Posudek oponenta disertační práce
Mgr. Tomáš Pazák: Exhaustive structures on Boolean algebras

Předkládaná disertační práce vychází z obtížného a dlouho neřešeného problému, o kterém se chci zmínit dříve, než se budu zabývat jejím obsahem a hodnocením.

V roce 1937 navštívil John von Neumann Lvov a během diskuse s kolegy byl vyzván, aby napsal problém do knihy problémů, která je dnes známá pod názvem "Skotská kniha". Von Neumannův problém zněl: Je dána úplná Booleova algebra, která je současně c.c.c. a slabě distributivní. Existuje na této algebře σ-aditivní míra taková, že všechny nenulové prvky algebry mají nenulovou míru? Dodejme, že jediná "přirozená" algebra v té době známá, která vyhovuje předpokladům otázky, byla faktorová algebra měřitelných množin podle ideálu množin míry nula.

Roku 1947 Dorothy Maharamová dala na von Neumannův problém následující odpověď: Pokud existuje Suslinův strom, pak algebra určená jeho uspořádáním je c.c.c, je slabě distributivní a nenese žádnou striktně positivní míru. Dokonce nenese ani striktně positivní spojitou submíru. To ovšem původní problém proměnilo ve dva nové problémy. Nazvěme Booleovu algebru *algebrou Maharamové*, pokud na této algebře existuje spojitá striktně positivní submíra. První problém pak zní: Je konsistentní, že každá c.c.c. slabě distributivní algebra je algebrou Maharamové? Druhý, podstatně populárnější problém, tzv. Control Measure Problem, zní v jedné z možných formulací takto: Je-li na algebře Maharamové dána striktně positivní spojitá submíra, existuje pak také striktně positivní σ-aditivní míra majorizovaná touto submírou? Ekvivalentně, je každá algebra Maharamové měrovou algebrou?

Mgr. Pazák se oběma problémy začal zabývat v době, kdy ještě nebylo známo, že druhou otázku zodpoví negativně Michel Talagrand v lednu 2006.

S ohledem na to, že oba problémy už měly bohatou historii, musel mgr. Pazák přistoupit k hluboké analýze všech pojmů a vazeb, souvisejících s otázkami. Předkládaná disertační práce proto obsahuje jak detailní studium slabě distributivních c.c.c. algeber, tak funkcionálů na nich, uvádí souvislosti s metodou forsingu, s teorií částečných uspořádání a dosahuje nových a zajímavých výsledků, které jsou plodem této analýzy, aniž by vždy byla zřejmá návaznost na původní problémy. Uvedu jen některé z nich:

1) Dichotomie P-ideálů (princip zformulovaný S. Todorcevicem, který také prokázal za předpokladu existence velkého kardinálu jeho nezávislost na ZFC) implikuje, že každá c.c.c. slabě distributivní algebra je algebrou Maharamové. Tedy úplná odpověď na první otázku.

2) Jsou-li $V \subseteq M$ dva modely ZFC a v modelu M existuje nové reálné číslo, pak množina $([\omega]^\omega)^V$ má skoro disjunktní zjemnění v M. Dosud bylo známo, že toto tvrzení platí v několika speciálních případech, např. když model M je generickým rozšířením za pomoci přidání Cohenovských čísel (S.H. Hechler 1978), a citovaný výsledek v plné obecnosti odpovídá na problém L. Soukupa, který svou otázku formuloval pouze pro generická rozšíření.

3) Libovolný direktní součin σ-konečně c.c. (σ-omezeně c.c.) Booleových algeber je opět σ-konečně c.c. (σ-omezeně c.c.). Tento nový výsledek je překvapující s ohledem na známé výsledky pro c.c.c. a σ-centrované Booleovy algebry, kdy počet faktorů je shora omezen.

4) Uvažujme libovolnou úplnou c.c.c. Booleovu algebru se sekvenciální topologií. Pak existuje jednoznačně určený rozklad jednotky na dva prvky, že relativizace algebry na první z nich je algebra Maharamové a relativizace na druhý z nich je topologický T_1-prostor, kde každá neprázdná otevřená podmnožina je hustá.

5) Mnohé topologické vlastnosti Booleovy algebry uvažované jako topologický prostor se sekvenciální topologií mají ekvivalentní protějšek ve vlastnostech generického rozšíření forcingem přes danou algebru. Například, nezávislé reálné číslo v rozšíření existuje tehdy a jen tehdy, není-li algebra spočetně kompaktní.

Uvedené výsledky samy o sobě hovoří, že práce je velice kvalitní. Rád navíc uvádím, že práce je zpracována způsobem, který umožňuje používat ji jako učebnici. Celý text obsahuje řadu výsledků přejatých z literatury, což dovoluje plynulé čtení bez návštěv knihovny. Dále, problematika v práci vyšetřovaná je v současné době velice aktuální — zabývají se jí např. I. Farah, D. Fremlin, S. Solecki, M. Talagrand, S. Todorcevic, B. Velickovic, J. Zapletal. Navíc, většina nových výsledků byla již publikována v práci se spoluautory B. Balcarem a T. Jechem [BJP05]. Doufám, že zbylé budou publikovány také.

Nerad uvádím, že čtení práce značně znesnadňuje moderní technologie sazby matematických textů. Stačilo, aby použitá tiskárna neměla některé fonty a hned ve všech kurzivou psaných slovech zmizí ligatura "fi" a ve formulích znaménko násobení "$\times$". Domnívám se, že finální podoba práce měla být těchto defektů prosta. Další drobné chyby, převážně přepisy, si čtenář snadno opraví sám.

Závěr: Předložená disertační práce mgr. Tomáše Pazáka "Exhaustivní struktury na Booleových algebrách" prokazuje předpoklady autora k tvořivé samostatné vědecké práci.

Doporučuji, aby práce byla uznána za práci disertační a aby na jejím základě byl jejímu autorovi udělen vědecký titul PhD.

V Praze, 17. 1. 2007