MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Mrhal

Riemannův integrál pro zobrazení do Banachových prostorů

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Riemannův integrál pro zobrazení do Banachových prostorů

Autor: Filip Mrhal

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V této práci studujeme společné vlastnosti a rozdíly v chování Riemannova integrálu pro zobrazení do reálných čísel a do libovolného Banachova prostoru. Nejpodstatnější je pro nás v tomto směru Lebesgueova věta, riemannovsky integrovatelná zobrazení do některých Banachových prostorů totiž necharakterizuje, tak jak je tomu v případě reálných funkcí. Toto je, pro případ Banachových prostorů známých ze základního kurzu funkcionální analýzy, dokázáno pomocí několika protipříkladů.

Klíčová slova: Riemannův integrál Banachův prostor Lebesgueova věta

Title: Riemann type integral in Banach spaces

Author: Filip Mrhal

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In this thesis we study some differences in the behaviours of the Riemann integral when integrating functions from any compact subinterval of real numbers to real numbers or to any Banach space. Especially, we outline that the Lebesgue theorem is no longer valid in relationship to functions with images in some Banach spaces. We show that for some well-known Banach spaces using counterexamples.

Keywords: Riemann type integral Banach space Lebesgue theorem

Děkuji Prof. Lukešovi za četnou inspiraci, zapůjčení literatury a podnětné rozhovory nejen o matematice. Panu profesorovi patří též velký dík za přečtení celé práce, trpělivost a konzultace, které mi věnoval.
Své drahé polovičce děkuji za podporu během celého tvůrčího procesu, jakož i mimo něj.

Obsah

Použité značení a zkratky

$\mathfrak{B}[0,1]$	prostor omezených funkcí na $[0,1]$
B_X	uzavřená jednotková koule v Banachově prostoru X
(BC)-podmínka	Bolzanova-Cauchyova podmínka
(BÚNO)	bez újmy na obecnosti
χ_E	charakteristická funkce množiny $E \subseteq \mathbb{R}$
V°	vnitřek množiny V
(R)-integrál	Riemannův integrál
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$(\mathbb{R},\|\cdot\|_e)$	prostor reálných čísel s euklidovskou normou
(T,τ)	topologický prostor s topologií τ
$\mathcal{U}(x)$	soustava všech okolí bodu x v topologickém prostoru (T,τ)
$\mathcal{B}(x,\varepsilon)$	otevřená koule (v metrickém prostoru) se středem v bodě x a poloměrem ε
$\mathcal{U}(x,\varepsilon)$	soustava všech okolí bodu x v metrickém prostoru s bází složenou z množin $\mathcal{B}(x,\varepsilon)$
$(X,\|\cdot\|)$	**reálný** Banachův prostor X s normou $\|\cdot\|$
X	**reálný** Banachův prostor (pokud je jasné, o jakou jde normu)
X^*	duální prostor k Banachovu prostoru X
$\int_E g$	Riemannův integrál g přes množinu E

1. Úvod

Tato práce se zabývá vlastnostmi Riemannova integrálu pro různá zobrazení. Z teorie pro reálné funkce reálné proměnné jej přirozeně rozšíříme na zobrazení do Banachových prostorů. Ač definice bude vypadat téměř analogicky, ukážeme, že se integrál v každém z těchto případů chová trochu odlišně.

Především pro zobecnění do Banachových prostorů již neplatí známá Lebesgueova věta, která charakterizuje riemannovsky integrovatelné reálné funkce reálné proměnné. O prostorech, kde tato charakterizace platí, pak budeme říkat, že mají Lebesgueovu vlastnost. I mezi prostory běžně používanými a známými z kurzu funkcionální analýzy pro bakalářské studium je ale mnoho takových, které tuto vlastnost nemají. V této části uvedeme několik protipříkladů.

Vlastní přínos v této práci je především v podrobném zpracování příkladů výpočtů Riemannova integrálu pro zobrazení do Banachových prostorů. Dále v podrobném zpracování protipříkladů na Lebesgueovu větu. Taktéž je zde zpracován důkaz Lebesgueovy věty, který je ve zdroji [Luk80] pouze naznačen.

2. Riemannův integrál reálné funkce reálné proměnné

V této kapitole vybudujeme teorii Riemannova integrálu (dále (R)-integrálu) pro reálné funkce reálné proměnné. Použijeme k tomu klasickou Darbouxovu a Riemannovu definici. Zaměříme se na důkaz ekvivalence obou definic. Následně se zmíníme o Bolzanově-Cauchyově podmínce existence (R)-integrálu.

Úmluva. Ve všech následujících kapitolách budeme pracovat v topologických prostorech (T, τ). Bude-li zřejmé, jakou uvažujeme topologii (nebo budou definice či tvrzení platné pro libovolnou z nich), pak takový prostor označím prostě jako prostor T. (Případně jako X, pokud je topologie jednoznačně definována metrikou nebo normou.)
Pokud $X \subseteq \mathbb{R}$, pak příslušný topologický prostor vždy uvažuji s euklidovskou topologií.
Okolí bodu $x \in X$ budiž množina $V \subset X$, pro niž platí $x \in V^{\circ}$. (Značíme jej V_x.)
Budeme-li se pohybovat v metrických prostorech, budou bázi okolí bodu x tvořit otevřené koule se středem v bodě x o poloměru $\varepsilon > 0$ v příslušné metrice. Takovou kouli značíme jako $\mathcal{B}(x,\varepsilon)$. Soustavu všech okolí bodu x s touto bází značíme $\mathcal{U}(x,\varepsilon)$.

2.1 Nety

Při výuce základů matematické analýzy se zavádí pojem posloupnosti jako zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pomocí výsledků teorie množin můžeme zajít o něco dál a definovat posloupnosti na třídě ordinálů, čímž přirozeně rozšíříme předchozí pojem.
Ani jeden z předchozích pojmů ale neposkytuje úplné informace o topologii prostoru, v němž pracujeme (více informací například v [Ver]). Proto se zavádí zobecněná posloupnost na libovolné usměrněné množině ve smyslu definic 1 a 2.

Definice 1. *Nechť D je nějaká množina a $\prec$ je reflexivní a tranzitivní binární relace na $D \times D$. Pak dvojici $(D,\prec)$ nazveme* ***usměrněná množina****, pokud pro každé dva prvky D existuje v $(D,\prec)$ horní mez.*

Definice 2. ***Netem*** *v topologickém prostoru X nazveme funkci $f : D \to X$, kde $(D, \prec)$ je usměrněná množina. Budeme používat značení $f(d) = x_d$ pro každé $d \in D$. Net označíme $\{x_d\}_{d \in D}$.*

Definice 3. *Řekneme, že net $\{x_d\}_{d\in D}$ konverguje k bodu $y \in X$, pokud pro každé okolí V_y bodu y existuje $d \in D$ tak, že $x_e \in V_y$ pro všechna $e \in D$ taková, že $d \prec e$.*

Definice 4. *Topologický prostor (T,τ) je Hausdorffův, jestliže je možné každé dva různé body v tomto prostoru oddělit otevřenými množinami. V jazyce symbolů:*

$$(\forall x,y \in T)(x \neq y)(\exists U,V \in \tau)(x \in U)(y \in V) : U \cap V = \emptyset.$$

Důkaz následujícího tvrzení vychází z [Ver].

Tvrzení 1. *V Hausdorffově prostoru nemůže mít žádný net dvě různé limity.*

Důkaz. Nechť T je Hausdorffův a nechť $(x_d)_{d\in D}$ je net. Pro spor nechť x,y, kde $x \neq y$, jsou dvě limity našeho netu. Protože T je Hausdorffův, existují disjunktní otevřená okolí V_x a V_y. Z definice konvergence netu plyne existence d_x takového, že $x_e \in V_x$ pro všechna e s vlastností $d_x \prec e$. Podobně existuje d_y tak, že $x_e \in V_y$ pro každé e takové, že $d_y \prec e$. Nyní stačí vybrat „větší“ (ve smyslu uspořádání $\prec$) z prvků d_x a d_y. (Nechť je to (BÚNO) d_x.) Pak $x_e \in V_x \cap V_y$ pro $d_x \prec e$. To je ve sporu s disjunktností těchto okolí. Tedy net nemůže mít v Hausdorffově prostoru dvě různé limity.

□

Důkaz následujícího tvrzení vychází z [Jac].

Tvrzení 2. *Každý metrický prostor je Hausdorffův.*

Důkaz. Buď (X,d) metrický prostor a nechť $x,y \in X$ jsou dva různé body. Položme $r = d(x,y)$. Označme $U = \mathcal{B}(x,r/2)$, $V = \mathcal{B}(y,r/2)$. Potom zjevně $x \in U$, $y \in V$. Nyní pro spor předpokládejme, že $U \cap V \neq \emptyset$, tedy existuje $z \in U \cap V$. Pak ale nutně $d(x,z) < r/2$ a $d(y,z) < r/2$. Dostáváme tedy (za použití trojúhelníkové nerovnosti):

$$r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Neboli $r < r$, což je spor.

□

Důsledek 1. Prostor $\mathbb{R}$ s euklidovskou topologií je Hausdorffův. Libovolný Banachův prostor je Hausdorffův.

2.2 Riemannův integrál omezené funkce na kompaktním intervalu

Riemannův integrál zavedeme v této části pouze pro funkce omezené na intervalu [0,1]. O zobecnění na libovolná konečná sjednocení kompaktních intervalů se zmíním v závěru této kapitoly.
Vycházím převážně ze svých zápisků z kurzu matematické analýzy a z knihy [Jar84c].

Vezměme funkci $f \in \mathfrak{B}[0,1]$. Definujeme **dělení intervalu** [0,1]:

$$\mathcal{D}: \; 0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1, \; \mathcal{D} = \{x_i\}_{i=0}^{n}$$

kde $x_0,...,x_n$ jsou dělící body dělení $\mathcal{D}$. Dále budeme potřebovat dolní a horní odhady integrované funkce f na intervalech $[x_{i-1},x_i]$, označme je víceméně tradičně:

$$m_i := \inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t), \qquad M_i := \sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)$$

Tyto odhady použijeme pro aproximaci funkce na jednotlivých podintervalech dělení. Označme tyto aproximace následovně:

$$s(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

Poznámka 1. Čísla $s(f,\mathcal{D})$, $S(f,\mathcal{D})$ jsou často nazývána Riemannovými dolními resp. horními součty příslušnými funkci f a dělení $\mathcal{D}$.

Úmluva. Bude-li zřejmé, jakou funkci f integrujeme, budeme zkráceně psát $s(\mathcal{D})$ místo $s(f,\mathcal{D})$ a obdobně pro horní Riemannovy součty.

Definice 5. *Buďte $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ dvě dělení intervalu* [0,1]*. Řekneme, že $\mathcal{D}_2$ je zjemněním dělení $\mathcal{D}_1$, jestliže každý dělící bod dělení $\mathcal{D}_1$ je zároveň dělícím bodem $\mathcal{D}_2$.*

Tvrzení 3. *Mějme $\mathcal{D}^*$ zjemnění dělení $\mathcal{D}$. Nechť $\mathcal{D}^*$ má dělící body $0 = y_0 < y_1 < ... < y_m = 1$, kde $m \geq n$. Nechť dále platí: $x_{i-1} = y_k$, $x_i = y_{k+l}$, pro vhodnou volbu indexů.*
Definujme pro $\mathcal{D}^*$ odhady podobně jako pro $\mathcal{D}$:

$$\theta_{k+j} := \inf_{t\in[y_{k+j-1},y_{k+j}]} f(t), \qquad \Theta_{k+j} := \sup_{t\in[x_{k+j-1},x_{k+j}]} f(t).$$

Pro $f \in \mathfrak{B}[0,1]$ zřejmě platí následující:

(a) $s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D})$*, pro libovolné dělení $\mathcal{D}$ intervalu* [0,1]*.*

(b) $m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{j=1}^l \theta_{k+j}(y_{k+j} - y_{k+j-1}) \leq \sum_{j=1}^l \Theta_{k+j}(y_{k+j} - y_{k+j-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1})$.

(c) $s(\mathcal{D}) \leq s(\mathcal{D}^*) \leq S(\mathcal{D}^*) \leq S(\mathcal{D})$.

(d) Jsou-li $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ dvě dělení intervalu [0,1] a $\mathcal{D}_3$ je jejich společné zjemnění (obsahuje minimálně dělící body obou dělení), pak platí: $s(\mathcal{D}_1) \leq s(\mathcal{D}_3) \leq S(\mathcal{D}_3) \leq S(\mathcal{D}_2)$.

Nyní má smysl definovat **horní** a **dolní Riemannův integrál** z funkce f na intervalu [0,1]. Z Tvrzení 3 je vidět, že následující definice dává smysl. Označme tedy:

$$\overline{\int_0^1} f = \inf\{S(\mathcal{D}), \mathcal{D} \text{ je dělení } [0,1]\}$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{s(\mathcal{D}), \mathcal{D} \text{ je dělení } [0,1]\}$$

V tomto případě jsou oba integrály konečná reálná čísla.

Nakonec zavedeme ještě jeden důležitý pojem.

Definice 6 (norma dělení)**.** *Normou dělení $\mathcal{D} = \{x_i\}_{i=0}^n$ nazveme číslo $\nu(\mathcal{D}) = \max_{i\in\{1,...,n\}} (x_i - x_{i-1})$.*

2.2.1 Různé definice (R)-integrálu

V této podkapitole zformulujeme dvě klasické definice Riemannova integrálu a jednu známou podmínku pro jeho existenci. Následně dokážeme jejich ekvivalenci.

Darbouxova definice

Definice 7 (Darboux)**.** *Nechť* $f \in \mathfrak{B}[0,1]$. *Pokud* $\overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f$, *pak jejich společnou hodnotu označíme* $\int_0^1 f$ *a nazveme ji Riemannovým integrálem funkce* f *přes interval* $[0,1]$.

Poznámka 2. Budeme-li chtít integrovat omezenou funkci na libovolném kompaktní intervalu (nebo jejich konečném sjednocení), pak je jasné, že definice se téměř nezmění. (Viz příklad na konci kapitoly.)

Poznámka 3. Je jasné, jak vznikla tato definice. Uvědomíme-li si, jakým způsobem odhadují horní a dolní součty integrovanou funkci, stačí pak provést analogii limitního procesu, a je ihned vidět, že definice splňuje primitivní geometrickou představu o integrálu nezáporné funkce, jako o „obsahu plochy pod grafem“. (Rozšíření na funkce nabývající i záporných hodnot je zjevné.)

Příklad 1. Darbouxova definice je evidentně velmi nevhodná pro výpočty konkrétních hodnot integrálů, nicméně existují případy, kdy to lze provést i podle ní. Podíváme se na hodnotu $\int_0^1 \chi_{[0,1]}$.
Definujme dělení $\mathcal{D} : x_0 = 0 < 1 = x_1$. Potom $s(\mathcal{D}) = 1$ a $S(\mathcal{D}) = 1$. Snadno nahlédneme, že pro libovolné jemnější dělení bychom nedostali jiné součty (plyne to ihned z Tvrzení 3(c). Z toho je ihned vidět, že $\overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f = 1$ a tedy náš hledaný integrál má hodnotu 1 podle Darbouxovy definice, což je přesně to, co bychom bývali očekávali.

Riemannova definice

Druhou možností je zkusit charakterizovat funkci na jednotlivých podintervalech dělení hodnotou v jistých vybraných bodech.

Pro libovolné dělení $\mathcal{D} = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[0,1]$ definujme množinu posloupností $I(\mathcal{D}) = \{\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n : \xi_i \in [x_{i-1},x_i]\}$. Položme nyní

$$\Xi(f,\mathcal{D},\xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Nazvěme toto číslo **Riemannovou sumou** příslušnou funkci f, dělení $\mathcal{D}$ a posloupnosti $\xi \in I(\mathcal{D})$.

Značení. Označme $M_{(\mathcal{D},\xi)}$ množinu $\{(\mathcal{D},\xi); \mathcal{D}$ je dělení $[0,1]; \xi \in I(\mathcal{D})\}$.

Nyní nastává otázka, jak lze usměrnit množinu dvojic $(\mathcal{D},\xi)$. Definujme relaci $\prec$ pomocí normy dělení takto:

$$(\mathcal{D}_1,\xi_1) \prec (\mathcal{D}_2,\xi_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \nu(\mathcal{D}_2) \leq \nu(\mathcal{D}_1).$$

Všimněme si, že definice relace nezávisí na volbě vektorů ξ. Relace je reflexivní a tranzitivní, neboť dobře známá relace $\leq$ má tyto vlastnosti. Je ovšem také lineární (každá dvě reálná čísla jsou porovnatelná), a tedy pro každé dvě množiny $(\mathcal{D}_i,\xi_i)$, $i = 1{,}2$ existuje horní mez. Tím jsou splněny podmínky Definice 1 a $(M_{(\mathcal{D},\xi)}, \prec)$ je usměrněnou množinou.

Definice 8 (Riemann - pomocí normy dělení)**.** *Nechť existuje $J \in \mathbb{R}$ splňující:*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\mathcal{D})(\nu(\mathcal{D}) < \delta)(\forall\xi)(\xi \in I(\mathcal{D})) : |\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - J| < \varepsilon,$$

pak J nazveme Riemannovým integrálem z funkce f přes interval $[0{,}1]$*. (Jinými slovy J je limita netu riemannových sum na usměrněné množině* $(M_{(\mathcal{D},\xi)}, \prec)$*.)*

Poznámka 4. Limita je jednoznačně určena podle Tvrzení 1 a Důsledku 1.

Množinu dvojic dělení a vektorů ξ lze ale usměrnit i jinak. Ukážeme si ještě následující možnost.
Definujme relaci $\lhd$ na množině $(\mathcal{D},\xi)$ takto:

$$(\mathcal{D}_1,\xi_1) \lhd (\mathcal{D}_2,\xi_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \mathcal{D}_2 \text{ je zjemněním } \mathcal{D}_1.$$

Pak $\lhd$ je zjevně reflexivní (dělení je svým triviálním zjemněním), dále je tranzitivní, což se snadno nahlédne z definice dělení. Každé dva prvky v $M_{(\mathcal{D},\xi)}$ mají horní mez, buďto je jí „jemnější“ z obou dělení nebo jejich společné zjemnění. Opět jsou tedy splněny podmínky z Definice 1 a množina $(M_{(\mathcal{D},\xi)}, \lhd)$ je usměrněnou množinou. Navíc naše relace opět nezávisí na volbě vektoru ξ.

Definice 9 (Riemann - pomocí zjemnění dělení)**.** *Nechť existuje $J' \in \mathbb{R}$ splňující:*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists(\mathcal{D}_0,\xi_0) \in M_{(\mathcal{D},\xi)})(\forall(\mathcal{D},\xi))((\mathcal{D}_0,\xi_0) \lhd (\mathcal{D},\xi)) : |\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - J'| < \varepsilon,$$

pak J' nazveme Riemannovým integrálem z funkce f přes interval $[0{,}1]$*. (Jinými slovy J' je limita netu riemannových sum na usměrněné množině* $(M_{(\mathcal{D},\xi)}, \lhd)$*.)*

Poznámka 5. Limita je jednoznačně určena podle Tvrzení 1 a Důsledku 1.

Poslední dvě definice se vlastně lišily pouze volbou usměrnění na $(\mathcal{D},\xi)$. Pojďme se tedy podívat, jak je to s jejich vztahem.

Tvrzení 4. *Nechť $f \in \mathfrak{B}[0{,}1]$. Jestliže alespoň jedna z limit z Definice 8 nebo Definice 9 existuje, pak existují obě a jsou si rovny.*

Důkaz. Budiž splněna podmínka z Definice 8. Vezměme nyní libovolné pevné $\varepsilon > 0$, pro ně existuje nějaké $\delta > 0$ z definice. V množině $M_{(\mathcal{D},\xi)}$ existuje dělení $\mathcal{D}_{k_0}$ splňující $\nu(\mathcal{D}_{k_0}) < \delta$. (Získáme ho třeba půlením intervalů.) Dělení $\mathcal{D}_k$, která jsou zjemněními $\mathcal{D}_{k_0}$, mají normu jistě menší nebo rovnu tomuto dělení.

Dokažme opačný případ. Tento důkaz vychází z [Gor91]. Nechť tedy platí podmínka z Definice 9 Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $(\mathcal{D}_0,\xi_0) \in M_{(\mathcal{D},\xi)}$ s N dělícími body tak, že pro jeho libovolné zjemnění $(\mathcal{D},\xi)$ platí (dokonce) $|\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - J'| < \varepsilon/2$. (Epsilon může být libovolné.) Nechť $\delta = \varepsilon/(4MN)$, kde $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Buď $(\mathcal{D},\xi)$ dělení $[0{,}1]$ splňující $\nu(\mathcal{D}) < \delta$. Definujeme dělení $(\mathcal{D}_1,\xi_1)$ tak, že dělící body $\mathcal{D}_1$ jsou sjednocením dělících bodů $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}_0$ a složky vektoru ξ_1 jsou na podintervalech dělení $\mathcal{D}_1$ shodných s podintervaly dělení $\mathcal{D}$ stejné jako složky ξ a

na ostatních podintervalech jsou libovolné.
Buď dále $L = \{[c_k,d_k]; 1 \leq k \leq K\}$ množina těch podintervalů dělení $(\mathcal{D},\xi)$, které obsahují body dělení $(\mathcal{D}_0,\xi_0)$ ve svém vnitřku. Uvědomme si, že $K \leq N-1$. Nechť $c_k = u_0^k < u_1^k < ... < u_{n_k-1}^k < u_{n_k}^k = d_k$, kde body $\{u_i^k : 1 \leq i \leq n_k - 1\}$ jsou body dělení $(\mathcal{D}_0,\xi_0)$ v intervalu (c_k,d_k). Nechť $s = \{s_k\}$ je vektor vybraných bodů z ξ v intervalech $[c_k,d_k]$ a $v^k = \{v_i^k\}$ je vektor vybraných bodů z ξ_1 na intervalech $[u_{i-1}^k,u_i^k]$. Potom (za použití trojúhelníkové nerovnosti)

$$|\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - \Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1)| = \left|\sum_{k=1}^{K}\left(f(s_k)(d_k - c_k) - \sum_{i=1}^{n_k} f(v_i^k)(u_i^k - u_{i-1}^k)\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_k}|f(s_k) - f(v_i^k)|(u_i^k - u_{i-1}^k) \leq 2M\sum_{k=1}^{K}(d_k - c_k) \leq 2M(N-1)\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}_1$ je zjemněním $\mathcal{D}_0$, dostáváme (za opětovného použití trojúhelníkové nerovnosti):

$$|\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - J'| \leq |\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - \Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1)| + |\Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1) - J'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Protože $\mathcal{D}$ bylo dělení s normou menší než δ, jsme hotovi.

Zbývá ukázat, že obě limity jsou stejné. Předpokládejme pro spor, že $J \neq J'$. Potom $|J' - J| =: A > 0$. Vezměme $\varepsilon \in (0,A)$ libovolné. Podle Definice 8 existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení $\mathcal{D}$ (a každý vektor $\xi \in I(\mathcal{D})$) s normou menší než toto δ je $|\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - J| < \varepsilon/2$. Podle Definice 9 existuje dělení $\mathcal{D}_0$ (a vektor $\xi_0 \in I(\mathcal{D}_0)$) tak, že pro každé $\mathcal{D}^*$ zjemnění dělení $\mathcal{D}_0$ (a příslušný vektor $\xi^* \in I(\mathcal{D}^*)$) platí: $|\Xi(f,\mathcal{D}^*,\xi^*) - J'| < \varepsilon/2$.
Mezi zjemněními dělení $\mathcal{D}_0$ najdeme určitě nějaké dělení s normou menší než $\delta > 0$ (získáme jej třeba půlením intervalů). Označme toto dělení $\widehat{D}$ a příslušný vektor vybraných bodů $\widehat{\xi}$. Pro toto dělení platí tedy odhady z obou definic. Provedeme několik úprav (použijeme při tom trojúhelníkovou nerovnost):

$$A = |J - J'| = |J - \Xi(f,\widehat{D},\widehat{\xi}) + \Xi(f,\widehat{D},\widehat{\xi}) - J'| \leq$$

$$\leq |J - \Xi(f,\widehat{D},\widehat{\xi})| + |\Xi(f,\widehat{D},\widehat{\xi}) - J'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dostáváme spor s volbou ε.

□

Úmluva. Vzhledem k Tvrzení 4 je jedno, kterou Riemannovu definici budeme nadále používat. Vzhledem k tomu, že výsledek bude stejný, nazveme je obě **Riemannovou definicí Riemannova integrálu** a hodnoty J a J' budeme obě značit jako $\int_{[0,1]} f$ nebo $\int_0^1 f$. Při dokazování následujících tvrzení pak budeme používat tu definici, která bude vhodnější.

Příklad 2. Ani Riemannova definice se příliš nehodí k praktickému počítání integrálů (sčítání řad není snadná práce). Přesto se s ní v mnoha ohledech pracuje lépe než s Darbouxovou definicí. Můžeme například spočítat $\int_0^1 x$. (Existence tohoto integrálu je zaručena Větou 8, kterou dokážeme později.) Rozdělíme interval

[0,1] na n podintervalů délky $1/n$. Potom $\nu(\mathcal{D}_n) = 1/n$. Toto dělení zřejmě splňuje podmínky z definice. Dále zvolíme za posloupnost ξ_n pravé okraje podintervalů dělení (tj. body i/n pro $i = 1,...,n$). Podle Riemannovy definice je

$$\Xi(x,D_n,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{n,i})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Poslední rovnost se snadno dokáže matematickou indukcí.
Dokážeme, že se $\int_0^1 x = 1/2$. Počítejme:

$$\left|\frac{n(n-1)}{2n^2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n(n+1) - n^2}{2n^2}\right| = \left|\frac{n}{2n^2}\right| = \frac{1}{2n}.$$

Poslední číslo $1/(2n)$ umíme zvětšováním n „udělat libovolně malé“, proto je hodnota hledaného integrálu rovna $1/2$ podle Riemannovy definice.

2.2.2 Vztahy mezi definicemi a vlastnosti (R)-integrálu

Nejdříve dokážeme větu o ekvivalenci definic z části 2.2.1. Poté se blíže podíváme na (R)-integrál a jeho vlastnosti.
Začneme důkazem pomocného tvrzení.

Tvrzení 5 (O aproximaci dolního a horního (R)-integrálu)**.** *Mějme* $f \in \mathfrak{B}[0,1]$. *Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro každé* $\mathcal{D}$ *dělení intervalu* [0,1] *s vlastností* $\nu(\mathcal{D}) < \delta$ *platí:*

1. $\overline{\int_0^1} f \leq S(f,\mathcal{D}) < \overline{\int_0^1} f + \varepsilon,$
2. $\underline{\int_0^1} f - \varepsilon < s(f,\mathcal{D}) \leq \underline{\int_0^1} f.$

Důkaz. Dokážeme odhad 1., ten druhý se ukáže analogicky.
Buď $\varepsilon > 0$. Existuje dělení $\mathcal{D}_1 : 0 = y_0 < y_1 < ... < y_p = 1$ tak, že platí

$$\overline{\int_0^1} f \leq S(f,\mathcal{D}) < \overline{\int_0^1} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Funkce f je omezená na intervalu [0,1], proto existuje $K \in (0, +\infty)$ tak, že $|f(x)| < K$ na intervalu [0,1]. Volme $\delta = \varepsilon/(4Kp)$. Nechť $\mathcal{D} : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_n$ je dělení s $\nu(\mathcal{D}) < \delta$. Buď $\mathcal{D}'$ dělení [0,1] s dělícími body dělení $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}_1$. Pak (s využitím Tvrzení 3) dostáváme:

$$\overline{\int_0^1} f \leq S(f,\mathcal{D}') \leq S(f,\mathcal{D}) < \overline{\int_0^1} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Chceme určit $|S(f,\mathcal{D}) - S(f,\mathcal{D}')|$.
Rozdělíme intervaly $[x_{i-1},x_i]$ do dvou množin:

- $[x_{i-1},x_i] \in \mathfrak{M}_1$, pokud žádné $y_j \notin [x_{i-1},x_i]$;
- $[x_{i-1},x_i] \in \mathfrak{M}_2$ jinak.

Zajímají nás pouze intervaly z $\mathfrak{M}_2$, protože ty ostatní se odečtou.
Máme následující odhad:

$$|M_i(x_i - x_{i-1})| \leq K(x_i - x_{i-1}) < K\delta.$$

Označme $[z_k,z_{k+1}] = [x_{i-1},x_i] \in \mathfrak{M}_2$. Pro $l > 1$ označme

$$\Lambda_{k+l} = \sup_{x\in[z_{k+j-1},z_{k+j}]} f(x), \text{ pro } \forall j \in \{1,...,l\}.$$

Potom platí i následující odhad:

$$\left|\sum_{j=1}^{l} \Lambda_{k+l}(z_{k+j} - z_{k+j-1})\right| \leq K(x_i - x_{i-1}) < K\delta.$$

V $\mathfrak{M}_2$ je maximálně $p - 1$ intervalů, proto

$$|S(f,\mathcal{D}) - S(f,\mathcal{D}')| < 2K\delta(p-1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pro horní součet určený dělením $\mathcal{D}$ platí

$$S(f,\mathcal{D}) = \underbrace{S(f,\mathcal{D}')}_{<\overline{\int_0^1} f+\varepsilon/2} + \underbrace{S(f,\mathcal{D}) - S(f,\mathcal{D}')}_{<\varepsilon/2} < \overline{\int_0^1} f + \varepsilon.$$

$\square$

Věta 6 (O ekvivalenci definic)**.** *Pro existenci Riemannova integrálu funkce* $f \in \mathfrak{B}[0,1]$ *je ekvivalentní:*

(i) Darbouxova definice;

(ii) Riemannova definice;

(iii) Bolzanova-Cauchyova podmínka:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\mathcal{D} \text{ dělení } [0,1] : 0 \leq S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon.$$

Důkaz. $(i) \implies (iii)$ Nechť existuje $\int_0^1 f$ dle Darbouxe, tedy $\overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože f je riemannovsky integrovatelná, existují $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ dělení intervalu $[0,1]$ tak, že

$$\overline{\int_0^1} f + \varepsilon > S(f,\mathcal{D}_1) \geq \overline{\int_0^1} f,$$

$$\underline{\int_0^1} f - \varepsilon < s(f,\mathcal{D}_2) \leq \underline{\int_0^1} f.$$

Definujme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. (Sjednocení dělících bodů.) Aplikací Tvrzení 3 dostáváme:

$$0 \leq S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}_1) - s(f,\mathcal{D}_2) < \overline{\int_0^1} f + \varepsilon - \underline{\int_0^1} f + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Pro zadané $\varepsilon > 0$ jsme našli $\mathcal{D}$ dělení [0,1] s vlastností $0 \le S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < 2\varepsilon$. Protože ε lze volit libovolně, dokázali jsme platnost (BC)-podmínky.

$(iii) \implies (i)$ Nechť je (BC)-podmínka splněna. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje D dělení [0,1] s vlastností $0 \le S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon$. Dostáváme odhad (z definice horního a dolního (R)-integrálu):

$$0 \le \overline{\int_0^1} f - \underline{\int_0^1} f \le S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon.$$

A protože ε může být libovolně malé kladné, plyne z předchozího odhadu rovnost dolního a horního Riemannova integrálu, tedy splnění Darbouxovy definice riemannovské integrability.

$(i) \implies (ii)$ Pro libovolné $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, kde x_i jsou body libovolného dělení [0,1] a ξ_i jsou souřadnice vektoru vybraných bodů z Riemannovy definice, platí $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, z čehož ihned plyne

$$s(f,\mathcal{D}) \le \Xi(f,\mathcal{D},\xi) \le S(f,\mathcal{D}).$$

Zbytek je důsledkem Tvrzení 5.

$(ii) \implies (i)$ Důkaz vychází z [Jar84c]. Tuto implikaci ukážeme sporem. Předpokládejme, že je splněna podmínka z Riemannovy definice a zároveň platí

$$\underline{\int_0^1} f < \overline{\int_0^1} f.$$

Zvolme „standardní“ dělení intervalu [0,1] na r stejných podintervalů (označme jej $\mathcal{D}_r$), tj. dělení s body $x_{j,r} = j/r$ a s normou $\nu(D_r) = 1/r$. (Tuto normu umíme zvětšováním r udělat „libovolně malou“, tím jsme vyřešili problém s existencí vhodného $\delta > 0$ z Riemannovy definice.) Význam značení $m_{j,r}$ a $M_{j,r}$ by měl být zřejmý. Další postup rozdělíme na dva případy:

- Nechť r je sudé, tj. $r = 2k$ pro vhodné $k \in \mathbb{N}$. Volme čísla $\xi_{j,2k}$ tak, aby bylo splněno $x_{j-1,2k} \le \xi_{j,2k} \le x_{j,2k}$ a zároveň $m_{j,2k} \le f(\xi_{j,2k}) < m_{j,2k} + 1/(2k)$. Odtud plyne, že

$$\left| \sum_{j=1}^{2k} f(\xi_{j,2k})(x_{j,2k} - x_{j-1,2k}) - \sum_{j=1}^{2k} m_{j,2k}(x_{j,2k} - x_{j-1,2k}) \right| <$$

$$< \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{2k}(x_{j,2k} - x_{j-1,2k}) = \frac{1}{4k^2} 2k = \frac{1}{2k}.$$

- Je-li r liché, tj. $r = 2k - 1$ pro vhodné $k \in \mathbb{N}$, volme $\xi_{j,2k-1}$ tak, aby bylo splněno $x_{j-1,2k-1} \le \xi_{j,2k-1} \le x_{j,2k-1}$ a zároveň $M_{j,2k-1} - 1/(2k-1) < f(\xi_{j,2k-1}) \le M_{j,2k-1}$. Odtud plyne, že

$$\left| \sum_{j=1}^{2k-1} f(\xi_{j,2k-1})(x_{j,2k-1} - x_{j-1,2k-1}) - \sum_{j=1}^{2k-1} M_{j,2k-1}(x_{j,2k-1} - x_{j-1,2k-1}) \right| <$$

$$< \sum_{j=1}^{2k-1} \frac{1}{2k-1}(x_{j,2k-1} - x_{j-1,2k-1}) = \frac{1}{2k-1}.$$

Snadno vidíme, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} = 0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k-1}.$$

Položíme-li však

$$A_r = \sum_{j=1}^{r} f(\xi_{j,r})(x_{j,r} - x_{j-1,r}),$$

vidíme podle odhadů v předchozích dvou bodech, že

$$\lim_{k\to\infty} A_{2k} = \underline{\int_0^1} f, \quad \lim_{k\to\infty} A_{2k-1} = \overline{\int_0^1} f.$$

Dle předpokladu jsou obě limity různé, proto posloupnost $A_1,A_2,\ldots$ nemá limitu (Věta 62 v [Jar84a]), což je spor s Riemannovou definicí.

□

Právě jsme dokázali ekvivalenci všech výše uvedených definic, v dalším textu můžeme tedy používat libovolnou z nich. (V závislosti na předpokladech.) Pro výpočty se spíše hodí ta Riemannova a její různé variace, zatímco pro důkazy je někdy vhodnější definice Darbouxova. Nyní zaměříme svou pozornost na vyšetřování vlastností (R)-integrálu, který jsme právě korektně definovali.

Lemma 7 (Jiná formulace (BC)-podmínky)**.** *Buď $f \in \mathfrak{B}[0,1]$. Potom $\int_0^1 f = I$ právě když*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{D} \text{ dělení } [0,1] : I - \varepsilon < s(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}) < I + \varepsilon.$$

Důkaz. " $\Longrightarrow$ " Nechť $\int_0^1 f = I$. Vezměme $\varepsilon > 0$. Podle Riemannovy definice pro vhodnou volbu ξ_1 a ξ_2 dostaneme $\Xi(f,\mathcal{D},\xi_1) = S(f,\mathcal{D}) - \varepsilon/2$ a $\Xi(f,\mathcal{D},\xi_2) = s(f,\mathcal{D}) + \varepsilon/2$. Pro něj existuje vhodné $\delta > 0$. (BÚNO) $\nu(\mathcal{D}) < \delta$. Potom z Riemannovy definice plyne $|S(f,\mathcal{D}) - I| < \varepsilon$ a podobně pro dolní součty.
" $\Longleftarrow$ " $0 \leq \overline{\int_0^1} f - \underline{\int_0^1} f \leq S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < 2\varepsilon$. ε je libovolné, tedy jsme hotovi.

□

Věta 8 (Vlastnosti Riemannova integrálu)**.** *Platí:*

(a) Nechť $f \in \mathcal{C}[0,1]$, pak $\int_0^1 f$ existuje.

(b) Nechť $0 < a < b < 1$ a nechť existuje $\int_0^1 f$, pak existuje i $\int_a^b f$.

(c) Nechť $0 < a < 1$ a nechť $\int_0^a f$ a $\int_a^1 f$ existují. Pak platí: $\int_0^1 f = \int_0^a f + \int_a^1 f$.

(d) Nechť $\int_0^1 f$ existuje. Pak pro $\beta \in \mathbb{R}$ platí: $\int_0^1 (\beta f) = \beta \int_0^1 f$.

(e) Mějme funkce f a g takové, že $\int_0^1 f$ a $\int_0^1 g$ existují. Pak platí: $\int_0^1 (f+g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g$.

(f) *Nechť existují* $\int_0^1 f$ *a* $\int_0^1 g$*. Předpokládejme, že na* $[0,1]$ *platí* $f \leq g$*, potom* $\int_0^1 f \leq \int_0^1 g$.

(g) *Předpokládejme, že* $\int_0^1 f$ *existuje. Pak i* $\int_0^1 |f|$ *existuje a platí:* $|\int_0^1 f| \leq \int_0^1 |f|$.

Důkaz.

(a) Spojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu je stejnoměrně spojitá. (Věta 63 v [Jar84b]) Pro libovolné dělení $\mathcal{D}$ s dělícími body $\{x_i\}_{i=0}^n$ platí:

$$0 \leq \overline{\int_0^1} f - \underline{\int_0^1} f \leq S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \overset{*}{=}$$

Vzhledem ke spojitosti na kompaktu existují body y_i a z_i takové, že $f(y_i) = M_i$ a $f(z_i) = m_i$. (Věta 128 v [Jar84a])

$$\overset{*}{=} \sum_{i=1}^n (f(y_i) - f(z_i))(x_i - x_{i-1}) \overset{*}{=}$$

Volme $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna dělení $\mathcal{D}$ s vlastností $\nu(\mathcal{D}) < \delta$ platí:

$$\overset{*}{=} \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(z_i)|(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

Tvrzení tedy ihned plyne z věty „o dvou policajtech“. (Věta 61 v [Jar84a])

(b) Podle (BC)-podmínky pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\mathcal{D}$ takové, že $S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon$. (BÚNO) lze předpokládat, že body a, b jsou dělícími body $\mathcal{D}$. Definujme $\mathcal{D}_1$ jako dělení intervalu $[0,a]$, $\mathcal{D}_2$ na intervalu $[a,b]$ a $\mathcal{D}_3$ na $[b,1]$ tak, aby všechna tři dělení obsahovala pouze dělící body z $\mathcal{D}$. Potom:

$$0 \leq S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^3 (S(f,\mathcal{D}_i) - s(f,\mathcal{D}_i)) < \varepsilon.$$

A tedy i $S(f,\mathcal{D}_2) - s(f,\mathcal{D}_2) < \varepsilon$. Závěr dostaneme pomocí (BC)-podmínky.

(c) Označme $I_1 = \int_0^a f$ a $I_2 = \int_a^1 f$. Podle Lemmatu 7 pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{D}_1$ dělení $[0,a]$ a $\mathcal{D}_2$ dělení $[a,1]$ tak, že platí:

$$I_1 - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\mathcal{D}_1) \leq S(f,\mathcal{D}_1) < I_1 + \frac{\varepsilon}{2};$$
$$I_2 - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\mathcal{D}_2) \leq S(f,\mathcal{D}_2) < I_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nyní definujme $\mathcal{D}$, které bude obsahovat právě všechny dělící body $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$. Potom zřejmě:

$$I_1 + I_2 - \varepsilon < \underbrace{s(f,\mathcal{D}_1) + s(f,\mathcal{D}_2)}_{=s(f,\mathcal{D})} \leq \underbrace{S(f,\mathcal{D}_1) + S(f,\mathcal{D}_2)}_{S(f,\mathcal{D})} < I_1 + I_2 + \varepsilon.$$

Další aplikací Lemmatu 7 dostáváme tvrzení.

(d) Ačkoliv důkaz je triviální, je třeba rozebrat několik případů.

($\beta \geq 0$) Platí:
$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} (\beta f) = \beta \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f.$$
A stejný vztah máme i pro infimum. Dále si uvědomme, že v konečných součtech platí distributivita. Kombinací obého máme:
$$\overline{\int_0^1} (\beta f) = \beta \overline{\int_0^1} f.$$
A samozřejmě totéž pro dolní integrál. Podle Darbouxovy definice tedy tvrzení platí.

($\beta = -1$) Znovu využijeme distributivity v konečných součtech a vztahu:
$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} (-f) = -\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f.$$
(Platí i v případě, kdy infimum nahradníme supremem a na opačné straně rovnosti obráceně.) Podmínky Darbouxovy definice jsou tím splněny.

($\beta < 0$) Tento případ je okamžitým důsledkem předchozích dvou, pro úplnost jej formálně dokážu:
$$\int_0^1 (\beta f) = \int_0^1 (-|\beta| f) = -\int_0^1 (|\beta| f) = -|\beta| \int_0^1 f = \beta \int_0^1 f.$$

(e) Podle Lemmatu 7 pro každé $\varepsilon > 0$ existují $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$ dělení [0,1], tak že pro ně platí nerovnosti z toho lemmatu. Vezměme $\mathcal{D}$, které bude jejich společným zjemněním. Potom:
$$I_1 - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\mathcal{D}_1) \leq s(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}_1) < I_1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$
(Kde $I_1 = \int_0^1 f$.) Kombinací tohoto vztahu a podobného odhadu pro $I_2 = \int_0^1 g$. dostaneme:
$$I_1 + I_2 - \varepsilon < s(f,\mathcal{D}) + s(g,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}) + S(g,\mathcal{D}) < I_1 + I_2 + \varepsilon.$$
Nyní si uvědomme, že pro jakoukoliv $M \subset [0,1]$, $M \neq \emptyset$:
$$\sup_{x\in M}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x);$$
$$\inf_{x\in M}(f(x) + g(x)) \geq \inf_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x).$$
Kombinací předchozího a opětovným užitím Lemmatu 7 je tato část dokázána.

(f)
$$0 \leq \int_0^1 (g - f) = \int_0^1 g - \int_0^1 f$$

(g) Použijeme (BC)-podmínku. Volme $\varepsilon > 0$, existuje dělení $\mathcal{D}$ tak, že: $S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon$. Užijeme vztahu:

$$\sup_{x\in M}|f(x)| - \inf_{x\in M}|f(x)| \leq \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} f(x),$$

platného pro libovolnou neprázdnou podmnožinu [0,1]. Spojíme-li (BC)-podmínku a tento odhad dohromady, budou splněny předpoklady pro existenci integrálu ze zadání. Použitím předchozího bodu (f) dostáváme:

$$-|f| \leq f \leq |f| \Longrightarrow -\int_0^1 |f| \leq \int_0^1 f \leq \int_0^1 |f| \Longrightarrow \left|\int_0^1 f\right| \leq \int_0^1 |f|.$$

Tím je důkaz hotov.

□

Důsledek 2. Riemannův integrál je spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{C}[0,1]$ (uvažovaném se standardní maximovou normou). Navíc má normu rovnou 1.

Důkaz. Zbývá dokázat spojitost (omezenost). Označme $T = \int_0^1$. Na jedné straně

$$\int_0^1 \chi_{[0,1]} = 1 \Longrightarrow \|T\| \geq 1,$$

zatímco pro $f \in B_{\mathcal{C}[0,1]}$ dostáváme následující:

$$\|Tf\| = \left\|\int_0^1 f\right\| \leq \int_0^1 \max_{x\in[0,1]}|f(x)| = \max_{x\in[0,1]}|f(x)| \int_0^1 \chi_{[0,1]} = \|f\| = 1 \Longrightarrow \|T\| \leq 1.$$

□

Poznámka 6. Hodnota Riemannova integrálu se nezmění, pokud integrovanou funkci pozměníme na konečné množině.

Poznámka 7 (Riemannův integrál na různých množinách). Dosud jsme zavedli (R) - integrál pouze na intervalu [0,1]. Nastiňme ještě, kterak jej zavésti i na jiných množinách.
Vezměme uzavřený interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$. ten je samozřejmě kompaktní. Stačí nám tedy místo dělení intervalu [0,1] dělit tento interval.
Máme-li nyní integrovat na konečném sjednocení kompaktních intervalů, pak zavedeme na každém z nich nějaké dělení ((BÚNO) předpokládejme, že jde o intervaly po dvou disjunktní) a následně integrujeme na jednotlivých intervalech zvlášť a výsledky sečteme. To můžeme udělat díky linearitě integrálu a vlastnostem dělení intervalu.

Nyní už víme vše podstatné o Riemannově integrálu pro dostatečně zajímavé reálné funkce reálné proměnné.
Podstatný pro nás byl pevný kompaktní interval, respektive konečné sjednocení takových intervalů. V další kapitole se pokusíme integrovat zobrazení z takové množiny do Banachova prostoru X.

3. Riemannův integrál pro zobrazení do Banachových prostorů

Mnoho poznatků pro spojité funkce na kompaktním intervalu zůstává platných i pro zobrazení do Banachových prostorů. Abychom se mohli dostat k zajímavým odlišnostem, k nimž patří například neplatnost jedné implikace v Lebesgueově větě, musíme si nyní formálně zavést integrál i pro tato zobrazení a zobecnit výsledky předchozí kapitoly.
Budeme vycházet z článku [Gor91], kde si také může čtenář vyhledat další podrobnosti.

Úmluva. Budeme používat standardní značení ve funkcionální analýze (prostory c_0, ℓ^p, $\mathscr{L}^p$, $\mathcal{C}[0,1]$, atd.). Prostor $\mathcal{C}[0,1]$ budeme vždy uvažovat s maximovou normou.

Úmluva. V dalším textu budou studována pouze zobrazení z $[0,1]$ do X. Zobecnění na libovolné konečné sjednocení kompaktních intervalů je jednoduché. (Viz poznámku na konci minulé kapitoly.)

Poznámka 8. Zdá se, že problémem nekompaktních množin se nikdo příliš nezabýval ([Gor91]). Buďto nejde o zajímavý problém nebo v této oblasti nejsou významné výsledky. I my se toho budeme držet v dalším textu.

Vzory pro zobrazení budou opět ležet v intervalu $[0,1]$, můžeme tedy používat pojmy a symboly zavedené v předchozí kapitole.

Nemá smysl se pokoušet o *přímočaré* zobecnění Darbouxovy definice. (Nicméně jistým způsobem ji zobecnit lze. Čtenář se s touto definicí může seznámit v [Gor91].)
Na druhou stranu jsme jistě schopni zjistit, jak vypadá obraz libovolného bodu, a proto se jeví jako rozumné používat definici Riemannovu.

Zobecnění bude vypadat velmi jednoduše. Formálně jediný rozdíl je nahrazení jednoho symbolu jiným, a sice $|\cdot|$ za $\|\cdot\|$. Teoretické rozdíly jsou ale větší.

Poznámka 9. **Riemannova suma** $\Xi(f,\mathcal{D},\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ vypadá formálně stejně jako v předchozí kapitole. Dříve šlo o součet čísel, nyní je to ovšem suma prvků Banachova prostoru.

Definice 10 (Riemannův integrál - pomocí normy dělení)**.** *Mějme $f : [0,1] \to X$. Řekneme, že funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$ (a jejím Riemannovým integrálem přes $[0,1]$ je $J \in X$), pokud platí:*

$$(\exists J \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathcal{D})(\nu(\mathcal{D}) < \delta)(\forall \xi)(\xi \in I(\mathcal{D})) : \|\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - J\| < \varepsilon.$$

Poznámka 10. Limita je jednoznačně určena podle Tvrzení 1 a Důsledku 1.

Definice 11 (Riemannův integrál - pomocí zjemnění dělení)**.** *Buď $f : [0,1] \to X$ funkce. Pokud existuje $J' \in X$ splňující:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists (\mathcal{D}_0,\xi_0) \in M_{(\mathcal{D},\xi)})(\forall (\mathcal{D},\xi))((\mathcal{D}_0,\xi_0) \lhd (\mathcal{D},\xi)) : \|\Xi(f,\mathcal{D}_k,\xi_k) - J'\| < \varepsilon,$$

pak řekneme, že f je riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$ a J' nazveme Riemannovým integrálem funkce f přes interval $[0,1]$.

Poznámka 11. Limita je jednoznačně určena podle Tvrzení 1 a Důsledku 1.

Tvrzení 9. *Definice 10 a 11 jsou ekvivalentní. Hodnoty J a J' jsou stejné, pokud alespoň jedna existuje.*

Důkaz. Je stejný jako důkaz Tvrzení 4.

□

Definice 12. *Prvek X, který určují J a J' z předchozích definic, nazveme **Riemannovým integrálem** zobrazení f přes interval $[0,1]$ (a značíme $\int_{[0,1]} f$ nebo $\int_0^1 f$). Zobrazení f nazveme **riemannovsky integrovatelným na** $[0,1]$, pokud $\int_{[0,1]} f$ existuje.*

Důkaz následujícího tvrzení vychází z knihy [KKS04] a přehledového článku [Gor91].

Tvrzení 10 (Bolzanova-Cauchyova podmínka)**.** *Nechť $f : [0,1] \to X$. Pak je ekvivalentní:*

(R) f je riemannovsky integrovatelné zobrazení na $[0,1]$;

(BC1) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\|\Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D}_2,\xi_2)\| < \varepsilon$, kde $\nu(\mathcal{D}_i) < \delta$, $i = 1,2$.

(BC2) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\mathcal{D}_\varepsilon$ tak, že $\|\Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D}_2,\xi_2)\| < \varepsilon$, kde $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$ jsou zjemnění $\mathcal{D}_\varepsilon$.

(BC3) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\mathcal{D}_\varepsilon$ tak, že $\|\Xi(f,\mathcal{D}_\varepsilon,\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D}_\varepsilon,\xi_2)\| < \varepsilon$, pro libovolné dva vektory $\xi_1, \xi_2 \in I(\mathcal{D})$.

Důkaz. Dokážeme, že (R) je ekvivalentní s (BC1).

- ((R)$\Rightarrow$ (BC1)) Volme $\varepsilon > 0$ a nechť je vše jako v Definici 10. Pak platí odhady:

$$||\Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D}_2,\xi_2)|| = ||\Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1) - J + J - \Xi(f,\mathcal{D}_2,\xi_2)|| \leq$$

$$\leq ||\Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1) - J|| + ||J - \Xi(f,\mathcal{D}_2,\xi_2)|| < 2\varepsilon.$$

  (Využili jsme trojúhelníkové nerovnosti.)
  Protože ε bylo libovolné, dostáváme platnost (BC1).

- ((BC1)$\Leftarrow$ (R)) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje podle (BC1) $\delta_k > 0$ tak, že $\|\Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D}_2,\xi_2)\| < 1/k$ pro obě dělení s normou menší než δ_k. Můžeme (BÚNO) předpokládat, že $\delta_k \geq \delta_{k+1}$. (Jinak bychom nahradili δ_k minimem množiny $\{\delta_1,...,\delta_k\}$.)
  Pro každé k nyní fixujme dělení $\mathcal{D}_k$ s normou menší než δ_k. Uvědomme si, že pro $j > k$ je $\nu(\mathcal{D}_j) < \delta_j \leq \delta_k$. A tedy
  $$\|\Xi(f,\mathcal{D}_k,\xi_k) - \Xi(f,\mathcal{D}_j,\xi_j)\| < 1/\min\{k,j\}.$$
  Z toho plyne, že posloupnost $\{\Xi(f,\mathcal{D}_k,\xi_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Protože prostor X je Banachův (a tedy úplný), má tato posloupnost limitu. Označme ji A. Použitím standardního triku a trojúhelníkové nerovnosti dostaneme:
  $$\|\Xi(f,\mathcal{D}_k,\xi_k) - A + A - \Xi(f,\mathcal{D}_j,\xi_j)\| \leq$$
  $$\leq \|\Xi(f,\mathcal{D}_k,\xi_k) - A\| + \|A - \Xi(f,\mathcal{D}_j,\xi_j)\| \leq 1/k.$$
  A tedy nutně i $\|\Xi(f,\mathcal{D}_k,\xi_k) - A\| \leq 1/k$.
  Zbývá ukázat, že limita A splňuje podmínku z Definice 10. Volme tedy $\varepsilon > 0$ a $K > 2/\varepsilon$. Buď $\mathcal{D}$ dělení s normou $\nu(\mathcal{D}) < \delta_K$ a nechť ξ je příslušný vektor vybraných bodů. Potom:
  $$||\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - A|| = \|\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - \Xi(f,\mathcal{D}_K,\xi_K) + \Xi(f,\mathcal{D}_K,\xi_K) - A\| \leq$$
  $$\leq \|\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - \Xi(f,\mathcal{D}_K,\xi_K)\| + \|\Xi(f,\mathcal{D}_K,\xi_K) - A\| < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} < \varepsilon.$$
  A tím je tato podmínka splněna.

Dokážeme, že (BC1) je ekvivalentní s (BC2).

- ((BC1) $\Rightarrow$ (BC2)) Volme $\varepsilon > 0$, k němu existuje vhodné δ z (BC1). Najděme nyní vhodné dělení s normou menší než δ. Získáme ho třeba půlením intervalů. Jeho zjemnění mají zřejmě normu menší nebo rovnu normě původního dělení, proto splňují podmínky z (BC1) a tím pádem platí odhad z (BC2).

- ((BC1) $\Leftarrow$ (BC2)) Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $(\mathcal{D}_0,\xi_0) \in M_{(\mathcal{D},\xi)}$ s N dělícími body tak, že pro jeho libovolné zjemnění $(\mathcal{D},\xi)$ a zjemnění $(\mathcal{D}_1,\xi_1)$ definované níže platí (BC2). Nechť $\delta = \varepsilon/(2MN)$, kde $M = \sup_{x\in[0,1]} ||f||$. ($M$ je konečné číslo, jinak by neplatilo (BC2).)
  Buď $(\mathcal{D},\xi)$ dělení $[0,1]$ splňující $\nu(\mathcal{D}) < \delta$. Definujeme dělení $(\mathcal{D}_1,\xi_1)$ tak, že dělící body $\mathcal{D}_1$ jsou sjednocením dělících bodů $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}_0$ a složky vektoru ξ_1 jsou na podintervalech dělení $(\mathcal{D}_1,\xi_1)$ shodných s podintervaly dělení $(\mathcal{D},\xi)$ stejné jako složky ξ a na ostatních podintervalech jsou libovolné. Protože $\mathcal{D}$ bylo dělení s normou menší než δ a $\mathcal{D}_1$ bylo jeho zjemnění, je i norma $\mathcal{D}_1$ menší než δ. Tak z platnosti (BC2) dostaneme odhad v (BC1).

Následuje důkaz poslední ekvivalence, která chybí, a sice ekvivalence (BC2) a (BC3). Zřejmě (BC2) implikuje (BC3), protože dělení je samo svým triviálním zjemněním. Zbývá tedy dokázat, že (BC3) implikuje (BC2). Pusťme se do toho.

Volme $\varepsilon > 0$ a zvolme dělení $\mathcal{D}_\varepsilon = \{x_i\}_{i=1}^N$ intervalu $[0,1]$ s N dělícími body, splňující

$$\|\Xi(f,\mathcal{D}_\varepsilon,\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D}_\varepsilon,\xi_2)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každé dva vektory vybraných bodů příslušné dělení $\mathcal{D}_\varepsilon$. (Předpokládáme platnost (BC3) a využili jsme toho, že ε volíme libovolně.) Buď ξ_0 vektor vybraných bodů příslušný dělení $\mathcal{D}_\varepsilon$, kde jsme za tyto body zvolili koncové body podintervalů dělení. Pro každé $i = 1,...,N$ označme

$$W_i = \{(x_i - x_{i-1})f(x) | x \in [x_{i-1},x_i]\}$$

a dále označme $W = \sum_{i=1}^N W_i$.
Buď $\mathcal{D} = \{u_k\}_{k=1}^M$ dělení $[0,1]$ s M dělícími body, které je zjemněním dělení $\mathcal{D}_\varepsilon$. A nechť $\xi = (\xi_1,\xi_2,...,\xi_M)$ je příslušný vektor vybraných bodů. Pro každé i označme k_i takový index k, že $u_k = x_i$. Potom:

$$\Xi(f,\mathcal{D}_\varepsilon,\xi_0) - \Xi(f,\mathcal{D},\xi) = \sum_{i=1}^N \Big(f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\xi_k)(u_k - u_{k-1}) \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^N f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^N \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\xi_k)(u_k - u_{k-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^N f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^N \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\xi_k)\frac{u_k - u_{k-1}}{x_i - x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \frac{u_k - u_{k-1}}{x_i - x_{i-1}} \Big((x_i - x_{i-1})f(x_i) - (x_i - x_{i-1})f(\xi_k) \Big) \in$$

$$\in \sum_{i=1}^N \operatorname{conv}(W_i - W_i) = \operatorname{conv}(W - W).$$

Zde **conv** značí konvexní obal, tj. průnik všech konvexních nadmnožin dané množiny. (K pochopení poslední rovnosti je vhodné si nakreslit příklad takových dvou dělení a dosadit si do obou stran rovnosti. - Podstatné je vědět, že $\mathcal{D}$ je zjemněním $\mathcal{D}_\varepsilon$, a jak jsou označeny společné body obou dělení.) Uvědomme si nyní, že $\|x\| < \varepsilon/2$ pro libovolné $x \in \operatorname{conv}(W - W)$. (To plyne ihned z našeho použití (BC3) na dělení $\mathcal{D}_\varepsilon$.) Proto

$$\|\Xi(f,\mathcal{D}_\varepsilon,\xi_0) - \Xi(f,\mathcal{D},\xi)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zbývá zvolit $(\mathcal{D}_1,\xi_1)$ a $(\mathcal{D}_2,\xi_2)$ dvě dělení zjemňující $\mathcal{D}_\varepsilon$ a použít standardní trik a trojúhelníkovou nerovnost:

$$\|\Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D}_2,\xi_2)\| =$$

$$= \|\Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D}_\varepsilon,\xi_0) + \Xi(f,\mathcal{D}_e,\xi_0) - \Xi(f,\mathcal{D}_2,\xi_2)\| \leq$$

$$\leq \|\Xi(f,\mathcal{D}_1,\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D}_\varepsilon,\xi_0)\| + \|\Xi(f,\mathcal{D}_e,\xi_0) - \Xi(f,\mathcal{D}_2,\xi_2)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tím je důkaz hotov.

$\square$

Věta 11 (Vlastnosti Riemannova integrálu)**.** *Budiž $f : [0,1] \longrightarrow X$ riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$, pak platí:*

(a) Nechť $[a,b] \subseteq [0,1]$, pak $\int_a^b f$ existuje.

(b) Nechť $[a,b] \subseteq [0,1]$ a na $[a,b]$ platí $\|f\| \leq M$, pak $\left\| \int\limits_a^b f \right\| \leq M(b-a)$.

(c) Mějme Banachův prostor Y a $T : X \longrightarrow Y$ spojitý lineární operátor. Pak Tf je riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$ a $\int_0^1 (Tf) = T\left(\int_0^1 f\right)$.

(d) Pro libovolné $x^* \in X^*$ je funkce $x^* f$ riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$ a platí $\int_0^1 (x^* f) = x^*\left(\int_0^1 f\right)$.

Důkaz. Tvrzení (a) a (b) jsou snadnými zobecněními odpovídajících částí Věty 8. Dokážeme (c). Mějme $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu a (BC3) z Tvrzení 10 existuje $\mathcal{D}$ dělení $[0,1]$ takové, že platí: $\|\Xi(f,\mathcal{D},\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D},\xi_2)\| < \varepsilon$. (Samozřejmě jako vždy $\xi_1, \xi_2 \in I(\mathcal{D})$.) Odhadujme nyní:

$$\|\Xi(Tf,\mathcal{D},\xi_1) - \Xi(Tf,\mathcal{D},\xi_2)\| = \left\| \sum_i ((Tf)(\xi_{1,i}) - (Tf)(\xi_{2,i}))(x_i - x_{i-1}) \right\| \leq$$

$$\leq \delta \left\| \sum_i ((Tf)(\xi_{1,i}) - (Tf)(\xi_{2,i})) \right\| = \delta \left\| \sum_i T(f(\xi_{1,i}) - f(\xi_{2,i})) \right\| =$$

$$= \delta \left\| T \sum_i (f(\xi_{1,i}) - f(\xi_{2,i})) \right\| \leq \delta \|T\| \left\| \sum_i (f(\xi_{1,i}) - f(\xi_{2,i})) \right\| < \delta \|T\| \varepsilon.$$

A tedy Tf je Riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$ podle (BC3) z Tvrzení 10. Nyní ukážeme, že $\int_0^1 (Tf) = T\left(\int_0^1 f\right)$. Předpokládejme, že $\int_0^1 f = J$. Podle definice pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ a $\mathcal{D}$ dělení $[0,1]$ takové, že $\nu(\mathcal{D}) < \delta$, a platí: $\|\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - J\| < \varepsilon$. (Kde $\xi \in \mathcal{D}$ je libovolné.) Potom:

$$\|\Xi(Tf,\mathcal{D},\xi) - T(J)\| = \left\| \sum_i ((Tf)(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) - T(J) \right\| =$$

$$= \left\| T\left(\sum_i (f(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) - J \right) \right\| \leq \|T\| \, \|\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - J\| < \|T\| \varepsilon.$$

Tím je (c) dokázáno.

K důkazu (d) si stačí uvědomit, že X^* je prostor zobrazení z X do $\mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$ můžeme přirozeně uvažovat euklidovskou normu, pak je $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_e)$ Banachův prostor a tedy (d) je speciálním případem (c).

□

Z předchozí kapitoly víme, že každá spojitá funkce na konečném sjednocení kompaktních intervalů je tam riemannovsky integrovatelná. Nyní dokážeme podobné obecnější tvrzení pro zobrazení do Banachových prostorů (a tím pádem i pro reálné funkce reálné proměnné).

Definice 13. *Buď $f : [0,1] \to X$. Řekneme, že f je* ***zvnějšku omezené variace na*** $[0,1]$*, pokud*

$$V_v([0,1])(f) := \sup \left\{ \left\| \sum_i (f(d_i) - f(c_i)) \right\| \right\}$$

je konečné číslo. Zde supremum bereme přes všechny množiny $\{[c_i,d_i]\}$, což jsou konečné soubory podintervalů $[0,1]$, které mají po dvou maximálně jednobodový průnik.

Věta 12 (Postačující podmínka pro (R)-integrabilitu). *Buď f zobrazení z $[0,1]$ do X a předpokládejme, že f je zvnějšku omezené variace na $[0,1]$, pak f je tamtéž riemannovsky integrovatelná.*

Důkaz. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vezměme $N \in \mathbb{N}$ takové, aby $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{V_v([0,1])(f)}$. Nechť $\mathcal{D}_\varepsilon = \{k/N\}_{k=0}^N$ je dělení $[0,1]$. Uvažujme nyní dvě vybrané posloupnosti $\xi_1 = \{\xi_{1,i}\}_{i=1}^N$ a $\xi_2 = \{\xi_{2,i}\}_{i=1}^N$, kde $\xi_{1,i},\xi_{2,i} \in [x_{i-1} - x_i]$. (Kde x_i jsou samozřejmě body dělení $\mathcal{D}_\varepsilon$.) Nyní:

$$\|\Xi(f,\mathcal{D}_\varepsilon,\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D}_\varepsilon,\xi_2)\| = \left\| \sum_{i=1}^N (f(\xi_{1,i}) - f(\xi_{2,i}))(x_i - x_{i-1}) \right\| =$$

$$= \frac{1}{N} \left\| \sum_{i=1}^N (f(\xi_{1,i}) - f(\xi_{2,i})) \right\| \leq \frac{V_v([0,1])(f)}{N} < \varepsilon.$$

Předposlední odhad jsme mohli provést díky tomu, že jsme $V_v([0,1])(f)$ definovali jako supremum norem rozdílů funkčních hodnot na vhodných souborech podintervalů (viz Definici 13), a takový soubor tvoří i systém $\{[\xi_{1,i},\xi_{2,i}]\}$.
Pomocí (BC3) ve Tvrzení 10 dostáváme, že f je riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$.

□

Pro úplnost uvedeme ještě dvě další postačující podmínky pro existenci (R)-integrálu a podíváme se na vztahy mezi nimi. V dalším textu je nicméně nepoužijeme. Jde spíš o rozšíření a ukázku novějších výsledků v teorii související s tématem této práce. Čtenář se může s jejich použitím seznámit například v [HP96].

Definice 14. *Buď $f : [0,1] \to X$. Řekneme, že f je* ***slabě omezené variace na*** $[0,1]$*, pokud $\varphi \circ f$ je (reálná funkce) omezené variace pro každý funkcionál $\varphi \in X^*$.*

Definice 15. *Buď $f : [0,1] \to X$. Řekneme, že f je* ***silně omezené variace na*** $[0,1]$*, pokud*

$$V_s([0,1])(f) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|f(x_i) - f(x_{i-1}))\| \right\} < \infty,$$

kde supremum se bere přes každé dělení $\mathcal{D} = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[0,1]$.

Věta 13. *Pro libovolnou funkci $f : [0,1] \to X$ platí:*

(a) je-li f silně omezené variace na $[0,1]$, pak je na tomto intervalu také zvnějšku omezené variace;

(b) je-li f zvnějšku omezené variace na $[0,1]$, pak je na tomto intervalu také slabě omezené variace;

(c) je-li f slabě omezené variace na $[0,1]$, pak je na tomto intervalu také zvnějšku omezené variace.
(Nemusí však být silně omezené variace.)

Důkaz.

(a) Zjevné, uvědomíme-li si, že podintervaly libovolného dělení spolu sdílejí právě jeden krajní bod.

(b) Plyne z linearity funkcionálu φ. Stačí jej pouze vytknout a využít jeho spojitost.

(c) Lze najít v [HP96] na straně 60.

Protipříklad ukazující, že slabá omezenost variace neimplikuje silnou se nachází taktéž v knize [HP96] na straně 60.

□

Následující příklad je uveden v [Gor91] pro zobrazení do prostoru ℓ^2, v této práci je zobecněn a doplněn o podstatné detaily.

Příklad 3. Označme $e_n = (0,0,...,0,1,0,0,...)$, kde 1 je na $n-$tém místě. Dále nechť $e_0 = (0,0,0,...)$. Buď $\{q_n\}$ posloupnost nějak uspořádaných racionálních čísel. (Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná.) Definujme $f : [0,1] \to \ell^p$ pro $1 < p < \infty$ následujícím způsobem: $f(t) = e_0$ pro t iracionální a $f(r_n) = e_n$.
Ukážeme, že existuje Riemannův integrál tohoto zobrazení a je roven e_0. Volme $\varepsilon \in (0,1)$. A položme $\delta = \varepsilon^{p/(p-1)}$. Buď $\mathcal{D}$ libovolné dělení $[0,1]$ s $\nu(\mathcal{D}) < \delta$ Počítejme:

$$\|\Xi(f,\mathcal{D},\xi) - e_0\|_p = \left\|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1} - e_0)\right\|_p \le \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^p} =$$

$$= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^{p-1}(x_i - x_{i-1})} \le \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(\nu(\mathcal{D}))^{p-1}(x_i - x_{i-1})} =$$

$$= \nu(\mathcal{D})^{\frac{p-1}{p}} \underbrace{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})}}_{\le 1} \le \nu(\mathcal{D})^{\frac{p-1}{p}} = \delta^{\frac{p-1}{p}} = \varepsilon.$$

Podle Riemannovy definice je:

$$\int_{[0,1]} f = (0,0,0,...) = e_0.$$

Příklad 4. Definujme $g : [0,1] \to c_0$ takto: $g(t) = (t^2,t^3,0,0,0,...)$. Spočteme jeho Riemannův integrál. (Vzpomeňme, že na c_0 máme maximovou normu.)
Volme pro přehlednost výpočtu „standardní“ dělení $\mathcal{D}_n$ intervalu $[0,1]$ s dělícími body $x_i = i/n$ pro $i = 0,...,n$. Buď $\xi_i = i/n$ pro $i = 1,...,n$. (Za vybrané body jsme zvolili horní konce podintervalů dělení.)

Ukážeme, že daný integrál existuje. K tomu použijeme podmínku (BC3) z Tvrzení 10. Ukážeme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ splňuje dělení $\mathcal{D}_n$ podmínku z (BC3) pro libovolné dva vektory $\xi_1,\xi_2 \in I(\mathcal{D})$. Počítejme:

$$\|\Xi(g,\mathcal{D}_n,\xi_1) - \Xi(g,\mathcal{D}_n,\xi_2)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (g(\xi_{1,i}) - g(\xi_{2,i}))(x_i - x_{i-1}) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (g(\xi_{1,i}) - g(\xi_{2,i})) \right\| = \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_{1,i}^2,\xi_{1,i}^3,0,0,0,\ldots\right) - \left(\xi_{2,i}^2,\xi_{2,i}^3,0,0,0,\ldots\right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_{1,i}^2 - \xi_{2,i}^2,\xi_{1,i}^3 - \xi_{2,i}^3,0,0,0,\ldots\right) \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2, \left(\frac{i}{n}\right)^3 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^3,0,0,0,\ldots \right) \right\|. =$$

$$= \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{2i-1}{n^2}\right), \left(\frac{3i^2-3i+1}{n^3}\right),0,0,0,\ldots \right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{n} \left\| \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \right), \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{3i^2}{n^3} - \sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n^3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3} \right),0,0,0,\ldots \right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{n} \left\| \left(\left(\frac{n(n+1)}{n^2} - \frac{1}{n} \right), \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^3} - \frac{3n(n+1)}{2n^3} + \frac{1}{n^2} \right),0,0,0,\ldots \right) \right\|$$

$$= \frac{1}{n} \left\| \left(1,1 - \frac{1}{2n^2},0,0,0,\ldots\right) \right\| = \frac{1}{n}.$$

Protože zvětšováním n umíme $1/n$ udělat „libovolně malé“, je splněna podmínka (BC3).

Zbývá integrál spočítat. Chceme, aby: $\|\Xi(g,\mathcal{D}_n,\xi) - I\| < \varepsilon$ pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$. Počítejme:

$$\Xi(g,\mathcal{D}_n,\xi) = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{i}{n}\right)^2, \left(\frac{i}{n}\right)^3,0,0,0,\ldots \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}, \frac{n^2(n+1)^2}{4n^3},0,0,0,\ldots \right).$$

Vzorce pro konečné součty druhých a třetích mocnin se snadno ověří pomocí matematické indukce, případně technikou vytvořujících funkcí. Ukážeme, že $\int_0^1 g = (1/3,1/4,0,0,0,\ldots)$. (Použijeme při tom trojúhelníkovou nerovnost.)

$$\left\| \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}, \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4},0,0,0,\ldots \right) - \left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},0,0,0,\ldots \right) \right\| =$$

$$= \left\| \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{1}{3}, \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} - \frac{1}{4}, 0,0,0,\ldots \right) \right\| \leq$$

$$\leq \left| \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} - \frac{1}{4} \right| =$$

$$= \left| \frac{n(n+1)(2n+1) - 2n^3}{6n^3} \right| + \left| \frac{n^2(n+1)^2 - n^4}{4n^4} \right| =$$

$$= \left| \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 2n^3}{6n^3} \right| + \left| \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 - n^4}{4n^4} \right| =$$

$$= \frac{3n+1}{n^2} + \frac{2n+1}{n^2} = \frac{5n+2}{n^2}.$$

Číslo $(5n+2)/n^2$ umíme zvětšováním n udělat „libovolně malé“, proto je skutečně hledaný integrál roven vektoru $(1/3, 1/4, 0,0,0,\ldots)$.

4. Lebesgueova věta

Nejdříve dokážeme, že pro reálnou funkci reálné proměnné jsou ekvivalentní podmínky existence Riemannova integrálu s omezeností a spojitostí skoro všude (vzhledem k Lebesgueově míře) na kompaktním intervalu. V Banachových prostorech jedna implikace neplatí. Podíváme se na příklady zobrazení do Banachových prostorů, které charakterizaci pro reálné funkce nesplňují a budeme se zabývat problémem, ve kterých prostorech, známých z úvodního kurzu funkcionální analýzy, Lebesgueova věta platí.

4.1 Reálná funkce reálné proměnné

Důkazy v této části jsou zpracovány podle [Luk80] a [Sch]. V textu [Luk80] je uveden pouze návod k důkazu, ten je v této bakalářské práci doplněn o podstatné detaily. Důkaz druhé implikace je veden podle druhého zmíněného zdroje.

Definice 16. *Množina $N \subset \mathbb{R}$ se nazývá* ***nulová****, jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost otevřených intervalů $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující následující dvě vlastnosti:*

1. $N \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n,b_n)$,

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Poznámka 12 (2.38 v [KKS04] - část). Pokud by dva intervaly pokrývající nulovou množinu měly neprázdný průnik, pak je v celkovém pokrytí můžeme nahradit jejich sjednocením. Změněná posloupnost intervalů zjevně zůstane pokrytím a součet jejich délek se může tímto úkonem pouze zmenšit. tedy můžeme nulovou množinu v [0,1] pokrýt systémem disjunktních otevřených intervalů se sumou délek menší než libovolné epsilon kladné.

Lemma 14. *Je-li $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost nulových množin, pak i množina $N = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$ je nulová.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme posloupnost otevřených intervalů $\{(a_i^n,b_i^n)\}_{i=1}^{\infty}$ s vlastnostmi:

$$N_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i^n,b_i^n), \ \ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i^n - a_i^n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Potom systém $\{(a_i^n,b_i^n)\}_{i,n=1}^{\infty}$ je spočetný, pokrývá množinu N a splňuje i druhou podmínku z Definice 16, protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (b_i^n - a_i^n) \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

□

Věta 15 (Lebesgue)**.** *Mějme $f \in \mathfrak{B}[0,1]$. Označme C_f množinu bodů nespojitosti funkce f v intervalu $[0,1]$. Potom f je riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$, právě když množina C_f je nulová.*

Důkaz. Důkaz provedeme v několika krocích:
Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$A_n = \{x \in [0,1];\ \text{pro každé } \delta > 0 \text{ existují } s,t \in (x-\delta,x+\delta) \cap [0,1]$$
$$\text{tak, že } |f(s) - f(t)| > \frac{1}{n}\}.$$

Dokážeme, že $C_f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

- $C_f \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, protože každý bod nespojitosti je obsažen v nějakém A_n (plyne z definice spojitosti).
- $C_f \supseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Je-li bod $x \in A_n$, pak pro libovolné $\delta > 0$ je v jeho δ okolí (proniknutém s intervalem $[0,1]$) skok velikosti $1/n$, tedy bod x je bodem nespojitosti a patří do C_f.

Množina C_f je nulová, právě když je každá množina A_n nulová.

- Začneme implikací zleva doprava. Dokážeme ji sporem. Volme $\varepsilon > 0$. Nechť C_f je nulová a zároveň existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že A_m není nulová množina. Uvažme pokrytí C_f posloupností intervalů $\{(a_n,b_n)\}$, pro niž platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon$. Jenže množina A_m není nulová, čili nějaké $x \in A_m$ není pokryto. Kdyby existoval interval (a_m,b_m) takový, že $b_m - a_m < \varepsilon$ a $x \in (a_m,b_m)$, pak by množina A_m byla nulová. To nejde, a proto dostáváme spor.
- Implikace zprava doleva plyne z Lemmatu 14.

Ukážeme, že každá množina A_n je kompaktní. Protože jsme na reálné přímce (dokonce jen na uzavřeném omezeném intervalu), je množina kompaktní právě když je omezená a uzavřená. Omezenost množin A_n je zjevná ($A_n \subseteq [0,1]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.) Zbývá tedy dokázat uzavřenost. K tomu dokážeme, že derivace (množina hromadných bodů) A_n je podmnožinou A_n a odvoláme se na Větu 121 v [Jar84b]. Vezměme si tedy nějaké $n \in \mathbb{N}$ a příslušnou množinu A_n. Zvolme nějaký její hromadný bod y. Ukážeme, že $y \in A_n$. Z definice hromadného bodu plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ obsahuje interval $(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$ nekonečně mnoho bodů množiny A_n. Potom ale každé okolí bodu y obsahuje bod x s vlastností z definice A_n a proto je bod y bodem nespojitosti, neboli $y \in A_n$.

Nyní je čas ukázat implikaci zleva doprava v Lebesgueově větě. K tomu vezměme $n \in \mathbb{N}$, libovolné $\varepsilon > 0$ a funkci f, která je riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$. Použijeme Větu 6, konkrétně (BC)-podmínku. Ta totiž říká, že pro naše zvolené ε existuje $\mathcal{D}$ dělení [0,1] tak, že $0 \le S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon$. Protože však ε bylo zcela libovolné, můžeme dělení zvolit dokonce tak, aby

$$0 \le S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \frac{e}{n}.$$

Přepíšeme si podle definice horních a dolních součtů:

$$0 \le S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Opět se odkážeme na Větu 6 a využijeme Riemannovu definici. Volme n-složkové vektory $\xi,\eta \in I(\mathcal{D})$ tak, aby $f(\xi_i) \ge f(\eta_i)$ pro všechna $i = 1,...,k$ a navíc, aby platilo $f(\xi_i) \ge f(\eta_i) + 1/n$, pokud $(x_{i-1},x_i) \cap A_n \ne \emptyset$. Protože na každém podintervalu dělení platí $m_i \le f(\eta_i) \le f(\xi_i) \le M_i$, dostáváme následující

$$\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i) - f(\eta_i))(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Odtud plyne, že množina A_n je nulová takto: Protože v intervalech (x_{i-1},x_i), které ji pokrývají (a jichž je konečně mnoho), je $f(\xi_i) - f(\eta_i) \ge 1/n$, platí následující odhad

$$\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i) - f(\eta_i))(x_i - x_{i-1}) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Z tohoto odhadu ihned plyne splnění druhé podmínky v definici nulové množiny.

Zbývá dokázat druhou implikaci. Nechť tedy množina C_f je nulová. Označme $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. (Potom platí $|f(x) - f(y)| \le 2M$ pro všechna $x,y \in [0,1]$.) Volme $\varepsilon > 0$. Protože C_f je nulová množina, existují otevřené intervaly $I_n = (a_n,b_n)$ pokrývající množinu C_f, mající navíc následující vlastnost: $\sum_n(b_n - a_n) < \varepsilon/(4M)$. (Epsilon v definici nulové množiny je libovolné.) Protože v bodech mimo C_f je funkce f spojitá, existuje pokrytí $[0,1] \setminus C_f$ otevřenými intervaly J_x s touto vlastností: $x \in J_x$ a pro všechna $y,z \in J_x \cap [0,1]$ je $|f(y) - f(z)| \le \varepsilon/2$.
Zjevně systém $\{I_n\} \cup \{J_x | x \in [0,1] \setminus C_f\}$ je otevřeným pokrytím intervalu [0,1]. Za použití Poznámky 12 a Borelovy věty (Věta 158 v [Jar84b]) můžeme díky kompaktnosti intervalu [0,1] vybrat z tohoto otevřeného pokrytí konečné otevřené pokrytí. (Skládající se z konečného počtu intervalů $\{I_n\}$ a konečného počtu intervalů $\{J_x\}$, přičemž při výběru z těchto intervalů můžeme použít Poznámku 12.) Nechť se (BÚNO) skládá z intervalů $\{I_n\}_{n=1}^N$ a $\{J_{x_i}\}_{i=1}^L$. Buď dále $\mathcal{D}$ dělení [0,1] s dělícími body $\{t_j\}_{j1}^K$, tyto body jsou všechny koncové body intervalů pokrytí, které leží uvnitř intervalu [0,1]. Z této volby dělení mimo jiné plyne, že každý podinterval dělení je obsažen v nějakém I_n nebo J_{x_i}. Označme $X = \{j | (t_{j-1},t_j) \subset I_n$ pro nějaké $n\}$. Připomeňme označení $m_j = \inf_{t\in[t_{j-1},t_j]} f(t)$ a $M_j = \sup_{t\in[t_{j-1},t_j]} f(t)$. Budeme chtít použít (BC)-podmínku riemannovské integrability z Věty 6, počítejme:

$$S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{K}(M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \le$$

$$\leq \sum_{j\in X} 2M(t_j - t_{j-1}) + \sum_{j\notin X} \frac{\varepsilon}{2}(t_j - t_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + 1\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy je splněna (BC)-podmínka a funkce f má Riemannův integrál na $[0,1]$. □

4.2 Zobrazení do Banachových prostorů

V předchozí části jsme dokázali charakterizaci riemannovsky integrovatelných funkcí z $[0,1]$ do $\mathbb{R}$. Nyní se podíváme, jak je tomu v případě zobrazení do Banachových prostorů.
Už nyní prozraďme, že jedna implikace v této větě neplatí. Poměrně překvapivě riemannovsky integrovatelné zobrazení do X nemusí mít tu vlastnost, že množina jeho bodů nespojitosti je nulová. Ukážeme si, že ve většině „běžných“ Banachových prostorů Lebesgueova věta neplatí. Výjimkou je ℓ^1.
Potom bude následovat několik protipříkladů na toto tvrzení pro ostatní prostory.

Důkaz následující věty vychází z [Luk80], jedná se totiž jen o mírně pozměněný důkaz klasické Lebesgueovy věty. Poslední část důkazu s použitím podmínky (BC3) je z hlavy autora této práce.

Věta 16 (Lebesgue)**.** *Mějme $f:[0,1]\to X$ omezené zobrazení. Označme C_f množinu bodů nespojitosti funkce f v intervalu $[0,1]$. Jestliže je množina C_f nulová, pak f je riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$.*

Důkaz. Důkaz provedeme v několika krocích:
Pro $n\in\mathbb{N}$ označme

$$A_n = \{x\in[0,1];\ \text{pro každé } \delta>0 \text{ existují } s,t\in(x-\delta,x+\delta)\cap[0,1]$$
$$\text{tak, že } ||f(s)-f(t)|| > \frac{1}{n}\}.$$

Tvrdíme, že $C_f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Dokázali bychom to stejně jako v reálném případě.
Tvrdíme, že množina C_f je nulová, právě když je každá množina A_n nulová. Dokáže se to opět stejně jako v reálném případě.
Dále bychom ukázali, že každá množina A_n je kompaktní. Důkaz je však opět stejný jako v reálném případě.

Pojďme nyní finálně ukázat zamýšlenou implikaci v Lebesgueově větě.
Nechť tedy množina C_f je nulová. Označme $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} ||f(x)||$. (Potom platí $\|f(x)-f(y)\|\leq 2M$ pro všechna $x,y\in[0,1]$.) Volme $\varepsilon>0$. Protože C_f je nulová množina, existují otevřené intervaly $I_n=(a_n,b_n)$ pokrývající množinu C_f, mající navíc následující vlastnost: $\sum_n(b_n-a_n) < \varepsilon/(4M)$. (Epsilon v definici nulové množiny je libovolné.) Protože v bodech mimo C_f je funkce f spojitá, existuje pokrytí $[0,1]\setminus C_f$ otevřenými intervaly J_x s touto vlastností: $x\in J_x$ a pro všechna

$y,z \in J_x \cap [0,1]$ je $\|f(y) - f(z)\| \leq \varepsilon/2$.
Zjevně systém $\{I_n\} \cup \{J_x | x \in [0,1] \setminus C_f\}$ je otevřeným pokrytím intervalu [0,1]. Za použití Poznámky 12 a Borelovy věty (Věta 158 v [Jar84b]) můžeme díky kompaktnosti intervalu [0,1] vybrat z tohoto otevřeného pokrytí konečné otevřené pokrytí. (Skládající se z konečného počtu intervalů $\{I_n\}$ a konečného počtu intervalů $\{J_x\}$, přičemž při výběru z těchto intervalů můžeme použít Poznámku 12.) Nechť se (BÚNO) skládá z intervalů $\{I_n\}_{n=1}^N$ a $\{J_{x_i}\}_{i=1}^L$. Buď dále $\mathcal{D}$ dělení [0,1] s dělícími body $\{t_j\}_{j_1}^K$, tyto body jsou všechny koncové body intervalů pokrytí, které leží uvnitř intervalu [0,1]. Z této volby dělení mimo jiné plyne, že každý podinterval dělení je obsažen v nějakém I_n nebo J_{x_i}. Označme $X = \{j | (t_{j-1},t_j) \subset I_n$ pro nějaké $n\}$. Budeme chtít použít podmínku (BC3) z Tvrzení 10 na dělení $\mathcal{D}$ a dva libovolné vektory vybraných bodů ξ_1 a ξ_2, počítejme:

$$\|\Xi(f,\mathcal{D},\xi_1) - \Xi(f,\mathcal{D},\xi_2)\| = \left\| \sum_{j=1}^{K} (f(\xi_{1,j}) - f(\xi_{2,j}))(t_j - t_{j-1}) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{K} \|(f(\xi_{1,j}) - f(\xi_{2,j}))(t_j - t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{K} \|f(\xi_{1,j}) - f(\xi_{2,j})\| (t_j - t_{j-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{j \in X} 2M(t_j - t_{j-1}) + \sum_{j \notin X} \frac{\varepsilon}{2}(t_j - t_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy je splněna podmínka (BC3) a funkce f má Riemannův integrál na [0,1].

□

Definice 17. *Říkáme, že Banachův prostor X má* ***Lebesgueovu vlastnost****, pokud každé riemannovsky integrovatelné zobrazení z* [0,1] *do X je nespojité maximálně na nulové podmnožině* [0,1].

Tvrzení 17. *Nechť Y je uzavřený podprostor Banachova prostoru X, pak platí: Jestliže X má Lebesgueovu vlastnost, pak ji má i Y.*

Důkaz. Libovolné zobrazení $f : [0,1] \to Y$ je i zobrazením do X. Y je uzavřený podprostor Banachova prostoru, proto je též Banachův, čili pro něj má smysl definovat Lebesgueovu vlastnost. Protože f má Lebesgueovu vlastnost jako zobrazení do X, má ji i jako zobrazení do jeho uzavřeného podprostoru.

□

Předchozí tvrzení pomůže při hledání protipříkladů. Respektive nebude nutné jich najít tolik a spíše se budeme moci zaměřit na to, aby byly zajímavé.

Většina Banachových prostorů známých ze základního kurzu funkcionální analýzy nemá Lebesgueovu vlastnost. Splňuje ji pouze jediný a sice ℓ^1. Důkaz tohoto tvrzení je poměrně komplikovaný a zdlouhavý, proto jej zde neuvádím. Čtenář ho může najít v [Gor91]. Dalším příkladem je Tsireltonův prostor, který má také Lebesgueovu vlastnost. Více o něm se lze dočíst v článku [Gor91].
V další části se podíváme na protipříklady dokazující neplatnost výše nedokázané implikace.

4.2.1 Protipříklady na Lebesgueovu větu

Naším cílem v této kapitole bude ověřit platnost následující věty.

Věta 18. *Následující prostory nemají Lebesgueovu vlastnost:*

(a) c_0, c, ℓ^∞;

(b) $\mathcal{C}[0,1]$, $\mathscr{L}^\infty[0,1]$;

(c) ℓ^p *pro* $1 < p < \infty$;

(d) $\mathscr{L}^p[0,1]$ *pro* $1 < p < \infty$;

(e) X^* *pokud* X *obsahuje podprostor izometricky-izomorfní* ℓ^1;

(f) nekonečně dimenzionální Hilbertovy prostory.

Důkaz.

(a) Vzhledem k tomu, že c_0 je izometricky-izomorfní nějakému (úplnému) podprostoru c i ℓ^∞ (část 1.10 (c) v [Luk12] a Proposition 6 v [HHZ96]), stačí podle Tvrzení 17 najít protipříklad v tomto prostoru.
Následující příklad je zmíněn v [Gor91], já jej doplňuji o důležité detaily.
Označme $e_n = (0,0,...,0,1,0,0,...)$, kde 1 je na $n-$tém místě. Dále nechť $e_0 = (0,0,0,...)$. Buď $\{q_n\}$ posloupnost nějak uspořádaných racionálních čísel. (Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná.) Definujme $f : [0,1] \to c_0$ následujícím způsobem: $f(t) = e_0$ pro t iracionální a $f(r_n) = e_n$.
Ukážeme, že existuje Riemannův integrál tohoto zobrazení. Buď $\mathcal{D}$ libovolné dělení $[0,1]$ a nechť $\xi_1,\xi_2 \in I(D)$. Protože

$$\left\| \sum_i (f(\xi_{1,i}) - (f(\xi_{2,i})) \right\| \leq 1,$$

je funkce f zvnějšku omezené variace na $[0,1]$ a podle Věty 12 je tedy riemannovsky integrabilní.
Ukážeme, že funkce f není spojitá v žádném bodě $[0,1]$, a že tento interval není nulovou množinou. Je-li t iracionální číslo, pak

$$\|f(t) - f(r_n)\| = \|0 - f(r_n)\| = 1.$$

Podle Věty 47 v [Jar84a] existuje mezi každými dvěma různými body intervalu $[0,1]$ nekonečně mnoho racionálních čísel. Proto funkce není spojitá v žádném bodě. Zbývá ukázat, že interval $[0,1]$ není nulovou množinou. To je však snadné, neboť délka tohoto intervalu je $1 - 0 = 1$ a proto intervaly z definice nulové množiny by musely mít součet délek aspoň 1. Stačí tedy zvolit $\varepsilon = 1/2$ a máme spor.

(b) Podobně jako v (a) si uvědomíme, že $\mathcal{C}[0,1]$ je izometricky-izomorfní (úplnému) podprostoru $\mathscr{L}^\infty[0,1]$ a můžeme tedy využít Tvrzení 17.
Zbývá tedy ukázat, že $\mathcal{C}[0,1]$ nemá Lebesgueovu vlastnost. Uvědomme si, že c_0 je separabilní prostor (Proposition 18(ii) v [HHZ96]) a platí věta (Věta 97 v [HHZ96]) říkající, že každý separabilní Banachův prostor je izometrický nějakému podprostoru $\mathcal{C}[0,1]$. Nyní stačí opět použít Tvrzení 17 na c_0 a $\mathcal{C}[0,1]$.

(c) Nechť je značení stejné jako v části (a). Definujme $f : [0,1] \to \ell^p$ pro $1 < p < \infty$ následujícím způsobem: $f(t) = e_0$ pro t iracionální a $f(r_n) = e_n$. V Příkladu 3 jsme ukázali, že tato funkce má Riemannův integrál na [0,1]. Ukážeme, že funkce f není spojitá v žádném bodě [0,1], a že tento interval není nulovou množinou. Je-li t iracionální číslo, pak

$$\|f(t) - f(r_n)\| = \|0 - f(r_n)\| = 1.$$

Zbytek argumentace je stejný jako v části (a).

(d) Protože prostory $\mathscr{L}^p$, $1 \leq p < \infty$ jsou separabilní (viz Tvrzení 19 v [HHZ96]), jsou podle Věty 97 v [HHZ96] izometrické podprostoru $\mathcal{C}[0,1]$. V libovolném netriviálním podprostoru $\mathcal{C}[0,1]$ zkonstruujeme protipříklad podobně jako v části (b).

(e) V části 2.14 skript [Luk12] zjistíme, že duál k ℓ^1 je izometricky-izomorfní prostoru ℓ^∞. Pokud tedy X obsahuje kopii ℓ^1, potom X^* obsahuje kopii ℓ^∞. A opět s úspěchem použijeme Tvrzení 17.

(f) Podle Riesz-Fisherovy věty (část 1.38. v [Luk12]) je každý separabilní nekonečně dimenzionální Hilbertův prostor izometricky-izomorfní prostoru ℓ^2, pro nějž už jsme dokázali, že Lebesgueovu vlastnost nemá. Důkaz pro případ, že Hilbertův prostor separabilní není lze najít v článku: [Gor91].

A jsme hotovi.

□

4.3 Shrnutí

V této kapitole jsme srovnali vlastnosti spojitých reálných funkcí na kompaktních intervalech (případně jejich konečných sjednoceních) a zobrazení do Banachových prostorů. V prvním případě je situace relativně snadná a existuje dokonce charakterizace riemannovsky integrovatelných zobrazení. V případě druhém lze najít některé postačující podmínky pro (R)-integrabilitu, tři takové jsme dokázali (s pomocí knihy [HP96]. Zbytek je uveden v přehledovém článku [Gor91] nebo původních publikacích. Pro „tradiční" Banachovy prostory je až na ℓ^1 typické, že Lebesgueova věta neplatí.

5. Závěr

V této práci jsme shrnuli základní vlastnosti Riemannova integrálu pro reálné funkce reálné proměnné definované na kompaktních intervalech či jejich konečných sjednoceních. Následně jsme zavedli zobecnění tohoto integrálu pro zobrazení do libovolného Banachova prostoru.

Povšimli jsme si, že oba integrály se chovají podobně. První významná odlišnost přišla až po prozkoumání platnosti Lebesgueovy věty o riemannovské integrabilitě. Zjistili jsme, že tato užitečná charakterizace pro reálné funkce obecně neplatí pro funkce do Banachových prostorů. Ukázali jsme to na několika protipříkladech.

Vlastním přínosem v tomto textu je výpočet dvou Riemannových integrálů pro zobrazení do Banachových prostorů, dále podrobné zpracování důkazu Lebesgueovy věty podle návodu uvedeného v [Luk80] (s využitím [Sch] a [KKS04]) a rozpracování protipříkladů na platnost Lebesgueovy věty uvedených v [Gor91].

Nyní se výzkum spíše obrací k abstraktnějším oblastem, které s riemannovskou integrabilitou souvisí. Čtenář se s nimi může seznámit například v článku [Nar07].

Literatura

[Gor91] Russell Gordon. Survey Article on Riemann Integration in Banach Spaces. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 21(3):923–949, 09 1991.

[HHZ96] P. Habala, P. Hájek, and V. Zizler. *Introduction to Banach Spaces.* Number sv. 1. Matfyzpress, 1996.

[HP96] E. Hille and R.S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-groups.* Number sv. 31,díl 1 in American Mathematical Society: Colloquium publications. American Mathematical Society, 1996.

[Jac] B. Jackson. Hausdorff spaces and compact spaces. [online].

[Jar84a] V. Jarník. *Diferenciální počet I.* Academia, 1984.

[Jar84b] V. Jarník. *Diferenciální počet II.* Academia, 1984.

[Jar84c] V. Jarník. *Integrální počet I.* Academia, 1984.

[KKS04] D.S. Kurtz, J. Kurzweil, and C. Swartz. *Theories of Integration: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane.* Series in real analysis. World Scientific Pub., 2004.

[Luk80] J. Lukeš. *Teorie míry a integrálu I.* 1980.

[Luk12] J. Lukeš. *Zápisky z funkcionální analýzy.* Karolinum, 2012.

[Nar07] K. M. Naralenkov. Asymptotic Structure of Banach Spaces and Riemann Integration. *Real Anal. Exchange*, 33(1):113–126, 2007.

[Sch] Anton R. Schep. Lebesgue theorem on Riemann integrable functions. [online].

[Ver] S. Vermeeren. Sequences and nets in topology. [online].