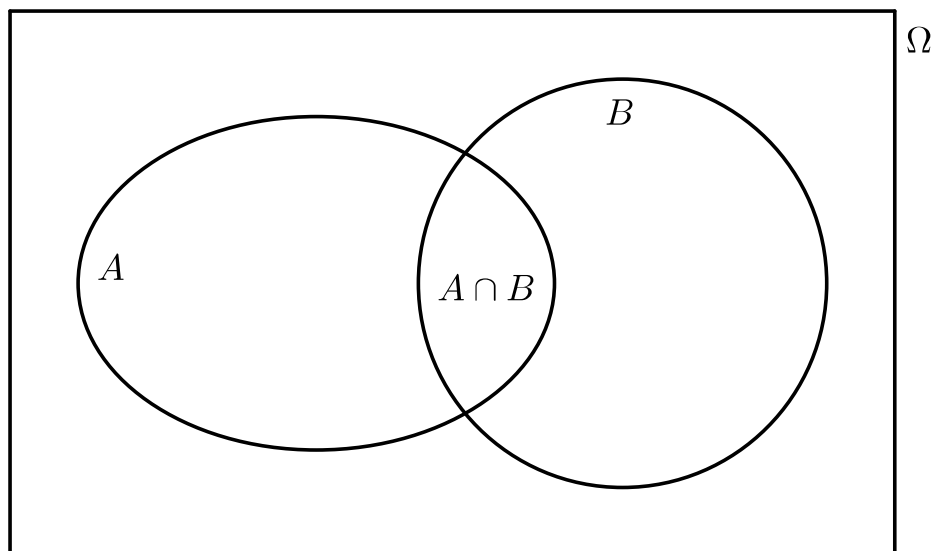
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (3.1)$$

Následkem čehož platí i rovnost pro pravděpodobnost průniku  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ .

Korektnost definice lze snadno nahlédnout pomocí obrázku 3.1. Jev  $A$  hledáme v oblasti vytyčené jevem  $B$ , tedy na ploše vymezené kružnicí a může tak nastat



pouze na překryvu kružnice a elipsy. Výslednou pravděpodobnost proto získáme jako poměr plochy překryvu ku ploše vymezené kružnicí<sup>1</sup>.



Obrázek 3.1: Podmíněná pravděpodobnost

Množina po dvou neslučitelných náhodných jevů  $\{A_1, A_2, \dots\} \in \mathcal{A}$ , jejichž sjednocením je celé  $\Omega$ , tvoří tzv. **úplný systém** na  $\Omega$ . Nastává-li každý z těchto jevů s nenulovou pravděpodobností, pak pro daný jev  $B \in \mathcal{A}$ , rovněž nastávající s nenulovou pravděpodobností, platí tzv. **Bayesova formule** (důkaz k nahlédnutí na straně 27 ve zdroji [1]):

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)}. \quad (3.2)$$

Vzhledem k dříve uvedené definici podmíněné pravděpodobnosti bude jen přirozené předpokládat, že jsou-li jevy  $A, B \in \mathcal{A}$  nezávislé, pak  $P(A) = P(A|B)$  a  $P(B) = P(B|A)$ . Rovnost  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$  tak nabude pro **nezávislé jevy** podoby

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Obecně, pro  $n$  navzájem nezávislých jevů  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  můžeme předpokládat platnost<sup>2</sup>

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i). \quad (3.3)$$

(O pravděpodobnosti nezávislých jevů lze dohledat podrobnější pojednání ve zdroji [22] v podkapitole 2.2, případně ve zdroji [1] v podkapitole 1.4.)

<sup>1</sup> Poznamenejme, že tato úvaha je platná pouze v případě, kdy je pravděpodobnost jevu přímo úměrná velikosti plochy, jež tento jev v obrázku vymezuje. Což jest základní idea geometrické pravděpodobnosti, o níž se můžeme dočíst například ve zdroji [22] na straně 56 nebo ve zdroji [1] na straně 19

<sup>2</sup> Uvedená rovnost však pro  $n > 2$  k nezávislosti  $n$  jevů nestačí! Obecná definice vyžaduje platnost této rovnosti pro libovolnou  $k$ -tici jevů při libovolném  $k \leq n$ . [22]

Názornou demonstrací korektnosti definice podmíněné pravděpodobnosti budiž fakt, že pravděpodobnost vítězství lichého čísla, za předpokladu, že vyhrála červená barva, odpovídá

$$P(\text{liché číslo} | \text{červená}) = \frac{9/37}{18/37} = \frac{1}{2},$$

což kráčí ruku v ruce s intuitivní představou, že pokud je z možných polí právě polovina kýžených, je naše šance na úspěch jedna ku jedné.

Výsledek každého spinu rulety je zcela nezávislý na spinech předchozích, tj. otázka, jaká je šance, že ve třech po sobě jdoucích spinech zvítězí číslo nula, spadá do domény násobné pravděpodobnosti pro nezávislé jevy (rovnice 3.3), a odpovědi na naši otázku tak je

$$p_{000} = \frac{1}{37} \frac{1}{37} \frac{1}{37} = \frac{1}{37^3}.$$

Bayesova formule bývá s oblibou demonstrována na problematice věrohodnosti testu choroby v případě pozitivního či negativního výsledku. My se však v naší ilustraci vyhneme nemocniční sterilitě a přidržíme se hazardního prostředí.

Paní Červenková v každém spinu umístí svou sázku na jednu z barev. V deseti případech vsadí 6 krát na červenou, 3 krát na černou a pouze jednou na zelené pole banku. Jaká je pravděpodobnost, že pokud zvítězí paní Červenková, byla výherní barvou červená?

Označme jevy:  $B_1$  vítězství červené,  $B_2$  vítězství černé,  $B_3$  vítězství zelené,  $A_1$  vsazeno na červenou,  $A_2$  vsazeno na černou a  $A_3$  vsazeno na nulu. Pro dílčí pravděpodobnosti pak bude platit:  $P(A_1) = P(A_2) = 18/37$ ,  $P(A_3) = 1/37$ ,  $P(B_1) = 6/10$ ,  $P(B_2) = 3/10$  a  $P(B_3) = 1/10$  a  $P(B) = 18/37$ . Překlad naší otázky do řeči podmíněné pravděpodobnosti zní  $P(A_1|V) = ?$ , kde  $V = (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_3)$ . Než dosadíme do Bayesovy formule, budeme si muset předpřipravit dílčí podmíněné pravděpodobnosti. Konkrétně  $P(V|A_i) = P(B_i)$  pro všechna  $i$ , neboť odpovědi na otázku, jaká je pravděpodobnost, že paní Červenková zvítězila-li příslušná barva, je právě pravděpodobnost s jakou paní Červenková na danou barvu sází. Po dosazení do rovnice 3.2 tak celkově získáme

$$\begin{aligned} P(A_1|V) &= \frac{P(V|A_1)P(A_1)}{P(V|A_1)P(A_1) + P(V|A_2)P(A_2) + P(V|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{P(B_1)P(A_1)}{P(B_1)P(A_1) + P(B_2)P(A_2) + P(B_3)P(A_3)} \\ &= \frac{6/10 \cdot 18/37}{6/10 \cdot 18/37 + 3/10 \cdot 18/37 + 1/10 \cdot 1/37} \\ &= \frac{108}{163} \end{aligned}$$

což znamená, že s pravděpodobností přibližně 0,66 byla výherní barvou červená v případě, že paní Červenková zvítězila!

### 3.4 Náhodná veličina, její rozdělení a střední hodnota

Náhodnou veličinou  $X$  rozumíme zobrazení, jež každému elementárnímu jevu  $\omega \in \Omega$  přiřadí nějaké reálné číslo (tj. „ohodnotí“ všechny elementární jevy)

a to tak, že ke každé podmnožině  $B$  oboru hodnot  $H_X$  existuje smysluplný vzor tvořený sjednocením elementárních jevů  $\omega \in \Omega$ , a tedy náhodný jev  $A$  z příslušné  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{A}$ , jemuž umíme přiřadit pravděpodobnost. (Přesnější definici náhodné veličiny, jakožto měřitelné funkce, můžeme dohledat na straně 61–62 zdroje [22].)

Pro účely tohoto textu si vystačíme s tzv. **diskrétní náhodnou veličinou**, jejímž oborem hodnot je toliko konečná, případně spočetná, podmnožina reálných čísel.

Jak napovídá výše uvedená definice, mezi  $\sigma$ -algebrou náhodných jevů  $\mathcal{A}$  a oborem hodnot náhodné veličiny  $H_X$  existuje úzká spojitost, díky níž můžeme jednotlivým podmnožinám  $B$  oboru hodnot  $H_X$ , a tedy i dílčím hodnotám, přiřazovat pravděpodobnost, s níž náhodná veličina  $X$  nabude hodnoty z dané množiny  $B$ . Nastíněné množinové zobrazení

$$P_X(B) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = P(X^{-1}(B)) \quad (3.4)$$

zveme **rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny  $X$** . Speciálně, je-li  $X$  diskrétní náhodná veličina, platí

$$P_X(B) = \sum_{\omega \in X^{-1}(B)} p_\omega. \quad (3.5)$$

Někdy však bývá výhodné sledovat, s jakou pravděpodobností náhodná veličina  $X$  nabude hodnoty menší než námi zvolené  $x \in \mathbb{R}$ . Pro tyto účely zavádíme pomocí  $P_X$  reálnou funkci

$$F_X(x) = P([X \leq x]) = P[X \leq x], \quad [x \leq X] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}, \quad (3.6)$$

jíž zveme **distribuční funkce** náhodné veličiny  $X$ . (Distribuční funkci náhodné veličiny můžeme též definovat pomocí ostré nerovnosti, jako je tomu učiněno na straně 62 ve zdroji [22].)

Z pohledu této práce nejvýznamnější charakteristikou náhodné veličiny  $X$  je jediné číslo  $EX$ , případně  $E(X)$ , zvané **střední hodnota** nebo též **očekávaná hodnota  $X$** .

V případě diskrétní náhodné veličinu  $X$  nabývající hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n$  s pravděpodobnostmi  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , střední hodnotu vyjádříme vztahem

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n. \quad (3.7)$$

Neméně významnou charakteristikou náhodné veličiny  $X$  je její rozptyl, o němž se dočteme například ve zdroji [4] na straně 24.

*Představme si hráče sázejícího  $2J$  na černou barvu v evropské ruletě za účasti pravidla o půlení sázek. Uvažme dále prostor elementárních jevů  $\Omega$ , tvořený elementárními jevy  $A, B, C$ ; po řadě slovně: vítězství černé barvy, vítězství červené barvy, vítězství zeleného pole nula. Jiné jevy nejsou z hlediska našeho hráče zajímavé. Nyní můžeme následujícím způsobem na  $\Omega$  zavést náhodnou veličinu  $Z$  popisující hráčův zisk v jednom spinu*

$$Z(\omega) = \begin{cases} +2J & \omega = A; \text{ tj., pokud zvítězila černá barva,} \\ -2J & \omega = B; \text{ tj., pokud zvítězila červená barva,} \\ -1J & \omega = C; \text{ tj., pokud zvítězila zelená barva.} \end{cases}$$

Obor hodnot  $Z$  zjevně odpovídá konečné množině reálných čísel  $H_Z = \{+2J, -2J, -1J\}$  a my tak můžeme hovořit o  $Z$  jako o diskrétní náhodné veličině. Lze se snadno přesvědčit, že vzorem libovolné podmnožiny  $H_Z$  je jasně vymezená podmnožina  $\Omega$ , a tedy sjednocení některých z jevů  $A, B, C$ . Například podmnožině ztrátových hodnot  $B = \{-2J, -1J\}$  odpovídá realizace buď jevu  $B$  nebo jevu  $C$ , a tedy vítězství jiné barvy, než hráčem sázené černé. Našeho hráče zcela určitě zajímá, jakou hodnotu zisku může v jednom spinu očekávat. Jelikož je matematicky zblhlým absolventem průměrného českého gymnázia, stanovuje očekávaný zisk jako aritmetický průměr možných výsledků

$$E(Z) = \frac{+2J \cdot 18 - 2J \cdot 18 - 1J \cdot 1}{18 + 18 + 1} = +2J \cdot \frac{18}{37} - 2J \cdot \frac{18}{37} - 1J \cdot \frac{1}{37} = -\frac{1}{37}J.$$

Neboť černé, stejně jako červené barvě, přísluší 18 ze 37 polí rulety. Na pole nuly pak zbývá jediná z 37 možností. Cvičenému oku neunikne, že poměry 18/37, 18/37, 1/37 odpovídají ve skutečnosti pravděpodobnostem vítězství dílčích barev, a přísluší tak k zisku příslušných částek (hodnot náhodné veličiny  $Z$ ). Užítý středoškolský výpočet tak přímo koresponduje s nasazením námi definované střední hodnoty  $E(Z)$  náhodné veličiny  $Z$ . Pro úplnost ilustrace ještě uvedme příslušné rozdělení

$$P_Z(M) = \begin{cases} \frac{18}{37}; & M_{\{+2J\}} = A, \text{ zvítězila černá barva,} \\ \frac{18}{37}; & M_{\{-2J\}} = B, \text{ zvítězila červená barva,} \\ \frac{1}{37}; & M_{\{-1J\}} = C, \text{ zvítězila zelená barva,} \\ \frac{18+18}{37}; & M_{\{+2J, -2J\}} = A \cup B, \text{ zvítězila černá nebo červená barva,} \\ \frac{18+1}{37}; & M_{\{+2J, -1J\}} = A \cup C, \text{ zvítězila černá nebo zelená barva,} \\ \frac{18+1}{37}; & M_{\{-2J, -1J\}} = B \cup C, \text{ zvítězila červená nebo zelená barva,} \\ \frac{2 \cdot 18 + 1}{37}; & M_{\{+2J, -2J, -1J\}} = A \cup B \cup C, \text{ zvítězila libovolná z barev.} \end{cases}$$

## 3.5 Užitečná diskrétní rozdělení

Předpřipravme si nyní několik užitečných diskrétních rozdělení, jejichž znalost nám zjednoduší práci při budoucím modelování. Jak již víme, náhodná diskrétní veličina  $X$  nabývá konečně, případně spočetně, mnoha hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n$  s pravděpodobnostmi  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Pro součet pravděpodobností „přes všechny možné hodnoty“ zřejmě platí podmínka<sup>3</sup>

$$\sum_{i=1}^n P[X = x_i] = \sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (3.8)$$

### 3.5.1 Rovnoměrné rozdělení

Uvažme pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Řekneme, že náhodná veličina  $X$  má rovnoměrné rozdělení, symbolicky  $X \sim R(n)$ , nabývá-li  $n$  různých stejně

<sup>3</sup> V případě spočetného počtu hodnot je vhodnější uvažovat množinu všech hodnot  $S = \{x_i; i \in I\}$  náhodné veličiny  $X$  a k ní příslušnou indexovou množinu  $I$ . Uvedená podmínka pak nabude podoby

$$\sum_{i \in I} P[X = x_i] = \sum_{i \in I} p_i = 1.$$

pravděpodobných hodnot. Pro libovolné  $i = 1, 2, \dots, n$  tak vzhledem k rovnici 3.8 platí

$$P[X = x_i] = \frac{1}{n}.$$

Skrze vztah 3.7 můžeme nyní snadno určit střední hodnotu  $X$  jako

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

*Pomocí rovnoměrného rozdělení modelujeme například náhodnou veličinu popisující výherní číslo v jediném spinu rulety. Neboť v úvahu připadá 37 možných výsledků s pravděpodobností  $1/37$ .*

### 3.5.2 Alternativní rozdělení

Uvažme pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Řekneme, že náhodná veličina  $X$  má alternativní rozdělení s parametrem  $p \in (0, 1)$ , symbolicky  $X \sim \text{Alt}(p)$ , jestliže popisuje výsledek náhodného pokusu v duchu úspěch  $x_1 = 1$  s pravděpodobností  $p$  kontra neúspěch  $x_0 = 0$  s doplňkovou pravděpodobností  $q = 1 - p$ .

Přímým dosazením do rovnice 3.7 získáme střední hodnotu

$$E(X) = \sum_{i=0}^1 x_i p_i = 1 \cdot p - 0 \cdot (1 - p) = p.$$

*Pomocí alternativního rozdělení můžeme například modelovat náhodnou veličinu popisující zisk v jednom spinu při rovné sázce na americké ruletě, tj. bez dodatečných pravidel pro vítězství nuly.*

### 3.5.3 Binomické rozdělení

Uvažme pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Řekneme, že náhodná veličina  $X$  má binomické rozdělení s parametry  $p \in (0, 1)$  a  $n \in \mathbb{N}$ , symbolicky  $X \sim \text{Bi}(p, n)$ , jestliže popisuje počet úspěchů v sérii  $n$  opakování téhož nezávislého náhodného pokusu s alternativním rozdělením  $\text{Alt}(p)$ . Právě  $k$  úspěchů přitom dosáhneme dle rovnice 3.3 s pravděpodobností

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},$$

kde kombinační číslo  $\binom{n}{k}$  zachycuje svobodu rozmístění  $k$  úspěchů v sekvenci  $n$  sledovaných událostí.

Střední hodnotu  $X$  odvodíme na základě  $n$  opakování téhož náhodného pokusu s modelem alternativního rozdělení, viz sekce 3.5.2, tj.

$$E(X) = np.$$

Korektnost této úvahy je zcela konzistentní s vlastnostmi střední hodnoty, dohledatelnými v kapitole 6 zdroje [22]. Alternativní odvození střední hodnoty veličiny s binomickým rozdělením, v duchu přímého dosazení do definičního vztahu pro

střední hodnotu, je k nahlédnutí na straně 28 ve zdroji [4].

*Pomocí binomického rozdělení můžeme například modelovat náhodnou veličinu popisující počet potřebných výherních spinů v sérii dané délky za účelem umoření předešlé proherní sekvence.*

### 3.5.4 Geometrické rozdělení

Uvažme pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Řekneme, že náhodná veličina  $X$  má geometrické rozdělení s parametrem  $p \in (0, 1)$ , symbolicky  $X \sim \text{Geo}(p)$ , jestliže popisuje počet neúspěchů předcházejících prvnímu úspěchu v sérii na sobě nezávislých opakování téhož náhodného pokusu s rozdělením  $\text{Alt}(p)$ .

Právě  $k$  neúspěchů završených úspěchem přitom dosáhneme dle rovnice 3.3 s pravděpodobností

$$P[X = k] = (1 - p)^k p.$$

Střední hodnotu  $X$  poté popisuje formule

$$E(X) = \frac{1 - p}{p},$$

jejíž kompletní odvození stojící na vztahu mezi geometrickou řadou a jejími derivacemi je k nahlédnutí ve zdroji [4] na straně 31.

*Pomocí geometrického rozdělení můžeme například modelovat náhodnou veličinu popisující náš zisk při čekání na výhru v kontextu sázení dle systému Martingale.*

## 3.6 Podmíněná střední hodnota

V podkapitole 3.3 jsme si ukázali, jak určit pravděpodobnost výskytu jevu  $A$  podmíněnou jevem  $B$ . V podkapitole 3.4 jsme diskutovali o náhodné veličině a její střední hodnotě. Nyní se sama nabízí otázka, není-li rovněž možno podmiňovat náhodnou veličinu výskytem daného jevu, případně není-li možno určit střední hodnotu podmíněné náhodné veličiny. V této sekci se pokusíme dobrat uspokojivých odpovědí na obě tyto otázky!

### 3.6.1 Podmíněné rozdělení náhodné veličiny

Uvažme náhodnou veličinu  $X$  definovanou v duchu podkapitoly 3.4 na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a jev  $B \in \mathcal{A}$  nastávající s kladnou pravděpodobností  $P(B) > 0$ . Podmíněným rozdělením  $X$  při podmínce  $B$  poté rozumíme pravděpodobnost

$$P_{X|B}(S) = P(X \in S|B), \quad S \subset H_X.$$

Definice, jinými slovy, říká právě to, co od podmíněného náhodného rozdělení očekáváme. Ptáme-li se totiž, jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina  $X$  nabude hodnoty z  $S$  za předpokladu, že již nastal jev  $B$ , pak se zjevně námi zkoumaný pravděpodobnostní prostor „redukuje“ a v úvahu tak připadají pouze

ty jevy, které jsou obsaženy v  $B$  a zároveň jim  $X$  přiřazuje hodnotu z  $S$  [2].

Mějme vsazenu  $1J$  na červenou barvu a  $1J$  na sudé číslo. Položme si nyní dvě otázky.  $S$  jakou pravděpodobností pro nás další spin bude znamenat zisk právě  $+2J$  za předpokladu, že zvítězí červená barva?  $S$  jakou pravděpodobností pak pro nás nebude spin ztrátový za předpokladu, že zvítězí číslo z prvního sloupce? V případě první otázky odpovídá  $S = \{+2\}$  a  $B$  zastupuje vítězství červené barvy (18 možností). Je třeba si uvědomit, že zisku  $+2J$  dosáhneme za podmínky  $B$  pouze v případě, kdy výherní číslo bylo zároveň sudé, čemuž odpovídá 9 z 18 přípustných možností. Po dosažení do vztahu pro podmíněné rozdělení tak získáme

$$P_{Z|B}(S) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

Dobrat se odpovědi na druhou otázku bude nepatrně složitější, neboť za předpokladu  $B$ , že zvítězilo číslo v prvním sloupci (12 možností) odpovídá  $S = \{+0, +2\}$  ( $+0J$  zvítězí-li pouze sudé číslo;  $+2J$  zvítězí-li červené sudé číslo). Při zohlednění rozložení čísel na herním plánu, viz obrázek 2.2, tak hledaná podmíněná pravděpodobnost celkově odpovídá

$$P_{Z|B}(S) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6},$$

neboť pouze vítězství černých čísel 13 a 31 by pro nás znamenalo čistou ztrátu. (Při určování počtu přijatelných možností je nutné se vyvarovat opakovanému započtení téhož jevu!)

V tuto chvíli se nám pravděpodobně vybavuje úzká souvislost mezi oborem hodnot náhodné veličiny a příslušnou  $\sigma$ -algebrou jevů, již jsme diskutovali při zavedení náhodného rozdělení v podkapitole 3.4.

### 3.6.2 Střední hodnota podmíněná jevem

Od podmíněného rozdělení náhodné veličiny je jen krůček k podmíněné střední hodnotě. Její zavedení pro diskrétní náhodnou veličinu  $X$ , definovanou na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  v duchu podkapitoly 3.4, provedeme analogicky se vztahem 3.7. Uvážíme-li tedy jev  $A \in \mathcal{A}$ , pak můžeme definovat střední hodnotu náhodné veličiny  $X$  za podmínky, že nastal jev  $A$  vztahem<sup>4</sup>

$$E(X|A) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P_{X|A}(X(\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega|A).$$

Zavedení je přitom opět konzistentní s intuitivní představou, že provedeme jakousi „redukci“ na prostor vymezený jevem  $A$ . Zmiňovanou redukci bychom však mohli provést poněkud přímočaareji za pomoci takzvaného indikátoru  $I_A$  jevu  $A$ , který pro elementární jevy obsažené v  $A$  nabývá hodnoty 1 a pro elementární jevy mimo  $A$  pak hodnoty 0. Vztah pro podmíněnou střední hodnotu jevem  $A$  tak můžeme za předpokladu  $E(X) < \infty$  upravit na<sup>5</sup>

$$E(X|A) = \frac{E(X \cdot I_A)}{P(A)}.$$

<sup>4</sup> Obdobným způsobem je možno zavést i střední hodnotu spojitě náhodné veličiny podmíněnou jevem, jak je tomu učiněno ve zdroji [2] na straně 7.

<sup>5</sup> Kompletní důkaz tohoto tvrzení je k nalezení na straně 7 ve zdroji [2].

### 3.6.3 Střední hodnota podmíněná diskrétní náhodnou veličinou

Podobně jako jsme dříve zavedli střední hodnotu podmíněnou jevem, můžeme zavést i střední hodnotu podmíněnou diskrétní náhodnou veličinou. Uvážíme-li tak diskrétní náhodnou veličinu  $X$  definovanou na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a náhodnou veličinu  $Y$  rovněž definovanou na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , jejíž  $E(Y) < \infty$ . Pak jsou-li  $x_1, x_2, \dots$  všechny hodnoty, jichž nabývá  $X$ , definujeme střední hodnotu  $Y$  za podmínky, že pro  $k \in \mathbb{N}$  nabyla  $X$  konkrétní hodnoty  $x_k$  vztahem

$$E_X Y(\omega) = E(Y|X(\omega) = x_k).$$

Můžeme přitom opět využít indikátoru a dojít tak ke vztahu

$$E_X Y = \sum_{k=1}^{\infty} E(Y|X = x_k) I_{[X=x_k]}.$$

Závěrem zdůrazněme důležitý poznatek. Střední hodnota podmíněná diskrétní náhodnou veličinou je sama o sobě již ze své podstaty náhodnou veličinou. [2]

*Střední hodnotu podmíněnou diskrétní náhodnou veličinou využijeme o několik odstavců dále, až budeme provádět obecnou úvahu pro střední hodnotu zisku systémů založených na rovné sázce v sekci 4.1.2.*

Výčet významných vlastností podmíněné střední hodnoty můžeme dohledat ve zdroji [2] na straně 13–14. Její obecnou definici vyhovující rovněž spojité náhodné veličině lze dohledat opět ve zdroji [2] v kapitole 4.

## 3.7 Náhodné procesy

Pomocí předpřipravených diskrétních rozdělení, viz podkapitola 3.5, umíme zodpovědět celou řadu otázek, které by nás měly při hraní rulety zajímat. Doposud jsme se však omezovali na jediný spin, případně na velmi jasně vymezenou sérii spinů. Jak ale modelovat problematiku zisku a sázení v případě stále se opakujícího téhož náhodného pokusu, a sice jednoho spinu rulety?

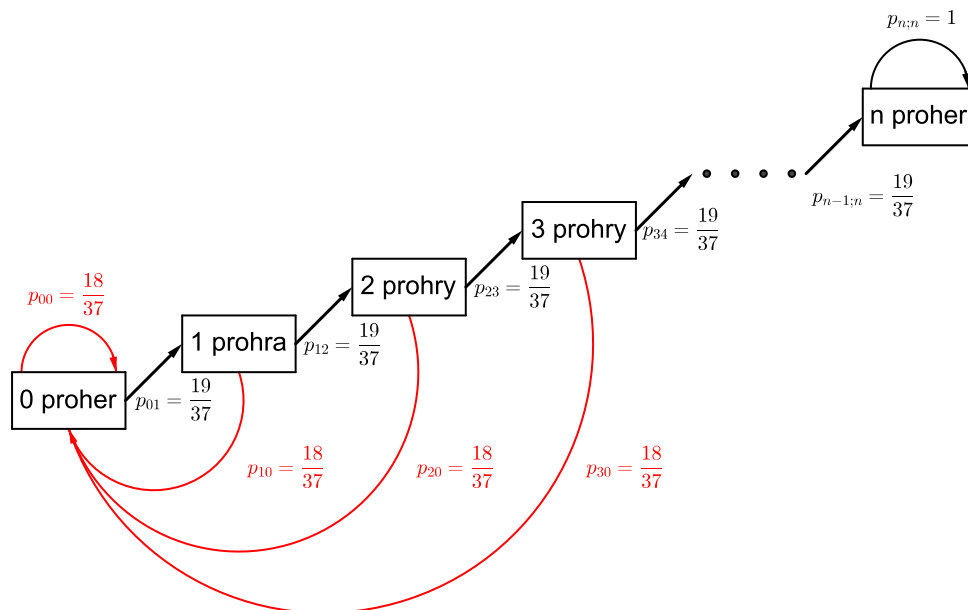
Po přečtení sekce 2.5.1 je zřejmé, že slabinou hry, dle systému Martingale, je možnost výskytu nepřerušené série proher dostatečné délky pro znemožnění dalšího zdvojnásobení naší sázky, ať již výší maxima pro rovné sázky nebo aktuálním stavem našeho konta.

Jak ale zodpovědět palčivou otázku, s jakou pravděpodobností se s rostoucím počtem spinů vyskytne zmiňovaná proherní série?

Pokusme se, pro evropskou verzi hry bez dodatečných pravidel pro vítězství nuly, problém nejprve názorně ilustrovat pomocí obrázku 3.2.

Představme si, že sázíme na červenou. Označme  $n$  maximální možnou délku nepřerušené proherní série, dále jen proherní série. Na počátku hry je její aktuální délka nula. V prvním spinu buď zvítězí červená s pravděpodobností  $18/37$  a sledovaná délka tak setrvá nulová, nebo s pravděpodobností  $19/37$  červená nezvítězí a sledovaná délka se navýší na jedna. Stejně tak v případě spinu o výchozí délce proherní série  $k < n$  buď s pravděpodobností  $18/37$  dojde k vítězství červené,





Obrázek 3.2: Aktuální délka proherní série

a tedy snížení aktuální délky na nula, nebo naopak s pravděpodobností  $19/37$  k navýšení na  $k + 1$ . Konečně v okamžiku, kdy dosáhneme stanovené délky  $n$ , naše pozorování končí a z tohoto stavu se proto již nelze dostat (lidsky interpretováno jako okamžik, kdy strategie selhala).

Situaci si rovněž můžeme představit jako navlékání barevných korálků podle obrázku 3.3; červeného pro vítězný, černého pak pro proherní spin. Každý korálek dále označíme číslem představujícím aktuální délku proherní série a navlékání ukončíme v okamžiku, kdy je navlečen korálek s číslem  $n$ . Stejně, tak jako v případě předchozí grafické interpretace, i nyní každému navlečení korálku, předchází rozhodnutí, jakou barvu navlečí. S pravděpodobností  $18/37$  nebo  $19/37$  volíme červenou nebo černou barvu.



Obrázek 3.3: Aktuální délka proherní série – alternativní „korálkový“ přístup

Z obou ilustrací lze vyvodit několik užitečných zjištění:

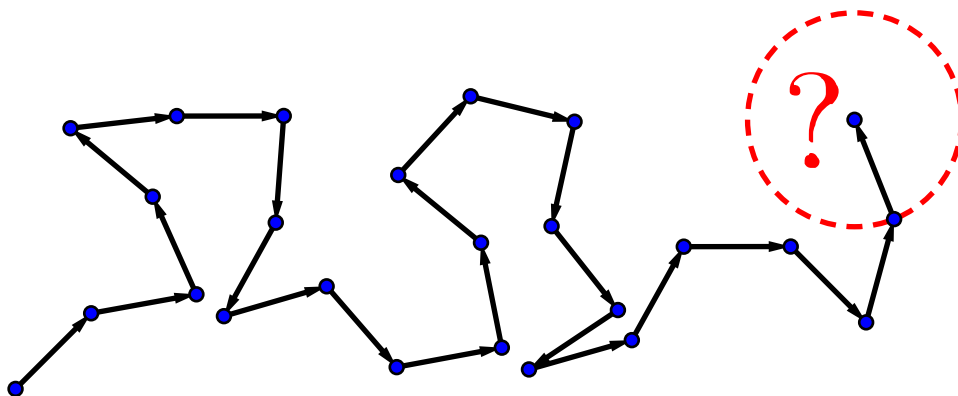
- (0) Spin rulety je náhodný pokus, jehož výsledkem je jev představující výhru či prohru sázené barvy, pro který umíme určit pravděpodobnost, s níž nastane.
- (00) Na základě výsledku spinu, tj. náhodného jevu, nabude aktuální délka proherní série určité nezáporné celočíselné hodnoty. Jedná se tedy o diskrétní náhodnou veličinu  $X$ .
- (000) Řetězec očíslovaných korálků, tj. náhodných veličin, je možno chápat jako posloupnost náhodných veličin.

- (1) Při rozhodování, jakým číslem bude ohodnocen právě navlékaný korálek, bereme ohled pouze na výsledek aktuálního spinu a číselnou hodnotu předcházejícího korálku.
- (2) V každém okamžiku je možno navléci pouze korálek s číselnou hodnotou o jedna vyšší než předchozí, nebo hodnotou nula.
- (3) Pravděpodobnost, s jakou navlékáme korálek o hodnotě  $m$ , nezávisí na přesném pořadí spinu, v němž takto činíme. Proherní spin nás vždy uvádí do výchozího stavu.
- (4) Navlečením korálku s hodnotou  $n$  proces navlékání končí.

Zjištění (0) – (4) nyní společně přeložme do řeči matematiky náhody.

### 3.7.1 Náhodný proces s diskretním časem

Nechť  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor,  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  a  $S = \{i_0, i_1, i_2, \dots\}$  množina celých čísel. Posloupnost náhodných veličin  $\{X_k, k \in \mathbb{N}_0\}$  definovaných na  $\Omega$  a nabývajících právě hodnot z  $S$  nazveme náhodným procesem s diskretním časem a stavovým prostorem  $S$ .



Obrázek 3.4: Pohyb opilého námořníka

*Jedním z populárních motivačních příkladů náhodného procesu s diskretním časem je tzv. pohyb opilého námořníka zachycený na obrázku 3.4. Představíme-li si totiž opravdu velmi opilého námořníka, pak každý jeho vrávoravý krok je toliko dílem náhody, nikoli vlastní rozvahy. Posloupnost náhodných veličin popisujících směr pohybu (směrový úhel příslušného vektoru sevřený s osou  $x$ ) v daném okamžiku poté tvoří náhodný proces. Tento příklad je populární zejména pro svou analogii s Brownovým pohybem známým z fyziky. My v něm však můžeme pozorovat ještě jednu zajímavou podobnost, neboť v každém okamžiku může být výsledný směr námořníkovy pohybu stejně dobře určen pomocí výherního čísla spinu rulety.*

K potřebě pracovat s obecnou posloupností náhodných veličin přímo vedou již zjištění (0) – (000). Každé další zjištění (1) – (4) odkazuje na pouhý speciální případ náhodného procesu s diskretním časem. Krom náhodných procesů

s diskrétním časem můžeme ještě narazit na procesy s časem spojitým. Pro účely této práce jich však nebude zapotřebí. Případné zájemce o tuto problematiku tak odkažme na kapitoly 4 a 5 ve zdroji [11].

### Homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem

Nechť  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor a  $\{X_k, k \in \mathbb{N}_0\}$  náhodný proces s diskrétním časem a stavovým prostorem  $S$  definovaný na  $\Omega$ . Jsou-li dále splněny následující dva body

- (i) Výsledek pokusu závisí pouze na výsledku bezprostředně předcházejícího pokusu. Tj. je splněna takzvaná **markovská vlastnost**

$$P(X_k = j | X_{k-1} = i, X_{k-2} = i_{k-2}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_k = j | X_{k-1} = i),$$

pro  $i, j, i_{k-2}, \dots, i_0 \in S,$  (3.9)

kde pravděpodobnost výskytu  $X_k = j$  podmiňujeme průnikem jevů  $X_{k-1} = i, X_{k-2} = i_{k-2}, \dots, X_0 = i_0$  nastávajícím s nenulovou pravděpodobností (uvažujeme pouze smysluplnou posloupnost hodnot).

- (ii) Pravděpodobnost výsledku pokusu nezávisí na okamžiku, v němž je prováděn. Tj. náhodný proces je **homogenní** ve smyslu

$$P(X_{k+m} = j | X_k = i) = P(X_{n+m} = j | X_n = i), \quad n, m, k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.10)$$

pak řekneme, že  $\{X_k, k \in \mathbb{N}_0\}$  je **homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem**. [18][11]

### Užité značení

Dále v textu budeme pracovat pouze s homogenními Markovovými procesy s diskrétním časem. Z tohoto důvodu užívejme od této chvíle zkrácené označení Markovův proces, případně markovský řetězec. Množina  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  bývá zvana **množinou okamžiků** a o jejích prvcích je poté hovořeno jako o **okamžicích**<sup>6</sup>. V kontextu rulety budeme však často ztotožňovat okamžik se spinem (pořadím spinu.) Jev  $\{X_k = j\}$  tak celkově interpretujeme: „V okamžiku  $k$  (v  $k$ -tém spinu) se řetězec nachází ve stavu  $j$ .“

Pro pravděpodobnost přechodu (1. řádu) řetězce ze stavu  $i$  do stavu  $j$  budeme užívat označení

$$p_{ij} = P(X_k = j | X_{k-1} = i).$$

Pro obecnější variantu pravděpodobnosti přechodu  $m$ -tého řádu, tj. přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  v  $m$  krocích, pak označení

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_k = j | X_{k-m} = i).$$

Již víme, že zjištění (0) – (000) poukazují na nosné pilíře zaváděného matematického modelu. Nyní se ještě jednou ve světle diskutované problematiky

<sup>6</sup> Užívaná terminologie má svůj historický prapůvod ve fyzice, kdy pomocí náhodných procesů modelujeme reálný fyzikální systém jednoznačně popsany svým stavem v daném časovém okamžiku. [11]

markovských řetězců podívejme na ostatní zjištění (1) – (4). Zjištění (1) vyplývá z markovské vlastnosti řetězce (i). Zjištění (3) poté zachycuje homogenitu procesu (ii). Konečně zjištění (2) poukazuje na skutečnost, že nemusí být umožněny svobodné přechody mezi všemi stavy a závěrečný bod (4) pak odkazuje na možnou existenci stavu, z něhož již není návratu (tzv. absorpčního stavu řetězce). [18][11]

## Matice přechodu

Máme-li k dispozici  $l$  možných stavů řetězce, existuje obecně  $l \cdot l = l^2$  pravděpodobností přechodu  $p_{ij}$  prvního řádu. Nic nám tak nebrání uvažovat čtvercovou **matici přechodu**<sup>7</sup>  $P = \{p_{ij}; i, j \in S\}$  řádu  $l$

$$P = \begin{matrix} & i_0 & i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{l-2} & i_{l-1} \\ \begin{matrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_{l-2} \\ i_{l-1} \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \dots & p_{0,l-2} & p_{0,l-1} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1,l-2} & p_{1,l-1} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2,l-2} & p_{2,l-1} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3,l-2} & p_{3,l-1} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ p_{l-2,0} & p_{l-2,1} & p_{l-2,2} & p_{l-2,3} & \dots & p_{l-2,l-2} & p_{l-2,l-1} \\ p_{l-1,0} & p_{l-1,1} & p_{l-1,2} & p_{l-1,3} & \dots & p_{l-1,l-2} & p_{l-1,l-1} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

V našem ilustračním příkladu, kdy sledujeme výskyt nepřerušené prohenní série délky  $n$ , odpovídá  $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , a my tak pracujeme s  $n + 1$  stavy. Označíme-li pravděpodobnost výhry červené barvy  $p$  a její prohry  $q$ , získáme následující matici přechodu

$$P = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & q & \dots & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Řádkový index reprezentuje stav, z něhož přecházíme, sloupcový poté stav, do něhož přecházíme. Snadno se můžeme sami přesvědčit, že matice  $P$  ztělesňuje / zachovává všechny závěry našeho úvodního pozorování. Dále je zřejmé, že pokud řádek matice reprezentuje veškeré možné pravděpodobnosti přechodu ze zvoleného do všech možných stavů řetězce, pak jeho součet musí být nutně jedna (pravděpodobnost nabytí některé ze všech možností), nebo-li

$$\sum_{j=0}^n p_{ij} = 1, \quad i = 0, \dots, n. \quad (3.11)$$

<sup>7</sup> Pro naše účely postačující základy maticového počtu jsou obsaženy například v úvodní části zdroje [18].

## Maticе přechodu vyššího řádu

Vzhledem ke skutečnosti, že  $p_{ij}$  reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  v jediném kroku (spinu), není obvykle obtížné matici  $P$  sestavit. Rovněž je zřejmé, že pouhá znalost  $P$  na zodpovězení naší úvodní otázky nestačí, je-li  $n > 1$ . Chceme-li určit, jak se mění pravděpodobnost výskytu nepříznivé sekvence délky  $n$  s rostoucím počtem spinů, bude zapotřebí dobrat se ke vztahu pro pravděpodobnost přechodu  $p_{0n}^N$ , kde  $N$  reprezentuje řád přechodu, tj. uvažovaný počet kroků (spinů). Poměrně rádi bychom přitom využili matici  $P$ , kterou již máme k dispozici.

Naše další úvahy skromně započněme v minimalistickém přiblížení. Při přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  ve dvou krocích musíme uvážit všechny možné mezistavy  $s$ , přes něž může řetězec z výchozího stavu  $i$  přestoupit do cílového stavu  $j$ . Musíme proto provést sumaci pravděpodobností přes všechny možnosti

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{s \in S} P((X_k = s | X_{k-1} = i), (X_{k+1} = j | X_k = s)) = \sum_{s \in S} p_{is} p_{sj}. \quad (3.12)$$

Prohlédneme-li si pozorněji poslední uvedenou sumu, zjistíme, že v řeči násobení matic jde o součin  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce matice přechodu  $P$ , a tedy o prvek na pozici  $ij$  vzniklé součinem  $PP = P^2$ . Matici přechodu druhého řádu  $P^{(2)} = \{p_{ij}^{(2)}; i, j \in S\}$  tak snadno získáme jako mocninu  $P^2$ . (Nemožné přechody jsou v  $P$  vyloučeny 0 na příslušné pozici.)

Analogickou úvahou bychom došli k obdobnému závěru pro matici přechodu třetího řádu  $P^{(3)} = \{p_{ij}^{(3)}; i, j \in S\}$  získanou jako mocninu  $P^3$ . Obecně tak lze matici přechodu  $m$ -tého řádu  $P^{(m)} = \{p_{ij}^{(m)}; i, j \in S\}$  vyjádřit jako mocninu  $P^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Ve své podstatě se společně s rovnicí 3.12 jedná o speciální případ tzv. Chapmanovy–Kolmogorovy rovnosti dohledatelné v [11] na straně 20.

Pro  $N$  uvažovaných spinů, maximální délku proherní série  $n$  a výchozí stav řetězce 0 tak nalezneme hledanou pravděpodobnost přechodu jako prvek na pozici  $0, n + 1$  matice  $P^{(N)} = P^N$ .

Konkrétně pro  $n = 6$ ,  $p = 18/37$  a  $q = 19/37$  sestavujeme matici přechodu prvního řádu

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{18}{37} & \frac{19}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{18}{37} & 0 & \frac{19}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{18}{37} & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & 0 \\ \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 \\ \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Při volbě  $N = 10$  tak se zaokrouhlením na 4 desetinná místa skrze mocninu  $P^{10}$  získáme matici přechodu 10-tého řádu

$$P^{(10)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left( \begin{array}{ccccccc} 0,4645 & 0,2408 & 0,1248 & 0,0647 & 0,0338 & 0,0174 & \mathbf{0,0540} \\ 0,4561 & 0,2364 & 0,1226 & 0,0635 & 0,0326 & 0,0174 & 0,0714 \\ 0,4396 & 0,2280 & 0,1182 & 0,0613 & 0,0315 & 0,0162 & 0,1052 \\ 0,4076 & 0,2115 & 0,1098 & 0,0570 & 0,0293 & 0,0150 & 0,1699 \\ 0,3463 & 0,1795 & 0,0933 & 0,0485 & 0,0249 & 0,0128 & 0,2947 \\ 0,2281 & 0,1182 & 0,0613 & 0,0321 & 0,0165 & 0,0084 & 0,5355 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{array} \right) \end{matrix}$$

a s tím spojenou hledanou pravděpodobnost přechodu  $p_{06}^{(10)} = 0,0540$ .

Za účelem vykreslení hledané závislosti nyní provedme pro zvolené kombinace  $n$ ,  $N$  sérii analogických výpočtů<sup>8</sup>.

Následující tabulka 3.1 uvádí přehled výsledků pro několik takovýchto dvojic.

$N$	$n$					
	5	6	7	8	9	10
10	0,1226	0,0540	0,0232	0,0095	0,0037	0,0013
20	0,2767	0,1397	0,0684	0,0330	0,0158	0,0075
30	0,4037	0,2176	0,1116	0,0559	0,0277	0,0137
40	0,5085	0,2884	0,1528	0,0783	0,0395	0,0198
50	0,5948	0,3528	0,1920	0,1002	0,0512	0,0259
100	0,8458	0,5973	0,3627	0,2020	0,1074	0,0558
200	0,9777	0,8441	0,6036	0,3723	0,2101	0,1130
300	0,9968	0,9396	0,7534	0,5063	0,3010	0,1667
400	0,9995	0,9766	0,8466	0,6116	0,3814	0,2171
500	0,9999	0,9909	0,9046	0,6945	0,4525	0,2645
1000	1,0000	0,9999	0,9911	0,9080	0,7028	0,4617

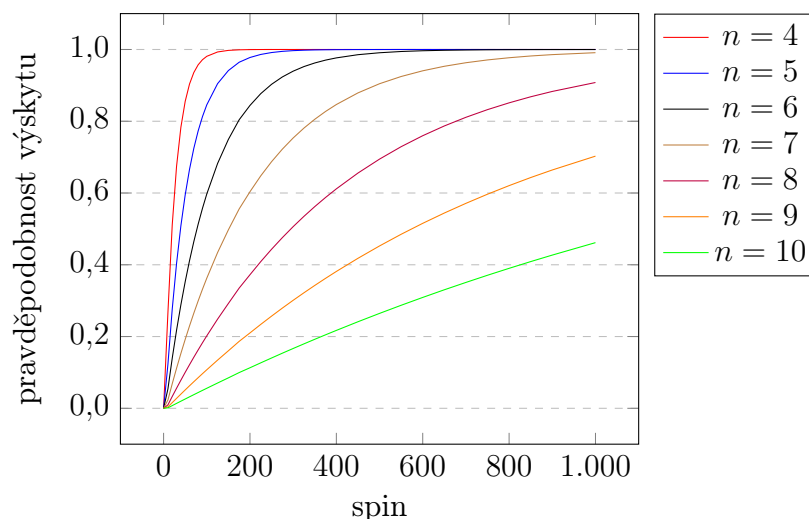
Tabulka 3.1: Pravděpodobnost výskytu série délky  $n$  v  $N$  spinech (zaokrouhleno na 4 desetinná místa)

Tabulka 3.1 je podkladem pro graf na obrázku 3.5, který je zpřesněn 25 dodatečnými hodnotami pro každé  $n$ . Na první pohled můžeme konstatovat skutečnost, že s rostoucím počtem spinů roste i pravděpodobnost výskytu proherní série libovolné délky.

### Absorpční stavy řetězce

Konečně máme odpověď na svou otázku. Pro potřeby našich dalších výpočtů, a sice určení konkrétní střední hodnoty sledované náhodné veličiny při daném počátečním a koncovém stavu, se ukazuje užitečným určit střední počet průchodů možnými mezistavy. Nejčastěji pak při cestě z výchozího stavu řetězce do takzvaného **absorpčního stavu řetězce**, tj. stavu, z něhož již řetězec nemůže nikdy vystoupit. Pravděpodobnost přechodu z absorpčního stavu  $s$  sama do sebe je tak

<sup>8</sup> V zájmu poměrně zásadní časové úspory použijme pro následující výpočty software typu Mathematica.



Obrázek 3.5: Pravděpodobnost výskytu série proher délky  $n$  v  $N$  spinech

$p_{ss} = 1$ . V duchu absorpčních stavů pak o všech stavech řetězce, které nejsou absorpčními, hovoříme jako o **stavech přechodných**.

V kontextu našeho ilustračního příkladu, kdy sledujeme výskyt nepřerušené série proher délky  $n$ , existují pro konkrétní  $n = 6$  přechodné stavy 0, 1, 2, 3, 4, 5, neboť z nich lze vystoupit s nenulovou pravděpodobností a pouze jeden stav 6 je absorpčním. [11]

### Rozklad množiny stavů

Existuje-li pro daný řetězec  $a$  absorpčních stavů a  $b$  stavů neabsorpčních, lze zjevně matici přechodu  $P$  přeuspořádat do podoby

$$P = \left( \begin{array}{c|c} I & \underline{0} \\ \hline Q & R \end{array} \right),$$

kde jednotková submatice  $I$  řádu  $a$  přísluší množině absorpčních stavů, submatice  $R$  řádu  $b$  množině stavů přechodných a submatice  $Q$  typu  $b \times 1$  přechodům z množiny přechodných stavů do množiny absorpčních stavů. Konečně nulová submatice  $\underline{0}$  řádu  $a \times b$  zachycuje skutečnost nemožnosti úniku z množiny absorpčních stavů. [11]

Aplikací permutace (7, 2, 3, 4, 5, 6, 1), tj. prohozením stavu 0 a 6, tak získáme potřebně přeuspořádanou matici

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ \begin{array}{l} 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{array} & \left( \begin{array}{cccccccc} \color{green}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ \color{red}{0} & 0 & \frac{19}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{37} \\ \color{red}{0} & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{37} \\ \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & 0 & \frac{18}{37} \\ \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} \\ \color{red}{\frac{19}{37}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{37} \\ \color{red}{0} & \frac{19}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{37} \end{array} \right) \end{array} \end{array}.$$

## Fundamentální matice

Nabízí se otázka, k čemu nám pomůže přeuspořádaná matice přechodu? Představíme-li si matici  $F = \{f_{ij} \in \mathbb{R}\}$ , jejíž prvek  $f_{ij}$  představuje střední počet návratů do stavu  $j$  před absorpcí řetězce při počátečním stavu  $i$ . Úvahou poté zjišťujeme

$$f_{ij} = \delta_{ij} + (p_{i,a+1}f_{a+1,j} + p_{i,a+2}f_{a+2,j} + \dots + p_{i,a+b}f_{a+b,j}),$$

kde  $\delta_{ij} = 1$  je-li  $i = j$ , jinak  $\delta_{ij} = 0$  (Kroneckerova delta). Rozebereme-li podrobněji jednotlivé sčítance, pak výraz v závorce představuje střední hodnotu v duchu rovnice 3.7, tj. pravděpodobnost přechodu z výchozího stavu  $i$  do přechodného stavu  $k$  krát počet návratů ze stavu  $k$  do cílového stavu  $j$  před absorpcí řetězce, zatímco  $\delta_{ij}$  zachycuje nutnost započítat v případě shodnosti počátečního a koncového stavu samotný výchozí stav řetězce.

Zaměříme-li se opět na maticovou analogii sumy

$$f_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=a+1}^{a+b} p_{ik}f_{kj},$$

s prvkem matice na pozici  $ij$  dojdeme k rovnosti

$$F = E + RF \Rightarrow F = (E - R)^{-1}.$$

Zde přitom vycházíme ze skutečnosti, že matice  $(E - R)$  je nutně regulární, neboť  $R$  nedisponuje žádnou 1 na hlavní diagonále (neobsahuje žádné absorpční stavy) a existuje tak k ní inverzní matice  $(E - R)^{-1}$ .

Pro markovský řetězec obsahující absorpční stavy s maticí přechodu

$$P = \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right),$$

konečně tak můžeme definovat **fundamentální matici**

$$F = (E - R)^{-1}, \tag{3.13}$$

jejíž prvek na pozici  $ij$  určuje střední počet návratů do stavu  $j$  před dosažením absorpce při počátečním stavu  $i$ . [18]

V zájmu procvičování ještě závěrem určíme  $F$  pro náš ilustrační případ při  $n = 6$ . (Vhodně přeuspořádanou maticí přechodu  $P$  můžeme přitom stále nahlédnout v sekci 3.7.1.)

Následným nasazením vzorce 3.13

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{19}{37} & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{37} \\ 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & 0 & \frac{18}{37} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & \frac{18}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{37} \\ \frac{19}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$



$$\left( \begin{pmatrix} 1-0 & \frac{19}{37} & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{37} \\ 0 & 1-0 & \frac{19}{37} & 0 & 0 & \frac{18}{37} \\ 0 & 0 & 1-0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 1-0 & \frac{19}{37} & \frac{18}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-0 & \frac{18}{37} \\ \frac{19}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{18}{37} \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

tak při zaokrouhlení na dvě desetinná místa získáme

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 28,01 & 14,38 & 7,39 & 3,79 & 1,95 & 52,59 \\ 26,06 & 14,38 & 7,39 & 3,79 & 1,95 & 50,74 \\ 24,21 & 12,43 & 7,39 & 3,79 & 1,95 & 47,15 \\ 20,62 & 10,59 & 5,44 & 3,79 & 1,95 & 40,16 \\ 13,62 & 7,00 & 3,59 & 1,85 & 1,95 & 26,53 \\ \mathbf{28,01} & \mathbf{14,38} & \mathbf{7,39} & \mathbf{3,79} & \mathbf{1,95} & \mathbf{54,54} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Reálnou situaci, kdy začínáme hrát s nulovou délkou prohenní série, zachycuje fialově vybarvený řádek. Před dosažením absorpce, tj. prohenní série délky 6, se tak řetězec v průměru po řadě vrátí do 28,01 krát, 14,38 krát, 7,39 krát 3,79 krát, 1,95 krát, 54,54 krát do stavu 1, 2, 3, 4, 5, 0.

# 4. Ruletové systémy z hlediska matematiky náhody

## 4.1 Martingale



Obrázek 4.1: Shrabávání proherních sázek croupiérem [14]

### 4.1.1 „Jak zaručeně vyhrát v ruletě“ aneb jak inzerovat Martingale

Již v úvodu práce jsme společně diskutovali okázalou lákavost zaručeně funkčních ruletových systémů. Nyní se společně, alespoň rámcově, pokusíme v duchu [7] a [15] vytvořit typickou online reklamu sázecímu systému. Pro naši ilustraci je vhodné zvolit právě Martingale (viz sekce 2.5.1).

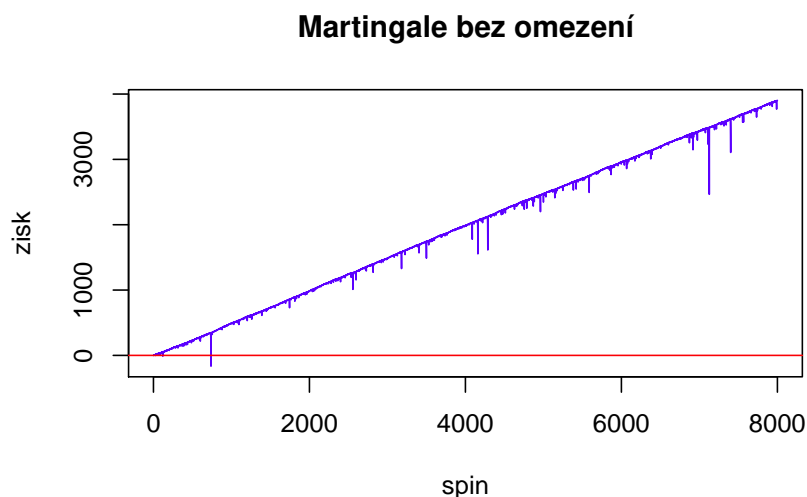
Nejprve budeme potřebovat dostatečně lákavé úvodní heslo. Dozajista bohatě postačí již zvolený nadpis: „Jak zaručeně vyhrát v ruletě.“ Dále bude zapotřebí obrázků vyzařujících radost, peníze a radost z peněz. Vyhledávač Google, pod heslem: „peníze radost“, nabízí celou řadu fotografií usměvavých pánů v obleku, jež budou pro naše účely více než postačující.

Obsahem prvního odstavce bývá tradičně příběh. Ponechme nyní na fantazii každého z nás vymyslet řádky o strastiplném hledání snadného způsobu, jak se obohatit přes internet z pohodlí domova. Ovšem, problémy často mívají i svá řešení. Tím naším je Martingale! Stoprocentně funkční ruletový systém, vedoucí zcela legálním způsobem během relativně krátké doby k poměrně velkým ziskům, a to vše se zanedbatelným rizikem.

Zbývá jen zhotovit zevrubný popis zvoleného systému, přidat rady na základě vlastních zkušeností a připojit odkazy na již osvědčená online kasina.

Samozřejmě se najdou i tací, které svým příběhem tak snadno nepřesvědčíme. Budeme proto muset nasadit o něco tvrdší kalibr – neomylnou matematiku!

Například [7] doporučuje sázenou jednotku 1 euro a ukončení série vždy po šesté prohře. V takovém případě totiž riskujeme v nejhorším částku pouhých  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$  euro a všichni přeci intuitivně chápeme, že šance vrhnout v šesti hodech za sebou právě šestkrát líc je velmi malá. Konkrétně, dle [7] vyhrajeme 99,516 % her a prohrajeme tedy pouze 0,486 % her. Pro ty, kteří dosud stále ještě váhají, nabízí [7] graf obdobný tomu na obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: Příslib vzestupného trendu zisku

Na závěr neopomeňme důležité upozornění! [7] varuje před případnou hrabivostí, která by zcela jistě neunikla pozornosti provozovatele online kasin. Buďme proto skromní a nikdy se nesnažme připravit danou hernu o více než 200 euro denně.

Za veškeré své matematické myšlenky a nezištné rady požaduje [7] jedině: zaslání lahve dobrého vína a naší spokojené fotografie neznámému adresátovi na neuvedenou poštovní adresu.

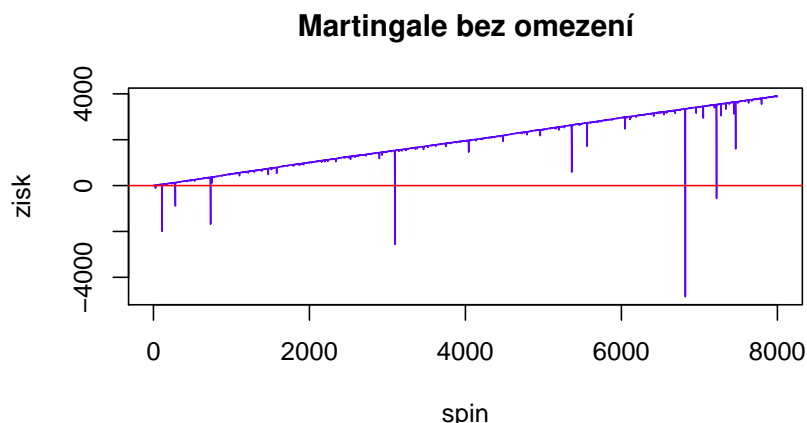
### 4.1.2 Neomezený Martingale

V sekci 4.1.1 jsme si předvedli, jak vypadá typická reklama na ruletový herní systém. Nyní se pokusíme Martingale sami zanalyzovat. Začneme ideální situací, kdy disponujeme neomezeným kapitálem, maximální výše rovných sázek není stanovena a můžeme hrát po libovolně dlouhý čas. Pro jednoduchost o tomto případě nadále hovoříme jako o neomezeném Martingalu.

Tuto situaci reprezentuje graf na obrázku 4.3.

Povšimněme si zřetelné podobnosti obrázků 4.2 a 4.3. Oba grafy jsou totiž záznamem realizací simulace průběhu neomezeného Martingalu. Autor [7] tedy záměrně uvedl graf reprezentující diametrálně odlišnou situaci (pro okamžité srovnání, graf omezeného Martingalu je k nahlédnutí na obrázku 4.5 nebo v příloze 5.2). Graf na obrázku 4.2 navíc patří spíše mezi ty raritně generované<sup>1</sup>. Na

<sup>1</sup> Vyskytne se přibližně jednou za 60 simulací.



Obrázek 4.3: Standardní průběh neomezeného Martingalu

obou grafech je přítom patrný rostoucí trend zisku s rostoucím spinem a zejména u grafu na obrázku 4.3 pak i strmé propady a následné strmé vzestupy trajektorie. Pokusme se nyní jednoduchým způsobem vysvětlit tvar trajektorie a zhodnotit celkovou rentabilitu systému. V prvním přiblížení přitom nebudeme uvažovat pravidlo o zmrazení sázek.

V každém spinu mohou nastat pouze dvě situace, a to naše výhra s pravděpodobností  $p = 18/37$ , po níž opět vsadíme zvolenou počáteční jednotku  $1J$ , nebo prohra s doplňkovou pravděpodobností  $q = 1-p = 19/37$ , kterou následuje zdvojnásobení předchozí sázky. Hru tak můžeme rozdělit do kol, kde kolem rozumíme sérii po sobě jdoucích spinů, která končí prvním výherním spinem. Vzhledem ke skutečnosti, že ruleta nemá paměť, můžeme dle sekce 3.5.4 uvažovat pro každé uvažované kolo geometrické rozdělení.

### Celkový zisk v daném kole a střední hodnota potřebného kapitálu

Zaměřme se nejprve na celkový zisk  $C$  v daném kole. Dostavila-li se výhra v  $k$ -tém spinu tohoto kola, pak

$$C = -1J - 2J - 4J - \dots - 2^{k-2}J + 2^{k-1}J = J \left( -\sum_{i=0}^{k-2} 2^i + 2^{k-1} \right),$$

neboť v každém spinu můžeme získat nebo ztratit právě  $2^n$  jednotek  $J$ , kde  $n = 0, 1, 2, \dots$  značí délku předcházející nepřerušené série proher.

Získanou sumu sečteme pomocí vzorce pro součet prvních  $n$  členů geometrické posloupnosti a obdržíme výsledek

$$J \left( -(2^{n-1} - 1) + 2^{n-1} \right) = J.$$

Je zřejmé, že na konci každého kola získáme jednu jednotku  $J$  nezávisle na  $p$ . Veličina  $C$  tedy není náhodná a právě skrze ni lze vysvětlit vzestupný trend trajektorie. Abychom však  $C$  zaručili nezávislost na  $p$ , budeme v  $k$ -tém spinu potřebovat kapitál

$$K = 1J + 2J + 4J + \dots + 2^{k-1}J = J(2^k - 1).$$

Veličina  $K$  však již na  $p$  závisí. Částku  $J(2^k - 1)$  budeme navíc potřebovat s pravděpodobností  $(1-p)^{k-1}p$ . Pro střední hodnotu náhodné veličiny  $K$  tak platí vztah

$$\begin{aligned}
 E(K) &= \sum_{i=1}^n K_i p_i \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} J(2^i - 1)(1-p)^{i-1}p \\
 &= Jp \sum_{i=1}^{\infty} (2^i(1-p)^{i-1} - 1(1-p)^{i-1}) \\
 &= 2Jp \sum_{i=1}^{\infty} (2(1-p))^{i-1} - Jp \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} \\
 &= 2Jp \sum_{j=0}^{\infty} (2(1-p))^j - Jp \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j,
 \end{aligned}$$

kde  $j = i-1$ . Obě získané sumy přitom reprezentují součet nekonečné geometrické řady<sup>2</sup>. Je-li  $p = 1$ , jsou zjevně naše střední náklady nulové. Pro  $p \leq 1/2$  (zahrnuje i reálnou situaci, kdy  $p < 1/2$ ) pak první řada diverguje k  $\infty$ , druhá konverguje k  $1/p$  a střední náklady jsou tak nekonečné. Zbývá situace, kdy  $p > 1/2$ . V tomto případě konvergují obě řady a my tak získáme střední hodnotu

$$\begin{aligned}
 E(K) &= 2Jp \left( \frac{1}{1 - 2(1-p)} \right) - Jp \left( \frac{1}{1 - (1-p)} \right) \\
 &= 2Jp \left( \frac{1}{2p-1} \right) - Jp \left( \frac{1}{p} \right) \\
 &= \frac{2Jp}{2p-1} - \frac{J}{1} \\
 &= J \frac{2p - (2p-1)}{2p-1} \\
 &= \frac{J}{2p-1}.
 \end{aligned}$$

Jinými slovy, pouze v případě, že je naše šance na výhru v daném spinu větší než  $1/2$ , je střední hodnota potřebného kapitálu konečná!

### Střední hodnota zisku v $k$ -tém spinu

Úloha početně přesně určit střední hodnotu v  $k$ -tém spinu  $E(Z_k)$  spočívá ve vypsání a ocenění všech možných herních posloupností délky  $k$ . Jinými slovy, střední hodnotu zisku v prvním spinu určíme jako

$$E(Z_1) = (1)p + (-1)q.$$

---

<sup>2</sup> Pro  $z \in \mathbb{R}$  platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \frac{1}{1-z}, & |z| < 1, z \neq 0 \\ \infty, & z \geq 1 \end{cases}.$$

Střední hodnotu zisku ve druhém spinu pak jako

$$E(Z_2) = (1 + 1)pp + (1 - 1)pq + (-1 + 2)qp + (-1 - 2)qq.$$

Obdobně pro třetí kolo získáváme rovnost

$$E(Z_3) = (1 + 1 + 1)ppp + (1 + 1 - 1)ppq + (1 - 1 + 2)pqp + (1 - 1 - 2)pqq + (-1 + 1 + 1)qpp + (-1 + 1 - 1)qpq + (-1 - 2 + 4)qqp + (-1 - 2 - 4)qqq.$$

Tímto způsobem bychom pokračovali i pro ostatní  $k$ . Exponenciálně by však rostla časová náročnost zvoleného postupu.

Uveďme nyní pro srovnání tabulku 4.1 obsahující jak přesně vypočítané, tak i naprogramovanou simulací odhadnuté (aritmetický průměr 1 milionu měření) střední hodnoty zisku pro spiny 1 až 20. (Pro ověření vypočítaných hodnot  $E(Z_1)$  až  $E(Z_8)$ , stejně jako pro dopočítání následujících 12 hodnot, byl použit program doc. Antonína Slavíka v softwaru Mathematica.

spin	$E(Z_k)$ *)	$\bar{E}(Z_k)$ **)	spin	$E(Z_k)$ *)	$\bar{E}(Z_k)$ **)
1	-0,027	-0,027	11	-1,126	-1,053
2	-0,068	-0,068	12	-1,328	-1,285
3	-0,123	-0,122	13	-1,549	-1,516
4	-0,193	-0,192	14	-1,789	-1,898
5	-0,278	-0,271	15	-2,048	-2,235
6	-0,378	-0,372	16	-2,328	-2,419
7	-0,494	-0,473	17	-2,628	-2,546
8	-0,627	-0,643	18	-2,950	-3,219
9	-0,776	-0,791	19	-3,293	-3,693
10	-0,942	-0,945	20	-3,659	-3,881

Pozn.: \*) Výpočtem určená střední hodnota.

Pozn.: \*\*) Simulací odhadnutá střední hodnota.

Tabulka 4.1: Střední hodnota v  $k$ -tém spinu

Je zřejmé, že s každým dalším spinem klesá  $E(Z_k)$  stále hlouběji do záporných čísel a my tedy paradoxně více a více prohráváme. Pro názornost přiložme graf na obrázku 4.4 zachycující tento trend.

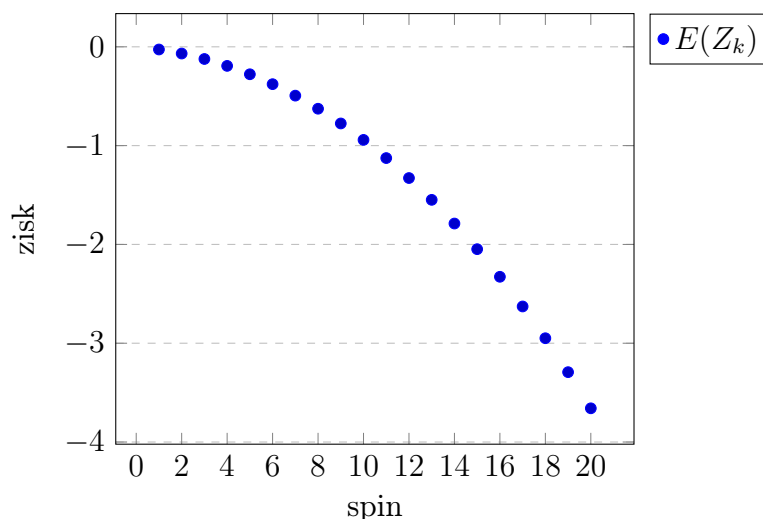
### Obecná úvaha pro systémy založené na rovné sázce

Na závěr provedme ještě jednu úvahu pro střední hodnotu zisku v  $k$ -tém spinu  $E(Z_k)$  pro systémy založené na rovné sázce (tj. sázce s vypláceným poměrem 1:1). Zřejmě závisí na  $E(Z_{k-1})$  a střední hodnotě přírůstku v  $k$ -tém spinu  $E(P_k)$  následujícím způsobem

$$E(Z_k) = E(Z_{k-1}) + E(P_k),$$

Na základě dřívějších zjištění lze usuzovat, že  $E(Z_k) < 0$  pro libovolné  $k$ . Toto tvrzení nyní dokážeme skrze matematickou indukci. Pro  $k = 1$  nerovnost zjevně platí, neboť

$$E(Z_1) = E(Z_0) + E(P_1) = E(P_1) = J(p - (1 - p)) = J(2p - 1),$$



Obrázek 4.4: Střední hodnota zisku v  $k$ -tém spinu

je-li  $p < 1/2$ . Uvažme dále platnost pro  $k$  a pokusme se ji prokázat i pro  $k + 1$ , konkrétně

$$E(Z_{k+1}) = E(Z_k) + E(P_{k+1}) < 0.$$

O prvním sčítanci předpokládáme, že je menší než nula. Abychom toto dokázali i o druhém sčítanci, musíme si uvědomit, že se v podstatě jedná o střední hodnotu podmíněné střední hodnoty, viz podkapitola 3.6.

$$E(P_{k+1}) = E(E(P_{k+1}|S_{k+1})),$$

kde  $S_{k+1}$  představuje obnos, jež vsadíme v  $k + 1$  spinu. Jelikož na každém spinu ztratíme v průměru  $(1 - (1 - p)) = 2p - 1 = -1/37$  vsazené částky, bude  $E(P_{k+1}|S_{k+1}) = -1/37 S_{k+1}$  a celý výraz tak lze zjednodušit na

$$E(P_{k+1}) = E\left(-\frac{1}{37}(S_{k+1})\right) = -\frac{1}{37}E(S_{k+1}).$$

Skutečnost, že neumíme snadno určit přesnou hodnotu  $E(S_{k+1})$  nás nemusí trápit. Pro naše účely plně postačí vědomí, že  $S_{k+1}$ , a tedy i  $E(S_{k+1})$ , nabývá pouze kladných hodnot. Z tohoto důvodu je výraz  $E(P_{k+1}) = -1/37 E(S_{k+1})$  vždy záporný. Pro dokazovanou nerovnost tak celkově obdržíme

$$E(Z_{k+1}) = \underbrace{E(Z_k)}_{<0} + \underbrace{E(P_{k+1})}_{<0} < 0,$$

čímž jsme dokázali tvrzení o střední hodnotě zisku v  $k$ -tém spinu. Z rovnosti  $E(Z_k) = E(Z_{k-1}) + E(P_k)$  a skutečnosti, že jak  $E(P_k)$ , tak i  $E(Z_k)$  jsou vždy záporné, navíc plyne, že posloupnost  $E(Z_k)$  je klesající. Jinými slovy, skutečně platí, že čím více hrajeme, tím hlouběji se  $E(Z_k)$  propadá do záporných čísel, a tedy tím více prohráváme. Uvědomme si dále, že jsme celou úvahu provedli nezávisle na zvolené strategii. Obdržený výsledek tak bude platný pro libovolný systém založený na rovných sázkách!

## Shrnutí a závěr pro neomezený Martingale

V této sekci jsme si vzali za cíl vysvětlit podobu typické trajektorie průběhu neomezeného Martingalu, viz obrázek 4.3. Uvědomili jsme si, že pomineme-li pravidlo o zmrazení sázek, mohou nastat jen dvě situace. Hru jsme tak mohli rozdělit v kola ve smyslu čekání na úspěch, a tedy nasadit geometrické rozdělení. Díky tomuto přiblížení jsme došli k následujícím výsledkům:

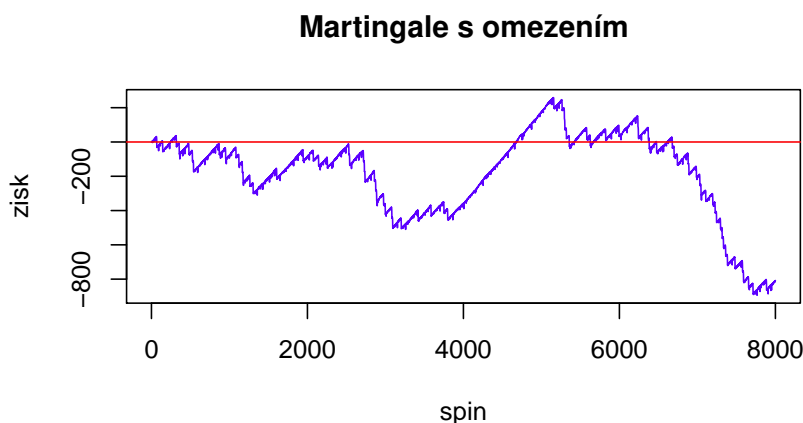
1. Celkový zisk  $C$  na konci jednoho kola není náhodnou veličinou, a vždy odpovídá sázené jednotce  $1J$ . Tato skutečnost vysvětluje vzestupný charakter trajektorie.
2. Abychom zaručili neměnnost  $C$  a pojistili libovolně dramatický propad, musíme mít v každém kole dostatečný kapitál  $K$ , pro jehož střední hodnotu platí

$$E(K) = \begin{cases} \frac{J}{2^{p-1}}, & p > \frac{1}{2} \\ \infty, & p \leq \frac{1}{2} \text{ (reálná situace pro } p < \frac{1}{2} \text{)}. \end{cases}$$

3. Vypočetli jsme, že při nejmenším pro prvních 20 spinů, je střední hodnota zisku v  $k$ -tém spinu  $E(Z_k) < 0$  (viz tabulka 4.1).
4. Na základě předchozích zjištění jsme zformulovali a skrze matematickou indukci i dokázali tvrzení  $E(Z_k) < 0$  pro libovolné  $k$ . Z důkazu navíc vyplynulo, že  $E(Z_k)$  tvoří klesající posloupnost, a my tak s každým dalším spinem více a více prohráváme. **Jak již bylo zmíněno dříve v textu, toto zjištění platí pro všechny systémy založené na rovné sázce – nikoli pouze pro Martingale!**

Celkově lze říci, že pokud nás netíží čas, disponujeme neomezeným kapitálem a výše pro rovné sázky není stanovena (což naneštěstí nejsou reálné předpoklady), ukazuje se hra dle systému Martingale vysoce rentabilní!

### 4.1.3 Omezený Martingale



Obrázek 4.5: Průběh omezeného Martingalu ( $n = 6$ )



Ideální představu neomezeného Martingalu máme již za sebou. Nadešel čas náš model přiblížit skutečnosti a v duchu limit pro rovné sázky stanovit maximální možnou délku proherní série  $n$  (kdy  $n$  přímo koresponduje s maximální možnou sázkou  $2^n J$ , která ještě nepřevyšuje strop pro rovné sázky). Po každé prohře přitom začínáme sázet opět od zvolené jednotky  $J$ . Tento systém operativně nazvěme omezený Martingale. (Neomezený Martingale zřejmě získáme z omezeného limitním přechodem  $n \rightarrow \infty$ .)

Graf na obrázku 4.5, znázorňující simulaci průběhu sázení dle omezeného Martingalu, se na první pohled zásadně liší od grafu na obrázku 4.3 zachycující neomezený Martingale. Trajektorie již nemá dřívější „vzestupný“ charakter, rovněž postrádá dramatické skokové propady, potažmo vzestupy, umožněné chybějícím stropem pro rovné sázky<sup>3</sup>.

### Střední hodnota zisku jediného kola

Svou pozornost nejprve zaměříme na střední hodnotu zisku  $E(Z)$  jediného herního kola. Kolem přitom budeme rozumět sérii proher, o délce 0 až  $n - 1$ , zakončenou výhrou (výherní kolo), nebo sérii proher délky  $n$  (proherní kolo). V  $n$ -tém spinu kola buď s pravděpodobností  $(1 - p)^n$  prohrajeme částku  $J + 2J + \dots + 2^{n-1}J = J(2^n - 1)$  nebo s doplňkovou pravděpodobností  $1 - (1 - p)^n$  vyhrajeme částku  $1J$ . Střední hodnotu jediného kola tak lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} E(Z) &= -J(2^n - 1)(1 - p)^n + J(1 - (1 - p)^n) \\ &= -J2^n(1 - p)^n + J(1 - p)^n + J - J(1 - p)^n \\ &= J(1 - 2^n(1 - p)^n) = J(1 - (2(1 - p))^n). \end{aligned}$$

Zeptejme se nyní, kdy je pro nás situace výnosná, a tedy  $E(Z)$  kladná, nebo-li kdy platí

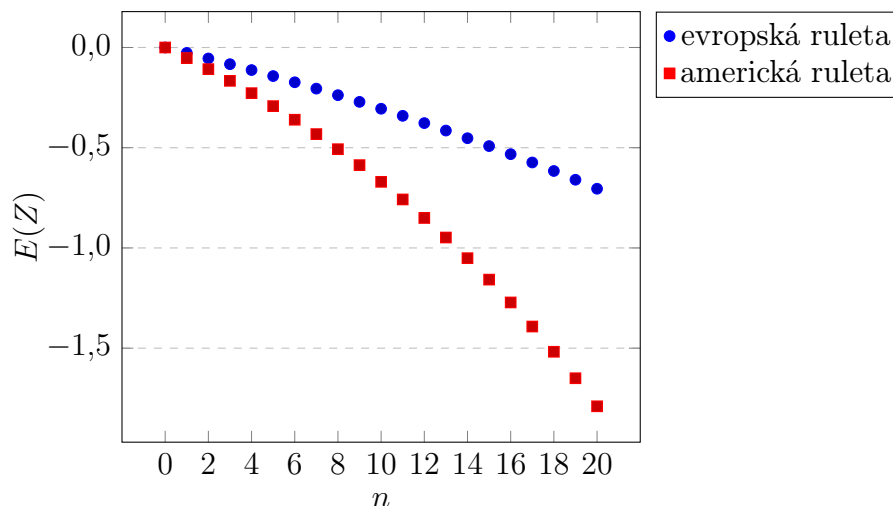
$$J(1 - (2(1 - p))^n) > 0.$$

Obě strany nerovnosti vydělme  $J$ , následně člen  $(2(1 - p))^n$  převedme na druhou stranu a uvědomme si, že  $1^n = 1$ . Získáme tak

$$1^n > (2(1 - p))^n.$$

Poslední nerovnost je splněna pouze pro  $p > 1/2$ . V případě, kdy  $p = 1/2$  je  $E(Z) = 0$ . Konečně, pro  $p < 1/2$ , tedy reálnou situaci, je  $E(Z)$  pro libovolné  $n$  vždy záporná! Závislost  $E(Z)$  na délce proherní série  $n$  zachycuje pro obě verze rulety graf na obrázku 4.6.

Jak správně poznamenává [7], šance, že šestkrát za sebou prohrajeme rovnou sázku na francouzské ruletě, je pouhých  $(1 - p)^6$ , tedy 0,486 %! To je sice pravda, tato skutečnost ovšem platí pouze v případě, skončíme-li hru po jediném herním kole. Žádný z hráčů Martingalu by se ale nespokojil s jediným herním kolem! Většina z nás si jistě intuitivně uvědomuje, že roztáčíme-li ruletu dostatečně dlouho, šance na výskyt proherní série délky  $n$  roste s každým dalším spinem. Přesné výsledky můžeme dohledat v podkapitole 3.1.



Obrázek 4.6: Střední hodnota zisku jediného kola

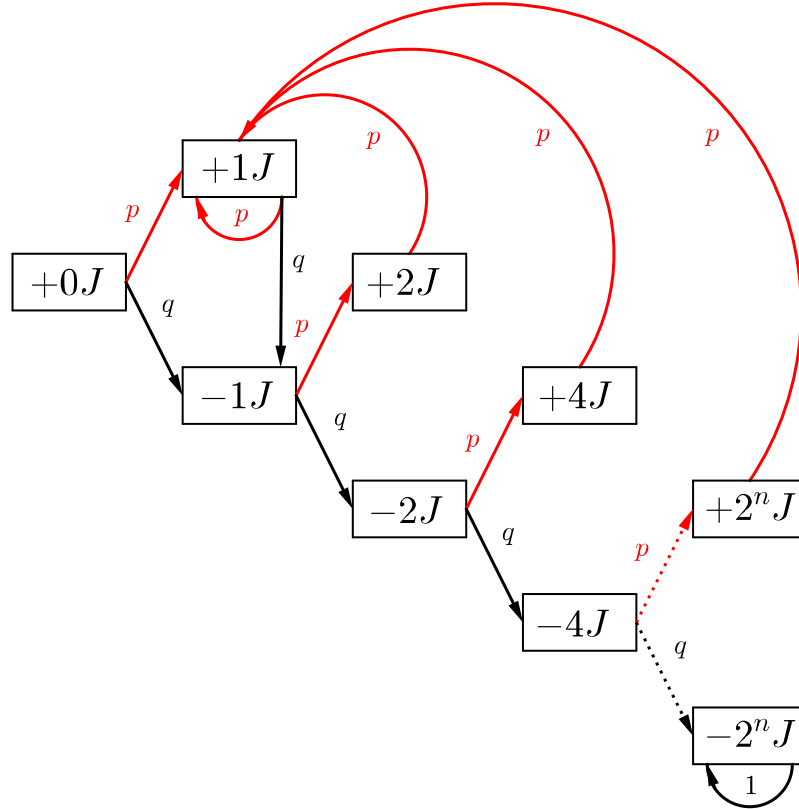
### Omezený Martingale jako diskrétní Markovův řetězec

Je třeba si uvědomit, že ač ruleta nemá svou interní paměť a výsledek aktuálního spinu nezávisí na žádném z předešlých spinů, sázení dle systému Martingale již svou „paměť“ má. V aktuálním spinu vždy sázíme v kontextu spinu předchozího. Situaci je tak možno modelovat pomocí Markovova řetězce, viz podkapitola 4.7. Zaměříme-li svou pozornost na aktuální zisk v jednom spinu, můžeme omezený Martingale modelovat následující přechodovou maticí

$$P = \begin{matrix} & +0J & +1J & -1J & +2J & -2J & +4J & -4J & \dots & +2^n J & -2^n J \\ \begin{matrix} +0J \\ +1J \\ -1J \\ +2J \\ -2J \\ +4J \\ -4J \\ \vdots \\ +2^n J \\ -2^n J \end{matrix} & \left( \begin{array}{ccccccccccc} 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right), \end{matrix}$$

kde stavy  $+1J, +2J, \dots, -2^n J$  zachycují možné přírůstky v jednotlivých spiních (výchozí stav řetězce  $+0J$  využijeme pro zjednodušení následujících výpočtů a můžeme jej chápat jako okamžik našeho vstupu do hry). Pravděpodobnost  $p$  klasicky představuje pravděpodobnost výhry a  $q = 1 - p$  pravděpodobnost prohry. Zaznamenejme-li v některém z přechodných stavů  $\{+0J, +1J, -1J, +2J, \dots, -2^{n-1}J, +2^n J\}$  výhru, začínáme dle strategie opět s minimální sázkou, a proto v následujícím spinu můžeme získat  $+1J$  nebo ztratit  $-1J$ . Poslední stav  $-2^n J$  je přímým důsledkem skutečnosti, že po  $n$ -té prohře již sázku nemůžeme zdvojnásobit a jedná se tak o absorpční stav řetězce. Dle sekce 3.7.1 můžeme následně

<sup>3</sup> Sérii dalších náhodně vybraných průběhů simulace neomezeného Martingalu a omezeného Martingalu je možno dohledat v příloze 5.1 a v příloze 5.2.



Obrázek 4.7: Hra dle systému Martingale

pomocí fundamentální matice  $F$  určit střední počty návratů do dílčích stavů, než dojde k absorpci řetězce. Střední hodnotu zisku po dosažení absorpce bychom tak při výchozím stavu  $+0J$  mohli určit jako

$$E(Z_n) = J(+1 \cdot N_{+1} - 1 \cdot N_{-1} + \dots + 2^n \cdot N_{+2^n} - 2^n \cdot 1), \quad (4.1)$$

kde  $N_{\pm 2^k}$  udává pro  $k = 0, \dots, n$  střední počet návratů do stavu  $\pm 2^k J$ , byl-li výchozí stav řetězce  $+0J$ . Poslední člen poté reprezentuje závěrečný vstup řetězce do absorpčního stavu.

Od střední hodnoty zisku po dosažení absorpce pak snadno přejdeme ke střední hodnotě zisku v jednom spinu při výchozím stavu  $+0J$ , vydělíme-li rovnicí 4.1 součtem středních počtů průchodů dílčích stavů před dosažením absorpce

$$E(Z_n) = \frac{J(+1 \cdot N_{+1} - 1 \cdot N_{-1} + \dots + 2^n \cdot N_{+2^n} - 2^n \cdot 1)}{N_{+1} + N_{-1} + \dots + N_{+2^n} + 1}. \quad (4.2)$$

V zájmu názornosti celý výpočet provedme konkrétně pro  $n = 6$  preferovanou [7]. Získáme tak matici přechodu

$$\begin{array}{c}
 +0J \quad +1J \quad -1J \quad +2J \quad -2J \quad +4J \quad -4J \quad +8J \quad -8J \quad +16J \quad -16J \quad +32J \quad -32J \\
 \left( \begin{array}{cccccccccccc}
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) .
 \end{array}$$

Dle sekce 3.7.1 uvedeme aplikaci permutace  $(13, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 1)$  přechodovou matici do tvaru<sup>4</sup>

$$P = \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c}
 -32J \quad +1J \quad -1J \quad +2J \quad -2J \quad +4J \quad -4J \quad +8J \quad -8J \quad +16J \quad -16J \quad +32J \quad +0J \\
 \left( \begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) .
 \end{array}$$

<sup>4</sup> Tj. provedeme prohození stavů  $+0J$  a  $-32J$

Pro konkrétní hodnoty  $p = 18/37$ ,  $q = 19/37$  určíme hledanou fundamentální matici  $F = (E - Q)^{-1}$ . Při zaokrouhlení na desetiny tak obdržíme

$$\begin{array}{c}
 +1J \quad -1J \quad +2J \quad -2J \quad +4J \quad -4J \quad +8J \quad -8J \quad +16J \quad -16J \quad +32J \quad +0J \\
 \begin{array}{l}
 +1J \\
 -1J \\
 +2J \\
 -2J \\
 +4J \\
 -4J \\
 +8J \\
 -8J \\
 +16J \\
 -16J \\
 +32J \\
 +0J
 \end{array}
 \left( \begin{array}{cccccccccccc}
 27,5 & 28,0 & 13,6 & 14,4 & 7,0 & 7,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0 \\
 25,6 & 28,0 & 13,6 & 14,4 & 7,0 & 7,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0 \\
 26,5 & 28,0 & 14,6 & 14,4 & 7,0 & 7,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0 \\
 24,7 & 26,1 & 12,7 & 14,4 & 7,0 & 7,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0 \\
 26,5 & 28,0 & 13,6 & 14,4 & 8,0 & 7,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0 \\
 22,9 & 24,2 & 11,8 & 12,4 & 6,0 & 7,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0 \\
 26,5 & 28,0 & 13,6 & 14,4 & 7,0 & 7,4 & 4,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0 \\
 19,5 & 20,6 & 10,0 & 10,6 & 5,2 & 5,4 & 2,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0 \\
 26,5 & 28,0 & 13,6 & 14,4 & 7,0 & 7,4 & 3,6 & 3,8 & 2,8 & 1,9 & 0,9 & 0 \\
 12,9 & 12,6 & 6,6 & 7,0 & 3,4 & 3,6 & 1,7 & 1,8 & 0,9 & 1,9 & 0,9 & 0 \\
 26,5 & 28,0 & 13,6 & 14,4 & 7,0 & 7,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 1,9 & 0 \\
 26,5 & 28,0 & 13,6 & 14,4 & 7,0 & 7,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 1,0
 \end{array} \right) .
 \end{array}$$

Každý řádek matice  $F$  přitom odpovídá specifickému počátečnímu stavu řetězce (fialový řádek náleží sledovanému počátečnímu stavu  $+0J$ ). Sloupec poté udává střední počty návratů do příslušného „sloupcového“ stavu před dosažením absorpce. Před vstupem do absorpčního stavu  $-32J$  tak řetězec projde 26,5 krát stavem  $+1J$ ; 28,0 krát stavem  $-1J$ ; 13,6 krát stavem  $+2J$ ; 14,4 krát stavem  $-2J$ ; 7,0 krát stavem  $+4J$ ; 7,4 krát stavem  $-4J$ ; 3,6 krát stavem  $+8J$ ; 3,8 krát stavem  $-8J$ ; 1,8 krát stavem  $+16J$ ; 1,9 krát stavem  $16J$  a 0,9 krát stavem  $+32J$  (pomocný výchozí stav není započítán a je nahrazen stavem absorpčním). Dosazením do rovnice 4.2 získáme<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
 E(Z_6) &= \frac{J(+1 \cdot 26,5 - 1 \cdot 28,0 + 2 \cdot 13,6 - 2 \cdot 14,4 + 4 \cdot 7,0 - 4 \cdot 7,4 + \dots}{26,5 + 28,0 + 13,6 + 14,4 + 7,0 + 7,4 + \dots} \\
 &= \frac{\dots + 8 \cdot 3,6 - 8 \cdot 3,8 + 16 \cdot 1,8 - 16 \cdot 1,9 + 32 \cdot 0,9 - 32 \cdot 1}{\dots + 3,6 + 3,8 + 1,8 + 1,9 + 0,9 + 1} = -0,1J .
 \end{aligned}$$

Jak se dalo tušit, je  $E(Z_6)$  záporná, a omezený Martingale se tak v rozporu s [7] ukazuje v poněkud nevýdělečném světle. Uveďme dále tabulku 4.2 a graf na obrázku 4.8 obsahující analogickým výpočtem získané hodnoty  $E(Z_n)$  a jim odpovídající simulací stanovené odhady  $\bar{E}(Z_n)$  pro  $n = 1, 2, 3, \dots, 11$ . (Dle [20] umožňují některá luxusnější kasina maximální proherní sérii až o délce 11.)

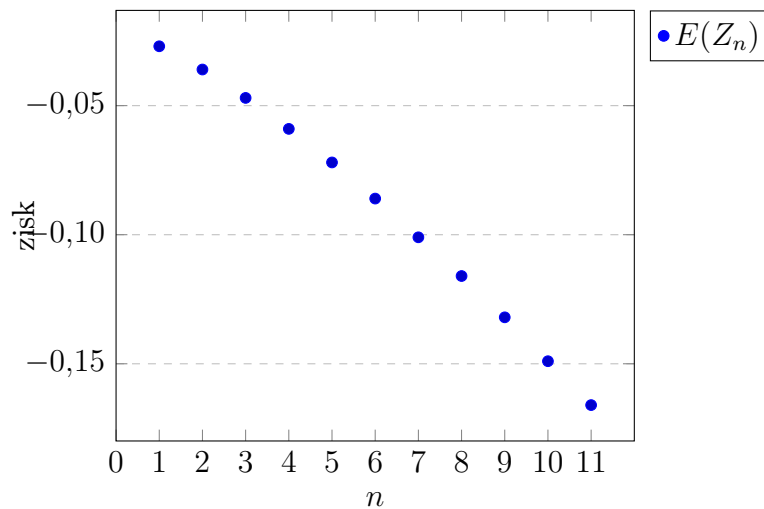
Je zřejmé, že s každým spinem je spjata tím větší střední ztráta, čím delší proherní série je nám kasinem umožněna. Námi určená fundamentální matice navíc poskytuje informaci, že každé absorpci (tj. naší prohře) pro  $n = 6$  předchází v průměru 109,9 jiných stavů (součet posledního fialového řádku reprezentujícího výchozí stav  $+0J$ ). Abychom se tak v případě prohry vykoupili, potřebovali bychom předtím vyhrát alespoň  $2^n - 1 = 63$  krát. Tedy více než v polovině případů. Čemuž vzhledem k naší šanci  $p = 18/37$  na výhru v jednom spinu není

<sup>5</sup> Námi získaný výsledek  $-0,1J$  je s ohledem na vstupní data uveden s přesností na jedno desetinné místo. Rozdílnost mezi tímto a výsledkem uvedeným v tabulce 4.2 je dále způsobena užitím zaokrouhlených hodnot obsažených v příslušné fundamentální matici – při výpočtu tabulkou uváděných hodnot jsme se naproti tomu dopustili zaokrouhlení až na samém závěru výpočtu.

$n$	$E(Z_n)$	$\bar{E}(Z_n)$	$n$	$E(Z_n)$	$\bar{E}(Z_n)$	$n$	$E(Z_n)$	$\bar{E}(Z_n)$
1 <sup>*</sup>	-0,027	-0,027	5	-0,072	-0,071	9	-0,132	-0,133
2	-0,036	-0,035	6	-0,086	-0,085	10	-0,149	-0,150
3	-0,047	-0,046	7	-0,101	-0,101	11	-0,166	-0,166
4	-0,059	-0,058	8	-1,116	-0,116			

Pozn.\*): hodnota pro  $E(Z_1)$  odpovídá střední hodnotě pro alternativní rozdělení s parametrem  $p$

Tabulka 4.2: Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený Martingale



Obrázek 4.8: Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený Martingale

pravděpodobnost příznivě nakloněna. Tento závěr můžeme podložit i poměrně prostým výpočtem, neboť modeluje-li náhodná veličina  $X$  počet výher v sérii 110 spinů, pak  $X \sim \text{Bi}(110, p)$  a dle sekce 3.5.3 platí

$$P[X \geq 63] = \sum_{k=63}^{110} \binom{110}{k} \left(\frac{18}{37}\right)^k \left(1 - \frac{18}{37}\right)^{110-k} = 0,26.$$

### Omezený Martingale a pravidlo o zmrazení sázek

Naše předchozí úvahy v zájmu zjednodušení úmyslně opomíjely dodatečné pravidlo o zmrazení sázek. Ukažme si nyní pro  $s = 2$  příslušně upravenou matici přechodu

$$\begin{array}{c}
+0J \\
+1J \\
-1_0J \\
-1_{00}J \\
-\bar{1}J \\
-1J \\
+2J \\
-2_0J \\
-2_{00}J \\
-\bar{2}J \\
-2J
\end{array}
\begin{pmatrix}
+0J & +1J & -1_0J & -1_{00}J & -\bar{1}J & -1J & +2J & -2_0J & -2_{00}J & -\bar{2}J & -2J \\
0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_0 & p_R & p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_R & p_R + p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & p_R \\
0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & p_R & p_R \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_R & p_R + p_0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & p_R \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},$$

kde  $p_R = 18/37$ ,  $p_0 = 1/37$  zastupují pravděpodobnost výhry rovné sázky a pravděpodobnost výhry nuly. Stav  $-1_0J$ ,  $-1_{00}J$  a  $-2_0J$ ,  $-2_{00}J$  po řadě představují první a druhé zmrazení aktuální sázky  $1J$  a  $2J$  (tj. odpovídá jim zisk  $0J$  pro dané kolo), stavy  $-\bar{1}J$  a  $-\bar{2}J$  poté reprezentují odblokovanou sázku v příslušné hodnotě (tj. odpovídá jim opět zisk  $0J$  pro dané kolo) a konečně stav  $+0J$  reprezentuje pomocný výchozí stav řetězce před naším vstupem do hry. (V obecném případě bychom museli v témže duchu přidat celkem  $3n$  přechodných stavů.)

Dle sekce 3.7.1 uvedeme aplikaci permutace  $(11, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1)$  přechodovou matici do tvaru<sup>6</sup>

$$P = \left( \begin{array}{c|c} I & \underline{0} \\ \hline Q & R \end{array} \right) =
\begin{array}{c}
-2J \\
+1J \\
-1_0J \\
-1_{00}J \\
-\bar{1}J \\
-1J \\
+2J \\
-2_0J \\
-2_{00}J \\
-\bar{2}J \\
+0J
\end{array}
\begin{pmatrix}
-2J & +1J & -1_0J & -1_{00}J & -\bar{1}J & -1J & +2J & -2_0J & -2_{00}J & -\bar{2}J & +0J \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_0 & p_R & p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_R & p_R + p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & p_R & 0 & 0 \\
p_R + p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_R & 0 & 0 \\
p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_R & p_0 & 0 & 0 & p_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Následně opět pro konkrétní hodnoty určíme s přesností na dvě desetinná místa skrze  $F = (E - Q)^{-1}$  fundamentální matici

<sup>6</sup> Prohození stavů  $+0J$  a  $-2J$ .

$$\begin{array}{r}
+1J \\
-1_0J \\
-1_{00}J \\
-\bar{1}J \\
-1J \\
+2J \\
-2_0J \\
-2_{00}J \\
-\bar{2}J \\
+0J
\end{array}
\begin{pmatrix}
+1J & -1_0J & -1_{00}J & -\bar{1}J & -1J & +2J & -2_0J & -2_{00}J & -\bar{2}J & +0J \\
2,920 & 0,107 & 0,003 & 0,054 & 1,973 & 0,973 & 0,054 & 0,001 & 0,027 & 0,000 \\
1,433 & 1,080 & 0,029 & 0,539 & 1,973 & 0,973 & 0,054 & 0,001 & 0,027 & 0,000 \\
1,420 & 0,079 & 1,002 & 0,526 & 1,973 & 0,973 & 0,054 & 0,001 & 0,027 & 0,000 \\
1,920 & 0,107 & 0,003 & 1,053 & 1,973 & 0,973 & 0,054 & 0,001 & 0,027 & 0,000 \\
0,947 & 0,053 & 0,001 & 0,026 & 1,973 & 0,973 & 0,054 & 0,001 & 0,027 & 0,000 \\
1,920 & 0,107 & 0,003 & 0,053 & 1,973 & 1,973 & 0,054 & 0,001 & 0,027 & 0,000 \\
0,473 & 0,026 & 0,001 & 0,013 & 0,486 & 0,486 & 1,027 & 0,028 & 0,513 & 0,000 \\
0,461 & 0,026 & 0,001 & 0,013 & 0,473 & 0,473 & 0,026 & 1,001 & 0,500 & 0,000 \\
0,947 & 0,053 & 0,001 & 0,026 & 0,973 & 0,973 & 0,054 & 0,001 & 1,027 & 0,000 \\
1,920 & 0,107 & 0,003 & 0,053 & 1,973 & 0,973 & 0,054 & 0,001 & 0,027 & 1,000
\end{pmatrix}$$

Pomocí rovnice 4.2 pro výchozí stav  $+0J$  (fialový řádek) určíme, za uvážení všech přechodných stavů, střední hodnotu zisku v jednom spinu jako

$$\begin{aligned}
E(Z_2) &= \frac{J(+1 \cdot 1,920 + 0 \cdot 0,107 + 0 \cdot 0,003 + 0 \cdot 0,053 - 1 \cdot 1,973 + \dots}{1,920 + 0,107 + 0,003 + 0,053 + 1,973 + \dots} \\
&\frac{\dots + 2 \cdot 0,973 + 0 \cdot 0,054 + 0 \cdot 0,001 + 0 \cdot 0,027 - 2 \cdot 1,000}{\dots + 0,973 + 0,054 + 0,001 + 0,027 + 1,000} = -0,018J.
\end{aligned}$$

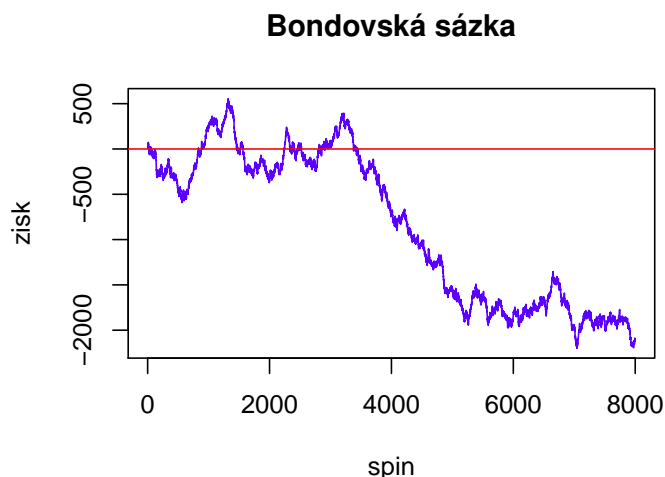
Tomuto výsledku odpovídá i simulací určená hodnota  $\bar{E}(Z_2) = -0,018J$ .

### Shrnutí a závěr pro omezený Martingale

V této sekci jsme se zabývali omezeným Martingalem, tedy Martingalem charakteristickým maximální možnou délkou proherní série  $n$ , po níž můžeme zdvojnásobovat svou sázku. Herním kolem jsme v tomto případě označili sérii proher zakončenou výhrou (výherní kolo) nebo  $n$ -tou prohrou (proherní kolo). Po řadě úvah jsme dospěli k těmto závěrům:

1. K neomezenému Martingalu můžeme z omezeného přejít limitním přechodem  $n \rightarrow \infty$ .
2. Zisk v jednom herním kole je nyní náhodnou veličinou se zápornou střední hodnotou, a trajektorie omezeného Martingalu proto nemá dřívější „rostoucí“ charakter jako u neomezeného Martingalu.
3. Střední hodnota zisku jediného herního kola je záporná a je pro nás tím nepříznivější, čím delší maximální proherní série je nám umožněna.
4. Sestavili jsme matici přechodu pro stavy reprezentující možný zisk v jednom spinu, určili fundamentální matici a s její pomocí pak vypočetli střední hodnotu zisku v jednom spinu pro  $n = 1, 2, \dots, 11$ . Zjistili jsme, že hodnota  $E(Z_n)$  je pro nás tím nepříznivější, tím vyšší je  $n$ .
5. Nakonec jsme ukázali, že umíme předchozí úvahu rozšířit o pravidlo o zmrazení sázek pro libovolné  $n$ , upravit příslušnou přechodovou matici a dostat se tak opět ke střední hodnotě zisku v jednom spinu. Ačkoli je střední ztráta v jednom spinu o něco menší než bez zmrazení sázek, je pro nás i tato varianta ve hře ve výsledku stále nepříznivá.





Obrázek 4.9: Standardní průběh Bondovské sázky

## 4.2 Bondovská sázka

Svou pozornost nyní obrátíme k tzv. Bondovské sázce, popsané v sekci 2.5.8, jejíž možný průběh<sup>7</sup> zaznamenává graf na obrázku 4.9. Budeme uvažovat zmiňovanou „potenciálně nejvýnosnější“ variantu slibující v případě zanedbání dodatečných zvýhodňujících pravidel pro vítězství nuly:

1. Zisk  $Z_0 = (+36 - 20)J = 16J$  s pravděpodobností  $p_0 = 1/37$ , že vyhraje nula.
2. Zisk  $Z_R = (+14 + 14 - 20)J = 8J$  s pravděpodobností  $p_R = 18/37$ , že vyhraje nízké číslo (rovná sázka).
3. Zisk  $Z_S = (+30 - 20)J = 10J$  s pravděpodobností  $p_S = 6/37$ , že vyhraje zvolených šest čísel.
4. Zisk  $Z_P = -20J$  s pravděpodobností  $p_P = 1 - (p_0 + p_R + p_S) = 12/37$ .

Při zohlednění všech výše uvedených možností, tak na jeden spin, dle rovnice 3.7, připadá střední hodnota zisku

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= p_0 \cdot 16J + p_R \cdot 8J + p_S \cdot 10J - p_P \cdot 20J = \\
 &= \frac{1}{37} \cdot 16J + \frac{18}{37} \cdot 8J + \frac{6}{37} \cdot 10J - \frac{12}{37} \cdot 20J = -\frac{20}{37}J = -0,541J.
 \end{aligned}$$

Přičemž simulace odhaduje hodnotu  $\bar{E}(Z) = -0,558J$ .

Uvážíme-li dále zvýhodněný případ, kdy je v účinnosti pravidlo o půlení sázek v okamžiku, kdy padne nula (při vítězství pole nula okamžitě získáme polovinu

<sup>7</sup> Sérii dalších náhodně vybraných průběhů simulace Bondovské sázky je možno dohledat v příloze 5.3.

svých rovných sázek zpět a zbývající polovina pak propadá banku), případně na jedno kolo střední hodnota zisku<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} E(Z)' &= p_0 \cdot (16 + 7)J + p_R \cdot 8J + p_S \cdot 10J - p_P \cdot 20J = \\ &= \frac{1}{37} \cdot (7 + 16)J + \frac{18}{37} \cdot 8J + \frac{6}{37} \cdot 10J - \frac{12}{37} \cdot 20J = -\frac{20}{37}J = -0,351J, \end{aligned}$$

neboť vyhraje-li nula, okamžitě získáme i ztratíme polovinu svých rovných sázek.

Zbývá se vypořádat s pravidlem o zmrazení sázek. Postupovat budeme analogicky se sekci 4.1.3 a Bondovskou sázku modelovat pomocí Markovova řetězce v duchu čekání na čistou prohru, tj. na spin vedoucí ke ztrátě  $-20J$ . Abychom však mohli určit střední hodnotu zisku v jednom spinu, budeme nuceni základní stavy  $Z_0$ ,  $Z_R$ ,  $Z_S$  a  $Z_P$  rozšířit:

5. Zisk  $Z_{00} = (+36 - 20 + 14)J = 30J$  pro druhou nulu v řadě (v předchozím spinu padla nula a my tak nedokládáme rovné sázky) s pravděpodobností přechodu  $p_0$ .
6. Zisk  $Z_{000} = (36 - 20 + 14)J = 30J$  pro třetí nulu v řadě (v předchozím spinu padla nula a my tak nedokládáme rovné sázky) s pravděpodobností přechodu  $p_0$ .
7. Zisk  $\bar{Z}_R = (-20 + 14)J = -6J$  pro odmrazenou rovnou sázku (v předchozím spinu padla nula a my tak nedokládáme rovné sázky) s pravděpodobností přechodu  $p_R$ .
8. Zisk  $Z_R^+ = (+14 + 14 - 6)J = +22J$  pro výherní odmrazenou rovnou sázku (v předchozím spinu byla odmrazena rovná sázka a my ji proto nedokládáme) s pravděpodobností přechodu  $p_R$ .
9. Zisk  $Z_S^+ = (-20 + 30 + 14)J = 24J$  (v předchozím spinu padla nula nebo byla odmrazena rovná sázka a my tak nedokládáme rovné sázky) s pravděpodobností přechodu  $p_S$ .
10. Zisk  $Z_P^+ = (-20 + 14)J = -6J$  (v předchozím spinu padla nula, nebo byla odmrazena rovná sázka a my tak nedokládáme rovné sázky) s pravděpodobností přechodu  $p_P$ .
11. I nyní využijeme pomocný výchozí stav řetězce  $+0J$ .

Odpovídající přechodová matice  $P$  má poté podobu

$$P = \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right) =$$

---

<sup>8</sup> Obdobným způsobem můžeme pravidlo o půlení sázek zakomponovat i do modelu jiných sázecích systémů.

$$\begin{matrix}
& Z_P & Z_P^+ & Z_S & Z_R & Z_0 & Z_{00} & Z_{000} & Z_S^+ & \bar{Z}_R & Z_R^+ & +0J \\
Z_P & \color{green}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Z_P^+ & \color{red}{pP} & 0 & p_S & p_R & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Z_S & \color{red}{pP} & 0 & p_S & p_R & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Z_R & \color{red}{pP} & 0 & p_S & p_R & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Z_0 & \color{red}{0} & p_P & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & p_S & p_R & 0 & 0 \\
Z_{00} & \color{red}{0} & p_P & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & p_S & p_R & 0 & 0 \\
Z_{000} & \color{red}{pP} & 0 & p_S & p_R & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Z_S^+ & \color{red}{pP} & 0 & p_S & p_R & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{Z}_R & \color{red}{0} & p_P & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_S & 0 & p_R & 0 \\
Z_R^+ & \color{red}{pP} & 0 & p_S & p_R & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+0J & \color{red}{pP} & 0 & p_S & p_R & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}$$

Pomocí vztahu  $F = (E - Q)^{-1}$  pro konkrétní hodnoty určíme s přesností na tři desetinná místa fundamentální matici

$$\begin{matrix}
& Z_P^+ & Z_S & Z_R & Z_0 & Z_{00} & Z_{000} & Z_S^+ & \bar{Z}_R & Z_R^+ & +0J \\
Z_P^+ & 1,042 & 0,500 & 1,500 & 0,084 & 0,002 & 0,000 & 0,021 & 0,042 & 0,021 & 0,000 \\
Z_S & 0,042 & 1,500 & 1,500 & 0,084 & 0,002 & 0,000 & 0,021 & 0,042 & 0,021 & 0,000 \\
Z_R & 0,042 & 0,500 & 2,500 & 0,084 & 0,002 & 0,000 & 0,021 & 0,042 & 0,021 & 0,000 \\
Z_0 & 0,544 & 0,500 & 1,500 & 1,098 & 0,030 & 0,001 & 0,021 & 0,549 & 0,267 & 0,000 \\
Z_{00} & 0,531 & 0,500 & 1,500 & 0,098 & 1,003 & 0,027 & 0,265 & 0,535 & 0,260 & 0,000 \\
Z_{000} & 0,042 & 0,500 & 1,500 & 0,084 & 0,002 & 1,000 & 0,021 & 0,042 & 0,021 & 0,000 \\
Z_S^+ & 0,042 & 0,500 & 1,500 & 0,084 & 0,002 & 0,000 & 1,021 & 0,042 & 0,021 & 0,000 \\
\bar{Z}_R & 0,380 & 0,500 & 1,500 & 0,112 & 0,003 & 0,000 & 0,190 & 1,056 & 0,514 & 0,000 \\
Z_R^+ & 0,042 & 0,500 & 1,500 & 0,084 & 0,002 & 0,000 & 0,021 & 0,042 & 1,021 & 0,000 \\
+0J & \color{red}{0,042} & \color{red}{0,500} & \color{red}{1,500} & \color{red}{0,084} & \color{red}{0,002} & \color{red}{0,000} & \color{red}{0,021} & \color{red}{0,042} & \color{red}{0,021} & \color{red}{1,000}
\end{matrix}$$

S využitím hodnot pro výchozí stav  $+0J$  (fialový řádek) a vzorce 4.2 získáme

$$E(Z) = \frac{J(-6 \cdot 0,042 + 10 \cdot 0,500 + 8 \cdot 1,500 + 16 \cdot 0,084 + 30 \cdot 0,002 + \dots}{0,042 + 0,500 + 1,500 + 0,084 + 0,002 + \dots}$$

$$\frac{\dots + 30 \cdot 0,000 + 24 \cdot 0,021 - 6 \cdot 0,042 + 22 \cdot 0,021 - 20 \cdot 1,000}{\dots + 0,000 + 0,021 + 0,042 + 0,021 + 1,000} = -0,353J.$$

Simulací odhadnutá hodnota přitom činí  $-0,346J$ .

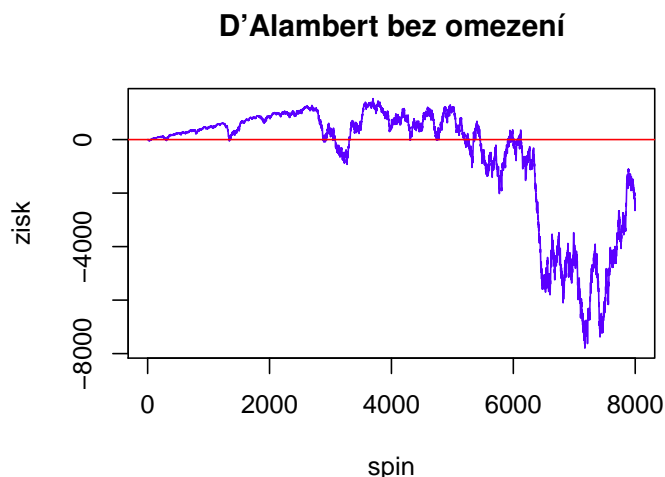
Shrnuto a podtrženo, sázení dle systému Bondovská sázka se jeví jako ztrátové pro libovolný počet spinů při libovolném zvýhodnění nuly, což vysvětluje „převážně sestupný“ trend trajektorie.

## 4.3 D’Alambert

### 4.3.1 Neomezený D’Alambert

Graf na obrázku 4.10 zaznamenává možný průběh<sup>9</sup> sázení dle systému neomezený D’Alambert, viz sekce 2.5.4, v duchu závislosti zisku na aktuálním spinu. Je zřejmé, že pro některé sekvence spinů trajektorie vykazuje spíše sestupný trend. Na vině je skutečnost, že na rozdíl od neomezeného Martingalu, viz sekce 4.1.2,

<sup>9</sup> Sérii dalších náhodně vybraných průběhů simulace hry podle systému neomezený D’Alambert je možno dohledat v příloze 5.12.



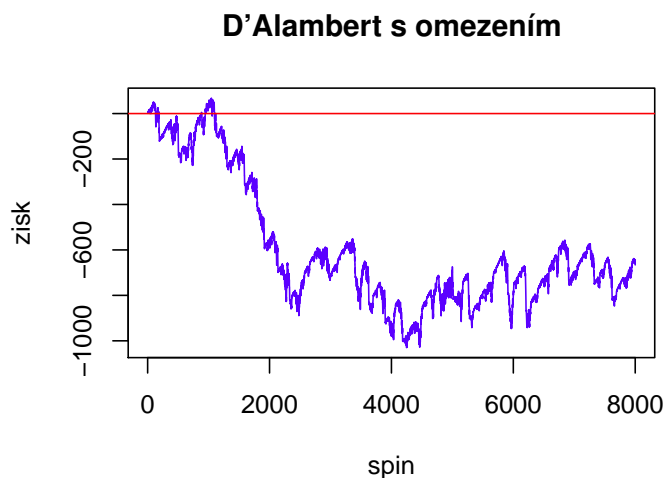
Obrázek 4.10: Standardní průběh neomezeného D’Alambert

již vždy výherní spin kompletně nepřevrací ztráty spjaté s předchozí sérií proher v čistý zisk a neuvádí tak naši hru do „počátečního stavu ve smyslu zvolené strategie“. Toto zjištění však nelze s jistotou zobecnit pro celý průběh hry.

Přesnou střední hodnotu zisku  $E(Z_k)$  v  $k$ -tém spinu lze určit analogicky s postupem v sekci 4.1.2, tj. vypsáním a oceněním všech možných posloupností délky  $k$ . My se však spokojíme s dříve učiněnou úvahou v sekci 4.1.2 pro systémy založené na rovných sázkách, z níž plyne, že  $E(Z_k)$  je pro libovolné  $k$  vždy záporná.

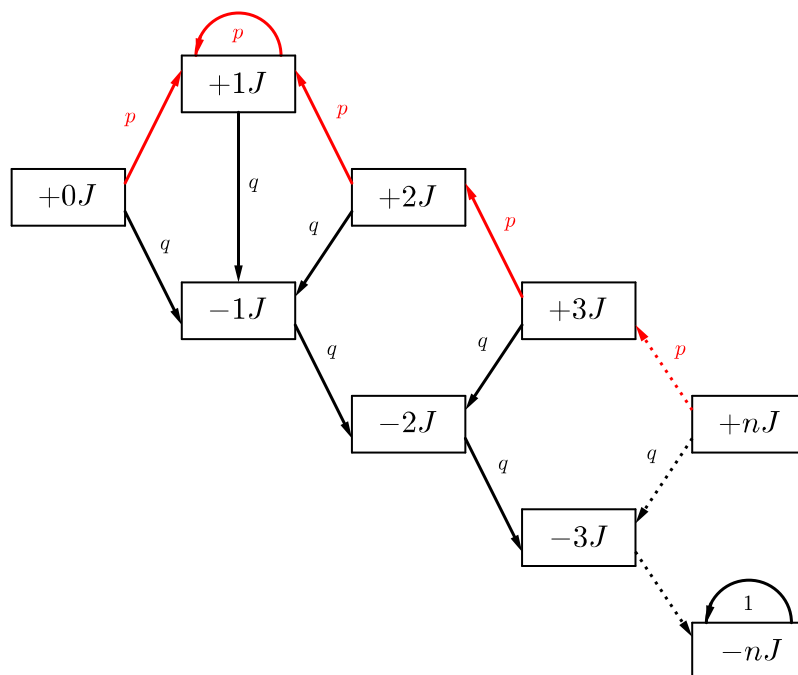
Provedená simulační studie, viz příloha 5.12, ukazuje, že neomezený D’Alambert není ani za uspokojení stanovených ideálních podmínek hry (tj. za neomezeného času, kapitálu a bez maxima pro dílčí sázky) funkčním systémem.

### 4.3.2 Omezený D’Alambert



Obrázek 4.11: Standardní průběh omezeného D’Alambert ( $n = 6$ )

Stejně jako omezený Martingale, viz sekce 4.1.3, i omezený D’Alambert nyní analyzujeme jako diskretní Markovův řetězec (graficky znázorněno na obrázku 4.12). Možný průběh<sup>10</sup> hry přitom zachycuje graf na obrázku 4.11.



Obrázek 4.12: Hra dle systému D’Alambert

Zaměříme-li svou pozornost na aktuální zisk v jednom spinu, můžeme omezený D’Alambert modelovat následující přechodovou maticí

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} +0J & +1J & -1J & +2J & -2J & +3J & -3J & \dots & +nJ & -nJ \end{matrix} \\ \begin{matrix} +0J \\ +1J \\ -1J \\ +2J \\ -2J \\ +3J \\ -3J \\ \vdots \\ +nJ \\ -nJ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

kde  $n$  představuje maximální možný počet sázených jednotek.

<sup>10</sup> Sérii dalších náhodně vybraných průběhů simulace hry podle systému omezený D’Alambert je možno dohledat v příloze 5.13.

V zájmu názornosti celý výpočet provedme konkrétně pro  $n = 6$ . Získáme tak matici přechodu

$$\begin{array}{c}
 +0J \\
 +1J \\
 -1J \\
 +2J \\
 -2J \\
 +3J \\
 -3J \\
 +4J \\
 -4J \\
 +5J \\
 -5J \\
 +6J \\
 -6J
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 +0J & +1J & -1J & +2J & -2J & +3J & -3J & +4J & -4J & +5J & -5J & +6J & -6J \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 .$$

Dle sekce 3.7.1 uvedeme aplikaci permutace  $(13, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 1)$  přechodovou matici do tvaru<sup>11</sup>

$$P = \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c}
 -32J \\
 +1J \\
 -1J \\
 +2J \\
 -2J \\
 +3J \\
 -3J \\
 +4J \\
 -4J \\
 +5J \\
 -5J \\
 +6J \\
 +0J
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 -6J & +1J & -1J & +2J & -2J & +3J & -3J & +4J & -4J & +5J & -5J & +6J & -6J \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 \\
 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 .$$

<sup>11</sup> Tj. provedeme prohození stavů  $+0J$  a  $-6J$ .

$n$	$E(Z_n)$	$\bar{E}(Z_n)$	$n$	$E(Z_n)$	$\bar{E}(Z_n)$	$n$	$E(Z_n)$	$\bar{E}(Z_n)$
1 <sup>*)</sup>	-0,027	-0,027	5	-0,064	-0,065	9	-0,103	-0,102
2	-0,036	-0,036	6	-0,074	-0,075	10	-0,112	-0,114
3	-0,044	-0,045	7	-0,083	-0,082	11	-0,122	-0,121
4	-0,055	-0,055	8	-0,092	-0,091			

Pozn.:\*) hodnota pro  $E(Z_1)$  odpovídá střední hodnotě pro alternativní rozdělení s parametrem  $p$

Tabulka 4.3: Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený D’Alambert

Pro konkrétní hodnoty  $p = 18/37$ ,  $q = 19/37$  určíme hledanou fundamentální matici pomocí  $F = (E - Q)^{-1}$ . Při zaokrouhlení na desetiny tak obdržíme výsledek

$$\begin{matrix}
 & +1J & -1J & +2J & -2J & +3J & -3J & +4J & -4J & +5J & -5J & +6J & +0J \\
 +1J & \left( \begin{array}{c} 6,0 \\ 4,0 \\ 5,0 \\ 3,1 \\ 4,0 \\ 2,3 \\ 3,1 \\ 1,5 \\ 2,3 \\ 0,7 \\ 1,5 \\ 5,0 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 5,3 \\ 5,3 \\ 5,3 \\ 3,3 \\ 4,3 \\ 2,4 \\ 3,3 \\ 1,6 \\ 2,4 \\ 0,8 \\ 1,6 \\ 5,3 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 4,3 \\ 4,3 \\ 5,3 \\ 4,5 \\ 4,3 \\ 2,4 \\ 3,3 \\ 1,6 \\ 2,4 \\ 0,8 \\ 1,6 \\ 4,3 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 4,5 \\ 4,5 \\ 4,5 \\ 4,5 \\ 2,6 \\ 3,5 \\ 3,5 \\ 1,7 \\ 2,6 \\ 0,8 \\ 1,7 \\ 4,5 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 3,5 \\ 3,5 \\ 3,5 \\ 3,5 \\ 2,6 \\ 3,5 \\ 3,5 \\ 1,7 \\ 2,6 \\ 0,9 \\ 1,7 \\ 3,5 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 3,7 \\ 3,7 \\ 3,7 \\ 3,7 \\ 3,7 \\ 3,7 \\ 3,7 \\ 1,8 \\ 2,7 \\ 0,9 \\ 1,7 \\ 3,7 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 2,7 \\ 2,7 \\ 2,7 \\ 2,7 \\ 2,7 \\ 2,7 \\ 2,7 \\ 1,8 \\ 2,7 \\ 0,9 \\ 1,7 \\ 2,7 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 2,8 \\ 2,8 \\ 2,8 \\ 2,8 \\ 2,8 \\ 2,8 \\ 2,8 \\ 1,8 \\ 2,8 \\ 0,9 \\ 1,8 \\ 2,8 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 1,8 \\ 1,8 \\ 1,8 \\ 1,8 \\ 1,8 \\ 1,8 \\ 1,8 \\ 1,8 \\ 2,8 \\ 0,9 \\ 1,8 \\ 1,8 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 1,9 \\ 1,9 \\ 1,9 \\ 1,9 \\ 1,9 \\ 1,9 \\ 1,9 \\ 1,9 \\ 1,9 \\ 1,9 \\ 1,9 \\ 1,9 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{c} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 1,0 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

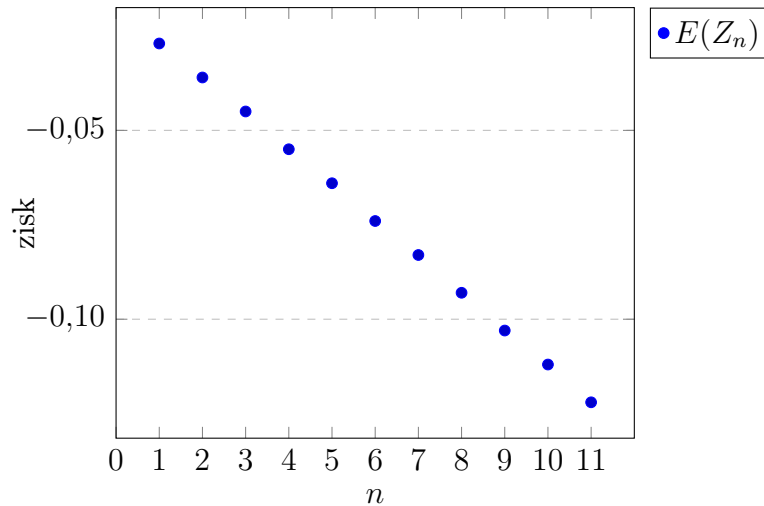
S využitím středních hodnot návratů při počátečním stavu  $+0J$  (fialový řádek) a rovnice 4.2 získáme<sup>12</sup>

$$E(Z_6) = \frac{J(+1 \cdot 5,0 - 1 \cdot 5,3 + 2 \cdot 4,3 - 2 \cdot 4,5 + 3 \cdot 3,5 - 3 \cdot 3,7 + \dots}{5,0 + 5,3 + 4,3 + 4,5 + 3,5 + 3,7 + \dots} \\
 \frac{\dots + 4 \cdot 2,7 - 4 \cdot 2,8 + 5 \cdot 1,8 - 5 \cdot 1,9 + 6 \cdot 0,9 - 6 \cdot 1}{\dots + 2,7 + 2,8 + 1,8 + 1,9 + 0,9 + 1} = -0,1J.$$

Jak se dalo tušit, je  $E(Z_6)$  záporná, a omezený D’Alambert se stejně jako omezený Martingale ukazuje v poněkud nevýdělečném světle.

Uveďme dále tabulku 4.3 a graf na obrázku 4.13 obsahující analogickým výpočtem získané výsledné hodnoty  $E(Z_n)$  a simulací stanovené odhady  $\bar{E}(Z_n)$  pro  $n = 1, 2, 3, \dots, 11$ .

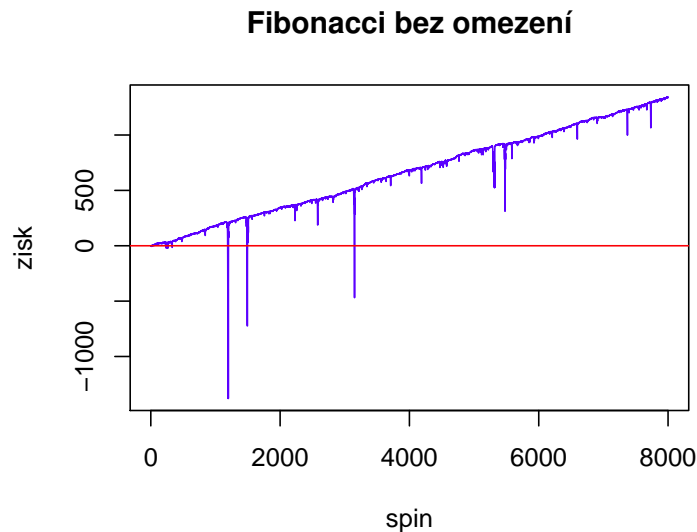
<sup>12</sup> Námí získaný výsledek  $-0,1J$  je s ohledem na vstupní data uveden s přesností na jedno desetinné místo. Rozdílnost mezi tímto a výsledkem uvedeným v tabulce 4.3 je dále způsobena užitím zaokrouhlených hodnot obsažených v příslušné fundamentální matici – při výpočtu tabulkou uváděných hodnot jsme se naproti tomu dopustili zaokrouhlení až na samém závěru výpočtu.



Obrázek 4.13: Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený D’Alambert

## 4.4 Fibonacci

### 4.4.1 Neomezený Fibonacci



Obrázek 4.14: Standardní průběh neomezeného Fibonacci

Graf na obrázku 4.14 zaznamenává možný průběh<sup>13</sup> hry dle systému neomezený Fibonacci, viz sekce 2.5.7, v duchu závislosti zisku na aktuálním spinu. Pozorovaná trajektorie patrně vykazuje „vzestupný trend“. Toto zjištění podporuje rovněž i provedená simulační studie 5.14. Neomezený Fibonacci lze tak zařadit po boku neomezeného Martingalu k limitně funkčním systémům.

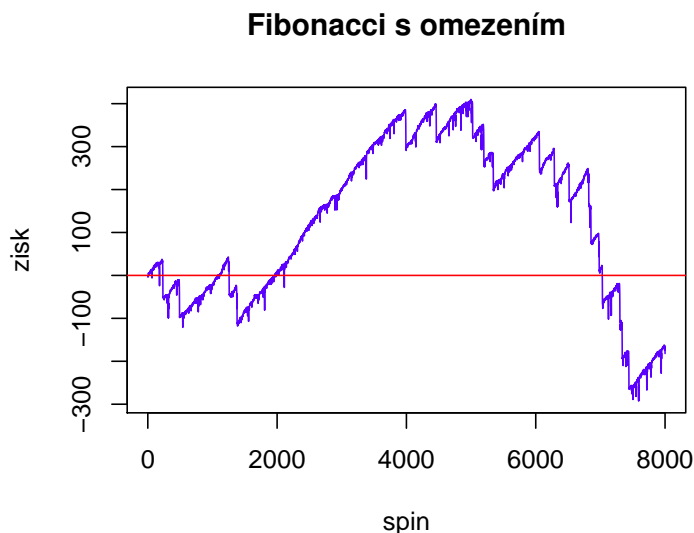
Co se týče přesné střední hodnoty zisku  $E(Z_k)$  v  $k$ -tém spinu, i nyní bychom mohli postupovat analogicky se sekci 4.1.2, tj. vypsáním a oceněním všech mož-

<sup>13</sup> Sérii dalších náhodně vybraných průběhů simulace hry podle systému neomezený Fibonacci je možno dohledat v příloze 5.14.



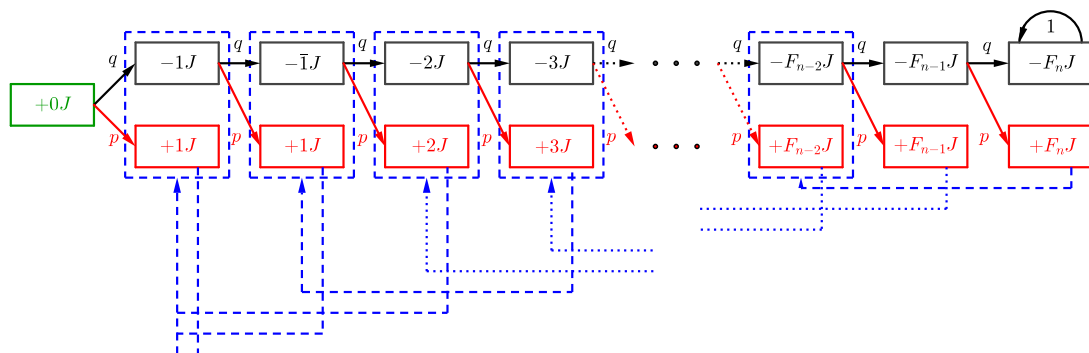
ných posloupností délky  $k$ . Stejně jako v případě systému neomezený D’Alambert, viz sekce 4.3.2, se i nyní spokojíme s dříve učiněnou úvahou v sekci 4.1.2 pro herní strategie založené na rovných sázkách, z níž plyne, že  $E(Z_k)$  je pro libovolné  $k$  vždy záporná.

## 4.4.2 Omezený Fibonacci



Obrázek 4.15: Standardní průběh omezeného Fibonacci ( $n = 6$ )

Stejně jako omezený Martingale, viz sekce 4.1.3, a omezený D’Alambert, viz sekce 4.3.2, i omezený Fibonacci nyní analyzujeme jako diskretní Markovův řetězec (graficky znázorněno na obrázku 4.16). Možný průběh<sup>14</sup> hry přitom zachycuje graf na obrázku 4.15.



Obrázek 4.16: Hra dle systému Fibonacci (modrá přerušovaná čára značí přechod ke zpětnému rozhodování mezi červeným výherním a černým proherním stavem ve vyznačeném rámečku, tj. symbolizuje návrat o dva členy Fibonacci posloupnosti)

<sup>14</sup> Sérii dalších náhodně vybraných průběhů simulace hry podle systému omezený Fibonacci je možno dohledat v příloze 5.15.

$$P = \begin{matrix} & +0J & +1J & -1J & +\bar{1}J & -\bar{1}J & +2J & -2J & +3J & \dots & +F_nJ & -F_nJ \\ \begin{matrix} +0J \\ +1J \\ -1J \\ +\bar{1}J \\ -\bar{1}J \\ +2J \\ -2J \\ +3J \\ \vdots \\ +F_nJ \\ -F_nJ \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccccccccccc} 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 1 \end{array} \right), \end{matrix}$$

kde  $n$  reprezentuje pořadové číslo nejvyššího Fibonacciho čísla, jež můžeme vsadit.

V zájmu názornosti celý výpočet provedme konkrétně pro  $n = 6$ . Získáme tak matici přechodu

$$\begin{matrix} & +0J & +1J & -1J & +\bar{1}J & -\bar{1}J & +2J & -2J & +3J & -3J & +5J & -5J & +8J & -8J \\ \begin{matrix} +0J \\ +1J \\ -1J \\ +\bar{1}J \\ -\bar{1}J \\ +2J \\ -2J \\ +3J \\ -3J \\ +5J \\ -5J \\ +8J \\ -8J \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccccccccccc} 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{matrix}$$

Dle sekce 3.7.1 uvedeme aplikací permutace  $(13, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 1)$  přechodovou matici do tvaru<sup>15</sup>

$$P = \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline Q & R \end{array} \right) \Rightarrow$$

<sup>15</sup> Tj. provedeme prohození stavů  $+0J$  a  $-8J$

$$\begin{matrix}
& -8J & +1J & -1J & +\bar{1}J & -\bar{1}J & +2J & -2J & +3J & -3J & +5J & -5J & +8J & +0J \\
-8J & \left( \begin{array}{cccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right)
\end{matrix}$$

Pro konkrétní hodnoty  $p = 18/37$ ,  $q = 19/37$  určíme hledanou fundamentální matici pomocí  $F = (E-Q)^{-1}$ . Při zaokrouhlení na desetiny tak obdržíme výsledek

$$\begin{matrix}
& +1J & -1J & +\bar{1}J & -\bar{1}J & +2J & -2J & +3J & -3J & +5J & -5J & +8J & +0J \\
+1J & \left( \begin{array}{cccccccccccc}
17,3 & 17,2 & 10,1 & 10,7 & 6,1 & 6,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0,0 & 0,0 \\
15,4 & 17,2 & 10,1 & 10,7 & 6,1 & 6,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0,0 & 0,0 \\
16,3 & 17,2 & 11,1 & 10,7 & 6,1 & 6,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0,0 & 0,0 \\
14,5 & 15,3 & 9,2 & 10,7 & 6,1 & 6,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0,0 & 0,0 \\
16,3 & 17,2 & 10,1 & 10,7 & 7,1 & 6,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0,0 & 0,0 \\
12,7 & 13,4 & 8,3 & 8,7 & 5,2 & 6,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0,0 & 0,0 \\
15,4 & 16,2 & 10,1 & 10,7 & 6,1 & 6,4 & 4,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0,0 & 0,0 \\
10,2 & 10,8 & 6,5 & 6,9 & 4,3 & 4,5 & 2,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 0,0 & 0,0 \\
14,5 & 15,3 & 9,2 & 9,7 & 6,1 & 6,4 & 3,6 & 3,8 & 2,8 & 1,9 & 0,9 & 0,0 & 0,0 \\
6,2 & 6,5 & 4,0 & 4,3 & 2,5 & 2,6 & 1,7 & 1,8 & 0,9 & 1,9 & 0,9 & 0,0 & 0,0 \\
12,7 & 13,4 & 8,3 & 8,7 & 5,2 & 5,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 1,9 & 0,0 & 0,0 \\
16,3 & 17,2 & 10,1 & 10,7 & 6,1 & 6,4 & 3,6 & 3,8 & 1,8 & 1,9 & 0,9 & 1,0 & 1,0
\end{array} \right)
\end{matrix}$$

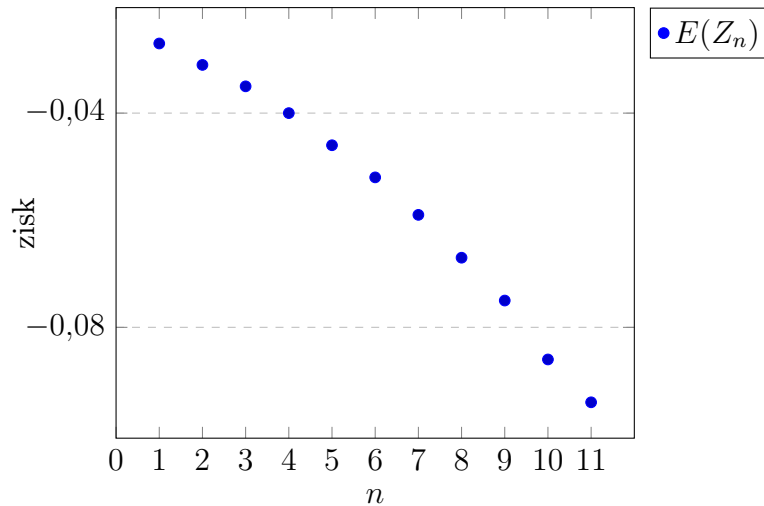
S využitím středních hodnot návratů při počátečním stavu  $+0J$  (fialový řádek) a vztahu 4.2 získáme<sup>16</sup>

$$\begin{aligned}
E(Z_6) &= \frac{J(+1 \cdot 16,3 - 1 \cdot 17,2 + 1 \cdot 10,1 - 1 \cdot 10,7 + 2 \cdot 6,1 - 2 \cdot 6,4 + \dots}{+16,3 + 17,2 + 10,1 + 10,7 + 6,1 + 6,4 \dots} \\
&\quad \frac{\dots + 3 \cdot 3,6 - 3 \cdot 3,8 + 5 \cdot 1,8 - 5 \cdot 1,9 + 8 \cdot 0,9 - 8 \cdot 1)}{\dots + 3,6 + 3,8 + 1,8 + 1,9 + 0,9 + 1} = -0,05J.
\end{aligned}$$

Jak se dalo tušit, je  $E(Z_6)$  záporná, a omezený Fibonacci se tak řadí po bok ostatních prodělečných herních strategií.

Uveďme dále tabulku 4.4 a graf na obrázku 4.17 obsahující analogickým výpočtem získané výsledné hodnoty  $E(Z_n)$  a simulací stanovené odhady  $\bar{E}(Z_n)$  pro  $n = 1, 2, 3, \dots, 11$ .

<sup>16</sup> Námí získaný výsledek  $-0,05J$  je s ohledem na vstupní data uveden s přesností na dvě desetinná místa. Rozdílnost mezi tímto a výsledkem uvedeným v tabulce 4.4 je dále způsobena užitím zaokrouhlených hodnot obsažených v příslušné fundamentální matici – při výpočtu tabulkou uváděných hodnot jsme se naproti tomu dopustili zaokrouhlení až na samém závěru výpočtu.



Obrázek 4.17: Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený Fibonacci

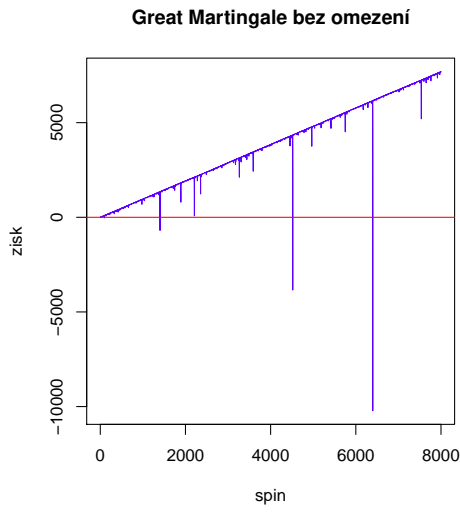
$n$	$E(Z_n)$	$\bar{E}(Z_n)$	$n$	$E(Z_n)$	$\bar{E}(Z_n)$	$n$	$E(Z_n)$	$\bar{E}(Z_n)$	$n$
1 <sup>*)</sup>	-0,027	-0,027	5	-0,046	-0,046	9	-0,075	-0,077	
2	-0,031	-0,031	6	-0,052	-0,053	10	-0,086	-0,087	
3	-0,035	-0,035	7	-0,059	-0,060	11	-0,094	-0,093	
4	-0,040	-0,040	8	-0,067	-0,066				

Pozn.:\*) hodnota pro  $E(Z_1)$  odpovídá střední hodnotě pro alternativní rozdělení s parametrem  $p$

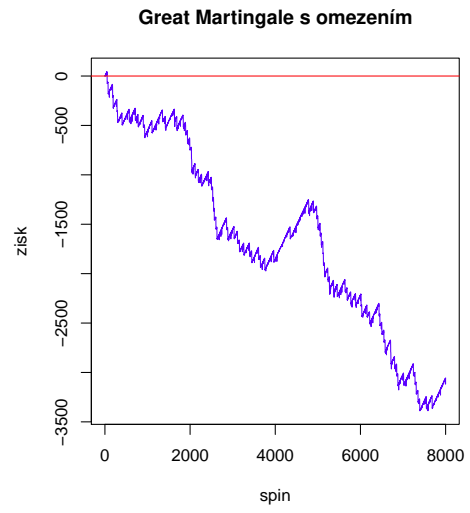
Tabulka 4.4: Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený Fibonacci

## 4.5 Simulační studie několika dalších ruletových systémů

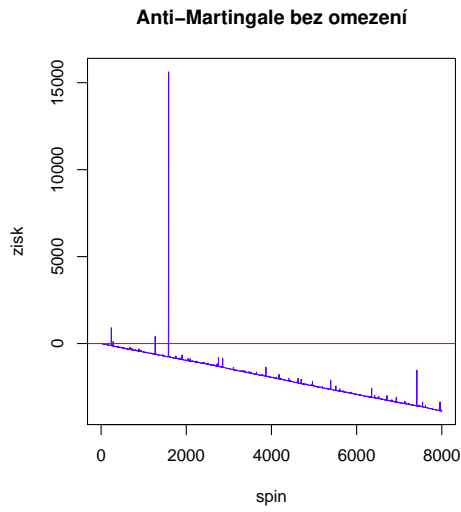
Ze simulačních studií vyplývá, že funkčními systémy jsou neomezený Great Martingale (obrázek 4.18a) a neomezený Anti-Labouchere (obrázek 4.18c), naproti tomu omezený Great Martingale (obrázek 4.18b), omezený Anti-Labouchere (obrázek 4.19d), neomezený Labouchere (obrázek 4.19a), omezený Labouchere (obrázek 4.19b), neomezený Anti-Martingale (obrázek 4.18c) a rovněž i omezený Anti-Martingale (obrázek 4.18d) jsou nefunkčními herními systémy.



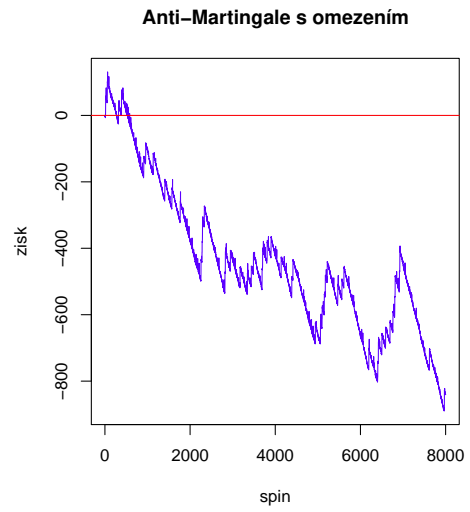
(a)



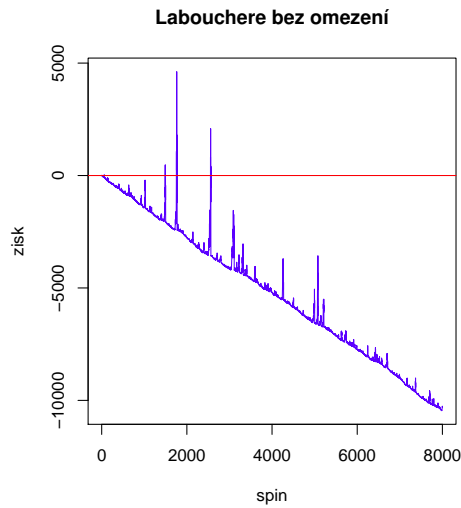
(b)



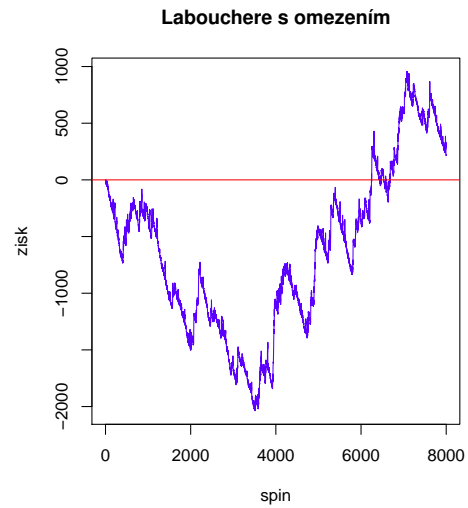
(c)



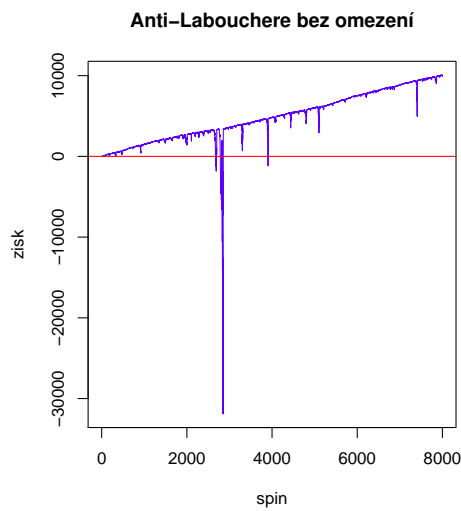
(d)



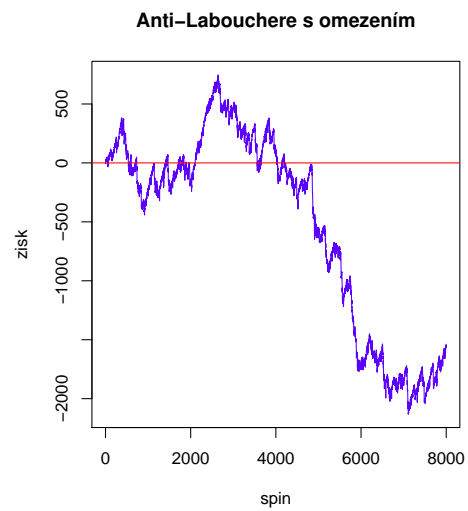
(a)



(b)



(c)



(d)

Sérii dalších náhodně vybraných průběhů simulace hry podle systému neomezený Great Martingale, omezený Great Martingale, neomezený Anti-Martingale, omezený Anti-Martingale, neomezený Labouchere, omezený Labouchere, neomezený Anti-Labouchere a omezený Labouchere je možno dohledat po řadě v příloze 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 a 5.11.

# Závěr

V úvodu této práce jsme si stanovili za cíl zanalyzovat a zhodnotit efektivitu nejpopulárnějších ruletových systémů, jež jsou mnohdy na internetu ([7], [15]) prezentovány jako snadná cesta k zaručenému zisku. Po teoretické průpravě v kapitole 3 jsme podrobili podrobné analýze systémy Martingale, D’Alambert, Fibonacci a svou pozornost rovněž věnovali Bondovské sázce. V případě systémů Great Martingale, Anti-Martingale, Labouchere a Anti-labouchere jsme se následně spokojili se závěry založenými na provedené simulační studii. Na základě získaných výsledků můžeme zkoumané systémy rozdělit podle funkčnosti v jejich neomezené či omezené podobě. Naše závěry jsou přitom přehledně zaneseny v tabulce 4.5.

Je zřejmé, že jedinými funkčními systémy jsou Anti-Labouchere, Great Martingale, Fibonacci a Martingale a to pouze ve své limitní, tedy nereálné, podobě. Střední hodnota zisku v jednom spinu je pro všechny systémy v libovolné variantě vždy záporná. Za touto skutečností stojí zelené pole banku garantující kasinu stabilní příjem ze všech rovných sázek, na nichž jsou vybudovány námi zkoumané systémy.

Celkově tak lze říci, že na ruletě můžeme z dlouhodobého hlediska zbohatnout pouze jako provozovatelé kasina, využitím defektu kola nebo jinak nečestným chováním a jakékoli články, referující o zaručeně funkční strategii, tak lze s čistým svědomím označit za podvodné.

Veškeré výpočty byly provedeny v softwaru Mathematica, obrázky postrádající odkaz na zdroj zhotoveny v softwaru Geogebra, grafické výstupy simulační studie pořízeny programem RStudio (příslušné kódy jsou k dohledání na přiloženém CD) a všechny ostatní grafy poté vyneseny pomocí LaTeXové knihovny pgfplot.

Tabulka 4.5: Srovnání analyzovaných systémů

Systém	Varinata	
	Neomezený	Omezený
Anti-Labouchere	<b>funkční</b>	nefunkční
Anti-Martingale	nefunkční	nefunkční
Bondovská sázka	nefunkční	nefunkční
D’Alambert	nefunkční	nefunkční
Great Martingale	<b>funkční</b>	nefunkční
Labouchere	nefunkční	nefunkční
Fibonacci	<b>funkční</b>	nefunkční
Martingale	<b>funkční</b>	nefunkční

# Seznam použité literatury

- [1] ANDĚL, Jiří. *Matematika náhody*. 3., upr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 290 s. ISBN 9788073780043.
- [2] ČELLÁR, Matúš. *Podmíněná rozdělení a podmíněné střední hodnoty* [online]. Praha, 2013 [cit. 2017-03-17]. Bakalářská práce práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta. Vedoucí práce doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/91635/>.
- [3] DOSTOJEVSKIJ, Fedor Michajlovič. *Hráč a jiné prózy*. Praha: Státní nakladatelství krásné literatury, hudby a umění, 1964, 535 s. Knihovna klasiků (SNKLHU).
- [4] DUPAČ, Václav a Marie HUŠKOVÁ. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 2., upr. vyd. Praha: Karolinum, 2013, 162 s. ISBN 9788024622088.
- [5] *Gambling-ca-1800* [online]. 2006 [cit. 2017-04-10]. Dostupný pod licencí Public domain na: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gambling-ca-1800.jpg>.
- [6] GOLLEHON, John. *All about roulette*. New York, NY: Perigee Books, 1988. ISBN 0399514600.
- [7] Jak vyhrát v ruletě: *Poznej tajemství kasína* [online]. místo neznámé: nakladatelství neznámé, 1999 [cit. 2016-12-01]. Dostupné z: <http://www.jakvyhratvrulete.cz/>.
- [8] LEVEZ, Belinda. *Kasino: příručka návštěvníka*. Praha: Fortuna Print, 2004, 160 s. ISBN 8073211327.
- [9] LEVINSON, Horace C. *Chance, Luck, and Statistics*. New York, DOVER PUBLICATIONS, INC. 2001, 384 s. ISBN 0486419975.
- [10] MANSKE, Magnus. *French Roulette Table* [online]. 2012 [cit. 2017-03-17]. Dostupný pod licencí Creative Commons na: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1800\\_French\\_Roulette\\_Table\\_001.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1800_French_Roulette_Table_001.jpg).
- [11] PRÁŠKOVÁ, Zuzana a Petr LACHOUT. *Základy náhodných procesů I*. Vyd. 2., V Matfyzpressu 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2012. ISBN 9788073782108.
- [12] ROBOVÁ, Jarmila. *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus, 2014, 159 s. ISBN 9788071964452.
- [13] ROLETSCHEK, Ralf. *Spielbank Wiesbaden* [online]. 2013 [cit. 2017-03-17]. Dostupný pod licencí Creative Commons na: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:13-02-27-spielbank-wiesbaden-by-RalfR-093.jpg>.



- [14] ROLETSCHEK, Ralf. *Spielbank Wiesbaden* [online]. 2013 [cit. 2017-03-17]. Dostupný pod licencí Creative Commons na: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:13-02-27-spielbank-wiesbaden-by-RalfR-079.jpg>.
- [15] Ruleta Tipy: *Chcete vědět, jak přelstít či porazit ruletu? Chcete zaručené tipy, jak vyhrát v ruletě?* [online]. místo neznámé: nakladatelství neznámé, 2009 [cit. 2016-12-01]. Dostupné z: <http://www.ruleta-tipy.cz/>
- [16] SHELLEY, Ron. *French Layout-Single Zero Wheel* [online]. 2008 [cit. 2017-03-17]. Dostupný pod licencí Creative Commons na: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:French\\_Layout-Single\\_Zero\\_Wheel.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:French_Layout-Single_Zero_Wheel.jpg).
- [17] SPANIER, David. *Hazardní hry: kapesní průvodce*. Překlad Petr Valošek. Ostrava: Krok, 1991, 149 s. ISBN 8090081916.
- [18] ŠMERDA, Stanislav. *Sbírka řešených úloh z aplikací stochastických modelů* [online]. Brno, 2008 [cit. 2016-11-24]. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Fakulta informatiky. Vedoucí práce Marie Budíková. Dostupné z: <http://is.muni.cz/th/39247/>.
- [19] THOMPSON, William Norman. *The international encyclopedia of gambling*. Santa Barbara, Calif.: ABC-CLIO, c2010, 2 v. (xxxvii, 732, I-12 p.). ISBN 1598842269.
- [20] TUČEK, Jaroslav a Michaela DOLINOVÁ. *Kasina, aneb, Co nevíte o nejrychlejšíh hazardu*. Praha: Ikar, 2001, 294 s., [8] s. obr. příl. ISBN 8072027859.
- [21] VJÁSA a KRISHNA DHARMA. *Mahábhárata: největší duchovní epos všech dob*. Překlad Krishna Dharma a Jan Mareš. [Grodinge, Švédsko?]: Bhaktivedanta Book Trust, ©2002. 986 s. ISBN 9171494561
- [22] ZVÁRA, Karel a Josef ŠTĚPÁN. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 5. vyd. Praha: Matfyzpress, 2012, 230 s. ISBN 9788073782184.

# Seznam obrázků

1	Vítězství čísla nula [13] . . . . .	3
1.1	Společnost hrající ruletu [5] . . . . .	11
1.2	Stůl evropské rulety [10] . . . . .	15
2.1	G. Peck jako Dostojevskij ve filmu The Great Sinner [20] . . . . .	18
2.2	Hrací plán a kolo [16] . . . . .	26
3.1	Podmíněná pravděpodobnost . . . . .	29
3.2	Aktuální délka proherní série . . . . .	37
3.3	Aktuální délka proherní série – alternativní „koráلكový“ přístup . . . . .	37
3.4	Pohyb opilého námořníka . . . . .	38
3.5	Pravděpodobnost výskytu série proher délky $n$ v $N$ spinech . . . . .	43
4.1	Shrabávání proherních sázek croupiérem [14] . . . . .	46
4.2	Příslib vzestupného trendu zisku . . . . .	47
4.3	Standardní průběh neomezeného Martingalu . . . . .	48
4.4	Střední hodnota zisku v $k$ -tém spinu . . . . .	51
4.5	Průběh omezeného Martingalu ( $n = 6$ ) . . . . .	52
4.6	Střední hodnota zisku jediného kola . . . . .	54
4.7	Hra dle systému Martingale . . . . .	55
4.8	Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený Martingale . . . . .	58
4.9	Standardní průběh Bondovské sázky . . . . .	61
4.10	Standardní průběh neomezeného D’Alambert . . . . .	64
4.11	Standardní průběh omezeného D’Alambert ( $n = 6$ ) . . . . .	64
4.12	Hra dle systému D’Alambert . . . . .	65
4.13	Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený D’Alambert . . . . .	68
4.14	Standardní průběh neomezeného Fibonacci . . . . .	68
4.15	Standardní průběh omezeného Fibonacci ( $n = 6$ ) . . . . .	69
4.16	Hra dle systému Fibonacci (modrá přerušovaná čára značí přechod ke zpětnému rozhodování mezi červeným výherním a černým proherním stavem ve vyznačeném rámečku, tj. symbolizuje návrat o dva členy Fibonacci posloupnosti) . . . . .	69
4.17	Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený Fibonacci . . . . .	72
5.1	Simulace neomezeného Martingalu . . . . .	i
5.2	Simulace omezeného Martingalu . . . . .	ii
5.3	Simulace Bondovské sázky . . . . .	iii
5.4	Simulace neomezeného Great Martingale . . . . .	iv
5.5	Simulace omezeného Great Martingale . . . . .	v
5.6	Simulace neomezeného Anti-Martingale . . . . .	vi
5.7	Simulace omezeného Anti-Martingale . . . . .	vii
5.8	Simulace neomezeného Labouchere . . . . .	viii
5.9	Simulace omezeného Labouchere . . . . .	ix
5.10	Simulace neomezeného Anti-Labouchere . . . . .	x
5.11	Simulace omezeného Labouchere . . . . .	xi
5.12	Simulace neomezeného D’Alambert . . . . .	xii
5.13	Simulace omezeného D’Alambert . . . . .	xiii

5.14	Simulace neomezeného Fibonacci . . . . .	xiv
5.15	Simulace omezeného Fibonacci . . . . .	xv
6.1	Obarvení výherního čísla . . . . .	i
6.2	Umístění sázky . . . . .	i
6.3	Zisk v jednom spinu . . . . .	ii
6.4	Celkový zisk . . . . .	ii
6.5	Grafické znázornění situace . . . . .	ii
6.6	Zohlednění maxima pro rovné sázky . . . . .	ii
6.7	Grafické znázornění situace . . . . .	iii

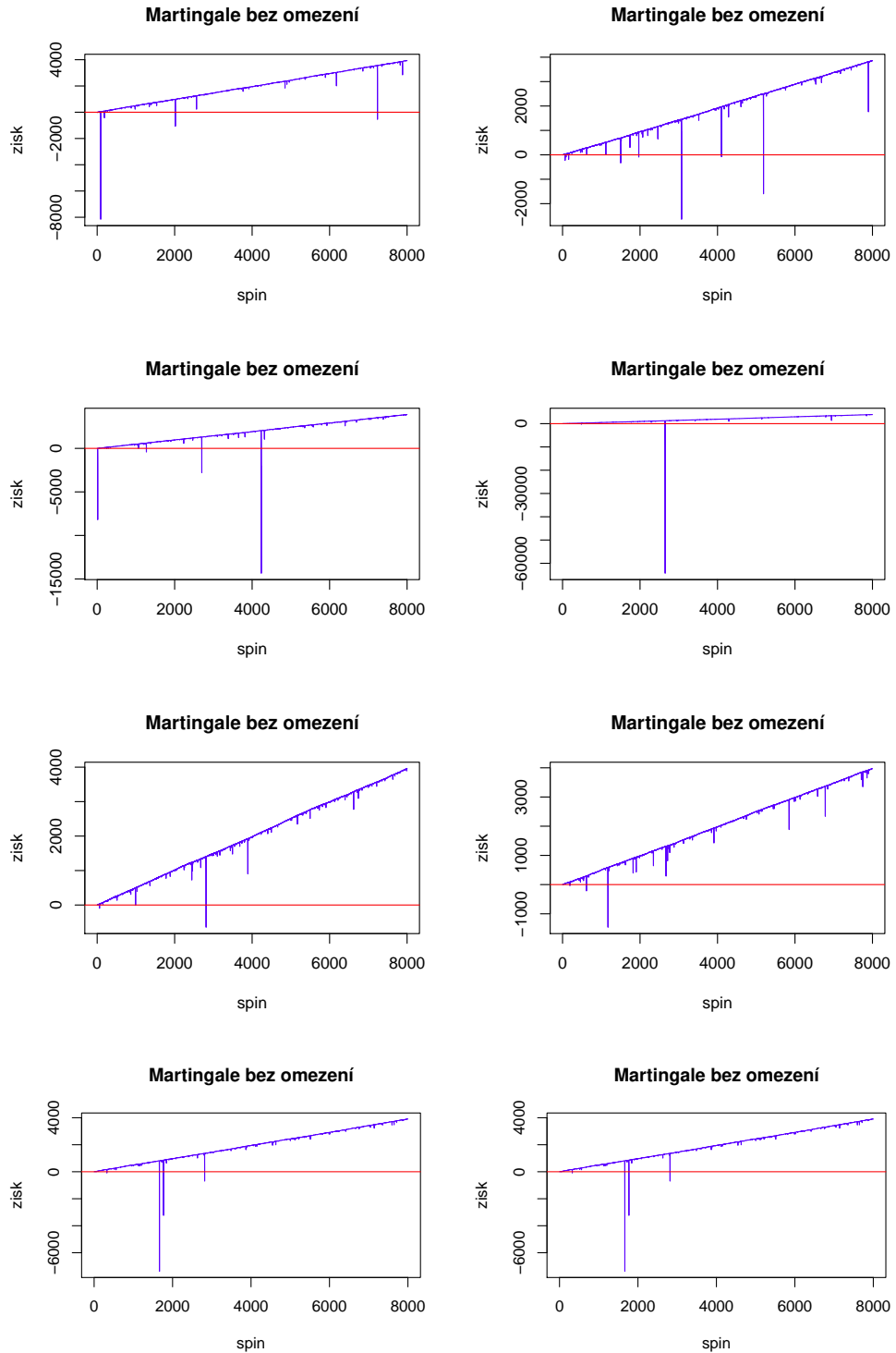
# Seznam tabulek

2.1	Sázecí poměry . . . . .	19
3.1	Pravděpodobnost výskytu série délky $n$ v $N$ spinech (zaokrouhleno na 4 desetinná místa) . . . . .	42
4.1	Střední hodnota v $k$ -tém spinu . . . . .	50
4.2	Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený Martingale . .	58
4.3	Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený D'Alambert .	67
4.4	Střední hodnota zisku v jednom spinu pro omezený Fibonacci . .	72
4.5	Srovnání analyzovaných systémů . . . . .	75

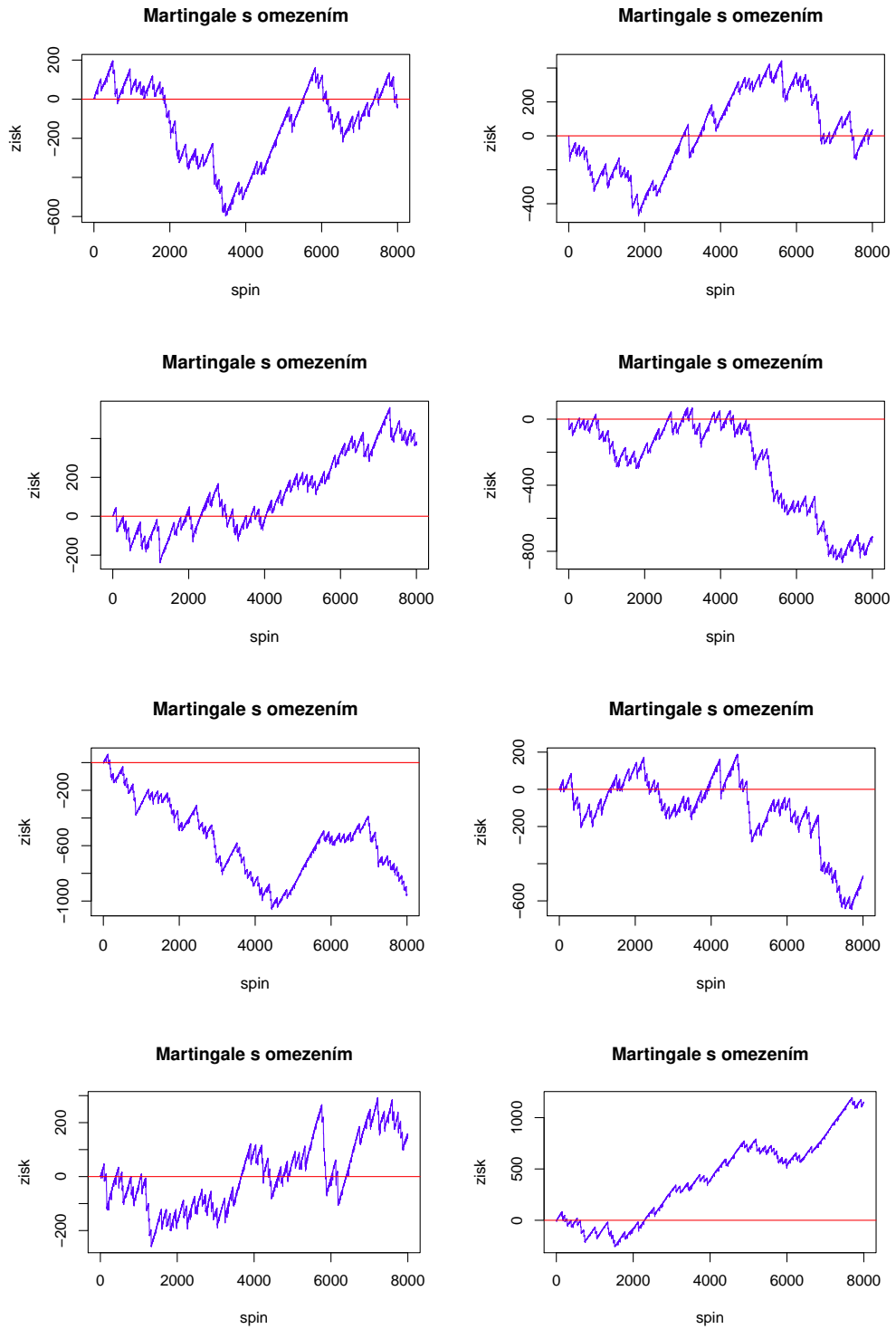
# **Přílohy**

# Příloha I

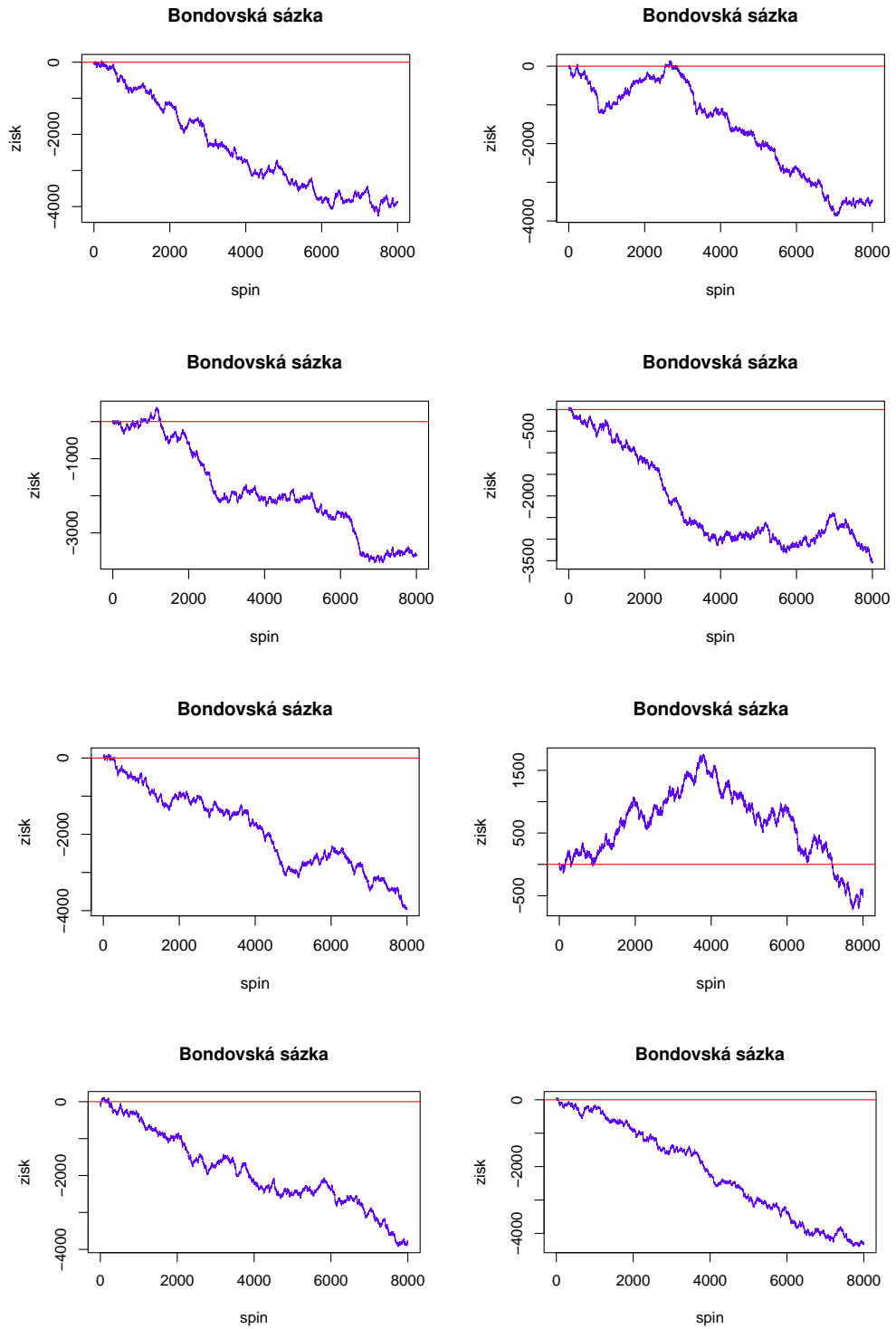
## Záznamy simulací



Obrázek 5.1: Simulace neomezeného Martingalu

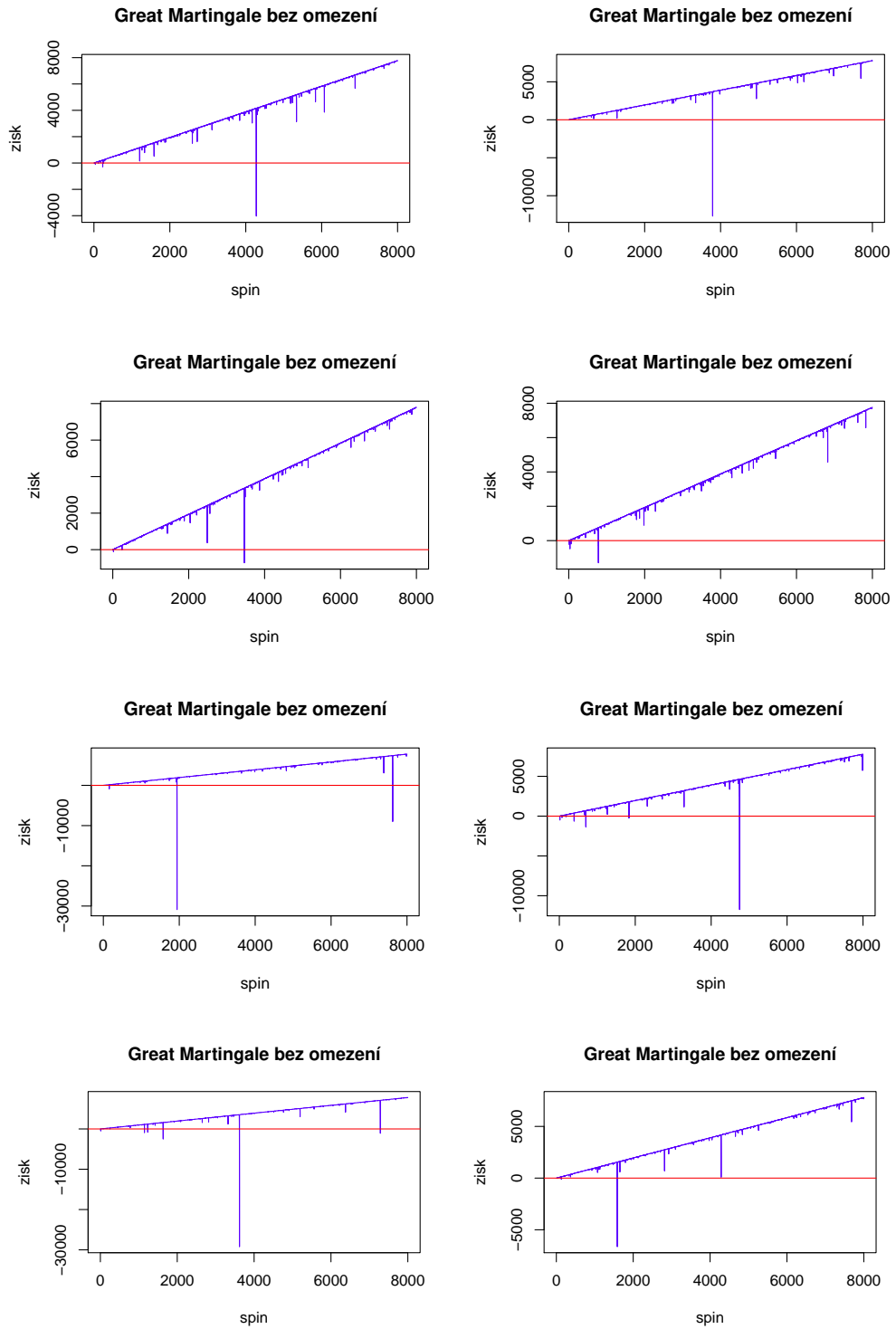


Obrázek 5.2: Simulace omezeného Martingalu

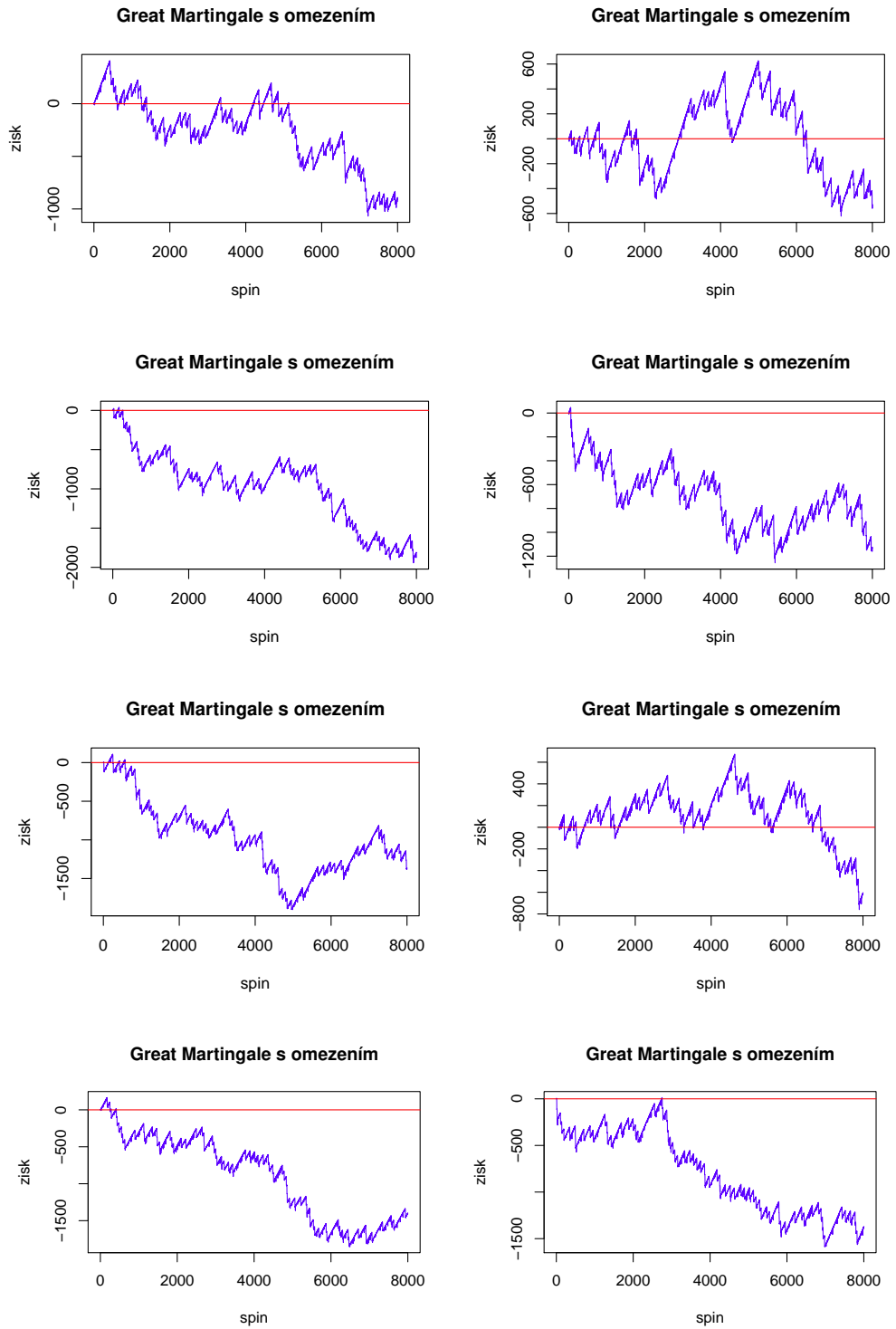


Obrázek 5.3: Simulace Bondovské sázky

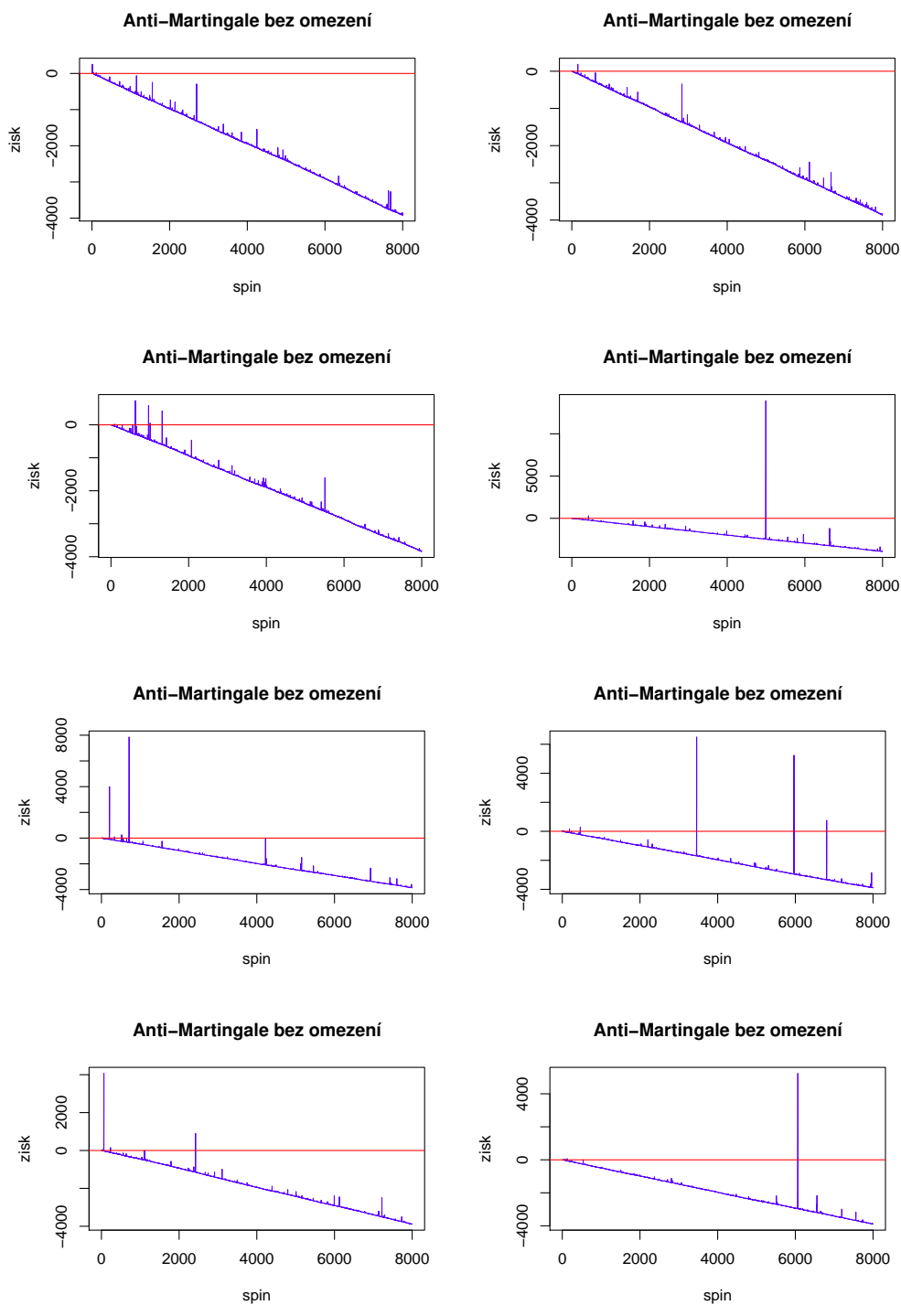




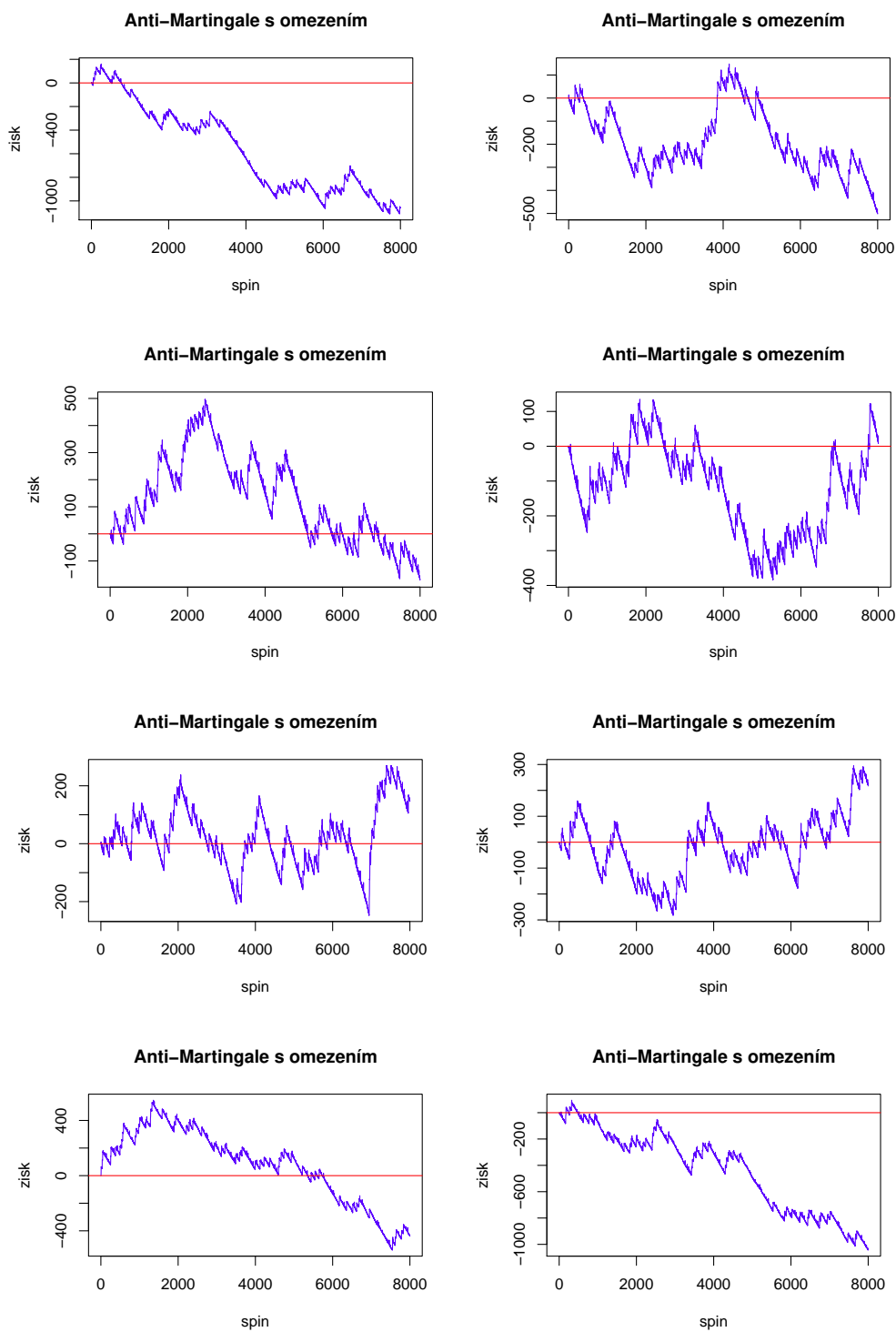
Obrázek 5.4: Simulace neomezeného Great Martingale



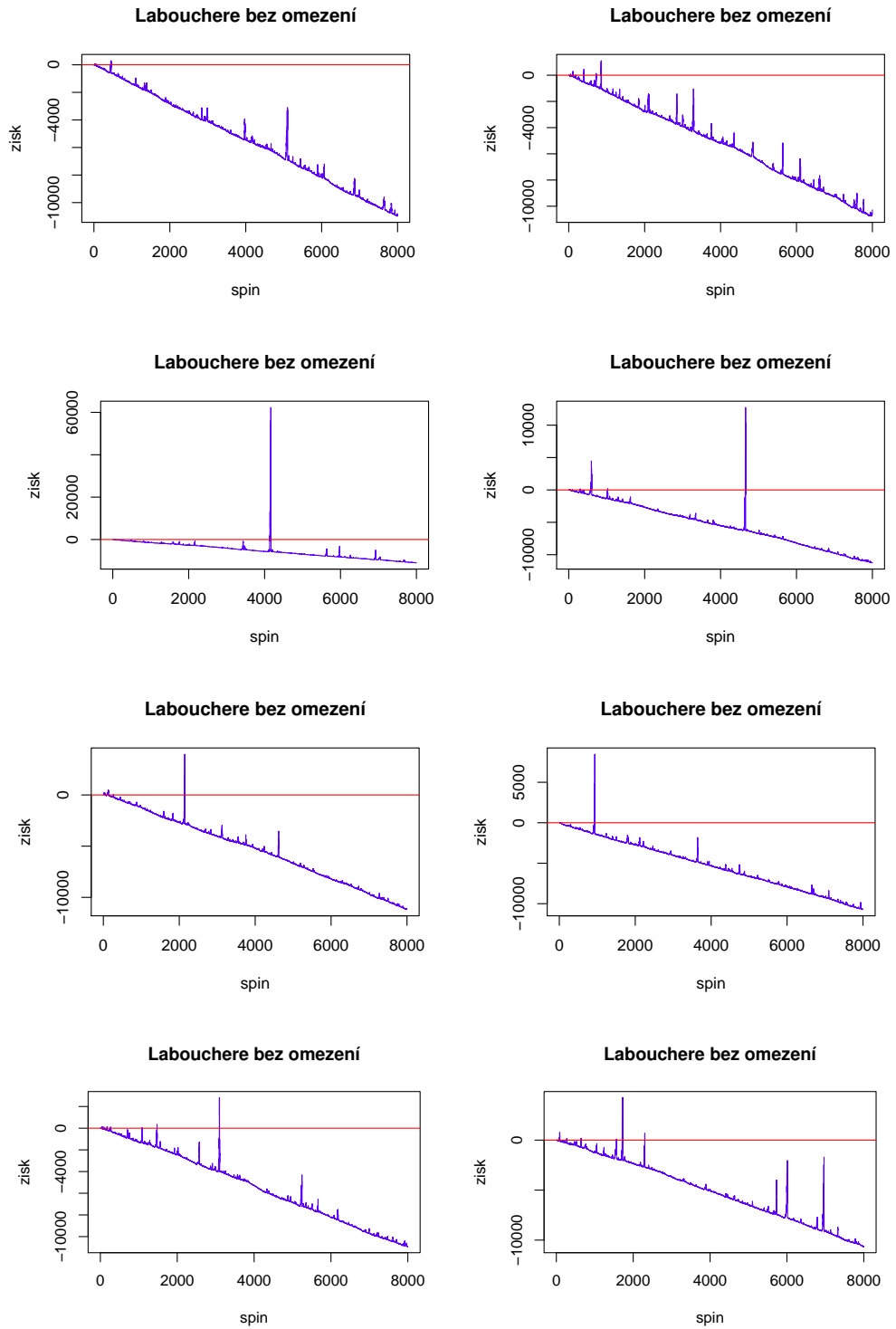
Obrázek 5.5: Simulace omezeného Great Martingale



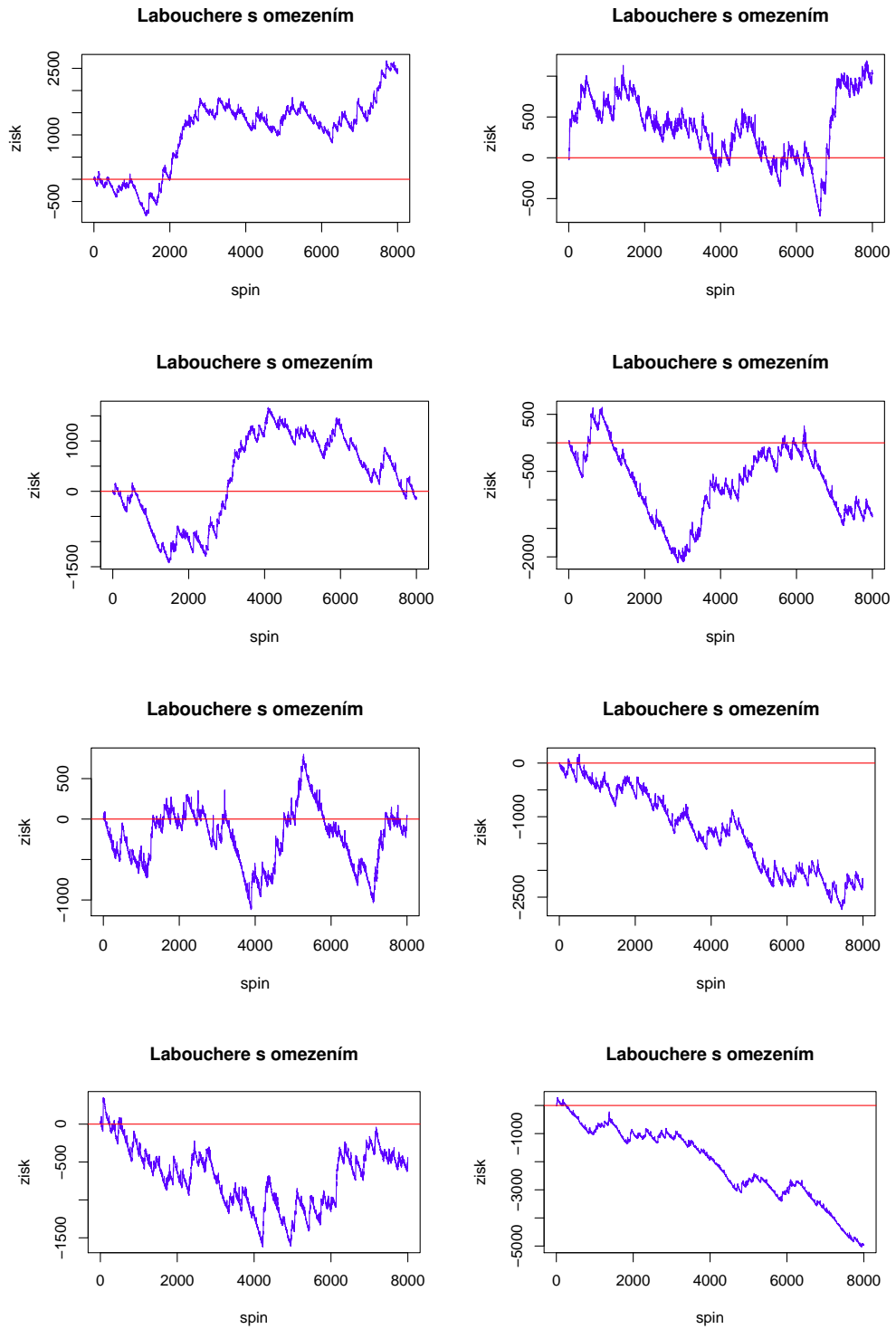
Obrázek 5.6: Simulace neomezeného Anti-Martingale



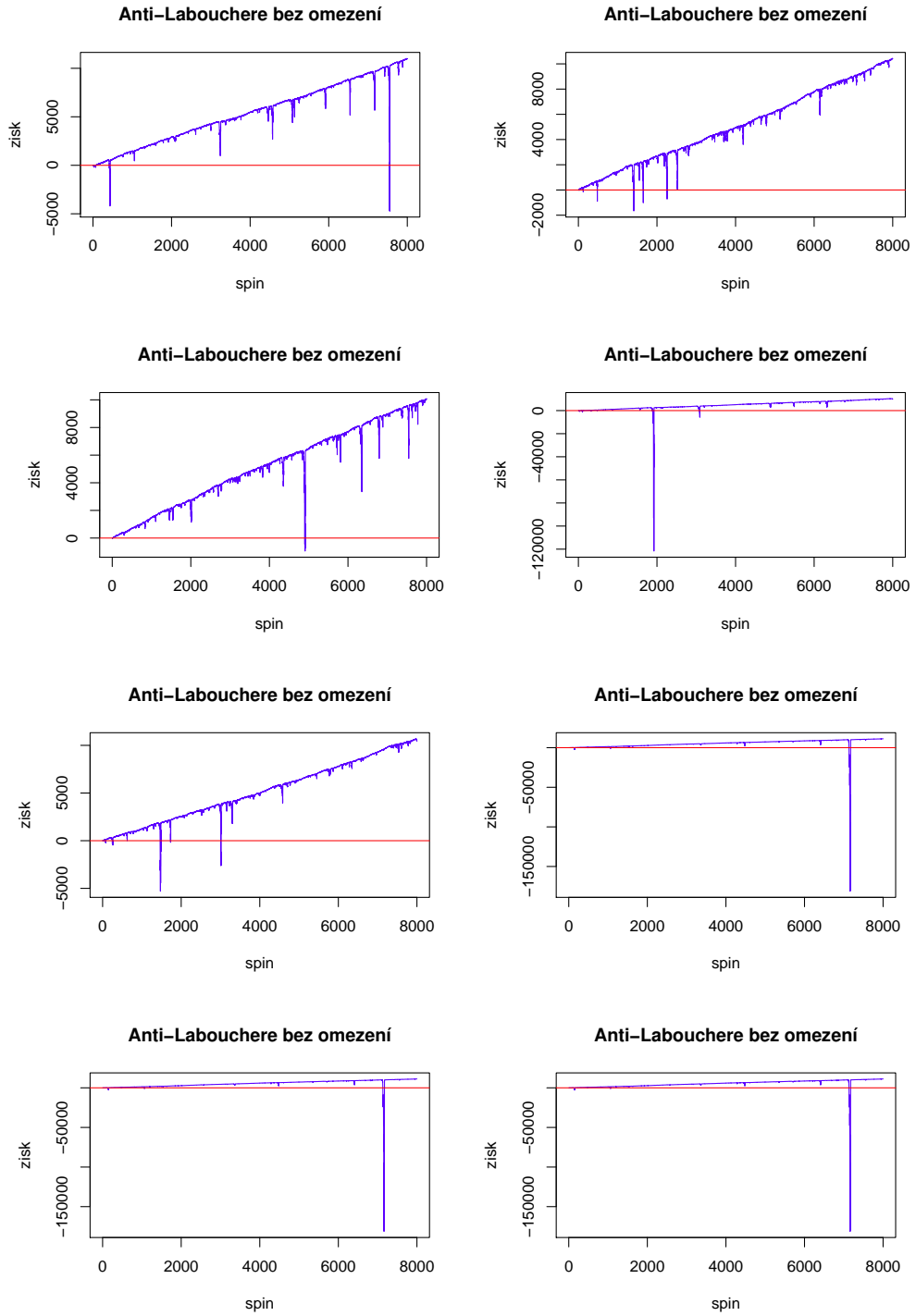
Obrázek 5.7: Simulace omezeného Anti-Martingale



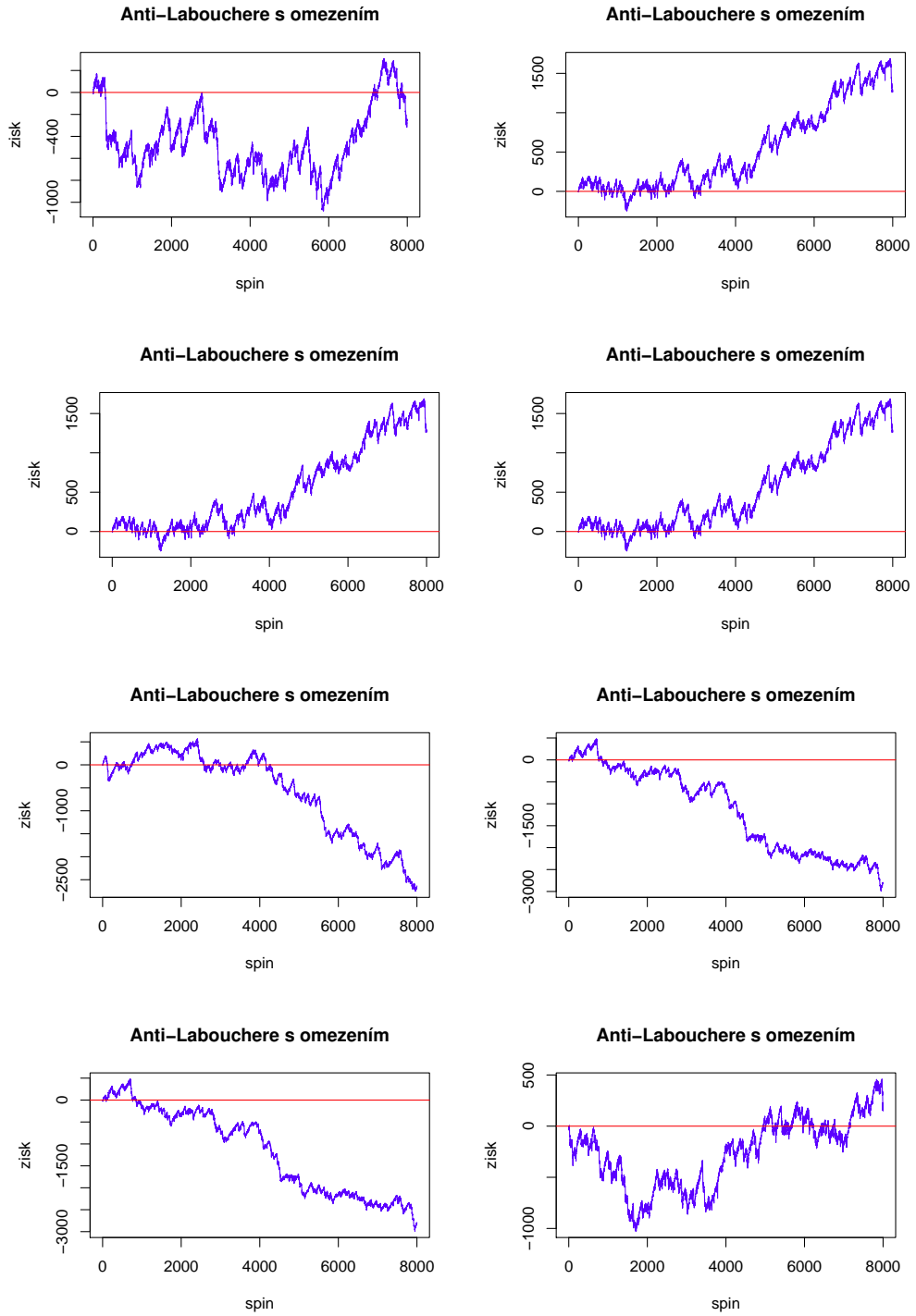
Obrázek 5.8: Simulace neomezeného Labouchere



Obrázek 5.9: Simulace omezeného Labouchere

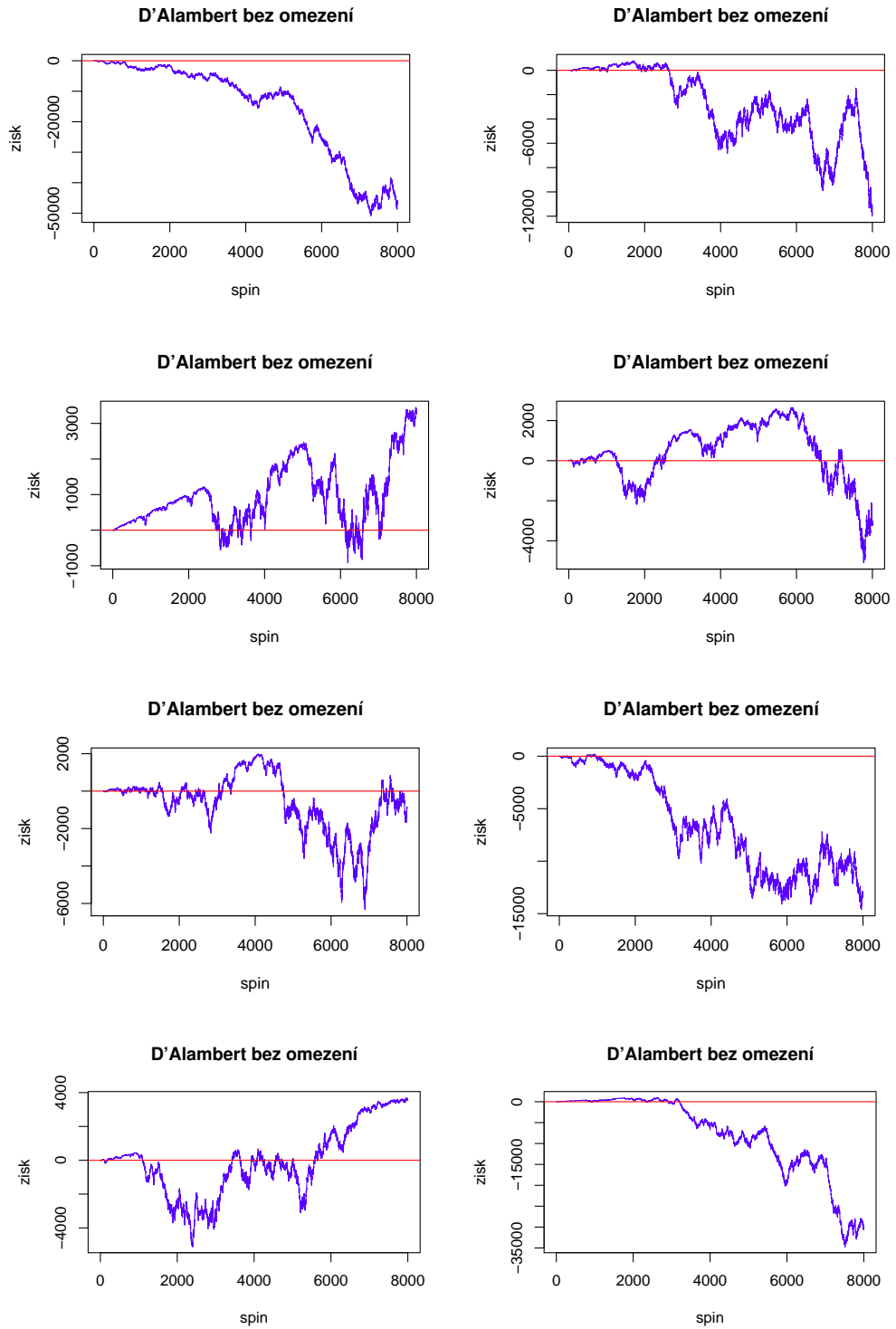


Obrázek 5.10: Simulace neomezeného Anti-Labouchere

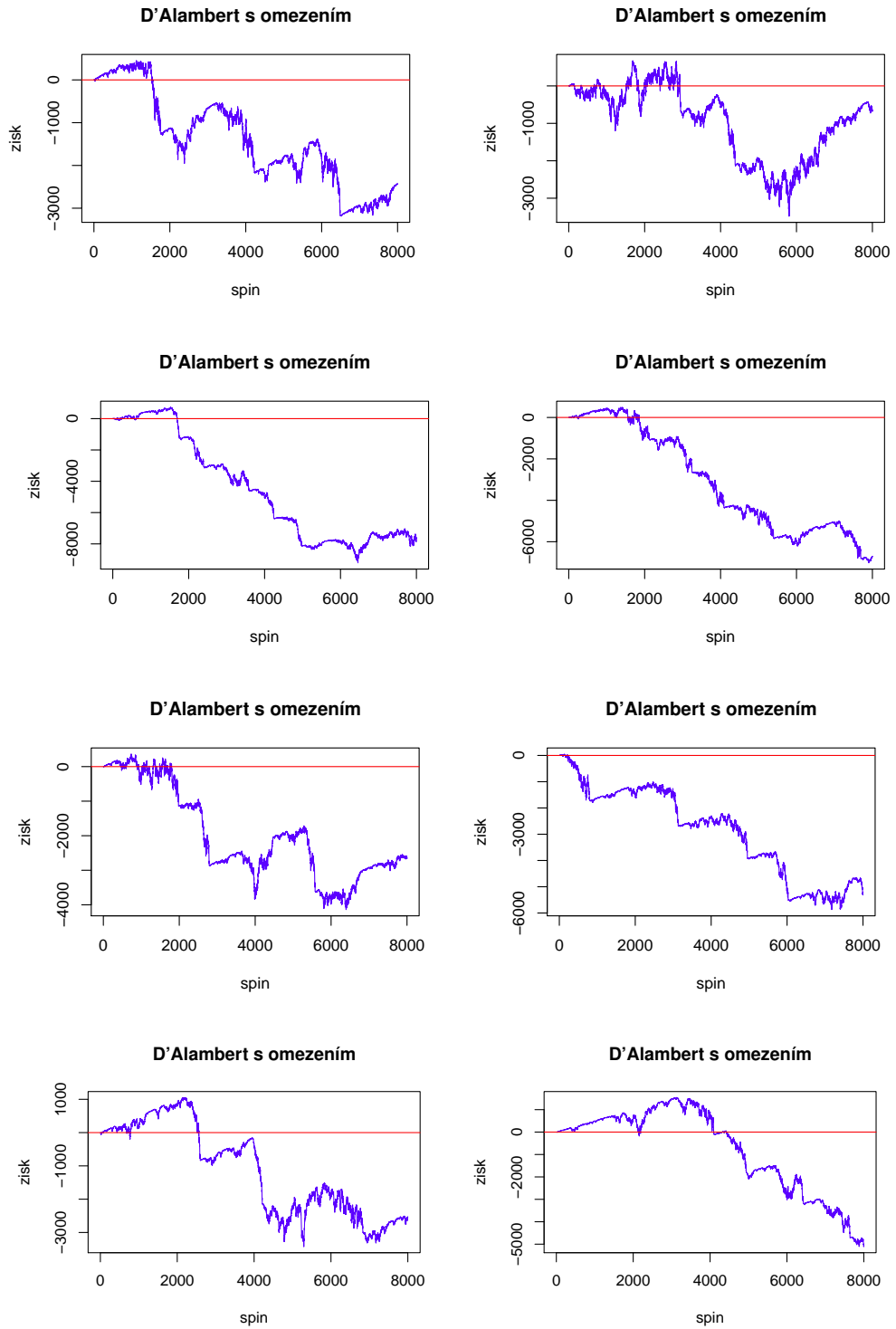


Obrázek 5.11: Simulace omezeného Labouchere

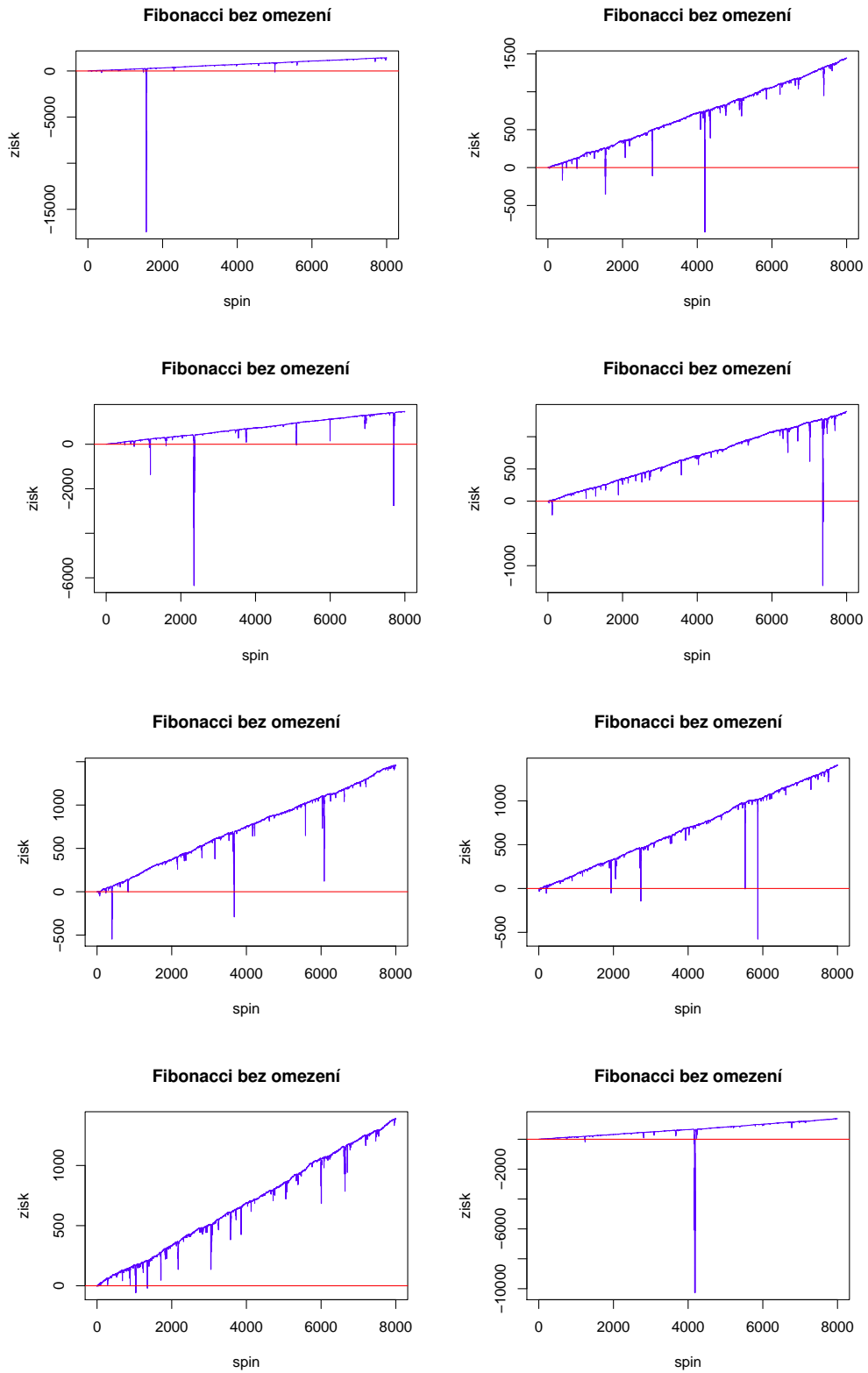




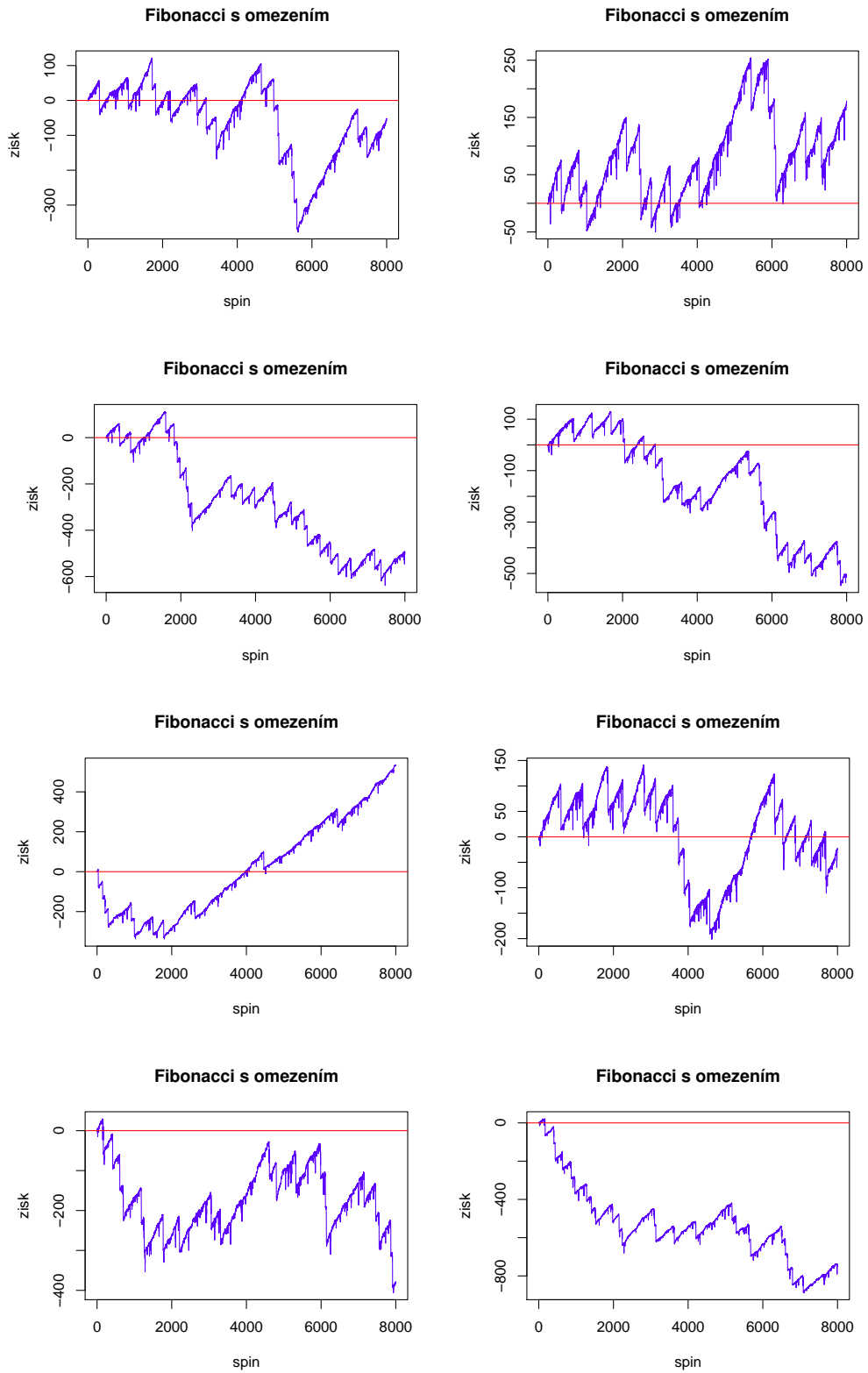
Obrázek 5.12: Simulace neomezeného D'Alambert



Obrázek 5.13: Simulace omezeného D'Alembert



Obrázek 5.14: Simulace neomezeného Fibonacci



Obrázek 5.15: Simulace omezeného Fibonacci

## Příloha II

### Excelová simulace pro začátečníky

V této příloze si ukážeme, jak jednoduše, pomocí běžně dostupného softwaru Microsoft Excel, vytvořit simulaci rulety a průběhu hry dle systému Martingale.

1	Spin	Číslo	Barva	Sázka	Zisk	Celkový zisk
2	1	20	=KDYŽ(B2=0;"zelená";KDYŽ(NEBO(B2=1;B2=3;B2=5;B2=7;B2=9;B2=12;B2=14;B2=16;B2=18;B2=19;B2=21;B2=23;B2=25;B2=27;B2=30;B2=32;B2=34;B2=36);"červená";"černá"))	1	-1	-1
3	2	28	černá	2	-2	-3
4	3	4	černá	4	-4	-7
5	4	8	černá	8	-8	-15
6	5	14	červená	16	16	1

Obrázek 6.1: Obarvení výherního čísla

### Jak snadno naprogramovat ruletu

Základní mechanika evropské rulety tkví v náhodné volbě jednoho ze 37 celých čísel v rozmezí od 0 do 36. Výherní číslo jednoho spinu tak můžeme generovat pomocí funkce `=RANDBETWEEN(0;36)`. Vzhledem ke skutečnosti, že nás v kontextu hry podle ruletových systémů zajímá pouze výherní barva, dalším krokem bude „obarvení“ výherního čísla skrze funkci `=KDYŽ(B2=0;"zelená"; KDYŽ(NEBO(B2=1; B2=3; B2=5; B2=7; B2=9; B2=12; B2=14; B2=16; B2=18; B2=19; B2=21; B2=23; B2=25; B2=27; B2=30; B2=32; B2=34; B2=36);"červená"; "černá"))` pro pole B2 a její rozšíření pro pole následná, viz obrázek 6.1.

1	Spin	Číslo	Barva	Sázka	Zisk	Celkový zisk
2	1	24	černá	1	-1	-1
3	2	5	červená	=KDYŽ(E2>0;1;2*D2)	2	1
4	3	6	černá	1	-1	0
5	4	29	černá	2	-2	-2
6	5	7	červená	4	4	2

Obrázek 6.2: Umístění sázky

### Jak snadno naprogramovat neomezený Martingale

Nyní již dokážeme tvořit náhodné sekvence výherních čísel / barev, nadešel čas naprogramovat průběh neomezeného Martingalu. Hru zahájíme sázkou 1J a do prvního pole sloupce Sázka tak jednoduše vepíšeme číslici 1. Naše další sázky však již budou ovlivněny předchozími zdary / nezdary. Druhé a každé další pole sloupce Sázka proto opatříme funkcí `=KDYŽ(E2>0; 1; 2*D2)` umísťující sázku 1J byl-li zisk v předchozím spinu kladný a naopak sázku dvojnásobnou předchozí, byl-li tento neúspěšný, viz obrázek 6.2.

Vše je připraveno pro určení zisku spjatého s jedním spinem. První a každé další pole sloupce Zisk proto ohodnotíme funkcí `=KDYŽ(C2="červená"; D2; -D2)` přiřazující zisk odpovídající kladné, respektive záporné, sázce umístěné v tomto spinu, viz obrázek 6.3.

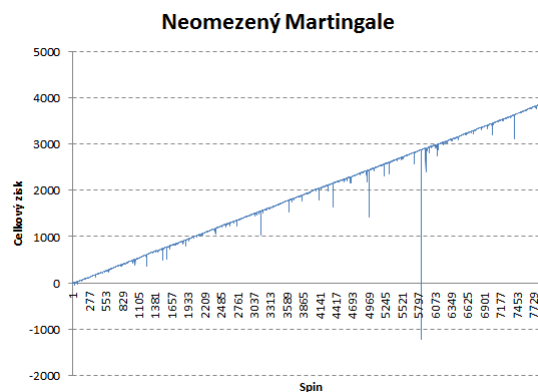
POWER										
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Spin	Číslo	Barva	Sázka	Zisk	Celkový zisk				
2	1	0	zelená	1	-1	-1				
3	2	36	červená	2	=KD	1				
4	3	31	černá	1	-1	0				
5	4	6	černá	2	-2	-2				
6	5	34	červená	4	4	2				

Obrázek 6.3: Zisk v jednom spinu

POWER										
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Spin	Číslo	Barva	Sázka	Zisk	Celkový zisk				
2	1	10	černá	1	-1	-1				
3	2	0	zelená	2	-2	=F2+E3				
4	3	27	červená	4	4	1				
5	4	16	červená	1	1	2				
6	5	24	černá	1	-1	1				

Obrázek 6.4: Celkový zisk

Od zisku v dílčích spinech snadno přejdeme k celkovému zisku. Hodnota prvního pole sloupce Celkový zisk bude odpovídat hodnotě prvního pole sloupce Zisk. Hodnotu druhého a každého dalšího pole sloupce Celkový zisk poté určíme pomocí funkce  $=F2+E3$ , viz obrázek 6.4.



Obrázek 6.5: Grafické znázornění situace

Simulací určené hodnoty celkového zisku konečně vyneseme do grafu na obrázku 6.5.

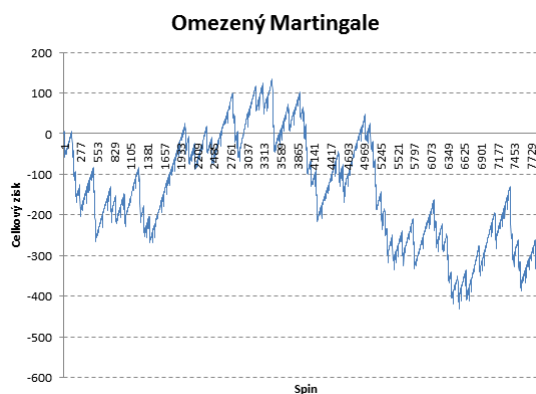
POWER										
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Spin	Číslo	Barva	Sázka	Zisk	Celkový zisk	Omezení			
2	1	21	červená	1	1	1	35			
3	2	24	černá	=KDYŽ	-1	0				
4	3	3	červená	2	2	2				
5	4	1	červená	1	1	3				
6	5	4	černá	1	-1	2				

Obrázek 6.6: Zohlednění maxima pro rovné sázky

## Jak snadno naprogramovat omezený Martingale

Na závěr zbývá ukázat, jak do naší tabulky zapracovat omezení maximální výše pro rovné sázky. Do políčka Omezení vepíšeme kýžený strop a ve druhém a každém dalším poli sloupce Sázka upravíme argument již obsažené funkce na  $=KDYŽ(NEBO(E2>0; 2*D2>H$2); 1; 2*D2)$ , tj. přidáme druhou podmínku,

vynucující nový začátek od počáteční sázky 1J v okamžiku, kdy by naše další sázka překročila stanovené maximum, viz obrázek 6.6.



Obrázek 6.7: Grafické znázornění situace

Simulací určené hodnoty nakonec opět vyneseme do grafu na obrázku 6.7.

### Jak snadno naprogramovat další systémy

Nyní již cítíme, že cesta k simulacím dalších ruletových systémů skrze excel vede přes přidávání dalších a dalších =KDYŽ funkcí. S trochou úsilí můžeme rovněž zabudovat i pravidlo o zmrazení sázek.