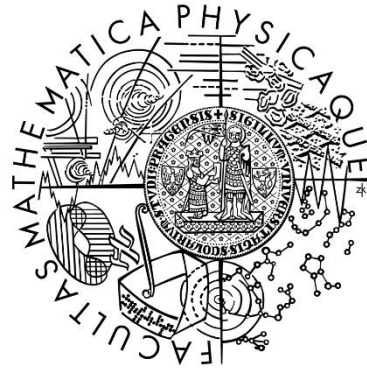


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Milan Pešta

## **Prostoročasy s toroidálními horizonty**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne.....

Milan Pešta

Rád by som sa poďakoval svojmu vedúcemu bakalárskej práce doc. RNDr. Oldřichovi Semerákovi, DSc. za podporu, početné odborné rady, mnoho prekonzultovaných hodín a predovšetkým za poskytnutú literatúru a podklady vo forme výpočtov.

Název práce: Prostoročasy s toroidálnymi horizonty

Autor: Milan Pešta

Katedra / Ústav: Ústav teoretickej fyziky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc.

**Abstrakt:** V práci stručne prezentujeme základné výsledky teorémov o jednoznačnosti čiernych dier a teorému o topologickej cenzúre. Na ich základe následne skúmame vlastnosti známeho riešenia Einsteinových rovníc s toroidálnym horizontom udalostí. Pre dané riešenie navrhujeme jednu z možných vizualizácií použitých súradníc, ktorá nám umožňuje lepšie pochopiť správanie rôznych invariantov v okolí singularity. V práci ďalej uvádzame dve riešenia s prstencovou singularitou ako potenciálnych kandidátov na priestoročasy s toroidálnymi horizontmi, ktorých vlastnosti sú intuitívne interpretovateľné pomocou toroidálnych, respektíve Weylových súradníc. V poslednej časti sa zaoberáme zdanlivými horizontmi skúmaných riešení a odvodzujeme určujúcu diferenciálnu rovnicu pre zdanlivý horizont všeobecného riešenia z Weylovej triedy. Numerickým riešením tejto rovnice sa nezaobráme.

**Kľúčová slova:** obecná teória relativity, čierne díry, toroidální horizonty

Title: Space-times with toroidal horizons

Author: Milan Pešta

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc.

Abstract: Basic results of the uniqueness theorems and the topological-censorship theorem are presented. Properties of the well-known solution of Einstein's equations with a toroidal event horizon are examined and one of possible visualizations of the coordinate system that helps to better understand the behaviour of various invariants in the vicinity of the singularity is suggested. Apart from this solution, two solutions with a ring singularity are introduced as potential candidates for space-times with toroidal horizons whose properties are interpreted intuitively using the toroidal or Weyl coordinate systems. Last part is devoted to apparent horizons of the considered solutions and the differential equation for the apparent horizon of an arbitrary solution of the Weyl class is derived. The numerical solution of this equation is not presented.

Keywords: general theory of relativity, black holes, toroidal horizons

# Obsah

Úvod.....	3
<b>1. Všeobecný prehľad všeobecnej relativity .....</b>	<b>5</b>
1.1 Použitá konvencia .....	5
1.2 Základné pojmy.....	6
<b>2. Teorémy o jednoznačnosti a topologická cenzúra .....</b>	<b>10</b>
<b>3. Toroidálne riešenia Einsteinových rovníc.....</b>	<b>12</b>
3.1 Singularity, Kretschmannov invariant, horizonty a asymptotika.....	13
3.2 Vlastné obvody a povrch horizontu .....	15
3.3 Intenzita poľa a krivosť.....	16
3.4 Riemannov a Ricciho tenzor .....	17
<b>4. Prstencové riešenia Einsteinových rovníc.....</b>	<b>18</b>
4.1 Toroidálne súradnice.....	19
4.2 Majumdarov-Papapetrouvov prstenec .....	21
4.2.1 Vlastné obvody a asymptotika.....	22
4.2.2 Vlastný polomer, vlastné vzdialenosti a vlastná plocha uzavretá prstencom.....	24
4.2.3 Intenzita poľa a krivosť.....	25
4.2.4 Kretschmannov invariant .....	27
4.3 Bachov-Weylov prstenec .....	29
4.3.1 Vlastné obvody a asymptotika .....	30
4.3.2 Vlastný polomer, vlastné vzdialenosti a vlastná plocha uzavretá prstencom.....	32
4.3.3 Intenzita poľa a krivosť.....	33
4.3.4 Kretschmannov invariant .....	36
<b>5. Zdanlivé horizonty .....</b>	<b>39</b>
5.1 Využitie zdanlivých horizontov v numerickej relativite .....	40
5.2 Zdanlivý horizont toroidálneho riešenia .....	41
5.3 Zdanlivé horizonty prstencových riešení .....	42

<b>Záver.....</b>	<b>46</b>
<b>Zoznam použitej literatúry.....</b>	<b>48</b>
<b>Zoznam obrázkov.....</b>	<b>50</b>
<b>Zoznam tabuliek.....</b>	<b>51</b>

## Úvod

V roku 1915 prvýkrát uzrela svetlo sveta všeobecná teória relativity formulovaná Albertom Einsteinom, ktorá so sebou priniesla dovtedy nevídaný pohľad na gravitáciu. Skĺbila v sebe totiž závislosť medzi geometriou priestoročasu a hmotou (energiou) objektov – čím hmotnejší zdroj, tým viac je priestoročas v jeho okolí „zakrivený“.

Medzi mnohými predpoveďami, ktoré z tejto pozoruhodnej teórie vyplývajú, vyčnieva najmä jedna, a to prípustnosť existencie záhadných objektov - tzv. čiernych dier (za zmienku stojí, že ideou tzv. tmavých telies sa ľudia zaoberali už viac ako storočie pred formuláciou teórie relativity). Ide o obzvlášť kompaktné objekty s gravitačným poľom tak silným, že z neho nedokáže uniknúť ani svetlo, a teda vonkajšiemu pozorovateľovi sa javia ako čierne (odtiaľ názov čierne diery). Dlhé roky sa viedli spory o to, či sa čierne diery v priestoročase môžu skutočne vyskytovať alebo ide len o matematickú zvláštnosť, ktorá však nemá žiadne fyzikálne opodstatnenie. Pozorovania z druhej polovice 20. storočia, rovnako ako nedávny objav gravitačných vĺn prostredníctvom experimentu LIGO však nasvedčujú tomu, že čierne diery sú reálne astrofyzikálne objekty, ktoré vznikajú kolapsom veľmi masívnych hviezd. Následné zlúčenie takto vzniknutých čiernych dier umožňuje tvorbu tzv. supermasívnych čiernych dier, o ktorých sa predpokladá, že sa nachádzajú v centre väčšiny galaxií.

V 60. a 70. rokoch 20. storočia sa rozpútali debaty o možných riešeniach Einsteinových rovníc, ktoré vedú na rôzne priestoročasy obsahujúce čierne diery, čo viedlo až k formulácii „no-hair“ teorému (pri splnení určitých predpokladov je čierna diera možné jednoznačne popísať konečným súborom parametrov). Otázne však zostávalo, ako sa zmení možná topológia čiernych dier pri porušení predpokladov daných teorémov – konkrétne či je prípustná iná ako sférická topológia horizontu udalostí („hranice“) čiernej diery, čo predstavuje základnú motiváciu aj našej práce (podobnou témou sa pred nami už pravdaže zaoberali aj iní, napr. [1]).

V prvej kapitole zavádzame použitú konvenciu a rekapitulujeme základné pojmy nevyhnutné k pochopeniu ďalších častí práce. Druhá kapitola je venovaná krátkemu zhrnutiu záverov teorémov o jednoznačnosti čiernych dier, respektíve teorému o topologickej cenzúre. Tretia kapitola obsahuje pôvodné výsledky týkajúce sa vlastností známeho riešenia Einsteinových rovníc so zápornou kozmologickou konštantou, ktoré má toroidálnu topológiu. V štvrtej kapitole vychádzame



predovšetkým z podkladov poskytnutých O. Semerákom vo forme výpočtov týkajúcich sa vlastností prstencových riešení Einsteinových rovníc, ktoré predstavujú sľubných kandidátov na priestoročasy s toroidálnym horizontom. Piata (záverečná) kapitola je venovaná rozboru zdanlivých horizontov toroidálneho riešenia a prstencových riešení Einsteinových rovníc, pričom v rámci kapitoly dospejeme k určujúcej diferenciálnej rovnici pre zdanlivý horizont všeobecného riešenia z Weylovej triedy (trieda statických axiálne symetrických priestoročasov, ktoré spĺňajú istú podmienku kladenú na tenzor hybnosti a energie) a skúmame možné počiatočné podmienky vyplývajúce z hladkosti horizontu. V závere rekapitulujeme získané výsledky a diskutujeme možné dôsledky.

# 1. Všeobecný prehľad všeobecnej relativity

Matematický aparát všeobecnej teórie relativity nie je v odbornej literatúre úplne jednotný, a teda (aj napriek predpokladu oboznámenia čitateľa so základnými princípmi tejto teórie) je vhodné najprv zrekapitulovať použitú notáciu, rovnako ako definície niektorých základných pojmov.

## 1.1 Použitá konvencia

V celej práci sme adoptovali geometrizovanú sústavu jednotiek, v ktorej sú gravitačná konštanta a rýchlosť svetla identicky rovné jednej,

$$G = 1, \quad c = 1.$$

Priestoročasové indexy môžu nadobúdať hodnotu od 0 do 3 (pričom 0 odpovedá časovej zložke a indexy 1 až 3 odpovedajú priestorovým zložkám) a značíme ich pomocou gréckych písmen ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ). Zložky kontravariantných tenzorov značíme indexom hore, zložky kovariantných tenzorov (foriem) naopak značíme pomocou spodného indexu. Zmiešaný tenzor, ktorý má  $p$  horných indexov a  $q$  dolných indexov nazveme  $p$ -krát kontravariantný,  $q$ -krát kovariantný tenzor. Príklad 2-krát kontravariantného, 1-krát kovariantného tenzoru:

$$V^{\alpha\beta}{}_{\gamma}.$$

Na poradí indexov (horných aj dolných) vo všeobecnosti záleží. V práci ďalej využívame Einsteinovu sčítaciu konvenciu – cez opakovaný index sa sčíta (až na výnimky, ktoré sú však jasné z kontextu),

$$\sum_{\alpha=0}^3 V^{\alpha} W_{\alpha} \equiv V^{\alpha} W_{\alpha}, \quad \sum_{\alpha=0}^3 V^{\alpha}{}_{\alpha} \equiv V^{\alpha}{}_{\alpha}.$$

Priestoročas predpokladáme v podobe hladkej Lorentzovskej variety  $M$  s odpovedajúcim (kovariantným) metrickým tenzorom  $g_{\alpha\beta}$  signatúry  $(-, +, +, +)$ . Priestoročiasovú varietu skrátene značíme  $(M, g_{\alpha\beta})$ . Pomocou metrického tenzora je možné prechádzať od vektorov k formám (od kontravariantných tenzorov ku kovariantným tenzorom) a naopak, a to zdvíhaním a znižovaním indexov,

$$V^{\alpha} = g^{\alpha\beta} V_{\beta}, \quad V_{\alpha} = g_{\alpha\beta} V^{\beta}, \quad V^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} V_{\gamma}{}^{\beta}.$$

V každom bode priestoročasovej variety je definovaný skalárny súčin pomocou metrického tenzoru  $g_{\alpha\beta}$ ,

$$g_{\alpha\beta}V^\alpha W^\beta = V_\beta W^\beta = V^\alpha W_\alpha .$$

Parciálnu deriváciu podľa súradnice  $x^\alpha$  značíme čiarkou a odpovedajúcim indexom,

$$\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} = V^\beta_{,\alpha} .$$

Kovariantnú deriváciu (ktorá zachováva tenzorovú povahu derivovaných veličín) značíme nablou a odpovedajúcim indexom,

$$\nabla_\alpha V^\beta = V^\beta_{,\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\nu , \quad \nabla_\alpha V_\beta = V_{\beta,\alpha} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} V_\nu ,$$

kde  $\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$  sú Christoffelove symboly druhého druhu (afinná konexia kompatibilná s metrikou) dané prvými deriváciami metrického tenzoru,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) .$$

Metriku v daných súradniciach je zvykom zapisovať nie ako maticu  $g_{\alpha\beta}$ , ale pomocou priestoročasového intervalu,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta .$$

*Kurzívou* značíme voľne preložené anglické termíny, prípadne dôležité pojmy, ktoré sa v texte vyskytli po prvýkrát.

## 1.2 Základné pojmy

Plné pochopenie obsahu nasledujúcich kapitol je podmienené znalosťou niektorých základných pojmov, ktoré si teraz zavedieme (pri ich zavádzaní vychádzame predovšetkým z [2], [3] a [4]). Skúmané pojmy sme kvôli prehľadnosti zoskupili do niekoľkých tematických celkov.

### Čierne diery

Keďže je naša práca motivovaná skúmaním novej topológie čiernych dier (respektíve topológie ich horizontov), je vhodné upresniť, čo si pod týmto pojmom predstavujeme.

Čierna diera je intuitívne vnímaná ako oblasť priestoročasu, z ktorej nedokáže žiadna svetelná geodetika uniknúť do nekonečna. Matematická formulácia tohto tvrdenia si vyžaduje porozumenie ďalším pojmom.

*Kauzálnou budúcnosťou/minulosťou* udalosti  $p$  nazveme množinu všetkých bodov priestoročasu, ktoré je možné dosiahnuť z  $p$  pomocou do budúcnosti/minulosti orientovaných časupodobných alebo svetelných svetočiar. Značíme  $J^+(p)/J^-(p)$ .

*Kauzálnou budúcnosťou/minulosťou* oblasti priestoročasu  $S$  nazveme zjednotenie kauzálnych budúcností/minulostí všetkých udalostí obsiahnutých v danej oblasti priestoročasu. Značíme  $J^+(S)/J^-(S)$ .

*Budúce/minulé svetelné nekonečno* je oblasť priestoročasu, kde končia všetky do budúcnosti mieriace svetelné geodetiky, ktoré môžu uniknúť do súradnicového nekonečna. Značíme  $I^+/I^-$ .

Body, v ktorých sa  $F^+$  a  $F^-$  stretnú, sa nazývajú *priestorové nekonečno* a predstavujú oblasť priestoročasu, v ktorej končia všetky priestorupodobné geodetiky, ktoré nekončia v singularite. Značíme  $i^0$ .

*Budúce/minulé časové nekonečno* nazveme oblasť priestoročasu, v ktorej končia všetky do budúcnosti/minulosti mieriace časupodobné geodetiky, ktoré nekončia v singularite. Značíme  $i^+/i^-$ .

Oblasťou čiernej diery priestoročasovej variety teda nazveme množinu všetkých udalostí, ktoré neležia v kauzálny minulosti budúceho svetelného nekonečna.

Horizont udalostí je definovaný ako hranica oblasti čiernej diery – ide teda o svetelnú nadplochu generovanú svetelnými geodetikami, ktoré nekončia ani v budúcom svetelnom nekonečne, ani v singularite. Horizont udalostí je taktiež kauzálna hranica – oblasť čiernej diery totiž nemôže kauzálny ovplyvňovať vonkajšiu oblasť priestoročasu (oblasť „nad“ horizontom). Dvojrozmerná nadplocha získaná prienikom horizontu udalostí s priestorupodným rezom priestoročasu  $\Sigma$  sa nazýva *prierez horizontu udalostí* (v literatúre sa však často tieto dva pojmy zamieňajú).

### **Topologická cenzúra**

Teorém topologickej cenzúry na základe rozumných predpokladov vyvodzuje rozsiahle dôsledky týkajúce sa topológie priestoročasu. Pre (aspoň povrchný) náhľad do tejto problematiky je nutné orientovať sa v nasledujúcich pojmoch.

*Energetickými podmienkami* rozumieme isté predpoklady, ktoré sa kladú na tenzor energie a hybnosti  $T_{\alpha\beta}$ . V literatúre sa uvádzajú štyri rôzne energetické podmienky – slabá, nulová, silná a dominantná. Medzi jednotlivými energetickými podmienkami platia rôzne jednostranné implikácie, a teda nie sú úplne nezávislé (líšia sa v sile predpokladov). V znení teorému o topologickej cenzúre sa konkrétne vyskytuje nulová energetická podmienka, ktorá vyžaduje, aby pre každý do budúcnosti orientovaný svetelný vektor  $k^\alpha$  platilo

$$T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0.$$

*Podmienka silnej kauzality* platí v  $p$ , ak každé okolie bodu  $p$  obsahuje okolie  $p$ , ktoré žiadna kauzálna krivka nepretne viac ako jedenkrát.

Množina  $N$  sa nazve *globálne hyperbolická*, ak v nej platí podmienka silnej kauzality a pre každé dva body  $p$  a  $q$  platí, že  $J^+(p) \cap J^-(q)$  je kompaktný a obsiahnutý v  $N$ .

### **Krivosť**

Na úrovni druhých derivácií metriky sa nachádza krivosť reprezentovaná *Riemannovým tenzorom*  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  definovaným pomocou Christoffelových symbolov,

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}.$$

Úžením Riemannovho tenzoru v prvom a treťom indexe sa získa *Ricciho tenzor*  $R_{\alpha\beta}$ ,

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}.$$

Ďalším úžením Ricciho tenzoru sa dostane Ricciho skalár  $R$  (respektíve skalárna krivosť),

$$R = R^\alpha{}_{\alpha},$$

ktorý invariantne vyjadruje krivosť priestoročasu ako celku (obsahuje časový aj priestorový príspevok). Niekedy je však názornejšie počítať krivosť len určitých vhodne zvolených dvojrozmerných priestorupodobných rezov – vtedy sa namiesto skalárnej krivosti zavádza *Gaussova krivosť* (značíme  ${}^{(2)}R/2$ ), ktorá je daná polovicou príslušnej skalárnej krivosti.

*Kretschmannov invariant*  $K$  (tiež Kretschmannov skalár) je dôležitá veličina vo všeobecnej teórii relativity, ktorá napríklad dokáže napovedať, či je daná singularita priestoročasu len dôsledkom patológie súradníc (a teda je možné ju odstrániť

prechodom k popisu pomocou vhodnejších súradníc) alebo ide o skutočnú singularitu fyzikálnej povahy. Kretschmannov invariant je daný kontrakciou Riemannovho tenzoru so sebou samým v odpovedajúcich indexoch (ide teda o najjednoduchší kvadratický invariant krivosti),

$$K = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

V prípade, že sa v ďalšom texte vyskytnú neznáme pojmy, ktoré nie sú uvedené v tejto sekcii, bude pri nich poskytnuté stručné vysvetlenie.

## 2. Teorémy o jednoznačnosti a topologická cenzúra

Otázka jednoznačnosti čiernych dier nebola dlhé roky zodpovedaná – nevedelo sa teda, koľko „druhov“ čiernych dier (aspoň za zjednodušeného predpokladu asymptotickej plochosti a vákuovej, respektíve elektrovákuovej povahy priestoročasu) môže existovať. Medzi prvými sa uspokojujúcu odpoveď na túto otázku pokúšal ponúknuť Werner Israel v roku 1967 [5], ktorému sa podarilo dokázať, že každá izolovaná statická čierna diera musí byť sféricky symetrická, a je teda popísaná Schwarzschildovým riešením. Platnosť opačnej implikácie (každé vákuové sféricky symetrické riešenie je časťou Schwarzschildovho riešenia, ktoré je statické) bola známa už skôr a je znením Birkhoffovho teorému. Na ďalšom rozšírení Israelovho teorému jednoznačnosti sa podieľali Carter [6] a Robinson [7], ktorí ukázali, že každá izolovaná stacionárna čierna diera je Kerrovho typu (ktorý reprezentuje rotujúcu čiernu dieru). V prípade, že je skúmaná izolovaná čierna diera nabitá, platnosť nadobúdajú zovšeobecnené teorémy jednoznačnosti – každá statická čierna diera je Reissnerovho-Nordströmovho typu a každá stacionárna čierna diera je Kerrovho-Newmanovho typu. Každá izolovaná čierna diera je teda jednoznačne charakterizovaná trojicou parametrov (hmotnosť, náboj, moment hybnosti), na čo sa niekedy odkazuje frázou „čierne diery nemajú vlasy“.

Z teorémov o jednoznačnosti čiernych dier teda vyplýva, že každá izolovaná stacionárna čierna diera má horizont so sférickou topológiou (za predpokladu asymptotickej plochosti a nesingulárnosti priestoročasu). Existuje však podobné obmedzenie na topológiu horizontu aj v prípade, že opustíme predpoklad izolovanosti? Odpoveď na túto otázku poskytuje teorém topologickej cenzúry, respektíve jeden z jeho dôsledkov. Friedmanova-Schleichova-Wittova formulácia teorému topologickej cenzúry [8] zjednodušene tvrdí, že za predpokladu asymptotickej plochosti, globálnej hyperbolickosti a slabej energetickej podmienky všeobecná relativita neumožňuje žiadnemu pozorovateľovi odhaliť netriviálnu topológiu horizontu, pretože každá topologická štruktúra skolabuje prirýchlo na to, aby ňou dokázalo prejsť svetlo (pozorovateľ mimo všetkých čiernych dier teda nie je schopný preskúmať žiadnu netriviálnu topologickú štruktúru). Chrušciel a Wald [9] následne na základe tohto tvrdenia ukázali, že každá spojitá časť prierezu horizontu udalostí stacionárnej čiernej diery má sférickú topológiu.

Iná ako sférická topológia horizontu si teda vyžaduje porušenie predpokladov teorémov o jednoznačnosti, respektíve teorému o topologickej cenzúre. Jedným takým riešením sa zaoberáme v nasledujúcej kapitole.



### 3. Toroidálne riešenia Einsteinových rovníc

Toroidálnymi riešeniami Einsteinových rovníc v tejto práci súhrnne nazývame všetky priestoročasy, ktoré umožňujú vznik horizontov (udalostí, prípadne zdanlivých horizontov) s toroidálnou topológiou (zjednodušene teda ide o uzavreté povrchy definované ako súčin dvoch 1-sfér). Ako však vyplýva z predchádzajúcej kapitoly, toroidálne horizonty (udalosti) sú prípustné len v prípade, ak je porušený aspoň jeden z predpokladov teorému topologickej cenzúry, respektíve teorému o jednoznačnosti čiernych dier. Ak teda nechceme pripustiť nestacionárny vývoj priestoročasu ani existenciu nejakej „exotickej“ hmoty (ktorá by nespĺňala energetické podmienky), tak je nutné opustiť predpoklad asymptotickej plochosti.

Z tohto dôvodu sa v rámci tejto kapitoly budeme zaoberať riešením prevzatým z [10], v ktorom kozmologická konštanta nadobúda zápornú hodnotu – ide teda o riešenie z triedy anti-de Sitterových priestoročasov. Spomínané riešenie sa dostane zo statickej cylindricky symetrickej vákuovej situácie identifikáciou bodov na osi symetrie, ktoré odpovedajú hodnotám 0 a  $2\pi$  jednej zo súradníc, a teda táto súradnica prejde na periodickú.

Metrika skúmaného riešenia nadobúda tvar

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{1}{N^2} dr^2 + r^2(d\phi^2 + d\psi^2), \quad (3.1)$$

kde funkcia  $N$  je daná vzťahom

$$N = \sqrt{-\frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2M}{r}}, \quad (3.2)$$

pričom  $M$  má význam hmotnosti zdroja a  $\Lambda$  je záporná kozmologická konštanta. Použitú sústavu súradníc  $(t, r, \phi, \psi)$  je najlepšie možné ilustrovať v analógii k Weylovým súradniciam valcového typu  $(t, \rho, \phi, z)$ . Pred identifikáciou súradnice  $\psi$  v bodoch 0 a  $2\pi$  je spojitosť medzi danými sústavami súradníc zjavná –  $t$  a  $\phi$  sú definované rovnako ako v prípade Weylových súradníc,  $r$  je analógiou  $\rho$  a  $r\psi$  je vynesené pozdĺž osi  $z$ . Podobná vizualizácia súradníc má však význam aj po vyžadovaní periodicity  $\psi$ , ako uvidíme ďalej.

### 3.1 Singularity, Kretschmannov invariant, horizonty a asymptotika

Tvar metriky (3.1) vedie na dve singularity v bodoch  $r = 0$  a  $r = \sqrt[3]{-6M/\Lambda}$ . O povahe týchto singularít dokáže niečo napovedať Kretschmannov invariant, ktorý nadobúda tvar

$$K = \frac{8\Lambda^2}{3} + \frac{48M^2}{r^6}. \quad (3.3)$$

Z tvaru Kretschmannovho invariantu vyplýva, že v prípade  $r = 0$  ide o skutočnú fyzikálnu singularitu, zatiaľ čo singularita daná  $r = \sqrt[3]{-6M/\Lambda}$  je najskôr spôsobená nevhodnou voľbou súradníc – na danom polomere sa teda pravdepodobne nachádza horizont udalostí.

Nadplocha  $r = \sqrt[3]{-6M/\Lambda}$  je svetelná, ako vyplýva z normy jej normály  $n_\mu = (0,1,0,0)$ , čo je nutná podmienka na to, aby naozaj šlo o horizont udalostí. Daná nadplocha je navyše aj Killingovým horizontom, keďže časupodobné Killingovo pole  $\xi_{(t)}^\mu = (1,0,0,0)$  sa na nej stáva svetelným. Ďalej je vhodné vyšetriť správanie svetelných svetočiar v smere  $\phi = \text{konštanta}$ ,  $\psi = \text{konštanta}$  (takéto svetočiary budeme pre jednoduchosť nazývať radiálnymi, aj keď v pravom zmysle slova nie sú radiálne), pre ktoré z (3.1) vyplýva

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\left(-\frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (3.4)$$

kde znamienko plus značí odchádzajúce svetelné lúče a znamienko mínus odpovedá vchádzajúcim svetelným lúčom. Na skúmanej nadploche teda odchádzajúce lúče „stoja“ voči danej súradnicovej sústave. Z tvaru metriky ďalej vyplýva, že veľkosť smernice  $|dt/dr|$  je pre neradiálne svetelné svetočiary nad danou nadplochou väčšia, respektíve menšia pod ňou, a teda svetelné kužele sú užšie ako v prípade čisto radiálnych svetočiar. Z uvedených poznatkov teda vyplýva, že v prípade nadplochy  $r = \sqrt[3]{-6M/\Lambda}$  naozaj ide o horizont udalostí (odteraz budeme značiť jeho polomer  $r_H$ ).

Z tvaru metriky (3.1) ďalej vyplýva, že pod horizontom dochádza k zmene súradnice  $t$  z časupodobnej na priestorupodobnú a naopak súradnica  $r$  prechádza z priestorupodobnej na časupodobnú, a teda metrika pod horizontom (podobne ako

v prípade Schwarzschildovho riešenia) už nie je stacionárna (keďže závisí na súradnici  $r$ ).

Na tomto mieste je vhodné rozmyslieť si topológiu priestoropodobných rezov daných podmienkou  $t = \text{konštanta}$ ,  $r = \text{konštanta}$ . Indukovaná metrika takýchto rezov nadobúda tvar

$$ds^2 = r^2(d\phi^2 + d\psi^2), \quad (3.5)$$

ktorá nepripomína štandardnú metriku 2-toru (povrch pneumatiky) danú predpisom (za predpokladu rovnosti malého a veľkého polomeru – obidva súhrnne značíme  $r$ )

$$ds^2 = r^2 d\phi^2 + r^2(1 + \cos \phi) d\psi^2. \quad (3.6)$$

Metrika (3.5) v skutočnosti odpovedá povrchu tzv. *plochého toru*, ktorý sa získa izometrickým (takým, ktorý zachováva vzdialenosti) vnorením klasického 2-toru do 4-rozmerného eukleidovského priestoru napríklad pomocou parametrizácie  $\omega$

$$\omega(\phi, \psi) = r(\cos \phi, \sin \phi, \cos \psi, \sin \psi).$$

Prívlastok plochý mu patrí vďaka vymiznutiu Gaussovej krivosti na jeho povrchu – jeho povrch je teda plochý v rovnakom zmysle ako je plochý povrch valca získaný identifikáciou protíahlých strán papiera. Metrika (3.6) potom odpovedá zobrazeniu plochého toru do 3-rozmerného eukleidovského priestoru, ktoré už ale nie je izometrické (nezachováva vzdialenosti) – takéto zobrazenie si vyžaduje, aby bol jeho povrch deformovaný (Gaussova krivosť je nenulová).

Z vyššie uvedených poznatkov vyplýva, že vizualizácia použitých súradníc v analógii k Weylovým súradniciam valcového typu v úvode kapitoly bola viac než oprávnená, keďže priemet (nie vzájomne jednoznačné zobrazenie) plochého toru do 3D má pre každú nadplochu  $r = \text{konštanta}$  tvar valca s polomerom  $r$  a výškou  $2r$  orientovaného v smere osi  $z$ , na ktorej je vynesená hodnota  $r \cos \psi$  pre  $\psi$  od 0 do  $2\pi$  (ide teda vlastne o dva prekrývajúce sa valcové povrchy).

Geometria horizontu udalostí, respektíve prierezu horizontu udalostí ( $t = \text{konštanta}$ ) má teda charakter plochého toru.

Z tvaru metriky (3.1) je jasné, že v limite  $r \rightarrow +\infty$  je správanie priestoročasu dané povahou anti-de Sitterových riešení – konkrétne zložka metriky  $g_{tt}$  sa v danej limite blíži k  $-\infty$  ako

$$g_{tt} \sim \frac{\Lambda}{3} r^2,$$

respektíve zložka  $g_{rr}$  sa blíži k  $0^+$  ako

$$g_{rr} \sim -\frac{1}{\frac{\Lambda}{3} r^2}.$$

### 3.2 Vlastné obvody a povrch horizontu

Vlastnými obvodmi horizontu (respektíve ľubovoľnej nadplochy  $r = \text{konštanta}$ ) rozumieme vlastné dĺžky kriviek, ktoré sú dané prienikom nadplôch  $t = \text{konštanta}$ ,  $\phi = \text{konštanta}$ ,  $r = r_H$  (veľký obvod), respektíve  $t = \text{konštanta}$ ,  $\psi = \text{konštanta}$ ,  $r = r_H$  (malý obvod).

V zmysle predchádzajúceho odstavca teda môžeme písať

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}(r = r_H)} d\phi = \int_0^{2\pi} r_H d\phi = 2\pi r_H = \sqrt[3]{-\frac{48\pi^3 M}{\Lambda}} \quad (3.7)$$

v prípade malého obvodu, respektíve

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\psi\psi}(r = r_H)} d\psi = \int_0^{2\pi} r_H d\psi = 2\pi r_H = \sqrt[3]{-\frac{48\pi^3 M}{\Lambda}} \quad (3.8)$$

v prípade veľkého obvodu.

Okrem zhody jednotlivých výsledkov vyplýva zo vzťahov (3.7) a (3.8) ešte jeden prekvapivý záver, a to veľmi intuitívna interpretácia súradnice  $r$ , ktorá odpovedá veľkosti *obom* obvodovým polomerom plochého toru daného metrikou (3.5) (obvodový polomer definujeme ako daný obvod predelený  $2\pi$ ).

Vlastnú plochu horizontu je možné určiť pomocou vzťahu

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi} g_{\psi\psi}(r = r_H)} d\phi d\psi = 4\pi^2 r_H^2 = \left(-\frac{48\pi^3 M}{\Lambda}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.9)$$

Z vyššie uvedených výsledkov vyplýva, že v limite veľmi veľkého  $|\Lambda|$  obidva obvody, rovnako ako aj plocha horizontu vymiznú, zatiaľ čo v opačnej limite  $\Lambda \rightarrow 0^-$  divergujú k nekonečnu.

### 3.3 Intenzita poľa a krivosť

Intenzita poľa (respektíve jej kvadrát) je daná predpisom

$$\kappa^2 = g^{\mu\nu} N_{,\mu} N_{,\nu} = \frac{\Lambda^2 r^2}{9} - \frac{2\Lambda M}{3r} + \frac{M^2}{r^4}. \quad (3.10)$$

Na horizonte sa intenzita nazýva *povrchová gravitácia* a nadobúda tam hodnotu

$$\kappa^2(r = r_H) = \left(\frac{3}{4}M\Lambda^2\right)^{\frac{2}{3}}.$$

V limite  $\Lambda \rightarrow 0^-$  teda intenzita na horizonte vymizne. Zo vzťahu (3.10) ďalej vyplýva, že v rovnakej limite pre veľkosť intenzity v ľubovoľnou mieste platí

$$\kappa = \frac{M}{r^2},$$

čo odpovedá klasickej newtonovskej gravitačnej intenzite. Intenzita diverguje pre  $r \rightarrow +\infty$ , rovnako ako aj pre  $r \rightarrow 0^+$ .

V niektorých prípadoch je názorné preskúmať krivosť vhodne zvolených priestoropodobných rezov – za týmto účelom vyčíslime Gaussovu krivosť v rámci poludníkového rezu ( $t = \text{konštanta}, \psi = \text{konštanta}$ ). Indukovaná metrika takéhoto rezu nadobúda tvar

$$ds^2 = \frac{1}{N^2} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (3.11)$$

ktorý vedie na Gaussovu krivosť danú vzťahom

$$\frac{{}^{(2)}R}{2} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{M}{r^3}. \quad (3.12)$$

Táto na horizonte nadobúda hodnotu

$$\frac{{}^{(2)}R(r = r_H)}{2} = \frac{\Lambda}{2}.$$

Z tohto vyplýva, že Gaussova krivosť poludníkového rezu je na horizonte udalostí záporná a vymizne len v limitnom prípade  $\Lambda \rightarrow 0^-$ . Zo vzťahu (3.12) ďalej vyplýva, že v súradnicovom nekonečne ( $r \rightarrow +\infty$ ) nadobúda Gaussova krivosť hodnotu  $\Lambda/3$ , zatiaľ čo v limite nulového  $r$  diverguje. Z tvaru metriky (3.1) je zjavné, že získané výsledky sa reprodukovujú aj v prípade rovníkového rezu ( $t = \text{konštanta}, \phi = \text{konštanta}$ ).

Plný štvorrozmerný Ricciho skalár na základe Einsteinových rovníc identicky nadobúda hodnotu  $4\Lambda$ .

### 3.4 Riemannov a Ricciho tenzor

Jednoduchý tvar metriky (3.1) umožňuje explicitne uviesť všetky nenulové zložky vyššie uvedených tenzorov. V prípade Riemannovho tenzoru to sú

$$\begin{aligned} R_{\phi\psi\phi\psi} &= \frac{(\Lambda r^3 + 6M)r}{3}, & R_{rtrt} &= -\frac{\Lambda}{3} - \frac{2M}{r^3}, \\ R_{r\phi r\phi} &= -\frac{\Lambda r^3 - 3M}{\Lambda r^3 + 6M}, & R_{r\psi r\psi} &= -\frac{\Lambda r^3 - 3M}{\Lambda r^3 + 6M}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} R_{\psi t\psi t} &= \frac{(\Lambda r^3 + 6M)(\Lambda r^3 - 3M)}{9r^2}, \\ R_{\phi t\phi t} &= \frac{(\Lambda r^3 + 6M)(\Lambda r^3 - 3M)}{9r^2}. \end{aligned}$$

Ricciho tenzor zasa nadobúda tvar

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{3\Lambda r}{\Lambda r^3 + 6M}, & R_{tt} &= -\frac{(\Lambda r^3 + 6M)\Lambda}{3r}, \\ R_{\phi\phi} &= -\Lambda r^2, & R_{\psi\psi} &= -\Lambda r^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Na záver ešte zhrnieme vlastnosti horizontu udalostí v nasledujúcej tabuľke.

Súradnicový polomer	$\sqrt[3]{-\frac{6M}{\Lambda}}$	Vlastná plocha	$\left(-\frac{48\pi^3 M}{\Lambda}\right)^{\frac{2}{3}}$
Malý obvod	$\sqrt[3]{-\frac{48\pi^3 M}{\Lambda}}$	Intenzita poľa	$\left(\frac{3}{4}M\Lambda^2\right)^{\frac{2}{3}}$
Veľký obvod	$\sqrt[3]{-\frac{48\pi^3 M}{\Lambda}}$	Gaussova krivost' (poludníkový rez)	$\frac{\Lambda}{2}$

**Tab. 3.1** Vlastnosti horizontu udalostí s topológiou plochého toru odpovedajúceho priestoročasu danému metrikou (3.1).

## 4 Prstencové riešenia Einsteinových rovníc

Prstencové riešenia Einsteinových rovníc tvoria podtriedu axiálne symetrických riešení, pričom sa často vyznačujú taktiež symetriou voči equatoriálnej rovine (rovine, v ktorej leží prsteneček). Intuitívne nazývame prstencovými také riešenia, ktoré obsahujú (fyzikálnu) singularitu prstencovej povahy, vďaka čomu predstavujú sľubných kandidátov na časopriestory s toroidálnym horizontom. Teorémy o jednoznačnosti čiernych dier totiž naznačujú, že za predpokladu existencie horizontu udalostí nejde v prípade nami skúmaných prstencových riešení (aj napriek nezávislosti ich metrick na súradnicovom čase) v skutočnosti o stacionárne riešenia — dané riešenia pravdepodobne popisujú skúmané priestoročasy v momente časovej symetrie (tie sa dajú najlepšie pochopiť pomocou prirovnania k loptičke vyhodenej smerom nahor — okamih, v ktorom sa loptička zastaví a začne padať naspäť dole by sme nazvali momentom časovej symetrie), a teda ich horizonty môžu v princípe nadobúdať toroidálnu topológiu.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať dvoma „statickými“ prstencovými riešeniami Einsteinových rovníc, a to konkrétne Majumdarovým-Papapetrouovým (MP) prstencom [11] a Bachovým-Weylovým (BW) prstencom [12]. Pri každom riešení zrekapitulujeme a preskúmame jeho základné vlastnosti (vlastný polomer, vlastný obvod, vlastnú plochu uzatvorenú prstencom, krivosť...) a asymptotiku v súradnicovom nekonečne, rovnako ako v okolí daného prstenca.

Keďže v oboch prípadoch ide o riešenia z Weylovej triedy (ide teda o „statické“ axiálne symetrické riešenia, ktorých tenzor energie a hybnosti spĺňa istú dodatočnú podmienku), môžeme ich metriku vždy napísať pomocou Weylových súradníc valcového typu  $(t, \rho, \phi, z)$  v tvare [13]

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} [\rho^2 d\phi^2 + e^{2\lambda} (d\rho^2 + dz^2)], \quad (4.1)$$

kde  $N$  a  $\lambda$  sú dve neznáme funkcie (závislé len na  $\rho$  a  $z$ ) špecifické pre každé axiálne symetrické riešenie, pričom  $N$  sa často zapisuje v tvare  $N = e^v$ , kde  $v$  je analógia klasického gravitačného potenciálu spĺňajúca Laplaceovu alebo Poissonovu rovnicu.

## 4.1 Toroidálne súradnice

V mnohých prípadoch popisu vlastností jednotlivých prstencov je výhodnejšie prejsť k tzv. toroidálnym súradniciam  $(t, \zeta, \psi, \phi)$ , kde  $\zeta$  má povahu „vzdialenosti“ a  $\psi$  má uhlový charakter, a to pomocou transformácie v tvare

$$\rho = \frac{b \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \psi}, \quad z = \frac{b \sin \psi}{\cosh \zeta - \cos \psi}, \quad (4.2)$$

kde  $b$  je polomer daného prstenca vo Weylových súradniciach. Toroidálne súradnice v klasickom zmysle (v priestorupodobnom reze pre  $t = \text{konštanta}$ ) vznikajú rotáciou bipolárnych súradníc  $(\zeta, \psi)$  okolo osi kolmej na spojnicu ohnísk  $F_1$  a  $F_2$ , ktorá zároveň prechádza stredom tejto spojnice a leží v rovine nákresne. Súradnica  $\zeta$  je v prípade bipolárneho súradnicového systému daná vzťahom

$$\zeta = \ln \frac{d_1}{d_2},$$

kde  $d_1$  a  $d_2$  sú vzdialenosti skúmaného bodu od jednotlivých ohnísk, a teda  $\zeta$  udáva akúsi mieru vzdialenosti od dvojice ohnísk. Plochy konštantnej hodnoty  $\zeta$  sú v prípade bipolárnych súradníc dané nekonzentrickými kružnicami pretínajúcimi (kolmo) spojnicu dvojice ohnísk tak, že práve jedno z ohnísk sa vždy nachádza vo vnútri kružnice odpovedajúcej danej konštantnej hodnote  $\zeta$ . Z definičného vzťahu pre  $\zeta$  v bipolárnych súradniciach ďalej vyplýva, že môže nadobúdať kladné aj záporné hodnoty, pričom limitné prípady  $\zeta \rightarrow +\infty, \zeta \rightarrow -\infty$  a  $\zeta = 0$  odpovedajú polohe skúmaného bodu splývajúcej s ohniskom  $F_1, F_2$  a polohe na ose symetrie dvojice ohnísk.

Súradnica  $\psi$  má v prípade bipolárneho súradnicového systému význam uhlu zovretého spojnicami jednotlivých ohnísk so skúmaným bodom, a teda môže nadobúdať hodnoty v rozmedzí od 0 cez  $\pi$  (na spojnici ohnísk) po  $2\pi$ . Plochy konštantnej hodnoty  $\psi$  majú charakter rezov nekonzentrických kružníc prechádzajúcich obidvoma ohniskami, pričom rezy sú sprostredkované pomocou spojnice dvojice ohnísk.

Rotáciou bipolárneho súradnicového systému okolo vyššie definovanej osi teda prechádza dvojica ohnísk na „ohniskový“ prstenec, ktorý odpovedá práve singularitám prstencových riešení (z čoho jasne vyplýva výhoda využitia toroidálnych súradníc). Fyzikálny význam  $\zeta$  a  $\psi$  sa v prípade toroidálnych súradníc nemení, avšak v ich definíciach je zamenená dvojica ohnísk za dvojicu bodov ležiacich na opačných

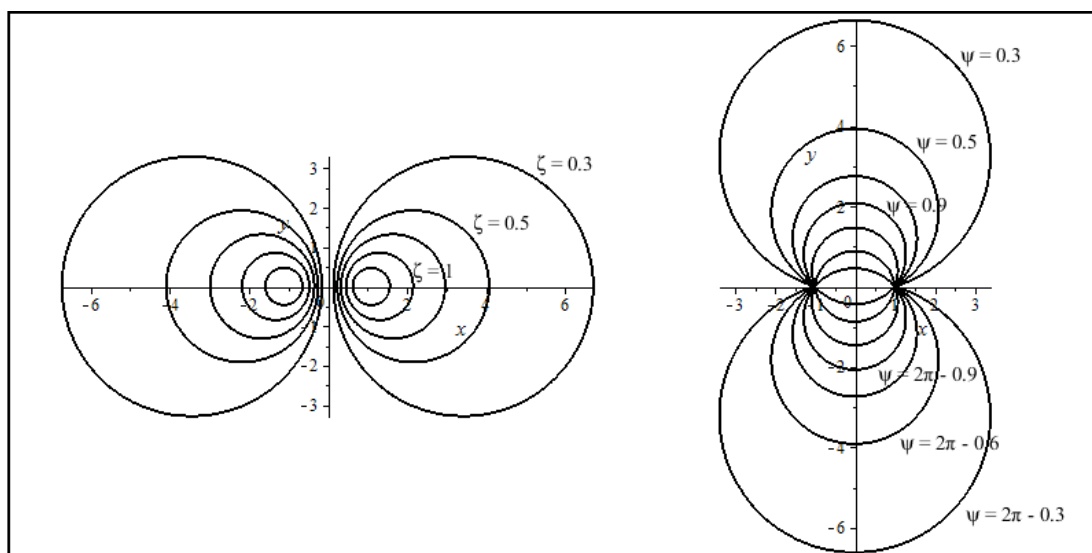


stranách „ohniskového“ prstenca (kvôli jednoznačnosti je ešte nutné dodať, že vždy ide o body prstenca ležiace najbližšie a najďalej od skúmaného bodu v priestore). Z tejto zmeny definície ďalej vyplýva zmena rozsahu súradnice  $\zeta$  – tá môže nadobúdať už len kladné hodnoty (volí sa konvencia, kde v čitateli argumentu prirodzeného logaritmu vždy vystupuje vzdialenosť k vzdialenejšiemu bodu na prstenci). Rozsah súradnice  $\psi$  sa nemení.

Plochy konštantnej hodnoty súradnice  $\zeta$  sú v prípade toroidálnych súradníc tvorené nekonzentrickými toroidmi kolmo pretínajúcimi equatoriálnu rovinu (rovinu prstenca) tak, že „ohniskový prstenec“ vždy leží vo vnútri toroidu odpovedajúceho danej konštantnej hodnote  $\zeta$ . Plochy konštantnej hodnoty súradnice  $\psi$  sú trochu komplikovanejšie – sú dané rezmi plôch nekonzentrických guľ, na povrchu ktorých leží „ohniskový“ prstenec, pričom dané rezy sú uskutočnené práve rovinou „ohniskového“ prstenca (viď obr. 4.1).

Metrika (4.1) prechádza v toroidálnych súradniciach na tvar

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{b^2 \sinh^2 \zeta d\phi^2 + e^{2\lambda} (d\zeta^2 + d\psi^2)}{(\cosh \zeta - \cos \psi)^2}. \quad (4.3)$$



**Obr. 4.1** Prierez plochami konštantnej hodnoty súradnice  $\zeta$  (vľavo), respektíve  $\psi$  (vpravo) pre polomer prstenca  $b = 1$  (rovinu prstenca je kolmá na vertikálnu os a pri pohľade z boku splýva s horizontálnou osou).

## 4.2 Majumdarov-Papapetrouvov prstenec

Tento prstenec sa získa z Majumdarových-Papapetrouvových riešení [14] odpovedajúcich statickému rozpožitiu nabitých čiernych dier s extrémnou veľkosťou náboja ( $|Q_i| = M_i$ ). Ide teda o elektrovákuové riešenia Einsteinových rovníc v analógii ku klasickému prípadu statickej rovnováhy systému bodových nábojov. Funkcia  $N$  je v tomto prípade daná vzťahom

$$\frac{1}{N} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (4.4)$$

kde  $n$  značí počet čiernych dier,  $M_i$  ich hmotnosti a  $\vec{r}_i$  ich polohy (respektíve polohy ich horizontov, ktoré sú v týchto súradniciach zredukované na body). Funkcia  $\lambda$  je všade nulová, a teda ide o podstatné zjednodušenie ďalších výpočtov.

Majumdarov-Papapetrouvov prstenec sa získa kruhovým usporiadaním identických extrémnych čiernych dier a následným limitným prechodom k ich spojitému rozložitiu (zjednodušene povedané teda ide o spojité kruhové rozdelenie „infinitesimalných“ extrémnych čiernych dier).

V zmysle predchádzajúceho odstavca teda prechádza vzťah (4.4) na tvar

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} &= 1 + \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{\rho^2 + b^2 - 2b\rho \cos(\phi - \phi') + z^2}} \\ &= 1 + \frac{2MK(k)}{\pi l_2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde  $M$  značí celkovú hmotu prstenca a platí

$$l_{1,2} = \sqrt{(\rho \mp b)^2 + z^2} = \frac{\sqrt{2}be^{\mp\frac{\zeta}{2}}}{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \psi}},$$

pričom  $K(k)$  je úplný eliptický integrál prvého druhu definovaný ako

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

a argument  $k$  je daný vzťahom

$$k^2 = 1 - \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{4b\rho}{(\rho + b)^2 + z^2} = 1 - e^{-2\zeta}.$$

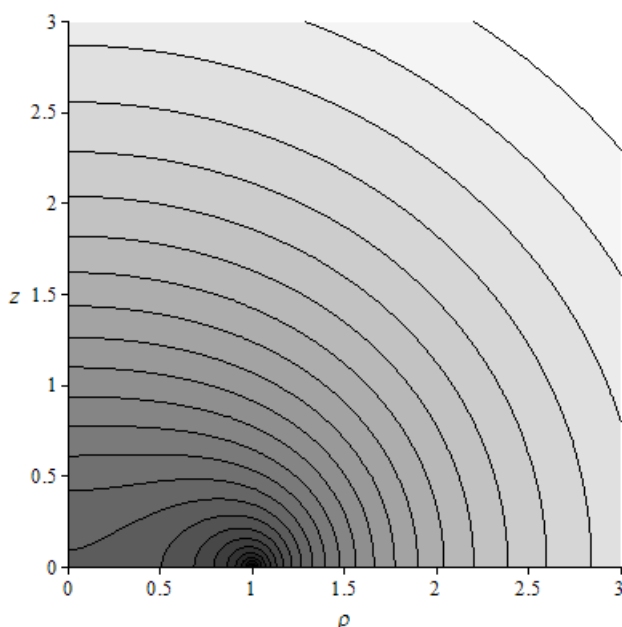
#### 4.2.1 Vlastné obvody a asymptotika

Z vlastností úplného eliptického integrálu prvého druhu vyplýva, že v súradnicovom radiálnom nekonečne ( $\rho^2 + z^2 \rightarrow +\infty$ , respektíve  $k \rightarrow 0$ ) druhý člen vo vzťahu (4.5) vymizne, funkcia  $N$  sa blíži k jednotke, a teda metrika (4.1) prechádza na plochú.

V blízkosti prstenca ( $l_1 \rightarrow 0^+$ ,  $l_2 \rightarrow 2b^-$ , respektíve  $k \rightarrow 1^-$ ) naopak člen s eliptickým integrálom diverguje a funkcia  $N$  sa blíži k nule ako

$$N(k \rightarrow 1^-) \sim \frac{\pi l_2}{2M \ln\left(\frac{4l_2}{l_1}\right)}.$$

Pri výpočte vlastných vzdialeností a vlastných obvodov je výhodnejšie prejsť k popisu pomocou toroidálnych súradníc s využitím vzťahu (4.2), v ktorých metrika nadobúda tvar (4.3). Tento prechod umožňuje konštruovať približovanie k prstencu nezávisle zo všetkých strán, a to pomocou limitného prechodu  $\zeta \rightarrow +\infty$  (plocha konštantnej hodnoty  $\zeta$  vtedy splýva s „ohniskovým“ prstencom).



**Obr. 4.2** Závislosť funkcie  $N$  na súradniciach  $\rho$  a  $z$  v prípade MP prstenca za predpokladu  $M = b = 1$ . Svetlejšie/tmavšie tieňovanie odpovedá menším/väčším hodnotám funkcie.

S ohľadom na predchádzajúci odstavec teda malý obvod prstenca získame limitným prechodom  $\zeta \rightarrow +\infty$  vo výraze pre priečny obvod toroidu odpovedajúceho ploche konštantnej hodnoty  $\zeta$ ,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\psi\psi}} d\psi &= b \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\cosh \zeta - \cos \psi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2MK(k)}{\pi l_2} \frac{1}{\cosh \zeta - \cos \psi} \right) d\psi = \\
&= \frac{2\pi b}{\sinh \zeta} + \frac{\sqrt{2}MK(\sqrt{1 - e^{-2\zeta}})}{\pi e^{\frac{\zeta}{2}}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \psi}} d\psi = \\
&= \frac{2\pi b}{\sinh \zeta} + \frac{4\sqrt{2}MK(\sqrt{1 - e^{-2\zeta}})}{\pi e^{\frac{\zeta}{2}} \sqrt{\cosh \zeta + 1}} K\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh \zeta + 1}}\right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Po vykonaní limitného prechodu obidva členy vymiznú, a teda malý obvod MP prstenca je nulový.

V analógii k malému obvodu sa veľký obvod prstenca spočíta rovnakým limitným prechodom vo vzťahu pre obvod kružníc odpovedajúcich prieniku nadplôch konštantných hodnôt  $t, \zeta$  a  $\psi$ ,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi &= \frac{2\pi b \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \psi} + \\
&\quad + \frac{2\sqrt{2}MK(\sqrt{1 - e^{-2\zeta}}) \sinh \zeta}{e^{\frac{\zeta}{2}} \sqrt{\cosh \zeta - \cos \psi}}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Zatiaľ čo prvý člen vo výraze (4.7) je v limite nekonečného  $\zeta$  konečný a nadobúda hodnotu  $2\pi b$ , druhý člen sa blíži k nekonečnu vďaka limite eliptického integrálu vystupujúceho v jeho čitateli. Druhý člen navyše nezávisí na  $b$ , a teda veľký obvod prstenca nevymizne ani v limite  $b \rightarrow 0^+$  – naopak aj v tomto prípade je nekonečný. Z vyššie uvedeného faktu taktiež vyplýva nekonečná veľkosť obvodového polomeru MP prstenca definovaného ako  $\sqrt{g_{\phi\phi}}$ , a to aj v prípade nulového  $b$ .

#### 4.2.2 Vlastný polomer, vlastné vzdialenosti a vlastná plocha uzavretá prstencom

Pri výpočte vlastného polomeru a vlastnej plochy MP prstenca je výhodné opäť prejsť k Weylovým súradniciam. Vlastný polomer prstenca (vyhodnocovaný v equatoriálnej rovine, a teda platí  $z = 0$ ) je potom možné určiť pomocou vzťahu

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{g_{\rho\rho}(z=0)} d\rho &= b + \frac{2M}{\pi} \int_0^b \frac{K\left(\frac{2\sqrt{b\rho}}{\rho+b}\right)}{(\rho+b)} d\rho \\ &= b + \frac{2M}{\pi} \int_0^1 K(y) dy = b + \frac{4MG}{\pi}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

kde  $G$  je Catalanova konštanta daná vzťahom

$$G = \frac{1}{2} \int_0^1 K(y) dy \doteq 0.9159656.$$

Vlastný polomer prstenca je teda nenulový aj v prípade nulového  $b$ .

Vlastná plocha uzatvorená MP prstencom je daná vzťahom

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}g_{\rho\rho}(z=0)} d\phi d\rho &= 2\pi \int_0^b \sqrt{g_{\phi\phi}g_{\rho\rho}(z=0)} d\rho = \\ &= \pi b^2 + 8M \int_0^b \rho \frac{K\left(\frac{2\sqrt{b\rho}}{\rho+b}\right)}{\rho+b} d\rho + \frac{8M^2}{\pi} \int_0^b \rho \frac{K^2\left(\frac{2\sqrt{b\rho}}{\rho+b}\right)}{(\rho+b)^2} d\rho = \\ &= \pi b^2 + 8Mb + \frac{8M^2}{\pi} \int_0^1 yK^2(y) dy, \end{aligned} \quad (4.9)$$

kde

$$\int_0^1 yK^2(y) dy \doteq 2.1035996.$$

Vlastná plocha je teda pre konečné hodnoty  $b$  a  $M$  konečná, pričom nevymizne ani pre  $b \rightarrow 0^+$ . V limite nulového  $b$  je možné porovnať vlastnú plochu určenú na základe (4.9) a plochu definovanú ako  $\pi$  krát vlastný polomer na druhú (ide teda o obdobu plochy kruhu v eukleidovskom priestore). Dosadením do (4.9) pre  $b = 0$  dostávame

približne  $5,357M^2$ , zatiaľ čo hodnota získaná pomocou kvadrátu vlastného polomeru je približne  $4,273M^2$ .

Vlastné vzdialenosti od prstenca je opäť vhodné počítať prostredníctvom toroidálnych súradníc (ktoré nám umožňujú približovať sa k prstencu nezávisle zo všetkých strán vhodnou voľbou  $\psi = \text{konštanta}$ ), a to na základe vzťahu

$$\int_{\zeta_0}^{\infty} \sqrt{g_{\zeta\zeta}} d\zeta = \int_{\zeta_0}^{\infty} \left( \frac{b}{\cosh \zeta - \cos \psi} + \frac{\sqrt{2}MK(\sqrt{1 - e^{-2\zeta}})}{\pi e^{\frac{\zeta}{2}} \sqrt{\cosh \zeta - \cos \psi}} \right) d\zeta. \quad (4.10)$$

Tento integrál je konečný pre všetky hodnoty  $\psi$  (za predpokladu  $\zeta_0 > 0$ ), keďže jednotlivé členy v integrande klesajú dostatočne rýchlo v nekonečne – prvý člen ako  $2be^{-\zeta}$  a druhý ako  $(2M/\pi)\zeta e^{-\zeta}$  – a teda vlastná vzdialenosť od prstenca je zo všetkých smerov konečná.

#### 4.2.3 Intenzita poľa a krivosť

Intenzitu poľa („gravitačné zrýchlenie“)  $\kappa$ , ktorá je daná prvými deriváciami metriky, je možné určiť pomocou vzťahu

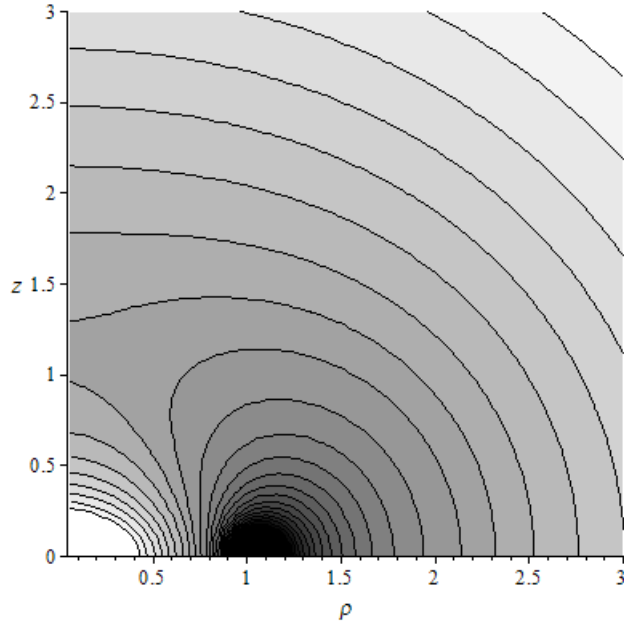
$$\kappa^2 = g^{\mu\nu} N_{,\mu} N_{,\nu} = N^2 \left[ (N_{,\rho})^2 + (N_{,z})^2 \right]. \quad (4.11)$$

Tento vzťah vedie na pomerne zložitý výraz, ktorý sa na osi symetrie ( $\rho = 0$ ) zredukuje na

$$\kappa^2(\rho = 0) = \frac{M^2 z^2}{(M + \sqrt{b^2 + z^2})^6}.$$

Z tohto ďalej vyplýva, že v centre prstenca ( $\rho = 0$  a  $z = 0$ ) zrýchlenie úplne vymizne. Intenzita rovnako vymizne aj v súradnicovom nekonečne ( $\rho^2 + z^2 \rightarrow \infty$ ), zatiaľ čo v okolí prstenca naopak diverguje.

Niekedy je názornejšie sa namiesto priestoročasu ako celku zaoberať geometriou len jeho vhodne zvolených priestoropodobných rezov – v prípade statických axisymetrických priestoročasov sa najlepšimi kandidátmi zdajú byť meridionálna (poludníková) rovina ( $t = \text{konštanta}$ ,  $\phi = \text{konštanta}$ ) a equatoriálna (rovníková) rovina ( $t = \text{konštanta}$ ,  $z = 0$ ). Pri výpočte skalárnej krivosti (respektíve Gaussovej krivosti) daných rezov sa používa všeobecný postup platný pri výpočte Ricciho skaláru, ktorý sa však aplikuje na indukovanú metriku konkrétneho priestoročasového



**Obr. 4.3** Vrstevnícový graf udávajúci závislosť veľkosti intenzity poľa MP prstenca na súradniciach  $\rho$  a  $z$  v prípade  $M = b = 1$ . Svetlejšie/tmavšie tieňovanie znázorňuje menšie/väčšie hodnoty intenzity.

rezu. V prípade rezu v podobe meridionálnej roviny nadobúda indukovaná metrika tvar

$$ds^2 = N^{-2}(d\rho^2 + dz^2). \quad (4.12)$$

Vyčíslením 2D Ricciho skaláru odpovedajúceho metrike (4.12) dostávame vzťah pre Gaussovu krivosť

$$\frac{{}^{(2)}R}{2} = N(N_{,\rho\rho} + N_{,zz}) - (N_{,\rho})^2 - (N_{,z})^2, \quad (4.13)$$

ktorý vedie na pomerne dlhý výraz. Ten sa však v centre prstenca redukuje na

$$\frac{{}^{(2)}R(\rho = 0, z = 0)}{2} = \frac{M}{2(M + b)^3}.$$

V prípade rezu equatoriálnou rovinou nadobúda indukovaná metrika tvar

$$ds^2 = N^{-2}(\rho^2 d\phi^2 + d\rho^2). \quad (4.14)$$

Analogicky ako v prípade meridionálnej roviny je možné odvodiť vzťah pre Gaussovu krivosť

$$\frac{{}^{(2)}R}{2} = \left( N_{,\rho\rho} + \frac{N_{,\rho}}{\rho} \right) N - (N_{,\rho})^2, \quad (4.15)$$

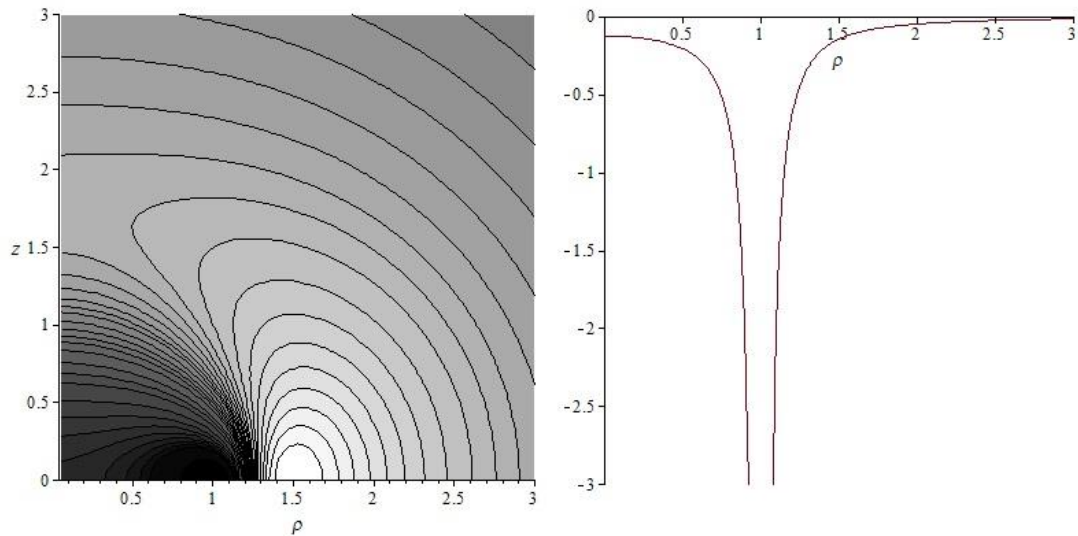
ktorý v centre prstenca nadobúda tvar

$$\frac{{}^{(2)}R(\rho = 0, z = 0)}{2} = -\frac{M}{(M + b)^3}.$$

V obidvoch prípadoch Gaussova krivosť vymizne v súradnicovom nekonečne ( $\rho^2 + z^2 \rightarrow +\infty$  v prípade rezu meridionálnou rovinou a  $\rho \rightarrow +\infty$  v prípade rezu equatoriálnou rovinou). Naopak v okolí prstenca v obidvoch prípadoch ( $z \rightarrow 0, \rho \rightarrow b$ , respektíve  $z = 0, \rho \rightarrow b$ ) Gaussova krivosť diverguje, pričom v prípade meridionálneho rezu sa blíži k  $+\infty$  a v prípade equatoriálneho rezu k  $-\infty$ .

#### 4.2.4 Kretschmannov invariant

Nenulové zložky Riemannovho tenzoru v prípade MP prstenca majú pomerne jednoduchý tvar



**Obr. 4.4** Vľavo vrstevnicový graf závislosti Gaussovej krivosti na  $\rho$  a  $z$  pre MP prstenec v prípade rezu meridionálnou rovinou. Svetlejšie/tmavšie tieňovanie odpovedá menším (záporným)/väčším (kladným) hodnotám krivosti. Vpravo závislosť Gaussovej krivosti na  $\rho$  pre MP prstenec v prípade rezu equatoriálnou rovinou. V oboch prípadoch sa predpokladá  $M = b = 1$ .



$$\begin{aligned}
R_{\rho\phi\rho\phi} &= \frac{\rho^2 [N_{,\rho\rho}N - (N_{,z})^2 - (N_{,\rho})^2] + \rho N_{,\rho}N}{N^4}, \\
R_{\rho z\rho z} &= \frac{N(N_{,zz} + N_{,\rho\rho}) - (N_{,z})^2 - (N_{,\rho})^2}{N^4}, \\
R_{\rho t\rho t} &= (N_{,\rho})^2 - (N_{,z})^2 + N_{,\rho\rho}N, \\
R_{z t z t} &= -(N_{,\rho})^2 + (N_{,z})^2 + N_{,zz}N, \\
R_{\phi z\phi z} &= \frac{\rho^2 [N_{,zz}N - (N_{,z})^2 - (N_{,\rho})^2] + \rho N_{,\rho}N}{N^4}, \\
R_{\phi t\phi t} &= -\rho^2 [(N_{,z})^2 + (N_{,\rho})^2] + \rho N_{,\rho}N, \\
R_{\rho t z t} &= 2N_{,\rho}N_{,z} + N_{,\rho z}N, \\
R_{\rho\phi\phi z} &= -\frac{\rho^2 N_{,\rho z}}{N^3}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

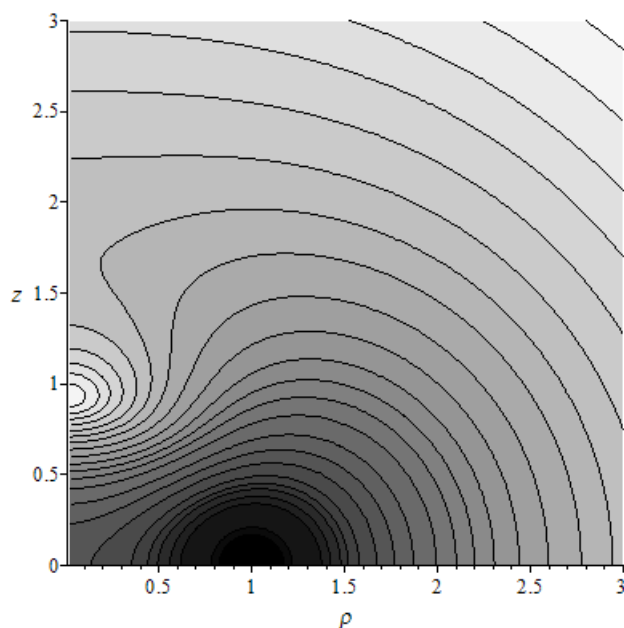
Z tohto už pre Kretschmannov invariant vyplýva

$$\begin{aligned}
K &= 24(N_{,z})^4 + 48(N_{,z})^2(N_{,\rho})^2 - 8(N_{,z})^2 N_{,zz}N - \\
&- 24(N_{,z})^2 N_{,\rho\rho}N + 32N_{,z}N_{,\rho}N_{,\rho z}N + 24(N_{,\rho})^4 - \\
&- 24(N_{,\rho})^2 N_{,zz}N - 8(N_{,\rho})^2 N_{,\rho\rho}N + 12N^2(N_{,zz})^2 + \\
&+ 8N^2 N_{,zz}N_{,\rho\rho} + 12N^2(N_{,\rho\rho})^2 + 16N^2(N_{,\rho z})^2 - \\
&- \frac{24(N_{,z})^2 N_{,\rho}N}{\rho} - \frac{24(N_{,\rho})^3 N}{\rho} + \frac{8N_{,\rho}N_{,zz}N^2}{\rho} + \\
&+ \frac{8N_{,\rho}N_{,\rho\rho}N^2}{\rho} + \frac{12(N_{,\rho})^2 N^2}{\rho^2}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dosadením za funkciu  $N$  do vzťahu (4.17) dostávame veľmi dlhý a zložitý výraz, ktorý sa však v centre prstenca redukuje na

$$K(\rho = 0, z = 0) = \frac{12M^2}{(M + b)^6}.$$

Zo (4.17) ďalej vyplýva, že Kretschmannov invariant v súradnicovom nekonečne vymizne, zatiaľ čo v blízkosti prstenca diverguje ku kladnému nekonečnu. Závislosť Kretschmannovho invariantu na súradniciach  $\rho$  a  $z$  sme vykreslili na obr. 4.5.



**Obr. 4.5** Vrstevnicový graf závislosti Kretschmannovho invariantu pre Majumdarov-Papapetrouvov prstenec za predpokladu  $M = b = 1$ . Svetlejšie/tmavšie tieňovanie znázorňuje menšie/väčšie hodnoty invariantu.

### 4.3 Bachov-Weylov prstenec

Oproti MP prstencu, ktorý môže pôsobiť dosť umelo, je Bachov-Weylov prstenec zdanlivo intuitívnejší (ide vlastne o akúsi analógiu prstenca v klasickej Newtonovej mechanike), avšak ako sa ukáže, opak je pravdou. Za jeho nevšedné vlastnosti je zodpovedná funkcia  $\lambda$ , ktorá už nie je všade nulová, ako v prípade MP prstenca. Funkcie  $N$  a  $\lambda$  metriky (4.1) sú v tomto prípade dané vzťahmi (z rozmerových dôvodov v prípade funkcie  $\lambda$  neuvádzame explicitnú závislosť na parametri  $k$ )

$$\frac{1}{N} = \exp \frac{2MK(k)}{\pi l_2}, \quad (4.18)$$

$$\lambda = -\frac{M^2}{4\pi^2 b^2 \rho} \left[ (\rho + b)(E - K)^2 + \frac{(\rho - b)(E - k'^2 K)^2}{k'^2} \right],$$

kde  $E(k)$  je úplný eliptický integrál druhého druhu daný predpisom

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \, d\alpha$$

a  $k'$  je dané vzťahom

$$k'^2 = 1 - k^2.$$

Ostatné funkcie ( $l_2, k$  a  $K(k)$ ) sú definované rovnako ako v prípade MP prstenca.

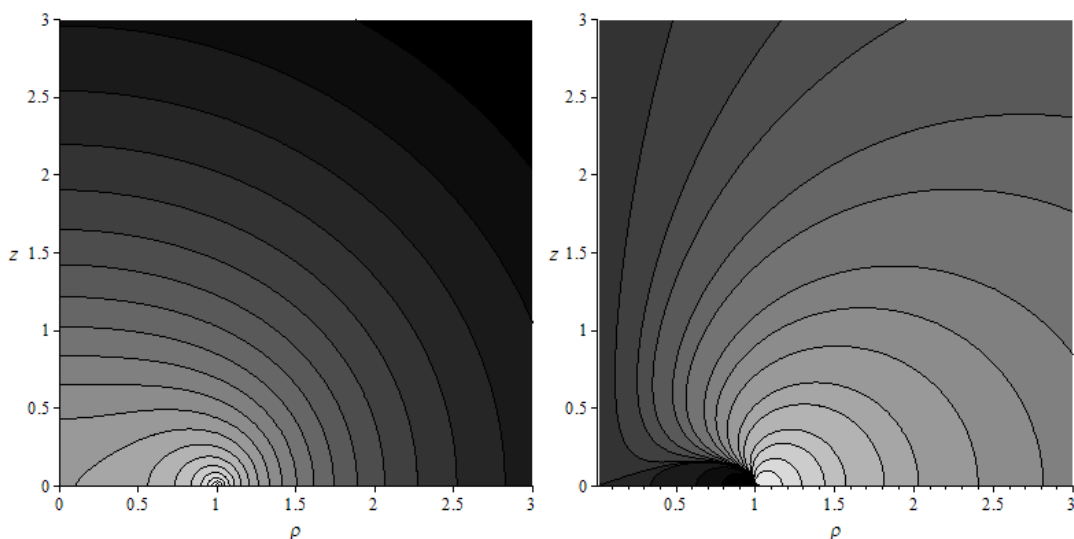
### 4.3.1 Vlastné obvody a asymptotika

Z tvarov funkcií  $N$  a  $\lambda$  vyplýva, že v súradnicovom nekonečne prechádzajú na jednotku (v prípade  $N$ ), respektíve na nulu (v prípade  $\lambda$ ), a teda metrika sa stáva plochou. Funkcia  $\lambda$  taktiež vymizne na ose symetrie ( $\rho = 0$ ). V blízkosti prstenca ( $l_1 \rightarrow 0^+, l_2 \rightarrow 2b^-, k \rightarrow 1^-$ ) sa funkcia  $N$  blíži k nule ako

$$N(k \rightarrow 1^-) \sim \left(\frac{l_1}{4l_2}\right)^{\frac{2M}{\pi l_2}}.$$

Funkcia  $\lambda$  v blízkosti prstenca naopak diverguje, a to k  $-\infty$  ak sa k prstencu blížíme zvnútra ( $\psi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ ) a  $\zeta \rightarrow +\infty$ ), respektíve k  $+\infty$  ak sa k prstencu blížíme zvonku ( $\psi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ ) a  $\zeta \rightarrow +\infty$ ).

Analogicky ako v prípade MP prstenca je malý obvod BW prstenca daný limitným prechodom pre  $\zeta \rightarrow +\infty$  v integráli tvaru



**Obr. 4.6** Závislosť funkcie  $N$  (vľavo) a  $\lambda$  (vpravo) na súradniciach  $\rho$  a  $z$  pre Bachov-Weylov prstenec za predpokladu  $M = b = 1$ . Svetlejšie/tmavšie tieňovanie odpovedá väčším (kladným v prípade  $\lambda$ )/menším (záporným v prípade  $\lambda$ ) hodnotám.

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\psi\psi}} d\psi = \int_0^{2\pi} \frac{b}{N} \frac{e^\lambda}{\cosh \zeta - \cos \psi} d\psi. \quad (4.19)$$

Asymptotika integrandu v (4.19) má v blízkosti prstenca smerovú povahu, ktorá vyplýva z jeho správania sa v limite  $\zeta \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{b}{N} \frac{e^\lambda}{\cosh \zeta - \cos \psi} \sim 2be^{-\frac{2M^2}{\pi^2 b^2} \zeta^2} e^{\zeta \cos \psi}.$$

Z takejto asymptotiky teda vyplýva, že ak sa k prstencu blížime z vnútornej strany ( $\psi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ ), integrand exponenciálne diverguje, zatiaľ čo v prípade približovania sa k prstencu z vonkajšej strany ( $\psi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ ) naopak prudko vymizne. Integrand rovnako vymizne pri približovaní sa k prstencu zo smerov kolmých na rovinu prstenca ( $\psi = \pi/2$ , respektíve  $\psi = 3\pi/2$ ) – pre asymptotiku v limite  $\zeta \rightarrow +\infty$  v takomto prípade platí

$$\frac{b}{N} \frac{e^\lambda}{\cosh \zeta} \sim 2be^{-\frac{5}{2\pi^2 b^2} \zeta^2}.$$

Zo smerovej povahy integrandu teda plynie, že malý obvod vonkajšej polroviny BW prstenca je konečný (nulový), avšak malý obvod jeho vnútornej polroviny diverguje k  $+\infty$ , a teda aj celkový malý obvod je nekonečný.

Veľký obvod prstenca je daný limitným prechodom  $\zeta \rightarrow +\infty$  vo vzťahu

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi = \frac{2\pi b}{N} \frac{\sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \psi}. \quad (4.20)$$

Pri vyšetrowaní veľkého obvodu je opäť raz výhodné napísať si asymptotické správanie skúmaného výrazu v limite  $\zeta \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{2\pi b}{N} \frac{\sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \psi} \sim 2\pi b e^{\frac{M}{\pi b} \zeta},$$

Z asymptotiky teda plynie, že veľký obvod prstenca je nekonečný (tento záver platí aj v prípade limitného prechodu  $b \rightarrow 0^+$ ).

### 4.3.2 Vlastný polomer, vlastné vzdialenosti a vlastná plocha uzavretá prstencom

Vlastný polomer je možné určiť pomocou vzťahu

$$\int_0^b \sqrt{g_{\rho\rho}(z=0)} d\rho = \int_0^b \left(\frac{e^\lambda}{N}\right)_{z=0} d\rho. \quad (4.21)$$

Predtým, než sa pustíme do výpočtu integrálu v (4.21) je výhodné preskúmať vlastné vzdialenosti od prstenca v ľubovoľnom smere (na čo sú najvhodnejšie toroidálne súradnice), ktoré sú dané ako

$$\int_{\zeta_0}^{+\infty} \sqrt{g_{\zeta\zeta}} d\zeta = \int_{\zeta_0}^{+\infty} \frac{b}{N} \frac{e^\lambda}{\cosh \zeta - \cos \psi} d\zeta. \quad (4.22)$$

Za povšimnutie stojí, že integrand v (4.22) je totožný s integrandom v (4.19), a teda zdieľajú spoločnú asymptotiku, z ktorej opäť raz vyplýva smerová závislosť – vlastné vzdialenosti merané zo smerov, pre ktoré  $\cos \psi < 0$ , sú nekonečné, zatiaľ čo vlastné vzdialenosti, pre ktoré  $\cos \psi \geq 0$ , sú konečné. Toto správanie sa navyše zachováva aj v limite nulového  $b$ . Na základe rozboru asymptotiky vzťahu (4.22) sme teda zistili, že vlastný polomer BW prstenca je nekonečný (a to aj v prípade, že prstenec limitne siahneme do bodu), pričom k tomuto poznatku sme dospeli bez potreby výpočtu integrálu (4.21).

Vlastnú plochu uzavretú prstencom spočítame ako

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{+\infty} \sqrt{g_{\zeta\zeta} g_{\phi\phi}(\psi = \pi)} d\zeta &= \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{2\pi b^2}{N^2} \frac{\sinh \zeta e^\lambda}{(\cosh \zeta - \cos \psi)^2} \right)_{\psi=\pi} d\zeta. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Za týmto účelom opäť preskúmame asymptotiku integrandu v limite  $\zeta \rightarrow +\infty$ , ktorý ide k nekonečnu ako

$$\frac{1}{N^2} \frac{\sinh \zeta}{(\cosh \zeta + 1)^2} e^\lambda \sim 2e^{\frac{2M^2}{\pi^2 b^2} \zeta^2} e^\zeta,$$

a teda aj plocha uzavretá prstencom je nekonečná (čo nie je až tak prekvapujúce, keďže vlastný polomer a veľký obvod BW prstenca sú taktiež nekonečné). Pri limitnom

prechode  $b \rightarrow 0^+$  je divergencia integrandu ešte silnejšia, takže uvedené závery platia aj pre prsteneц stiahnutý do bodu.

### 4.3.3 Intenzita poľa a krivosť

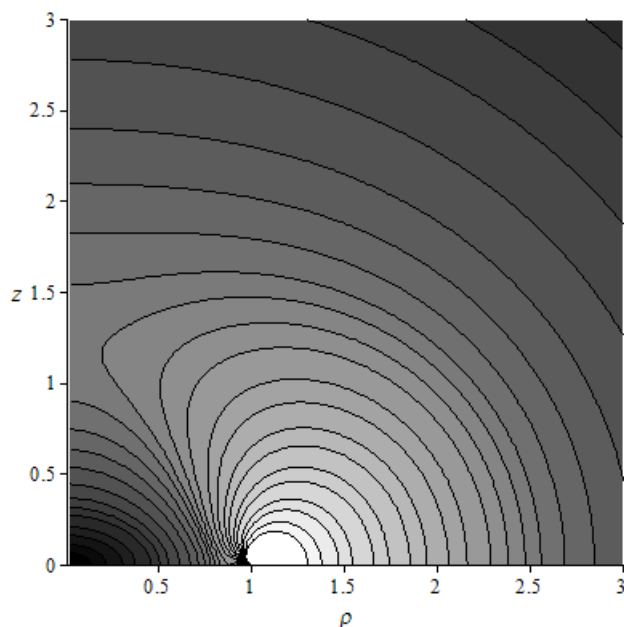
Intenzita poľa je daná vzťahom

$$\kappa^2 = g^{\mu\nu} N_{,\mu} N_{,\nu} = \frac{N^2}{e^{2\lambda}} \left[ (N_{,\rho})^2 + (N_{,z})^2 \right]. \quad (4.24)$$

Tento predpis vedie podobne ako v prípade MP prsteneца na pomerne dlhý výraz, ktorý sa však na osi redukuje na

$$\kappa^2 = \frac{M^2 z^2}{(b^2 + z^2)^3} \frac{1}{e^{\frac{4M}{\sqrt{b^2+z^2}}}}.$$

Z tohto už priamo vyplýva nulovosť zrýchlenia v centre prsteneца. V okolí prsteneца sa opäť prejavuje smerovosť – intenzita vymizne ak sa k prstencu približujeme z vnútornej strany a diverguje ak sa k nemu približujeme z vonkajšej strany. V súradnicovom nekonečne sa intenzita poľa limitne blíži k nule.



**Obr. 4.7** Závislosť intenzity poľa na súradniciach  $\rho$  a  $z$  v prípade Bachovho-Weylovho prsteneца za predpokladu  $M = b = 1$ . Svetlejšie/tmavšie tieňovanie značí väčšie/menšie hodnoty intenzity.

Podobne ako v prípade MP prstenca sa budeme zaoberať len Gaussovou krivosťou v meridióálnom a equatoriálnom reze, pre ktoré indukovaná metrika nadobúda tvar

$$ds^2 = \frac{e^{2\lambda}}{N^2} (d\rho^2 + dz^2), \quad (4.25)$$

respektíve

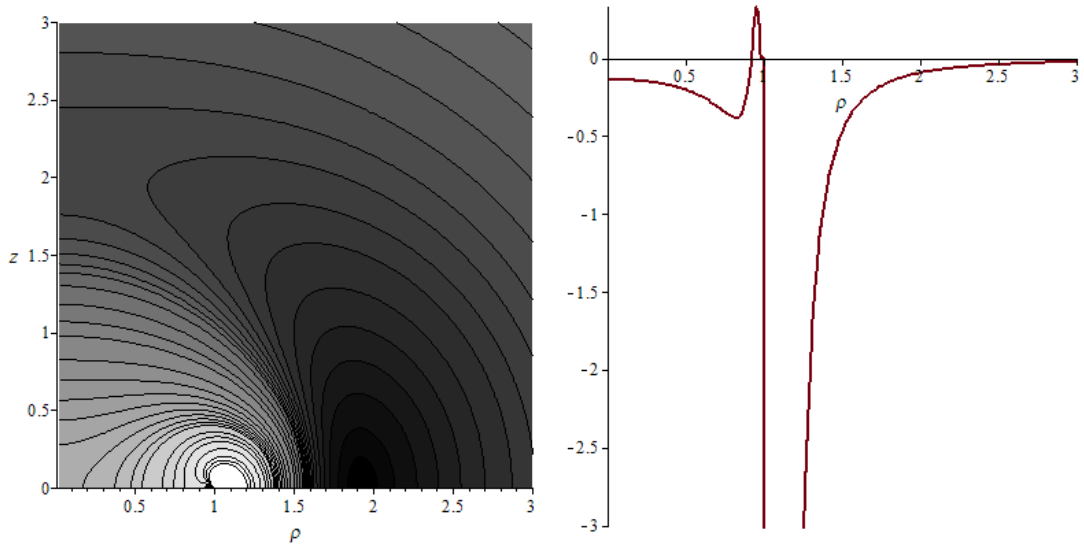
$$ds^2 = \frac{\rho^2}{N^2} d\phi^2 + \frac{e^{2\lambda}}{N^2} d\rho^2. \quad (4.26)$$

Vyčíslením Ricciho skaláru na základe metrick (4.25) a (4.26) sme získali výrazy pre Gaussovú krivosť,

$$\frac{{}^{(2)}R}{2} = -\frac{\lambda_{,zz}N^2 + \lambda_{,\rho\rho}N^2 - N_{,zz}N - N_{,\rho\rho}N + (N_{,z})^2 + (N_{,\rho})^2}{e^{2\lambda}}, \quad (4.27)$$

v prípade rezu meridióálnou rovinou a

$$\frac{{}^{(2)}R}{2} = -\frac{\lambda_{,\rho}N_{,\rho}N\rho - N_{,\rho\rho}N\rho - \lambda_{,\rho}N^2 + (N_{,\rho})^2\rho + N_{,\rho}N}{e^{2\lambda}\rho} \quad (4.28)$$



**Obr. 4.8** Závislosť Gaussovej krivosti na súradniciach  $\rho$  a  $z$  pre meridióálny rez (vľavo), respektíve závislosť Gaussovej krivosti na súradnici  $\rho$  pre equatoriálny rez (vpravo) pre Bachov-Weylov prstenec za predpokladu  $M = b = 1$ . Svetlejšie/tmavšie tieňovanie odpovedá väčším (kladným)/menším (záporným) hodnotám.

v prípade equatoriálneho rezu. Tieto rovnice by sa dali ešte zjednodušiť s využitím Einsteinových rovníc (je možné do určitej miery vylúčiť derivácie funkcie  $\lambda$ ), avšak pre potreby práce sa uspokojíme s odvodenými tvarmi.

Po dosadení príslušných funkcií  $N$  a  $\lambda$  z (4.18) prechádzajú dané vzťahy pre Gaussovu krivosť na neprimerane dlhé a zložité výrazy, ktoré sa však v centre prstenca redukujú na

$$\frac{{}^{(2)}R(\rho = 0, z = 0)}{2} = \frac{M}{2b^3} e^{-\frac{2M}{b}}$$

v prípade vzťahu (4.27), respektíve na

$$\frac{{}^{(2)}R(\rho = 0, z = 0)}{2} = -\frac{M}{b^3} e^{-\frac{2M}{b}}$$

v prípade vzťahu (4.28).

Nie je prekvapivé, že v blízkom okolí prstenca sa opäť prejavuje smerovosť, a to v prípade oboch rezov. Gaussova krivosť meridionálneho rezu diverguje k  $+\infty$  pri približovaní sa k prstencu z vonkajšej strany ( $\psi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ ,  $\zeta \rightarrow +\infty$ ), zatiaľ čo pri približovaní z vnútornej strany ( $\psi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ ,  $\zeta \rightarrow +\infty$ ) ide k nule. Krivosť rovnako diverguje aj pri približovaní sa k prstencu zo smerov kolmých na rovinu prstenca ( $\psi = \pi/2$ , respektíve  $\psi = 3\pi/2$ ).

V prípade rezu equatoriálnou rovinou Gaussova krivosť podobne ako v meridionálnom reze pri približovaní sa k prstencu z vnútornej strany vymizne, avšak pri približovaní z vonkajšej strany diverguje k zápornému nekonečnu. V oboch prípadoch Gaussova krivosť vymizne v súradnicovom nekonečne.

K uvedeným záverom je však nutné podotknúť, že ich platnosť je obmedzená na prípad  $M = b = 1$ , keďže dané výrazy pre Gaussove krivosti sú naozaj komplikované, a teda neumožňujú prevedenie všeobecných limit pre ľubovoľné hodnoty parametrov  $M$  a  $b$ . S ohľadom na prechádzajúce výsledky však nie je nerozumné predpokladať, že sa uplatňujú aj vo všeobecnom prípade.



#### 4.3.4 Kretschmannov invariant

Nenulové zložky Riemannovho tenzoru v prípade Bach-Weylovho prstenca nadobúdajú tvar

$$\begin{aligned}
R_{\phi t \phi t} &= -\frac{\rho \left[ (N_{,\rho})^2 \rho + (N_{,z})^2 \rho - N_{,\rho} N \right]}{e^{2\lambda}}, \\
R_{\rho z \rho z} &= -\frac{[\lambda_{,zz} N^2 + \lambda_{,\rho\rho} N^2 - N_{,zz} N] e^{2\lambda}}{N^4} - \\
&\quad -\frac{[-N_{,\rho\rho} N + (N_{,\rho})^2 + (N_{,z})^2] e^{2\lambda}}{N^4}, \\
R_{\rho\phi\rho\phi} &= \frac{\rho [-\lambda_{,\rho} N_{,\rho} N \rho + \lambda_{,z} N_{,z} N \rho + N_{,\rho\rho} N \rho]}{N^4} + \\
&\quad + \frac{\rho [\lambda_{,\rho} N^2 - (N_{,\rho})^2 \rho - (N_{,z})^2 \rho + N_{,\rho} N]}{N^4}, \\
R_{\rho t \rho t} &= -\lambda_{,\rho} N_{,\rho} N + \lambda_{,z} N_{,z} N + N_{,\rho\rho} N + (N_{,\rho})^2 - (N_{,z})^2, \\
R_{z t z t} &= \lambda_{,\rho} N_{,\rho} N - \lambda_{,z} N_{,z} N + N_{,zz} N - (N_{,\rho})^2 + (N_{,z})^2, \\
R_{\phi z \phi z} &= \frac{\rho [\lambda_{,\rho} N_{,\rho} N \rho - \lambda_{,z} N_{,z} N \rho + N_{,zz} N \rho]}{N^4} + \\
&\quad + \frac{\rho [-\lambda_{,\rho} N^2 - (N_{,\rho})^2 \rho - (N_{,z})^2 \rho + N_{,\rho} N]}{N^4}, \\
R_{\rho t z t} &= -\lambda_{,\rho} N_{,z} N - N_{,\rho} \lambda_{,z} N + N_{,\rho z} N + 2N_{,\rho} N_{,z}, \\
R_{\rho\phi\phi z} &= -\frac{\rho [-\lambda_{,\rho} N_{,z} \rho - N_{,\rho} \lambda_{,z} \rho + N_{,\rho z} \rho + \lambda_{,z} N]}{N^3},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

čo vedie na Kretschmannov invariant, ktorý tu z rozmerových dôvodov neuvádzame.

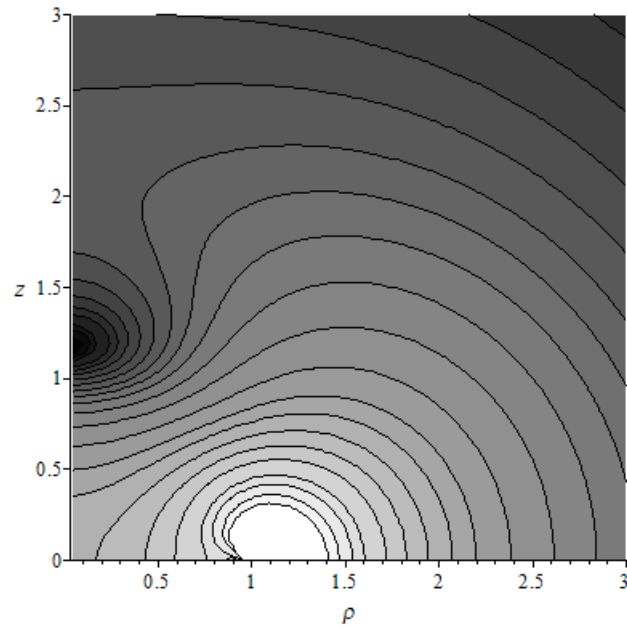
V centre prstenca sa však redukuje na

$$K(\rho = 0, z = 0) = \frac{12M^2}{b^6} e^{-\frac{4M}{b}}.$$

V okolí prstenca sa prejavuje smerovosť obvyklá pre BW prstenec – pri približovaní sa k prstencu z vnútornej strany Kretschmannov invariant vymizne a naopak pri približovaní z vonkajšej strany diverguje ku kladnému nekonečnu. V súradnicovom nekonečne sa limitne blíži k nule.

Tieto závery (z rovnakých dôvodov ako v prípade Gaussovej krivosti) s určitou platia len v prípade  $M = b = 1$ , pričom na základe predchádzajúcich výsledkov je viac

než oprávnené predpokladať ich platnosť aj pri ľubovoľných hodnotách parametrov  $M$  a  $b$  (s možnými problémami pri limitnom prechode  $b \rightarrow 0^+$ ).



**Obr. 4.9** Závislosť Kretschmannovho invariantu na súradniciach  $\rho$  a  $z$  pre Bachov-Weylov prstenec za predpokladu  $M = b = 1$ . Svetlejšie/tmavšie tieňovanie odpovedá väčším/menším hodnotám invariantu.

Na záver ešte uvádzame tabuľku, v ktorej zhŕňame všetky skúmané vlastnosti oboch prstencov.

	MP prsteneč	BW prsteneč
Asymptotika v okolí prstenca	$N \sim \frac{\pi l_2}{2M \ln\left(\frac{4l_2}{l_1}\right)}$ $l_1 \rightarrow 0^+, l_2 \rightarrow 2b^-$	$N \sim \left(\frac{l_1}{4l_2}\right)^{\frac{2M}{\pi l_2}}$ $l_1 \rightarrow 0^+, l_2 \rightarrow 2b^-$
Malý obvod	nulový	nekonečný
Veľký obvod	nekonečný	nekonečný
Vlastný polomer	$b + \frac{4MG}{\pi}$	nekonečný
Vlastné vzdialenosti od prstenca	konečné zo všetkých smerov	nekonečné pri približovaní sa z vnútornej strany; konečné pri približovaní sa z vonkajšej strany
Vlastná plocha uzavretá prstencom	$\pi b^2 + 8Mb + \frac{8M^2}{\pi} \int_0^1 y K^2(y) dy$	nekonečná
Intenzita poľa na ose prstenca	$\frac{M^2 z^2}{(M + \sqrt{b^2 + z^2})^6}$	$\frac{M^2 z^2}{(b^2 + z^2)^3} \frac{1}{e^{\frac{4M}{\sqrt{b^2 + z^2}}}}$
Gaussova krivost' v centre prstenca (meridionálny rez)	$\frac{M}{2(M + b)^3}$	$\frac{M}{2b^3} e^{-\frac{2M}{b}}$
Gaussova krivost' v centre prstenca (equatoriálny rez)	$-\frac{M}{(M + b)^3}$	$-\frac{M}{b^3} e^{-\frac{2M}{b}}$
Kretschmannov invariant v centre prstenca	$\frac{12M^2}{(M + b)^6}$	$\frac{12M^2}{b^6} e^{-\frac{4M}{b}}$

**Tab. 4.1** Porovnanie vlastností skúmaných prstencových riešení Einsteinových rovníc (konkrétne MP prstenca a BW prstenca).

## 5. Zdanlivé horizonty

Formálna definícia zdanlivých horizontov si vyžaduje pochopenie ďalších pojmov – pri ich zavádzaní vychádzame predovšetkým z [2] a [3].

Predpokladajme rozklad priestoročasu  $(M, g_{\alpha\beta})$  na súbor priestoropodobných rezov  $\Sigma$  s nulovým prienikom, pričom každý takýto rez odpovedá „obrazu“ priestoročasu v (nejakom) danom súradnicovom čase  $t$  (jednotlivé rezy sú teda implicitne zadané rovnicou  $t = \text{konštanta}$ ). Predpokladajme ďalej veľkosť normály na dané rezy v tvare

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}t\nabla_{\nu}t = -\frac{1}{N^2}, \quad (5.1)$$

kde  $N$  je totožné s  $N$  vystupujúcim v metrikách skúmaných riešení v kapitolách 3 a 4 ( $N$  je tzv. *lapse* funkcia a udáva, koľko vlastného času uplynie medzi dvoma za sebou idúcimi rezmi  $\Sigma$ ). Definujme ďalej jednotkovú normálu na jednotlivé rezy pomocou vzťahu

$$n_{\mu} = -\alpha\nabla_{\mu}t. \quad (5.2)$$

Pre indukovanú metriku  $\gamma_{\alpha\beta}$  na trojrozmerných priestoropodobných rezoch  $\Sigma$  potom platí

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_{\alpha}n_{\beta}. \quad (5.3)$$

Metrika (5.3) teda určuje vzdialenosti v rámci priestorových rezov  $\Sigma$ . K ďalším výpočtom je nutné definovať projekčné operátory do daných rezov, respektíve do priestorov kolmých na dané rezy. Prvý z nich je daný predpisom

$$\gamma^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + n^{\alpha}n_{\beta}, \quad (5.4)$$

odkiaľ pre ten druhý vyplýva

$$N^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \gamma^{\alpha}_{\beta} - n^{\alpha}n_{\beta}. \quad (5.5)$$

Priemet všeobecného tenzoru do daného rezu je daný kontrakciou všetkých jeho indexov s odpovedajúcim projekčným operátorom. Trojrozmerná kovariantná derivácia je jednoznačne určená podmienkou jej kompatibility s metrikou (5.3) a je možné ju spočítať priemetom všetkých indexov v odpovedajúcej štvorrozmernej kovariantnej derivácii daného tenzoru.

Predpokladajme ďalej existenciu hladkej uzavretej dvojrozmernej nadplochy  $S$  v  $\Sigma$  a označme  $s^\alpha$  jej vonkajšiu jednotkovú normálu. Podobne ako v prípade metriky  $\gamma_{\alpha\beta}$  definujeme indukovanú metriku  $m_{\alpha\beta}$  nadplochy  $S$  predpisom

$$m_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - s_\alpha s_\beta = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta - s_\alpha s_\beta . \quad (5.6)$$

Každým bodom nadplochy  $S$  prechádza dvojica do budúcnosti orientovaných svetelných geodetík, ktorých priemet do  $\Sigma$  je kolmý na  $S$ , a ktorých dotyčnice sú dané predpisom

$$\begin{aligned} k^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(n^\alpha + s^\alpha), & l^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(n^\alpha - s^\alpha), \\ n^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(k^\alpha + l^\alpha), & s^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(k^\alpha - l^\alpha). \end{aligned} \quad (5.7)$$

S využitím vzťahu (5.7) teda môžeme indukovanú metriku nadplochy  $S$  napísať v tvare

$$m_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + k_\alpha l_\beta + l_\alpha k_\beta . \quad (5.8)$$

Vyššie zavedené pojmy nám umožňujú definovať expanziu  $\Theta$  vychádzajúcich svetelných geodetík kolmých na  $S$  pomocou vzťahu

$$\Theta = m^{\alpha\beta} \nabla_\alpha k_\beta = \nabla_\alpha k^\alpha , \quad (5.9)$$

pričom posledná rovnosť platí za predpokladu afinnej parametrizácie dotyčníc k svetelným geodetikám. Expanzia vychádzajúcich svetelných geodetík je definovaná analogicky. Pomocou expanzie je možné zaviesť pojem *zachytených povrchov* – ide o také uzavreté dvojrozmerné povrchy vnorené do  $\Sigma$ , pre ktoré je expanzia oboch vychádzajúcich a vchádzajúcich do budúcnosti orientovaných svetelných geodetík záporná všade na  $S$ . *Zachytenou oblasťou* v  $\Sigma$  nazveme takú časť  $\Sigma$ , ktorá obsahuje zachytené povrchy. Zdanlivý horizont rezu  $\Sigma$  nakoniec definujeme ako hranicu zachytenej oblasti – ide teda o *marginálny zachytený povrch* na ktorom expanzia vychádzajúcich svetelných geodetík identicky vymizne. Zjednotenie zdanlivých horizontov všetkých rezov  $\Sigma$  je trojrozmerná nadplocha a nazýva sa *zachycujúci horizont*.

## 5.1 Využitie zdanlivých horizontov v numerickej relativite

Horizont udalostí je globálny pojem a jeho určenie si v princípe vyžaduje znalosť celej budúcnosti priestoročasu, čo nám neumožňuje lokalizovať čierne diery „v danom

čase“, napríklad počas numerickej simulácie. Vedomosť o (aspoň približnej) polohe čiernych dier počas simulácie je nevyhnutná napr. pre vylúčenie singularít zo skúmanej oblasti (ide o metódu tzv. *vyňatia čiernej diery*, ktorá je založená na fakte, že vnútorná oblasť čiernej diery nemôže kauzálne ovplyvňovať vonkajšiu oblasť).

V kontraste k horizontu udalostí je zdanlivý horizont definovaný lokálne na každom priestoropodobnom reze  $\Sigma$  (ak daný rozklad do rezov  $\Sigma$  umožňuje vznik zdanlivých horizontov – ich existencia je totiž podmienená „vhodným“ rozkladom). Ako sa ukazuje, ak v danom reze existuje zdanlivý horizont, musí sa nachádzať vo vnútri horizontu udalostí, takže vnútornú oblasť zdanlivého horizontu je možné bezpečne vyradiť z numerickej simulácie. Navyše platí, že v prípade stacionárneho priestoročasu zdanlivý horizont a horizont udalostí splývajú – k určeniu horizontu udalostí teda stačí identifikovať zdanlivý horizont.

## 5.2 Zdanlivý horizont toroidálneho riešenia

Pomerne jednoduchá metrika priestoročasu s toroidálnym horizontom skúmaného v kapitole 3 umožňuje explicitne spočítať veličiny z úvodu tejto kapitoly a následne overiť, že zdanlivý horizont tohto riešenia splýva s jeho horizontom udalostí. Metrika spomínaného riešenia nadobúdala tvar

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{1}{N^2} dr^2 + r^2(d\phi^2 + d\psi^2),$$

kde funkcia  $N$  je daná predpisom

$$N = \sqrt{-\frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2M}{r}}.$$

Pre jednotkovú normálu na priestoropodobné rezy (dané podmienkou  $t = \text{konštanta}$ ) potom platí

$$n^\alpha = \left(\frac{1}{N}, 0, 0, 0\right).$$

Indukovaná metrika na daných priestoropodobných rezoch nadobúda tvar

$$\gamma^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}.$$

Očakávame, že vhodné uzavreté dvojrozmerné nadplochy sú dané podmienkou v tvare  $r = \text{konštanta}$ , čomu odpovedá vonkajšia jednotková normála

$$s^\alpha = (0, N, 0, 0).$$

Dotyčnice (respektíve odpovedajúce kovektory) k vychádzajúcim svetelným geodetikám sú dané predpisom

$$k_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -N, \frac{1}{N}, 0, 0 \right).$$

Indukovaná metrika na daných uzavretých dvojrozmerných nadplochách nadobúda tvar

$$m^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2 \end{pmatrix},$$

z čoho pre expanziu vyplýva

$$\Theta = \sqrt{2} \frac{N}{r}.$$

Z expanzie už jasne plynie, že táto vymizne práve v prípade  $r = r_H = \sqrt[3]{-6M/\Lambda}$ , a teda sme overili, že zdanlivý horizont daného priestoročasu splýva s jeho horizontom udalostí.

### 5.3 Zdanlivé horizonty prstencových riešení

Metriky skúmaných prstencových riešení nie sú ani zďaleka také jednoduché ako v prípade toroidálneho riešenia, a z toho dôvodu nemôžeme očakávať ani „rozumný“ predpis pre expanziu. Práve naopak, podmienka nulovej expanzie vo všeobecnosti vedie na netriviálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu, ktorú je možno vyriešiť len pomocou numerických metód.

Pri prechode k sférickým súradniciam  $(t, r, \theta, \phi)$  pomocou transformácie v tvare

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \tag{5.10}$$

dané metriky závisia na súradniciach  $r$  a  $\theta$ , z čoho vyplýva, že uzavreté dvojrozmerné nadplochy v rámci jednotlivých rezov musíme v najväčšej všeobecnosti predpokladať v tvare

$$r - h(\theta) = 0,$$

kde  $h(\theta)$  je neznáma funkcia. Nájdenie zdanlivého horizontu potom odpovedá nájdeniu závislosti  $r = h(\theta)$ .

Podobne ako v prípade toroidálneho riešenia v nasledujúcej sekcii explicitne uvedieme veličiny potrebné k vyčísleniu expanzie v prípade všeobecnej metriky v tvare (4.1). Riešením výslednej diferenciálnej rovnice v prípade prstencových riešení sa v tejto práci nezaobráme – ide totiž o rozsiahlejší problém, ktorý by sa dal rozvinúť v ďalšiu samostatnú prácu.

Na pripomenutie uvádzame skúmanú metriku prstencových riešení vo všeobecnom tvare s využitím sférických súradníc

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + e^{2\lambda}(dr^2 + r^2 d\theta^2)}{N^2},$$

kde  $N$  a  $\lambda$  sú funkcie daná vzťahmi (4.5), respektíve (4.18).

Priamočiarym výpočtom je možné ukázať, že jednotková normála na priestoropodobné rezy a následne indukovaná metrika uvažovaných rezov nadobúdajú tvar

$$n^\alpha = \left( \frac{1}{N}, 0, 0, 0 \right),$$

$$\gamma^{\alpha\beta} = \text{diag} \left( 0, \frac{N^2}{e^{2\lambda}}, \frac{N^2}{r^2 e^{2\lambda}}, \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right).$$

Ako sme uviedli vyššie, uzavreté dvojrozmerné nadplochy sú v prípade prstencových riešení trocha komplikovanejšie a ich jednotková vonkajšia normála nadobúda tvar

$$s^\alpha = \frac{rNe^{-\lambda}}{\sqrt{(h_{,\theta})^2 + r^2}} \left( 0, 1, -\frac{h_{,\theta}}{r^2}, 0 \right).$$

Z tohto už pre nenulové zložky indukovanej metriky dvojrozmerných nadplôch vyplýva

$$m^{11} = \frac{N^2 (h_{,\theta})^2}{e^{2\lambda} [(h_{,\theta})^2 + r^2]}, \quad m^{22} = \frac{N^2}{e^{2\lambda} [(h_{,\theta})^2 + r^2]},$$

$$m^{33} = \frac{N^2}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad m^{12} = \frac{N^2 h_{,\theta}}{e^{2\lambda} [(h_{,\theta})^2 + r^2]} = m^{21}.$$



K vyčísleniu expanzie je ešte potrebná dotyčnica k vychádzajúcim svetelným geodetikám (respektíve jej odpovedajúci kovektor), ktorej nenulové zložky sú dané predpisom

$$k_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}N, \\ k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{re^\lambda}{N\sqrt{(h,\theta)^2 + r^2}}, \quad k_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{re^\lambda h,\theta}{N\sqrt{(h,\theta)^2 + r^2}}.$$

Dosadením do vzťahu (5.9), ktorý položíme rovný nule, následne dostávame diferenciálnu rovnicu v tvare

$$0 = \frac{1}{re^\lambda [(h,\theta)^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}} \left\{ -r^2 N (h,\theta)^2 \lambda_{,r} - r^4 N \lambda_{,r} + N (h,\theta)^3 \lambda_{,\theta} + \right. \\ \left. + r^2 N h,\theta \lambda_{,\theta} + 2r^2 (h,\theta)^2 N_{,r} + 2r^4 N_{,r} - 3r N (h,\theta)^2 + r^2 N h_{,\theta\theta} - \right. \\ \left. - 2r^3 N - 2(h,\theta)^3 N_{,\theta} - 2r^2 h,\theta N_{,\theta} + N h_{,\theta} \cotg(\theta) [(h,\theta)^2 + r^2] \right\}. \quad (5.11)$$

Po vykonaní naznačených derivácií je pravdaže ešte nutné dosadiť podmienku na tvar priestorupodobných rezov v podobe  $r = h(\theta)$ . Za zmienku taktiež stojí, že rovnica (5.11) určuje zdanlivý horizont ľubovoľného priestoročasu daného metrikou v tvare (4.1) (a teda nie len prstencových riešení skúmaných v tejto práci).

Pri hľadaní zdanlivých horizontov s toroidálnou topológiou môže byť výhodné prejsť k toroidálnym súradniciam, ktorých súvislosť s Weylovými súradnicami valcového typu je daná vzťahom (4.2). Pri tomto prechode však počet členov vo výslednej diferenciálnej rovnici prudko narastie, a teda z rozmerových dôvodov ju nie je možné v tejto práci uviesť (v prípade MP prstenca, pre ktorý funkcia  $\lambda$  identicky vymizne, má zmienená diferenciálna rovnica vyše 20 členov).

Podobne ako pri hľadaní sférických horizontov je aj v prípade toroidálnych horizontov nutné využiť podmienku na tvar priestorupodobných rezov, ktorá nadobúda tvar  $\zeta = h(\psi)$ .

Už na prvý pohľad je jasné, že v prípade rovnice (5.11), respektíve jej analógie v toroidálnych súradniciach ide o nelineárne diferenciálne rovnice druhého rádu, a teda na ich plné vyriešenie je potrebné špecifikovať počiatočné („okrajové“) podmienky na samotnú hľadanú funkciu a jej prvú deriváciu. Správnou cestou pri hľadaní podmienok

na deriváciu sa zdá byť požiadavka na hladkosť zdanlivého horizontu – v súlade s axiálnou a equatoriálnou symetriou skúmaných riešení teda musí daná dvojrozmerná nadplocha odpovedajúca zdanlivému horizontu pretínať kolmo rovinu prstenca, rovnako ako odpovedajúcu os axiálnej symetrie (v prípade sférického horizontu). V jazyku sférických a toroidálnych súradníc je možné túto podmienku vyjadriť nasledovne (v prípade toroidálnych súradníc je matematicky možné formulovať len podmienku kolmosti na rovinu prstenca)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} h(\theta) \Big|_{\theta=0} &= \frac{d}{d\theta} h(\theta) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{d}{d\theta} h(\theta) \Big|_{\theta=\pi} = 0, \\ \frac{d}{d\psi} h(\psi) \Big|_{\psi=\pi} &= 0 = \frac{d}{d\psi} h(\psi) \Big|_{\psi=2\pi}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Hladkosť zdanlivého horizontu nám však bohužiaľ neposkytuje žiadnu podmienku na hodnotu hľadanej funkcie v daných bodoch, a teda pri riešení skúmaných diferenciálnych rovníc je nutné považovať túto počiatočnú podmienku za voľný parameter.

## Záver

Intuícia napovedá, že objekty generujúce priestoročasy s toroidálnou topológiou by mali byť prirodzeným štádiom pri gravitačnom kolapse rotujúcich telies, avšak ako vyplýva z teorémov o jednoznačnosti čiernych dier a teorému topologickej cenzúry, pri splnení určitých rozumných predpokladov majú stacionárne čierne diery vždy horizont sférickej topológie. V našej práci sme teda zhrnuli predpoklady a závery spomínaných teorémov a následne sme (aspoň sčasti) rozobrali dôsledky v prípadoch, keď aspoň jeden z predpokladov nie je splnený.

Konkrétne sme zhrnuli základné vlastnosti známeho anti-de Sitterovho priestoročasu (nie je teda splnená podmienka asymptotickej plochosti) s horizontom udalostí toroidálnej topológie. V rámci rozboru daného riešenia sme navrhli jednu z možných vizualizácií použitých súradníc pomocou priemetu plochého toru do 3D (pravdaže vykonaním priemetu sa stráca istá informácia, a teda nejde o vzájomne jednoznačné zobrazenie, čo vedie k presvedčeniu, že môže existovať vhodnejšia vizualizácia). Daná vizualizácia nám umožnila lepšie pochopiť správanie rôznych invariantných veličín vzťahnutých k skúmanému horizontu udalostí, ktoré sme nakoniec zhrnuli v tab. 3.1.

V ďalšej časti sme uviedli dve prstencové riešenia Einsteinových rovníc (konkrétne Majumdarovo-Papapetrouvovo riešenie a Bachovo-Weylovo riešenie) ako potenciálnych kandidátov na priestoročasy s toroidálnym horizontom (niekoľko indícií totiž naznačuje, že za predpokladu existencie horizontu nejde v prípade skúmaných prstencových riešení aj napriek nezávislosti ich metrik na súradnicovom čase o stacionárne priestoročasy, ale o priestoročasy nachádzajúce sa v tzv. momente časovej symetrie). Oproti uvedenému toroidálnemu riešeniu sa dané prstencové riešenia zdajú byť intuitívnejšie v zmysle interpretácie použitých súradníc (Weylových valcového typu, respektíve toroidálnych) a taktiež správaním študovaných invariantov v centre prstencov (v prípade toroidálneho riešenia totiž nemá zmysel hovoriť o nejakom „centre“). Skúmané vlastnosti prstencových riešení sme zhrnuli v tab. 4.1.

V poslednej kapitole sme zaviedli pojem zdanlivého horizontu a nadobudnuté znalosti sme následne aplikovali na jeho určenie pre skúmané riešenia Einsteinových rovníc. V prípade toroidálneho riešenia sme v podstate overili, že za predpokladu stacionarity priestoročasu zdanlivý horizont splyva s horizontom udalostí. V prípade prstencových riešení (respektíve ľubovoľného riešenia popísaného metrikou (4.1)) však definičný

vzťah zdanlivého horizontu viedol na netriviálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu, ktorú je možné vyriešiť len pomocou nejakej vhodnej numerickej metódy. Samotným riešením tejto rovnice sme sa nezaoberali (a teda sa nám ani nepodarilo overiť, či v prípade skúmaných prstencových riešení dochádza k formácii zdanlivého horizontu s toroidálnou topológiou). Na základe prstencovej povahy singularít uvažovaných riešení sme však pri hľadaní horizontov s toroidálnou topológiou navrhli pretransformovať danú diferenciálnu rovnicu do toroidálnych súradníc, ktoré sú na túto úlohu obrazne povedané „šité na mieru“. V závere sme ešte rozobrali rôzne počiatkové (okrajové) podmienky, ktoré je možné pri numerickom riešení uvedenej diferenciálnej rovnice uvažovať v prípade horizontov so sférickou a toroidálnou topológiou (podmienky vyplývajú z požadovania hladkosti a symetrií zdanlivých horizontov). Tieto podmienky však riešenie neurčujú jednoznačne, keďže sa týkajú len prvých derivácií hľadanej funkcie, čo sa prejavilo pribudnutím ďalšieho voľného parametru (riešenie získanej diferenciálnej rovnice je teda o to ťažšie).

Otázka existencie „rozumných“ štruktúr s toroidálnym horizontom tak stále zostáva otvorená, pričom rozhodujúcu odpoveď pravdepodobne rovnako ako v prípade „klasických“ čiernych dier so sférickým horizontom poskytne až observačná evidencia. Bolo by teda zaujímavé vyšetriť, či fyzikálne procesy v okolí toroidálnych čiernych dier môžu viesť k odlišným observačným dôsledkom než procesy v okolí „štandardných“ čiernych dier so sférickým horizontom (viď [15] a [16]).

## Zoznam použitej literatúry

- [1] KREJČIŘÍK, V. *Toroidální černé díry? : bakalářská práce*. Praha: MFF UK, 2007.
- [2] POISSON, E. *A Relativist's Toolkit. The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0 521 83091 5.
- [3] BAUMGARTE, T. W., SHAPIRO, S. L. *Numerical Relativity. Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN-13 978-0-511-72937-9.
- [4] HAWKING, S.W., ELLIS, G.F.R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. ISBN 0 521 09906-4.
- [5] ISRAEL, W. Event horizons in static vacuum spacetimes. *Phys. Rev.*, **164**, 1776 (1967).
- [6] CARTER, B. Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 331 (1971).
- [7] ROBINSON, D. C. Uniqueness of the Kerr black hole. *Phys. Rev. Lett.*, **34**, 905-6 (1975).
- [8] FRIEDMAN, J. L., SCHLEICH, K., WITT, D. M. Topological censorship. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1486 (1993).
- [9] CHRUŚCIEL, P. T., WALD, R. M. On the topology of stationary black holes. *Class. Quantum Grav.*, **11**, L147 (1994).
- [10] KLEMM, D., MORETTI, V., VANZO, L. Rotating topological black holes. *Phys. Rev. D*, **57**, 6127 (1998).
- [11] JARAMILLO, G., LOUSTO, C. O. Study of multi-black-hole and ring-singularity apparent horizons. *Phys. Rev. D*, **84**, 104011 (2011).
- [12] BACH, R., WEYL, H., Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. B. Explizite Aufstellung statischer axialsymmetrischer Felder. *Math. Zeit.*, **13**, 134 (1922).
- [13] PODOLSKÝ, J., GRIFFITHS, J. B. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-1-107-40618-6.

- [14] HARTLE, J. B., HAWKING, S. W. Solutions of the Einstein-Maxwell Equations with Many Black Holes. *Commun. math. Phys.*, **26**, 87 (1972).
- [15] SPIVEY, R. J. Quasars: a supermassive rotating toroidal black hole interpretation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **316**, 856 (2000).
- [16] POMPILIO, F., HARUN-OR-RASHID, S. M., ROOS, M. A toroidal black hole for the AGN phenomenon. *Astron. Astrophys.*, **362**, 865 (2000).

## Zoznam obrázkov

4.1 Vrstevnicový graf funkcie $N$ v prípade MP prstenca.....	20
4.2 Vrstevnicový graf funkcie $N$ v prípade MP prstenca.....	22
4.3 Vrstevnicový graf veľkosti intenzity v prípade MP prstenca.....	26
4.4 Závislosť Gaussovej krivosti pre meridionálny a equatoriálny rez v prípade MP prstenca.....	27
4.5 Vrstevnicový graf Kretschmannovho invariantu v prípade MP prstenca .....	29
4.6 Vrstevnicové grafy funkcií $N$ a $\lambda$ v prípade BW prstenca .....	30
4.7 Vrstevnicový graf veľkosti intenzity v prípade BW prstenca .....	33
4.8 Závislosť Gaussovej krivosti pre meridionálny a equatoriálny rez v prípade BW prstenca .....	34
4.9 Vrstevnicový graf Kretschmannovho invariantu v prípade BW prstenca .....	37

## **Zoznam tabuliek**

3.1 Vlastnosti toroidálneho riešenia .....	17
4.1 Vlastnosti prstencových riešení .....	38