

Oponentský posudek doktorské disertační práce

Autor práce: Mgr. Lenka Slavíková

Název práce: Weighted inequalities and properties of operators
and embeddings on function spaces

Oponent: Prof. RNDr. Jan Matý, DrSc.

Předložená práce je souborem peti článku doplněných průvodním textem. První z těchto článku ([1]) vyšel v časopise Advances in Mathematics, tři jsou zaslány k publikaci ([2], [3], [4]). Článek [5] není určený k publikaci.

Zvolené články tvoří reprezentativní výběr práce Lenky Slavíkové, je nutno však zdůraznit, že jde opravdu o výběr a vědecké dílo Lenky Slavíkové je podstatně rozsáhlější. Lenka Slavíková se začala věnovat významné vědecké práci dříve než do dokončení magisterského studia a své první články [6] a [7] věnovala kompaktním vnořením. Tyto články, z nichž [7] je značně dlouhý a technický, nebyly zahrnuty z důvodu překryvu s diplomovou prací. Článek [8] je přehledový. Zhruba třetina jejich práci je bez spoluautora, jinak je Lenka Slavíková úspěšná zvláště v týmové práci, přičemž se prosívá, že zpravidla je "motorem" týmu. Počet prací Lenky Slavíkové nekontrolované narustá. Dva články o operátoru stop s L. Pickem a A. Cianchi jsou těsně před dokončením. Další téměř hotová práce s L. Pickem a italskými spoluautory se věnuje optimálnímu vnoření prostoru funkcí na celém \mathbb{R}^n , rozpracované projekty zde ani nezmínuji.

Z životopisu Lenky Slavíkové stojí za povídání významné úspěchy v studentských soutěžích, získání grantů GAUK a stipendií, 8 přednášek na konferencích, studijní pobyt v Itálii a pedagogické zkušenosti.

Témata disertace navazují na výsledky školitele Luboše Picka, který se zaměřuje především na studium operátorů mezi prostory funkcí. Ačkoli problematika topologických struktur na nekonečněrozměrných lineárních prostorech je zajímavá sama o sobě, hlavním motivem pro rozvoj funkcionální analýzy jsou aplikace na obyčejné i parcialelní diferenciální rovnice, variační počet a další problémy vycházející hlavně z matematické fyziky. Zatímco abstraktní funkcionální analýza a operátorový počet zkoumají společné postupy do značné míry nezávislé na konkrétních modelech, teorie prostorů funkcí se zabývá specificky právě těmito modely a spoluvytváří předpoklady pro výše zmíněné aplikace.

Úvodní část disertace je dobré čitelný přehled, v němž je etenář uveden do problematiky a seznámen s hlavními výsledky práce.

Jedním z hlavních témat teorie prostorů funkcí je vnoření Sobolevových prostorů a jím podobných. Význačnou třídu prostorů multitého řádu jsou prostory invariantní vůči pířerování. Jakýkoli úspěch v této obecnosti umožňuje zahrnout výsledky týkající se prostorů Lebesgueových, Orliczových, Lorentzových, Lorentz Zygmundových a mnoha dalších. Je-li $X(\Omega)$ prostor funkcí na množině Ω (prostor multitého řádu), pak prostor $W^k X(\Omega)$ je prostor funkcí, jejichž parcialelní derivace až do k -tého řádu náleží do $X(\Omega)$. Toto přírazení zobecňuje postup, jak je z L^p prostoru vyroben Sobolevov prostor $W^{1,p}$. Variantou je prostor $V^k X(\Omega)$, kde normu určují jen derivace nejvyššího řádu. Řada prací se zabývala zobecněními klasické Soboleovy věty o vnoření na takovéto prostory, ale výsledky byly specializované a jejich optimálnost nebyla dořešena. Problém optimálních vnoření prostory $V^k X$ do Y zahrnuje samotné vnoření, optimalitu Y (optimal range) a optimality X (optimal domain). Pro lipschitzovské oblasti byl uspokojivě vyřešen v sérii článku D. Edmundse, R. Kermana a L. Picka. V článku [1], který již je součástí disertace, jsou zkoumány obecné oblasti v závislosti na jejich izometrické funkci. Práce obsahuje řadu překvapujících momentů, např. o izoperimetrické funkci se dosud předpokládalo, že dává

přesné výsledky jen pro prostory prvého řádu. Další novinkou je použití přesné iterační metody na odhady prvého řádu tak, aby nedocházelo ke ztrátám. Významný pokrok v obecnosti je postavení článku na obecné míře namísto obvykle používané Lebesgueovy míry. Tím je speciálně umožněno zahrnutí výsledků týkajících se prostorů invariantních vzhledem ke Gaussově míře. Velmi dlouhý (82 stran) a technický článek je po zásluze publikován v prestižním časopise *Advances in Mathematics*.

Přirozenou otázkou je, které prostory Sobolevova typu tvoří Banachovu algebru. Tato vlastnost je velmi blízká vnoření do L^∞ a experimentování s prostory prvého řádu naznačuje, že by tyto vlastnosti mohly být ekvivalentní. Pro vyšší řády je však záležitost choulostivější. V práci [5] je ukázáno, že existuje oblast a prostor, který je vnořen do L^∞ , ale není to Banachova algebra. Tato práce nebude publikována, protože příklad je příliš blízký příkladu autorů V.G. Maz'ya a Yu.V. Netrusov (který však nemůže být přesně použit k odpovědi na otázku). Příklad z [5] demonstriuje, že otázka "kdy je Sobolevův prostor Banachova algebra" je zajímavá, i když bychom uměli charakterizovat vnořitelnost do L^∞ . Pozitivní výsledky jsou podány v práci [2]. Problém je zkoumán v podobné obecnosti jako je uvažována v [1] a téměř kompletní řešení je podáno na 28 stránkách tvrdých výpočtů.

V článku [3] autoři charakterizují prostory X s vlastností, že každá funkce z X má skoro všude Lebesgueův bod vzhledem k X . Především je překvapením, že vůbec existují prostory, pro které to není pravda; pak je ovšem přirozené se ptát na charakterizaci. Nutná a postačující podmínka nalezená v práci [3] je užitečná (dobře se ověřuje), ale není snadné na ni přijít. Výsledek zajímavě propojuje teorii prostorů funkcí s reálnou analýzou v užším smyslu.

Problém studovaný v [4] úzce souvisí se starým, ale dodnes nevyřešeným problémem, jak charakterizovat váhy, pro které platí analogický odhad k Hardy-Littlewoodově maximální větě. V této práci je dokázáno, že některé z postačujících podmínek, které kandidovaly na řešení problému, nejsou nutnými podmínkami.

Lenka Slavíková patří mezi naše nejperspektivnější studenty a má všechny předpoklady stát se výraznou vědeckou osobností. Předložená práce výrazně překračuje požadavky na disertaci. Doporučuji, aby na jejím základě byl Mgr. Lence Slavíkové udělen titul Ph.D.

V Praze 9. 5. 2016

Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.
Katedra matematické analýzy
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze



- [1] A. Cianchi, L. Pick a L. Slavíková: Higher-order Sobolev embeddings and isoperimetric inequalities. *Adv. Math.* **273** (2015), 568–650.
- [2] A. Cianchi, L. Pick a L. Slavíková: Banach algebras of weakly differentiable functions. Preprint 2015.
- [3] P. Cavaliere, A. Cianchi, L. Pick a L. Slavíková: Norms supporting the Lebesgue differentiation theorem. Preprint 2015.
- [4] L. Slavíková: On the necessity of bump conditions for the two-weighted maximal inequality. Preprint 2015.
- [5] L. Slavíková: A Sobolev space embedded to L^∞ does not need to be a Banach algebra.
- [6] L. Slavíková: Almost-compact embeddings. *Math. Nachr.* **285** (2012), no. 11–12, 1500–1516.
- [7] L. Slavíková: Compactness of higher-order Sobolev embeddings. *Publ. Mat.* **59** (2015), no. 2, 373–448.
- [8] A. Cianchi, L. Pick and L. Slavíková: A sharp iteration principle for higher-order Sobolev embeddings. In: *Calculus of variations and PDEs*, 37–58, Banach Center Publ., 101, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2014