

## Oponentský posudek na bakalářskou práci F. Mrhala Riemannův integrál pro zobrazení do Banachových prostorů

Téměř všechny výsledky z předložené práce, které se týkají vektorového Riemannova integrálu, jsou obsaženy v Gordonově článku [Gor91]. Protože však v tomto článku je řada argumentů jen naznačena (nebo vynechána), jde o dobré téma pro bakalářskou práci; opravdu podrobné a korektní rozvedení důkazů by podle mého názoru stačilo na výbornou bakalářskou práci. Bohužel, předložená práce taková není. Práce je na bakalářskou práci značně rozsáhlá (má 33 číslovaných stran), jde však o kvantitu na úkor kvality.

Práce začíná pojednáním o limitě netu. Dalších 12 stran je pak věnováno klasickému Riemannově integrálu reálných funkcí. (Další tři strany 26-28 jsou ještě věnovány důkazu klasické Lebesgueovy věty o charakterizaci riemannovské integrovatelnosti reálných funkcí pomocí spojitosti s.v.) Zhruba 12 stran je věnováno hlavnímu tématu práce - vektorovému Riemannovu integrálu. Hlavními výsledky zde je platnost jedné implikace Lebesgueovy věty a skutečnost, že druhá implikace pro většinu klasických Banachových prostorů neplatí.

Extensivní pojetí a relativní obtížnost tématu jsou asi příčinou, že práce je značně neuspokojivá, a to z následujících důvodů.

- a) Práce obsahuje několik hrubých chyb; viz připomínky 1)-5) níže.
- b) Řada důležitých argumentů je vynechána, takže důkazy nejsou kompletní (nebo jsou zjevně příliš málo rozvedené pro bakalářskou práci).
- c) V mnoha případech je argumentace v podstatě správná, ale podle mého názoru není pro bakalářskou práci dostatečně podrobná nebo jasná.
- d) V práci je i řada nepříjemných překlepů; není jich však příliš (viz. 13) níže).

Níže uvádím některé konkrétní připomínky.

1) 5<sup>6</sup> (tj. strana 5, šestý řádek shora).....argument je chybný, byla špatně pochopena Definice 1.

2) 19<sup>11-13</sup>.....argument je chybný.

3) 21<sup>13-15</sup>.....argument je chybný, mj. vůbec není jasné, co je  $\delta$ .

4) 27<sup>15-20</sup>.....dokazovaná implikace je zřejmá, ale uvedený argument je nesrozumitelný.

5) 28<sup>3-15</sup>..... tato část důkazu je zcela nesrozumitelná, např. není jasná role čísla  $n$  a odkud se dostane předposlední nerovnost.

6) Důkaz nejobtížnější implikace z Tvrzení 10 ((BC3) implikuje (BC2)) je převzat z Gordonova článku. Ovšem rovnost množin s konvexními obaly ( $20_{14}$ ), která tam není komentovaná, nemůže být v bakalářské práci považována za zřejmou. Autorovo "verbální vysvětlení" této rovnosti je zcela nedostatečné.

7) 19<sub>13-4</sub>.....Tuto pasáž rozhodně nelze považovat za důkaz příslušné implikace.

8) 19<sub>11-10</sub>.....To, že z podmínky (BC2) plyne omezenost  $f$  by mělo být v bakalářské práci dokázáno.

9) Důkaz implikace (ii)  $\Rightarrow$  (i) z Věty 6 rozhodně nelze považovat za úplný. Speciálně mi není jasné, jak by se došlo ke sporu bez užití Tvrzení 5.

10) 27<sub>4</sub>.....to, že  $y$  je bodem nespojitosti, neimplikuje, že patří do  $A_n$ .

11) I když hlavním tématem práce je vektorový Riemannův integrál, autor někdylikrát postupuje tak, že nějaké tvrzení dokáže nejdříve pro reálné funkce a posléze konstatuje, že příslušné tvrzení pro vektorové funkce se dokáže stejně. Tento postup není logický a taky ne vždy správný; například u tvrzení (b) Věty 11.

12) 17<sup>14</sup> - mělo by být jasně zopakováno, že  $X$  je vždy dále Banachův prostor.

13) V práci je řada překlepů, např. :

10<sub>10,5</sub> (má být  $\mathcal{D}_1$ );

16<sup>14</sup> (norma čísla ?,  $\|f\| = 1?$ );

20<sup>1</sup> (asi má být  $i = 0$ );

21<sub>11</sub> ( $\xi \in \mathcal{D}$  ?);

22<sup>12</sup> (interval  $[x_{i-1} - x_i]$ ?);

23<sub>10</sub> (chybí závorka);

28<sup>3</sup> ( $e/n?$ );

30<sup>8</sup> ( $j_1 = ?$ );

30<sup>10</sup> ( $X$  má již jiný význam);

23<sup>18</sup> a 31<sup>18</sup> ( $r_n = q_n?$ ).

14) U Věty 8 se opakují standardní důkazy základních vlastností Riemannova integrálu, které se přednášejí v základním kurzu analýzy a jsou v mnoha českých textech. K tomu ale není žádný důvod; logické by bylo dokazovat zobecnění těchto vlastností pro vektorový případ. Argumenty, které autor uvádí, jsou také většinou příliš rychlé, jde spíše o náznaky důkazů a ne o podrobné důkazy, jaké by měly být v bakalářské práci. Ještě poznamenávám, že ve vlastnosti (b) je obvyklý a logický předpoklad  $0 \leq a < b \leq 1$ . Dále není jasné užití věty “o dvou polícajtech” (14<sup>15</sup>).

15) Není jasné, proč v Příkladu 4 se nedokazuje existence integrálu funkce  $g$  pomocí spojitosti (až po Větě 16). Závěrečný argument celého příkladu by měl být v bakalářské práci podrobnější.

16) Podání Příkladu 3 není zcela uspokojivé. Jednak autorův překlad Gordonovy fráze “let  $\{r_n\}$  be a listing of the rational numbers in  $[0, 1]$ ” českou frází “buď  $\{r_n\}$  posloupnost nějak uspořádaných racionálních čísel” není šťastný. Následující text (kde např. první nerovnost se nijak nezduodňuje) je natolik stručný, že není jasné, jaké vlastnosti  $\{r_n\}$  se používají. Podobná nejasnost je v důkazu (a) z Věty 18, kde první nerovnost ( $\|\dots\| \leq 1$ ) by měla být zdůvodněna a i nespojitost dokázána podrobněji.

17) 9<sup>8</sup>..... neostrou nerovnost na konci řádku by v bakalářské práci bylo vhodné zdůvodnit.

18) 9<sup>13</sup>.....spíše “bylo libovolné dělení”.

19) 10<sup>8-9</sup>.....argument je pro bakalářské práci příliš rychlý.

20) 10<sub>2</sub>.....formulace je nevhodná a těžko srozumitelná.

21) 11<sup>1</sup>.....fráze “zajímají nás pouze intervaly z  $\mathcal{M}_2$ , protože ty ostatní se odečtou” nedává smysl.

22) 11<sup>4</sup>.....není vysvětleno, jak je definováno  $k$  a dále  $z_{k+j}$ .

23) 12<sup>14</sup>.....argument je pro bakalářské práci příliš rychlý.

24) 27<sup>12</sup>.....není jasný význam pojmu “skok velikosti  $1/n$ ”.

Práce ma tolik nedostatků, že je podle mého názoru na hranici možnosti uznání. Vlastní podrobné rozvedení chybějících argumentů z literatury je značně nedostatečné nebo dokonce chybné. Přesto si myslím, že autor vykonal velké množství práce a prokázal uspokojivou orientaci v potřebných pojmech, porozumění smyslu vět a základních potřebných argumentech; některé pasáže jsou psány i dosti dobře. Kloním se tedy (před obhajobou) spíše k tomu, aby práce byla uznána jako bakalářská.

Praha, 21.8.2016

Prof. L. Zajíček, DrSc