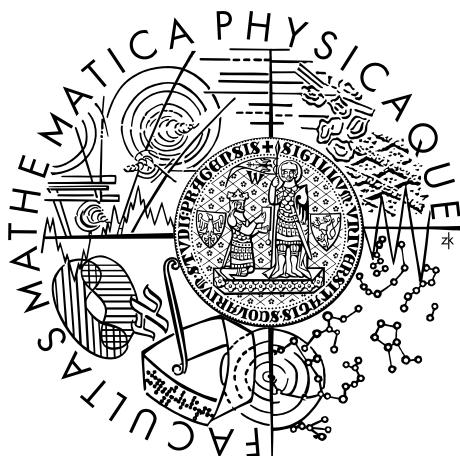


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Zdeněk Silber

Nemožné množiny

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Nemožné množiny

Autor: Zdeněk Silber

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.

Abstrakt: V práci jsou definovány a popsány pojmy Hausdorffovy míry a dimenze. Je v ní popsána geometrická konstrukce Besikovičovy množiny a její adaptace pro konstrukci Kakeyovy množiny. Dále se práce zabývá konstrukcí Besikovičovy množiny jakožto sjednocení přímek parametrizovaných irregulárními množinami. Nakonec je v ní podáno pár dalších příkladů ”nemožných množin”.

Klíčová slova: Hausdorffova míra, fraktální množina, projekce a dualita, Besikovičova množina, Kakeyova množina

Title: Impossible sets

Author: Zdeněk Silber

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.

Abstract: In this work we define Hausdorff measure and dimension, describe the geometrical construction of a Besikovitch set and adapt this approach to construct Kakeya set. We also describe another construction of a Besicovitch set using the properties of projections of irregular sets. Finally we present other examples of ”impossible sets”.

Keywords: Hausdorff measure, fractal set, projection and duality, Besicovitch set, Kakeya set

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své bakalářské práce, doc. RNDr. Daliboru Pražákovi, Ph.D., za seznámení se zajímavým tématem, cenné připomínky a pomoc s vypracováním práce.

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 2 |
| 1 Příprava | 3 |
| 1.1 Hausdorffova míra a dimenze | 3 |
| 1.2 Hustota, regulární a irregulární množiny | 4 |
| 1.3 Hausdorffova metrika | 5 |
| 1.4 Křivky a 1-množiny | 6 |
| 2 Geometrická konstrukce Besikovičovy a Kakeyovy množiny | 7 |
| 2.1 Konstrukce Besikovičovy množiny | 7 |
| 2.2 Konstrukce Kakeyovy množiny | 10 |
| 3 Duální přístup | 12 |
| 3.1 Využití duality | 13 |
| 3.2 Další nemožné množiny | 14 |
| Závěr | 16 |
| Literatura | 17 |

Úvod

Tématem této práce bude konstrukce jistých množin s neintuitivními vlastnostmi. Podrobně se podíváme na některé konstrukce Besikovičovy a Kakeyovy množiny. Besikovičova množina je množina nulové míry obsahující úsečku v libovolném směru. Kakeyova množina je množina, ve které se dá jednotková úsečka přetočit tak, aby ležela ne své původní pozici, ale otočená o 180° . Ukážeme, že lze najít Kakeyovu množinu libovolně malé míry.

Dále v práci ukážeme souvislost mezi Besikovičovou množinou a geometrickou teorií míry, konkrétně postup její konstrukce využívající vlastnosti projekcí irregulárních množin. Tento postup nám dá dokonce množinu nulové míry obsahující přímku každého směru.

Nakonec se podíváme, jak podobným způsobem můžeme najít další nemožné množiny, jako je například množina nulové míry obsahující kružnice libovolných poloměrů.

Tato práce by měla sloužit jako shrnutí informací o těchto množinách. Měla by být srozumitelná studentům třetího ročníku bakalářského studia.

Většina důkazů je čerpána z Falconerovy knihy. Některé části v ní však byly popsány jen velmi stručně, nebo byly přenechány čtenáři. Zde by měly být tyto části podrobněji rozpracovány. Některé části Falconerovy knihy, jako například důkazy vlastností projekcí s -množin, jsou naopak velmi technické a pro účel této práce nevhodné, proto je na ně uveden pouze odkaz.

Přesné shrnutí vlastní práce: V kapitole 1 bylo potřeba připravit pojmy a věty pro celý zbytek práce. Ačkoliv bylo ve Falconerově knize mnohokrát implicitně použito, sám jsem formuloval a dokázal Lemma 1.1, jež hovoří o změně míry při lipschitzovské transformaci. Dokázal jsem Větu 1.5. o postačující podmínce pro konvergenci v Hausdorffově metrice a Lemma 1.4. a použil je k důkazu části Věty 2.2.

V kapitole 2 jsem rozvedl důkaz Lemmatu 2.1. Dodělal jsem část důkazu Věty 2.2., která hovoří o konvergenci úseček M. Zobecnil jsem konstrukci Kakeyovy množiny do \mathbb{R}^n , což bylo ve Falconerově knize podáno jako cvičení.

V kapitole 3 jsem dokázal Větu 3.1. Ve Větě 3.2. jsem dokázal, že zobrazení L zachovává otevřenosť množin. Ve Větě 3.3. jsem předvedl alternativní konstrukci množiny přes průnik místo algebraické definice, jež byla podaná v knize, jelikož z této konstrukce je lépe vidět, že se jedná o 1-množinu. Ve Větě 3.5. jsem kompletně dokázal irregularitu $\phi(E)$. V knize bylo pouze bez důkazu zmíněno, že reálně analytické zobrazení zachovává irregularitu.

Kapitola 1

Příprava

V této kapitole si definujeme pojmy, které budeme později používat.

1.1 Hausdorffova míra a dimenze

Definice 1.1. Nechť E je podmnožina \mathbb{R}^n a $s > 0$. Potom pro $\delta > 0$ definujeme

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s,$$

kde bereme infimum přes všechna spočetná δ -pokrytí množiny E , t.j. $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ a $\text{diam}(U_i) < \delta$. Hausdorffovu vnější míru definujeme jako

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

Tato limita vždy existuje, jelikož \mathcal{H}_δ^s je nerostoucí v δ , může ale nabývat nekonečných hodnot. \mathcal{H}^s je dokonce metrická vnější míra.

\mathcal{H}^s je míra na σ -algebře svých měřitelných množin, která obsahuje borelovské množiny (Falconer, 1985, Theorem 1.5).

\mathcal{H}^s je pro celočíselné s , až na přenásobení konstantou závislou na s , stejná jako \mathcal{L}^s . (Falconer, 1985, Theorem 1.11).

\mathcal{H}^s je regulární vnější míra (Falconer, 1985, Theorem 1.6).

Je zřejmé, že \mathcal{H}^s je nerostoucí v s , dále pro $s < t$ platí $\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(E)$. Je-li tedy $\mathcal{H}^t(E) > 0$, pak je $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. Existuje tedy jediná hodnota, *Hausdorffova dimenze* E , značíme $\dim(E)$, že $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ pro $0 \leq s < \dim(E)$ a $\mathcal{H}^s(E) = 0$ pro $\dim(E) < s$.

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je \mathcal{H}^s -měřitelná a $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$, potom E nazveme s -množina.

Lemma 1.1. Nechť f je lipschitzovské zobrazení s konstantou K . Potom $\mathcal{H}^s(f(A)) \leq K^s \mathcal{H}^s(A)$. Speciálně f zobrazuje množiny nulové míry na množiny nulové míry a množiny konečné míry na množiny konečné míry.

Důkaz. Nechť $\{U_i\}$ je pokrytí A . Z lipschitzovskosti f víme, že $\text{diam}(f(U_i)) \leq K \text{diam}(U_i)$.

Máme tedy: $\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } f(U_i))^s \leq K^s \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s$.

Pro každé $\delta > 0$ tedy platí:

$$\mathcal{H}_{K\delta}^s(f(A)) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } f(U_i))^s \leq \inf \sum_{i=1}^{\infty} K^s(\text{diam}(U_i))^s = K^s \mathcal{H}_{\delta}^s(A),$$

kde první infimum bereme přes pokrytí s diametry maximálně $K\delta$ a druhé přes pokrytí s diametry maximálně δ . Tvrzení věty dostaneme limitním přechodem $\delta \rightarrow 0$. \square

Lemma 1.2. *Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je kontinuum (tj. kompaktní souvislá množina) obsahující body x a y , potom pro $r = |x - y|$ je $\mathcal{H}^1(E \cap B_r(x)) \geq r$. Speciálně $\mathcal{H}^1(E) \geq \text{diam}(E)$.*

Důkaz. Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je definováno vztahem $f(z) = \|x - z\|$. Potom f je spojité neexpanzivní (tj. lipschitzovské s konstantou nejvýše 1) zobrazení.

$f(E \cap B_r(x))$ obsahuje interval $[0, r]$, jelikož jde o souvislou množinu obsahující body 0 a r . Jelikož f je neexpanzivní, z minulého lemmatu máme:

$$\mathcal{H}^1(E \cap B_r(x)) \geq \mathcal{H}^1(f(E \cap B_r(x))) \geq \mathcal{H}^1([0, r]) = r.$$

\square

1.2 Hustota, regulární a irregulární množiny

Definujeme pojem hustoty vůči Hausdorffově míře, který je analogií k Lebesguově hustotě.

Definice 1.2. *Pro E s-množinu a $x \in \mathbb{R}^n$ definujeme horní resp. dolní hustotu*

$$\overline{D}^s(E, x) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s},$$

resp.

$$\underline{D}^s(E, x) = \underline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}.$$

Pokud $\overline{D}^s(E, x) = \underline{D}^s(E, x)$, pak definujeme hustotu množiny E v bodě x , $D^s(E, x)$, jako jejich společnou hodnotu.

Body $x \in E$, ve kterých $D^s(E, x) = 1$, nazveme regulární. Body $x \in E$, které nejsou regulární, nazveme irregulární. Množinu E nazveme regulární resp. irregulární, pokud jsou \mathcal{H}^s -skoro všechny její body regulární resp. irregulární.

Příkladem regulární množiny je nedegenerovaná rektifikovatelná křivka, irregulární je například Cantorova množina. Obecně platí, že s -množina nemůže být regulární, pokud s není celé číslo.

Dále zde formulují bez důkazu některé věty o regulárních a irregulárních množinách, další informace můžete vyhledat ve Falconerově knize (Falconer, 1985, Kapitola 2).

Věta 1.1. *Nechť E je s -množina, potom množina všech jejích regulárních bodů je regulární a množina všech jejích irregulárních bodů je irregulární.*

Tato věta (Falconer, 1985, Corollary 2.10) nám říká, že můžeme s -množinu rozdělit na regulární a irregulární část.

Pro $\theta \in [0, \pi)$ a $E \subset \mathbb{R}^2$ definujeme $\text{proj}_\theta(E)$ projekci množiny E na přímku L_θ procházející počátkem a svírající úhel θ s osou x. Důkazy následujících vět můžete dohledat ve Falconerově knize (Falconer, 1985, Kapitola 6, Theorems 6.10, 6.13).

Věta 1.2. *Nechť E je regulární 1-množina v \mathbb{R}^2 , potom je $\mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E)) > 0$ pro všechna $\theta \in [0, \pi)$ s maximálně jednou výjimkou.*

Věta 1.3. *Nechť E je irregulární 1-množina v \mathbb{R}^2 , potom je $\mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E)) = 0$ pro skoro všechna $\theta \in [0, \pi)$.*

Lemma 1.3. *1-množina $E \subset \mathbb{R}^2$ je irregulární, právě když existují dva různé směry, ve kterých má její projekce nulovou míru.*

Důkaz. Nechť E není irregulární, potom z Věty 1.1. víme, že se E dá rozdělit na regulární část $r(E)$ a irregulární část $i(E)$. Jelikož E není irregulární, máme $\mathcal{H}^1(r(E)) \neq 0$, tedy $r(E)$ je regulární 1-množina. Z Věty 1.2. máme

$$\mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E)) > \mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(r(E))) > 0$$

pro všechna $\theta \in [0, \pi)$ s maximálně jednou výjimkou.

Nechť E je irregulární, potom $\mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E)) = 0$ pro skoro všechna $\theta \in [0, \pi)$ z Věty 1.3. \square

1.3 Hausdorffova metrika

Používáme klasickou definici vzdálenosti bodu od množiny $d(A, x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Definice 1.3. *Nechť $K(X)$ je množina všech neprázdných kompaktních podmnožin metrického prostoru (X, d) . Pro $A, B \in K(X)$ definujeme Hausdorffovu metriku*

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b) \right\}.$$

Hausdorffova metrika se dá ekvivalentně popsat vztahem

$$d_H(A, B) = \inf \{ \epsilon \geq 0 : A \subset B_\epsilon; B \subset A_\epsilon \},$$

kde $Y_\epsilon = \{x \in X : d(x, Y) \leq \epsilon\}$

V Kapitole 2 budeme potřebovat následující věty, důkaz první z nich si můžete dohledat v (Nadler, 1992, Theorem 4.13).

Věta 1.4. *Je-li X kompaktní metrický prostor, potom $(K(X), d_H)$ je také kompaktní metrický prostor.*

Věta 1.5. *Nechť X je kompaktní metrický prostor. K a $K_i : i = 1, 2, \dots$ jsou neprázdné kompakty v X . Nechť jsou dále splněny následující podmínky:*

1. *Pro každé $x \in K$ existuje posloupnost x_i , že $x_i \in K_i$ a $x_i \rightarrow x$.*
2. *Každá konvergentní posloupnost x_{i_j} , že $x_{i_j} \in K_{i_j}$ má limitu v K .*

Potom $K_i \rightarrow K$ v $K(X)$.

Důkaz. Z první podmínky a kompaktnosti K máme $\sup_{x \in K} d(x, K_n) \rightarrow 0$. Kdyby $\sup_{x \in K_n} d(x, K) \not\rightarrow 0$, potom existuje $\epsilon > 0$ a posloupnost x_{i_j} , že $x_{i_j} \in K_{i_j}$, že $d(x_{i_j}, K) \geq \epsilon$. Z kompaktnosti X má tato posloupnost konvergentní podposloupnost, což nám dává spor s druhou podmínkou.

Máme tedy $d_H(K, K_n) = \max\{\sup_{x \in K} d(x, K_n), \sup_{x \in K_n} d(x, K)\} \rightarrow 0$, tedy $K_n \rightarrow K$ v $K(X)$. \square

Lemma 1.4. *Nechť X je kompaktní prostor a Y jeho uzavřená podmnožina. Potom $K(Y)$ je uzavřená podmnožina $K(X)$.*

Důkaz. Jelikož Y je uzavřená, máme, že uzavřené množiny v Y jsou uzavřené i v X , tedy $K(Y) \subset K(X)$. Jelikož Y je kompaktní, víme, že $K(Y)$ je kompaktní, tedy je i uzavřená. \square

1.4 Křivky a 1-množiny

Definice 1.4. *Křivkou rozumíme obraz spojitého prostého zobrazení $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Délku křivky Γ definujeme jako $\mathcal{L}(\Gamma) = \sup\left\{\sum_{i=1}^m |\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})|\right\}$, kde $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je parametrizace křivky Γ a supremum bereme přes všechna dělení $\{t_0, \dots, t_m\}$ intervalu $[a, b]$.

Řekneme, že křivka Γ je rektifikovatelná, pokud $\mathcal{L}(\Gamma) < \infty$.

Ukážeme vztah mezi regulárními 1-množinami a rektifikovatelnými křivkami. Nadále ho využijeme v kapitole 3 při konstrukci dalších zajímavých množin. Budeme čerpat z Falconerovy knihy (Falconer, 1985, Kapitola 3), ačkoliv původně tyto vztahy popsal již Besikovič.

Věta 1.6. *Je-li Γ křivka, potom $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{H}^1(\Gamma)$.*

Definice 1.5. *1-množina $E \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá Y -množina, je-li podmnožinou spočetného sjednocení rektifikovatelných křivek.*

1-množina $E \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá Z -množina, protíná-li každou rektifikovatelnou křivku v množině nulové Hausdorffovy míry.

Věta 1.7. *Irregulární 1-množina je Z -množina. Regulární 1-množina sestává z Y -množiny a množiny nulové míry.*

Kapitola 2

Geometrická konstrukce Besikovičovy a Kakeyovy množiny

V této kapitole se budeme zabývat geometrickou konstrukcí Besikovičovy množiny, tj. množiny nulové míry obsahující jednotkovou úsečku každého směru.

Tento postup nadále použijeme i pro konstrukci Kakeyovy množiny, množiny libovolně malé míry, ve které můžeme přetáčet a posouvat jednotkovou úsečku tak, aby ležela na svém původním místě, ale otočená o 180° .

2.1 Konstrukce Besikovičovy množiny

Základní myšlenkou bude konstrukce takzvaného "Perronova stromu", obrazce vytvořeného rozdělením rovnostranného trojúhelníku o výšce 1 na mnoho menších trojúhelníků stejné výšky a jejich následným posunutím po podstavě. Tímto získáme množinu, která obsahuje jednotkové úsečky pod úhly $0-60^\circ$, a ukážeme, že takto můžeme získat množinu libovolně malé míry. Původní Besikovičova konstrukce byla výrazně zjednodušena. My zde předvedeme konstrukci, jak je popsána v kapitole 7 Falconerovy knihy (Falconer, 1985).

Lemma 2.1. *Nechť T_1 a T_2 jsou přilehlé trojúhelníky s podstavami na přímce L s výškami h a velikostí podstav b . Nechť $1/2 < \alpha < 1$. Potom, posuneme-li T_2 po L o vzdálenost $2(1 - \alpha)b$, aby překrývala T_1 (viz obrázek 2.1), získáme obrazec S , skládající se z trojúhelníku T , podobného trojúhelníku $T_1 \cup T_2$, s $\mathcal{L}^2(T) = \alpha^2 \mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2)$, a dvou menších trojúhelníků. Záměnou $T_1 \cup T_2$ za S dosáhneme snížení obsahu:*

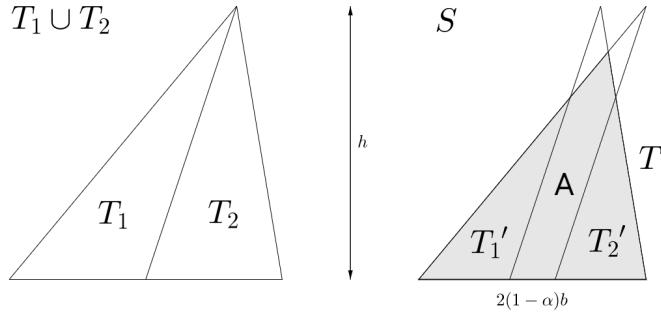
$$\mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2) - \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2)(1 - \alpha)(3\alpha - 1).$$

Důkaz. Všimneme si, že naše hledané snížení obsahu je rovno přesně obsahu překryvu vzniklého posunutím, což je obsah pětiúhelníku A . Tento obsah snadno spočítáme odečtením obsahů bočních trojúhelníků od obsahu trojúhelníku T .

T je podobný trojúhelníku $T_1 \cup T_2$ a délka jeho podstavy je $2b - 2(1 - \alpha)b = 2\alpha b$. Koeficient podobnosti je tedy α . Dostáváme $\mathcal{L}^2(T) = \alpha^2 \mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2)$.

Označme T'_1 trojúhelníček podobný T_1 a T'_2 trojúhelníček podobný T_2 . Velikost podstav těchto trojúhelníčků je rovna $b - 2(1 - \alpha)b = b(2\alpha - 1)$, koeficienty

Obrázek 2.1:



podobnosti jsou tedy $(2\alpha - 1)$. Dostáváme $\mathcal{L}^2(T'_1 \cup T'_2) = (2\alpha - 1)^2 \mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2)$. Nakonec máme:

$$\mathcal{L}^2(A) = \alpha^2 \mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2) - (2\alpha - 1)^2 \mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2) = \mathcal{L}^2(T_1 \cup T_2)(1 - \alpha)(3\alpha - 1).$$

□

Věta 2.1. *Nechť T je trojúhelník se základnou na přímce L . Rozdělíme základnu T na 2^k stejně dlouhých úseček a spojíme jejich krajin body s protějším vrcholem, čímž získáme 2^k trojúhelníčků T_1, \dots, T_{2^k} . Zvolíme-li dostatečně velké k , je možné posunout trojúhelníčky podél L tak, aby výsledný obrazec S byl libovolně malý. Dále, je-li V otevřená množina obsahující T , můžeme zajistit, aby $S \subset V$.*

Důkaz. Použijeme několikrát předchozí lemma. Pro $\forall 1 \leq i \leq 2^{k-1}$ posuneme T_{2i} po L na T_{2i-1} . Dostaneme obrazec S_i^1 skládající se z trojúhelníku T_i^1 podobného $(T_{2i-1} \cup T_{2i})$ a dvou menších trojúhelníčků. Z lemmatu výše máme:

$$\mathcal{L}^2(T_{2i-1} \cup T_{2i}) - \mathcal{L}^2(S_i^1) = \mathcal{L}^2(T_{2i-1} \cup T_{2i})(1 - \alpha)(3\alpha - 1).$$

V další fázi provedeme totéž s obrazci S_i^1 , Pro $\forall 1 \leq i \leq 2^{k-2}$ posuneme S_{2i}^1 po L na S_{2i-1}^1 a dostaneme S_i^2 . Jelikož je strana T_{2i-1}^1 rovnoběžná a stejná protější straně T_{2i}^1 , můžeme zajistit, aby S_i^2 obsahovalo trojúhelník T_i^2 s $\mathcal{L}^2(T_i^2) = \alpha^2 [\mathcal{L}^2(T_{2i-1}^1) + \mathcal{L}^2(T_{2i}^1)]$, a dosáhnout snížení obsahu o alespoň

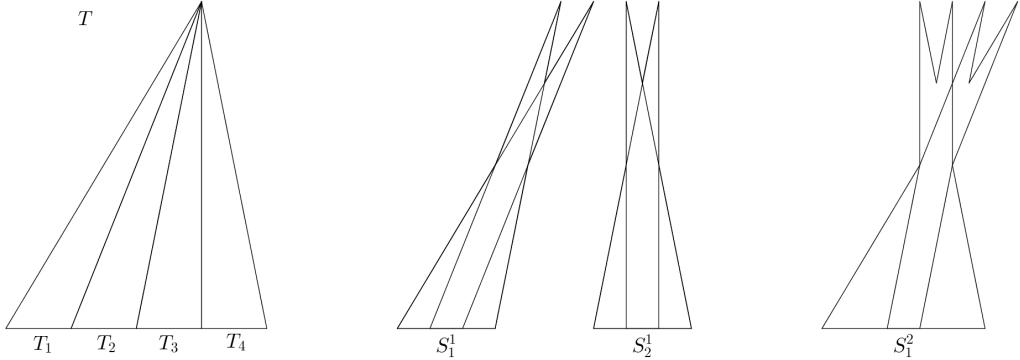
$$(1 - \alpha)(3\alpha - 1)[\mathcal{L}^2(T_{2i-1}^1) + \mathcal{L}^2(T_{2i}^1)] = (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\alpha^2 \mathcal{L}^2(T_{4i-3} \cup T_{4i-2} \cup T_{4i-1} \cup T_{4i}).$$

Takto budeme pokračovat dále. V $(r+1)$. kroku dostaneme S_i^{r+1} posunutím S_{2i}^r na S_{2i-1}^r se snížením obsahu alespoň o $(1 - \alpha)(3\alpha - 1)\alpha^{2r}$ krát obsah trojúhelníčků, které byly posunuty při tvoření S_{2i-1}^r a S_{2i}^r . Na konci dostaneme jediný obrazec S_1^k , který označíme jako S . Srovnáváním obsahů $\bigcup_i S_i^r$ pro po sobě jdoucí r získáme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(S) &\leq \mathcal{L}^2(T) - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2(k-1)}) \mathcal{L}^2(T) = \\ &= \left(1 - \frac{(3\alpha - 1)(1 - \alpha^{2k})}{(1 + \alpha)}\right) \mathcal{L}^2(T). \end{aligned}$$

Můžeme zvolit α dostatečně blízko 1, abychom dostali $(3\alpha - 1)/(1 + \alpha)$ blízko 1, a k dostatečně vysoké tak, abychom dostali $\mathcal{L}^2(S)$ tak malé, jak chceme.

Obrázek 2.2: Postup pro $k = 2$



Dále si uvědomíme, že pro b délku podstavy trojúhelníku T se při naší konstrukci, pokud fixujeme T_1 a budeme nadále posouvat trojúhelníky směrem k němu, nepohne žádným trojúhelníkem o více než o b . Rozdělíme-li tedy náš původní trojúhelník na trojúhelníky o délce podstavy nejvýše ϵ a aplikujeme náš postup na každý z těchto trojúhelníků, dostaneme obrazec libovolně malého obsahu s posouváním o maximálně ϵ . Zvolením dostatečně malého ϵ tedy můžeme dosáhnout, že výsledný obrazec bude pořád obsažen v otevřené V . \square

Nyní už nám zbývá jenom využít věty výše ke konstrukci Besikovičovy množiny.

Věta 2.2. *V rovině existuje množina nulové míry, Besikovičova množina, obsahující jednotkovou úsečku libovolného směru.*

Důkaz. Stačí najít množinu nulové míry obsahující všechny úsečky se směry v intervalu $(60^\circ, 120^\circ)$ a vzít sjednocení této množiny a jejích kopií otočených o 60° a o 120° . Pro získání této množiny opakovaně použijeme Větu 2.1.

Nechť S_1 je rovnostranný trojúhelník jednotkové výšky se základnou na přímce L , V_1 je otevřená množina obsahující S_1 , která splňuje $\mathcal{L}^2(\overline{V}_1) \leq 2\mathcal{L}^2(S_1)$. Dle Věty 2.1. rozdělíme S_1 na menší trojúhelníčky, které následně posuneme po L a získáme S_2 , obrazec stále obsažený v V_1 s $\mathcal{L}^2(S_2) \leq 1/4$. Najdeme V_2 otevřenou, že $S_2 \subset V_2 \subset V_1$ a $\mathcal{L}^2(\overline{V}_2) \leq 2\mathcal{L}^2(S_2)$.

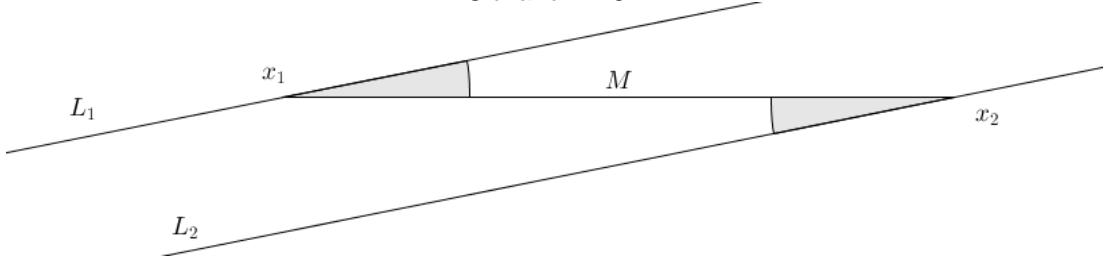
Dále indukcí získáme posloupnosti $\{S_i\}$, kde každé S_i je sjednocením konečně mnoha trojúhelníčků jednotkové výšky se základnou na L , a $\{V_i\}$, kde každá V_i je otevřená množina, která splňuje $S_i \subset V_i \subset V_{i-1}$ a $\mathcal{L}^2(\overline{V}_i) \leq 2\mathcal{L}^2(S_i) \leq 2^{-i+1}$.

Označme $F = \bigcap_i \overline{V}_i$. Toto F je naše hledaná množina. Zřejmě $\mathcal{L}^2(F) = 0$. Dále každé S_i , a tedy i \overline{V}_i obsahuje jednotkové úsečky se směry do 60° . Ukážeme, že totéž platí i pro F . Nechť θ je jeden takový úhel, M_i je jednotková úsečka ve \overline{V}_i ve směru θ .

Jelikož všechny tyto M_i jsou kompaktní podmnožiny nějakého kompaktu, z Věty 1.4. tato posloupnost BÚNO konverguje k nějakému M (jinak přejdeme k podposloupnosti).

Ukážeme, že M je jednotková úsečka ve směru θ : BÚNO M_i jsou ve směru $\pi/2$, jde tedy o svislé úsečky. $M_i = \{(x_i, k_i + t); t \in [0, 1]\}$. $M := \{(x, k + t); t \in [0, 1]\}$, kde $x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ a $k = \lim_{i \rightarrow \infty} k_i$. Všechny předpoklady Věty 1.5. jsou zřejmě splněny, tedy $M_i \rightarrow M$ a M je zřejmě svislá úsečka jednotkové délky.

Obrázek 2.3:



Zbývá ukázat, že $M \subset F$. $M_i \subset \overline{V}_j$ pro každé $i \geq j$ a každé \overline{V}_i je uzavřené. Tedy z Lemmatu 1.4. pro každé j platí:

$$M = \lim_{i \rightarrow \infty} M_i = \lim_{i > j, i \rightarrow \infty} M_i \subset \overline{V}_j.$$

Máme tedy $M \subset \overline{V}_j$ pro každé j , tedy $M \subset \bigcap_i \overline{V}_i = F$. \square

2.2 Konstrukce Kakeyovy množiny

Kakeyova množina je množina libovolně malé míry, ve které můžeme spojitě posouvat a otáčet jednotkovou úsečkou bez opuštění naší množiny tak, aby na konci ležela ve své původní pozici, ale otočená o 180° .

Pojmem spojitého posouvání a otáčení úsečky I bez opuštění množiny M máme na mysli složení translací a rotací takové, že pro translaci $t(x) = x + k$ platí $\{x + l; x \in I\} \subset M$ pro každé $l \in [0, k]$ a pro rotaci $r_{s,\theta}$ o úhel θ kolem bodu s platí $\{r_{s,\theta'}(x); x \in I\} \subset M$ pro každé $\theta' \in [0, \theta]$.

Pro konstrukci Kakeyovy množiny použijeme Větu 2.1. a následující lemma, které nám umožní "spojoval" jednotlivé obrazce.

Lemma 2.2. *Nechť L_1 a L_2 jsou dvě rovnoběžné přímky a $\epsilon > 0$, potom existuje množina E , obsahující $L_1 \cup L_2$ a splňující $\mathcal{L}^2(E) \leq \epsilon$, ve které lze jednotkovou úsečku spojitě posunout z L_1 do L_2 bez opuštění E .*

Důkaz. Stačí vzít x_1 a x_2 (viz obrázek 2.3) dostatečně daleko od sebe a vidíme, že naše E bude splňovat požadavky lemmatu. \square

Věta 2.3. *V rovině existuje množina libovolně malé míry, Kakeyova množina, ve které se dá jednotková úsečka spojitě posunout tak, aby na konci ležela ve stejné pozici, ale otočená o 180° .*

Důkaz. Nechť $\epsilon > 0$ a T a L jsou jako ve Větě 2.1. Rozdělíme T na $m = 2^k$ menších trojúhelníčků a posuneme je do pozic T'_1, \dots, T'_k tak, že $\mathcal{L}^2(\bigcup_1^k T'_i) \leq \epsilon/6$.

Dále si všimneme, že vždy jedna strana trojúhelníku T_i je rovnoběžná jedné straně T_{i+1} , můžeme tedy aplikovat Lemma 2.2. a pro každé i přidat množinu míry nejvýše $\epsilon/6m$, abychom mohli posunout úsečku z T_i do T_{i+1} . Tímto získáme množinu E , jejíž míra je nejvýše $\epsilon/6 + \frac{(m-1)\epsilon}{6m} < \epsilon/2$. V této množině lze jednotkovou úsečku posunout tak, aby ležela v libovolném úhlu v $[0^\circ, 60^\circ]$. Stačí vzít tuto množinu a její kopie otočené o 60° a 120° a spojit je pomocí Lemmatu 2.2. \square

Kakeyova množina se dá snadno zobecnit do \mathbb{R}^n .

Věta 2.4. *V \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, existuje množina E s libovolně malou $\mathcal{L}^n(E)$, ve které se dá jednotková úsečka spojitě posunout a otočit tak, aby na konci ležela otočená do libovolného směru.*

Důkaz. Z předchozí věty získáme $K \subset \mathbb{R}^2$ Kakevovu množinu dvojrozměrné míry maximálně ϵ . Jako naší hledanou množinu vezmeme $E = K \times [0, 1]^{n-2}$. Tato množina je míry maximálně ϵ a splňuje požadavky věty. \square

Kapitola 3

Duální přístup

V této kapitole se budeme zabývat duálním přístupem k Besikovičově a Kakeyově množině. Idea tohoto postupu je parametrisovat přímky body tak, že projekce množiny bodů E v nějakém směru bude podobná průniku přímek parametrizovaných přes E a nějaké fixované přímky.

Besikovič původně použil tuto techniku s parametrisací přes polární přímky, my zde předvedeme Falconerovu verzi (Falconer, 1985) s klasickou parametrisací přímek.

Pro $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ označíme $L(a, b)$ množinu bodů přímky $y = a + bx$, pro $E \subset \mathbb{R}^2$ označíme $L(E)$ sjednocení $\bigcup_{(a,b) \in E} L(a, b)$ a pro $c \in \mathbb{R}$ označíme L_c množinu bodů přímky $x = c$. Potom platí:

$$L(a, b) \cap L_c = (c, a + bc) = (c, (a, b) \cdot (1, c)),$$

kde ”.” značí standardní skalární součin. Pro $E \subset \mathbb{R}^2$ tedy máme:

$$L(E) \cap L_c = \{(c, (a, b) \cdot (1, c)) : (a, b) \in E\}.$$

Věta 3.1. *Množina $L(E) \cap L_c$ je podobná množině $\text{proj}_\theta E$ s koeficientem podobnosti $(1 + c^2)^{(1/2)}$, kde $c = \tan(\theta)$.*

Důkaz. Výše jsme již ukázali, že $L(E) \cap L_c = \{(c, (a, b) \cdot (1, c)) : (a, b) \in E\}$, stačí se tedy podívat, jak vypadá množina $\text{proj}_\theta E$.

Přímka L_θ je lineární podprostor \mathbb{R}^2 , který se dá vyjádřit jako $\text{span}((1, c))$. Ortogonální projekci se tedy můžeme spočítat jako

$$\text{proj}_\theta(a, b) = \frac{1}{1 + c^2}((a, b) \cdot (1, c))(1, c).$$

Nechť $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in E$, potom:

$$\begin{aligned} \| \text{proj}_\theta(a_1, b_1) - \text{proj}_\theta(a_2, b_2) \|^2 &= \frac{1}{(1 + c^2)^2} \|(a_1 - a_2 + c(b_1 - b_2), c(a_1 - a_2 + c(b_1 - b_2)))\|^2 = \\ &= \frac{1}{1 + c^2} (a_1 - a_2 + c(b_1 - b_2))^2. \end{aligned}$$

Dále platí:

$$\|L(a_1, b_1) \cap L_c - L(a_2, b_2) \cap L_c\|^2 = (a_1 - a_2 + c(b_1 - b_2))^2.$$

Vidíme tedy, že zobrazení $\text{proj}_\theta(a, b) \mapsto L(a, b) \cap L_c$ zachovává vzdálenosti bodů až na násobek $(1 + c^2)^{(1/2)}$.

□

Z Věty 3.1. dostáváme důležitý vztah, který ještě mnohokrát použijeme:

$$\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0 \iff \mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta E) = 0. \quad (3.1)$$

Když budeme uvažovat projekci na osu y , vidíme, že pro $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ je $\text{proj}_{\pi/2}(a, b) = b$, gradient přímky $L(a, b)$. Pokud tedy $b \in \text{proj}_{\pi/2} E$, tak $L(E)$ obsahuje přímku o gradientu b .

3.1 Využití duality

Nyní už máme vše potřebné a můžeme se pustit do konstrukce Besikovičovy množiny za pomocí duality.

Věta 3.2. *Nechť E je 1-množina v \mathbb{R}^2 , potom $L(E)$ je \mathcal{L}^2 -měřitelná a platí $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$, pokud je E irregulární, a $\mathcal{L}^2(L(E)) > 0$, pokud je E regulární.*

Důkaz. Je-li E otevřená (resp. G_δ , $G_{\delta\sigma}$), pak je i $L(E)$ otevřená (resp. G_δ , $G_{\delta\sigma}$) - stačí ukázat pouze pro otevřenou množinu. Nechť E je otevřená: vezmeme $x \in L(E)$. Potom $x \in L(a, b)$ pro nějaké $(a, b) \in E$. Z otevřenosťi E existuje $\epsilon > 0$, že $U((a, b), \epsilon) \subset E$. Speciálně pro každé $a_0 \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ existuje přímka $L(a_0, b) \subset L(E)$. x je tedy prvkem pruhu $P = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; (a - \epsilon) + by_1 < y_2 < (a + \epsilon) + by_1\}$. Děle zřejmě $P = \bigcup_{a_0 \in (a - \epsilon, a + \epsilon)} (L(a_0, b)) \subset L(E)$ a P je otevřené. Jelikož x bylo libovolné, máme $L(E)$ je otevřená množina.

Dále budeme potřebovat, že pro E typu F_σ je $L(E)$ měřitelná. Pro to si stačí uvědomit, že uzavřené množiny jsou typu G_δ , tedy F_σ množiny jsou typu $G_{\delta\sigma}$. Je-li tedy E typu F_σ , máme, že $L(E)$ je typu $G_{\delta\sigma}$, a tedy měřitelná.

Nechť $\mathcal{H}^1(E) = 0$, z regularity \mathcal{H}^1 existuje G_δ množina $E \subset E_0$ a $\mathcal{H}^1(E_0) = 0$. Zřejmě $\mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E_0)) = 0$ pro všechna θ . Z (3.1) tedy máme $\mathcal{L}^1(L(E_0)) \cap L_c = 0$ pro každé c . $L(E_0)$ je G_δ a tedy \mathcal{L}^2 -měřitelná, z Fubiniho věty máme $\mathcal{L}^2(E_0) = 0$. Jelikož $L(E) \subset L(E_0)$, máme tedy i měřitelnost $L(E)$ a $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$.

E obecnou si můžeme z regularity \mathcal{H}^1 rozdělit na $E = E_0 \cup F$, kde E_0 je F_σ a $\mathcal{H}^1(F) = 0$. Potom zřejmě $L(E) = L(E_0) \cup L(F)$, a tedy je měřitelná, jelikož je sjednocením dvou měřitelných množin.

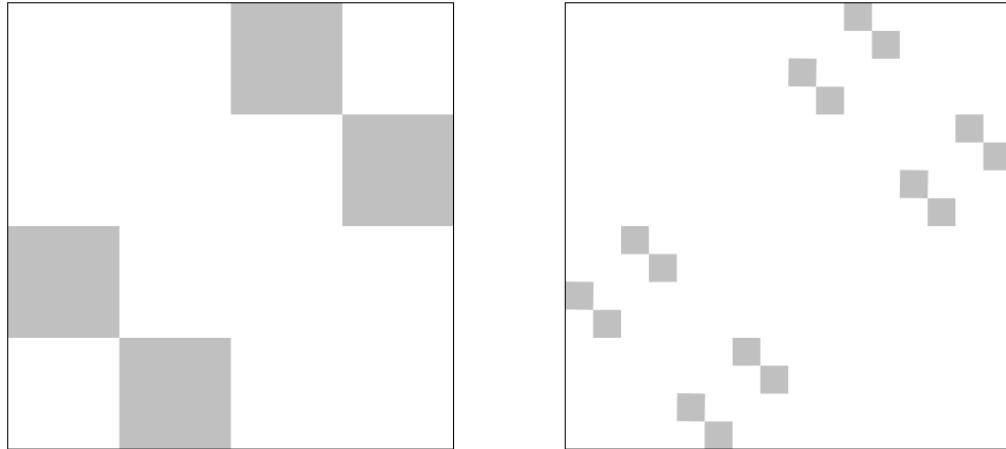
Je-li E irregulární, pak z Věty 1.3. $\mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E)) = 0$ pro skoro všechna θ , tedy z (3.1) $\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0$ pro skoro všechna c . Z Fubiniho věty máme $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$.

Naopak je-li E regulární, z Věty 1.2. dostáváme $\mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E)) > 0$ pro skoro všechna θ , tedy z (3.1) $\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) > 0$ pro skoro všechna c , a tedy z Fubiniho máme $\mathcal{L}^2(L(E)) > 0$. \square

Věta 3.3. *Existuje irregulární 1-množina v \mathbb{R}^2 , jejíž projekce na osu y obsahuje interval $[0, 1]$.*

Důkaz. Rozdělíme si uzavřený čtverec s vrcholy $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ a $(1, 1)$ na 16 stejných uzavřených čtverečků. Jako E_1 si označíme sjednocení třetího, osmého, devátého a čtrnáctého (viz obr. 3.1.). S každým z těchto čtverečků uděláme totéž a dostaneme E_2 . Takto indukcí vytvoříme posloupnost E_n a označíme $E = \bigcap_n E_n$. E je neprázdná, jelikož jde o průnik souboru uzavřených množin s konečnou průnikovou vlastností v kompaktu.

Obrázek 3.1: Postuná konstrukce množiny z Věty 3.3.



Zřejmě projekce E na osu y obsahuje $[0, 1]$, z čehož máme i $\mathcal{H}^1(E) \geq 1$, naopak E můžeme pokrýt 4^k čtverci o straně 4^{-k} pro každé k , tedy $\mathcal{H}^1(E) \leq \sqrt{2}$.

Jelikož E je průnik uzavřených množin, tedy borelovská, máme, že E je 1-množina. Dále vidíme, že $\mathcal{H}^1(\text{proj}_{\pm 45^\circ}(E)) = 0$, tedy z Lemmatu 1.3. máme irregulárnu E . \square

Nyní už máme vše připravené ke konstrukci Besikovičkovy množiny za pomocí duality. Tato konstrukce nám dává ještě silnější výsledek, než geometrická konstrukce výše, jelikož dostáváme množinu nulové míry, která obsahuje dokonce přímku v každém směru.

Věta 3.4. *V rovině existuje množina nulové míry obsahující přímku v každém směru.*

Důkaz. Vezmeme $L(E)$ pro E z Věty 3.3. Z irregulárnosti E a Věty 3.2. máme, že $L(E)$ je nulové míry, dále víme, že projekce E na osu y obsahuje interval $[0, 1]$, tedy z definice L obsahuje $L(E)$ přímky o gradientech v intervalu $[0, 1]$.

Stačí tedy vzít množinu $L(E)$ společně s jejími kopiiemi otočenými o $\pi/2$, π a $3/2\pi$. \square

Analogie Besikovičkovy množiny v \mathbb{R}^3 , tedy množina nulové trojrozměrné míry obsahující rovinu každého směru už ale bohužel neexistuje. Důkaz si můžete dohledat ve Falconerově knize (Falconer, 1985, Theorem 7.12).

3.2 Další nemožné množiny

V této části ukážeme, jakým způsobem můžeme využít duality k vytvoření dalších "nemožných množin", a to konkrétně množiny nulové míry, která obsahuje přímky libovolné vzdálenosti od počátku, a množiny nulové míry obsahující kružnice o libovolném poloměru.

Věta 3.5. *V rovině existuje množina nulové míry, která obsahuje přímky o libovolné vzdálenosti od počátku.*

Důkaz. Nechť E je jako ve Větě 3.2. Vezmeme zobrazení $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem $\phi(x, y) = (x(1+y)^{1/2}, y)$.

Jelikož projekce množiny E na osu x obsahuje interval $[0, 1]$, víme, že pro každé $x \in [0, 1]$ existuje $(x, y) \in E$ a bod $(a, b) \in \phi(E)$ splňující $\phi(x, y) = (x(1+y^2)^{1/2}, y) = (a, b)$. Úpravou dostaneme $x = a(1+b^2)^{-1/2}$, což je vzdálenost přímky $L(a, b)$ od počátku.

Vidíme tedy, že $L(\phi(E))$ obsahuje přímky všech vzdáleností od počátku v intervalu $[0, 1]$.

Ukážeme, že $\phi(E)$ je irregulární. Pro spor uvažujme, že $\phi(E)$ má regulární část nenulové míry. Pak by z Věty 1.7. $\phi(E)$ obsahovalo Y-množinu Y nenulové míry. Ukážeme, že $\phi^{-1}(Y)$ je také Y-množina nenulové míry.

ϕ^{-1} zobrazuje rektifikovatelné křivky na rektifikovatelné křivky: jelikož je ϕ^{-1} prosté spojité zobrazení, zřejmě zobrazuje křivky na křivky. Pro ověření rektifikovatelnosti si stačí uvědomit, že obě složky ϕ^{-1} jsou C^1 , jejich derivace jsou tedy omezené na každém komaktu, tedy i na každé rektifikovatelné křivce. Na kompaktní rektifikovatelné křivce se tedy jedná o lipschitzovská zobrazení. Celé ϕ^{-1} je na ní tedy lipschitzovské - nemůže zobrazovat množiny konečné míry na množiny nekonečné míry. Z Věty 1.6. máme rektifikovatelnost.

Jelikož Y je Y-množina, platí $Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ pro nějaké rektifikovatelné křivky Γ_i . Potom ale $\phi^{-1}(Y) \subset \phi^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \phi^{-1}(\Gamma_i)$, tedy jde o Y-množinu.

$\phi^{-1}(Y)$ je množina nenulové míry: ϕ je lokálně lipschitzovské stejným argumentem jako ϕ^{-1} . $\phi^{-1}(Y)$ je separabilní, tedy Lindolöfův prostor. Existuje tedy pokrytí $\phi^{-1}(Y) = \bigcup U_n$ takové, že ϕ je lipschitzovská na U_n . Kdyby $\phi^{-1}(Y)$ byla nulové míry, byla by i každá U_n nulové míry, tedy z Lemmatu 1.1. by i $\phi(U_n)$ byla nulové míry. Ale $\mathcal{H}^2(Y) \leq \sum_n \mathcal{H}^2(\phi(U_n)) = 0$ - máme spor s tím, že Y je množina nenulové míry.

Tedy E má regulární část nenulové míry - dostáváme spor s irregularitou E .

Z irregularity $\phi(E)$ a Věty 3.2. máme, že $F := L(\phi(E))$ je nulové míry, výše jsem již ukázali, že F obsahuje přímky ve všech vzdálenostech od počátku z intervalu $[0, 1]$.

Nakonec stačí jako naši nemožnou množinu vzít sjednocení $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, kde $F_i = \{ix : x \in F\}$. \square

Věta 3.6. *V rovině existuje množina nulové míry, která obsahuje kružnice o libovolném poloměru.*

Důkaz. Uvažujme $F \setminus \{0\}$ z minulé věty a zobrazení $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované vztahem $\psi(x, y) = \|(x, y)\|^{-2}(x, y)$ (kruhovou inverzi).

Kruhová inverze je C^1 na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, je na něm tedy lokálně lipschitzovská a zobrazuje $F \setminus \{0\}$, množinu nulové míry, na množinu nulové míry. Kruhová inverze má dále tu vlastnost, že zobrazuje přímky o vzdálenosti x od počátku na množiny, které když sjednotíme s bodem 0, dostaneme kružnice o poloměru $1/(2x)$ protínající počátek.

$\psi(F \setminus \{0\}) \cup \{0\}$ je tedy množina nulové míry obsahující kružnice o všech poloměrech větších než $1/2$. Stačí zase vzít spočetné sjednocení jejích násobků a dostaneme množinu požadovaných vlastností. \square

Závěr

V práci jsme definovali pojmy Hausdorffovy míry a dimenze, regulárních a irregulárních množin a Hausdorffovy metriky. Poté jsme se seznámili s geometrickou konstrukcí Besikovičovy množiny a ukázali jsme, jak tento postup použít pro konstrukci Kakeyovy množiny. Ukázali jsme konstrukci Besikovičovy množiny pomocí vlastností projekcí irregulárních množin, čímž jsme dostali ještě silnější výsledek, a to množinu nulové míry obsahující přímky v každém směru. Dále jsme této vlastnosti využili ke konstrukci dalších nemožných množin, jako například množiny nulové míry obsahující kružnice libovolného poloměru.

Literatura

Falconer, K. J. (1985). *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press.
ISBN 0-521-25694-1

Nadler, S. B. Jr. (1992). *Continuum Theory: An Introduction*. Taylor and Francis.
ISBN 0-8247-8659-9