Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kateřina Jarkovská

Anihilační a kreační operátory v teorii Lieových algeber a ve fyzice

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Dalibor Šmíd, Ph.D.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Obecná fyzika

Praha 2016

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu Mgr. Daliborovi Šmídovi, Ph.D. za odborné vedení, vstřícnost při konzultacích a za cenné rady při zpracovávání této bakalářské práce. Zároveň děkuji rodičům za neocenitelnou podporu během celého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Kateřina Jarkovská

Název práce: Anihilační a kreační operátory v teorii Lieových algeber a ve fyzice

Autor: Kateřina Jarkovská

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Dalibor Šmíd, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: V této práci je ukázáno, jakým způsobem lze v kontextu kvantové mechaniky využít teorie Lieových algeber, konkrétně jejich oscilátorových realizací. Ty je možné sestrojit z maticových realizací. V případě symplektické a speciální ortogonální algebry je předvedena alternativní metoda získání oscilátorových realizací ze symetrické mocniny nebo vnější mocniny vektorového prostoru anihilačních a kreačních bosonových, resp. fermionových operátorů. Mezi funkcemi na fázovém prostoru mechanického systému existuje Lieova algebra polynomů nejvýše druhého stupně, která tvoří polopřímý součin Heisenbergovy algebry a symplektické algebry. Klasický systém, jehož Hamiltonova funkce leží v této algebře, lze kvantovat dvěma ekvivalentními způsoby - pomocí Schrödingerovy nebo Bargmann-Fockovy reprezentace. Druhá zmíněná generuje stejné operátory symplektické algebry jako při jejich předchozí formální konstrukci ze symetrické mocniny prostoru bosonových operátorů. Proces kvantování je demonstrován na příkladě bosonového harmonického oscilátoru. Je využito podobností bosonových a fermionových oscilátorových realizací k zavedení fermionového harmonického oscilátoru, na jehož stavovém prostoru jsou demonstrovány vlastnosti spinorové reprezentace speciální ortogonální algebry.

Klíčová slova: Lieovy algebry, harmonický oscilátor, kreační a anihilační operátory, oscilátorové realizace

Title: Annihilation and creation operators in Lie algebra theory and physics

Author: Kateřina Jarkovská

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: Mgr. Dalibor Šmíd, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: We show the use of the theory of Lie algebras, especially their oscillator realizations, in the context of quantum mechanics. One can construct oscillator realizations from matrix realizations. In the case of symplectic and special orthogonal algebra, we demonstrate an alternative method of obtaining oscillator realizations from symmetric or exterior power of a vector space of annihilation and creation bosonic or fermionic operators. We find Lie algebra of polynomials of degree at most two in phase space of a mechanical system, which form the semidirect product of the Heisenberg algebra and symplectic algebra. It is shown that a classical system with Hamiltonian function in this algebra can be quantized by two equivalent representations - Schrödinger or Bargmann-Fock representation. The second mentioned representation generates the same operators of symplectic algebra as we got from their previous formal construction from symmetric power of a vector space of bosonic operators. Quantization is demonstrated on the bosonic harmonic oscillator. We use the similarities between bosonic and fermionic oscillator realizations to define the fermionic harmonic oscillator. Some properties of spinor representations of special orthogonal algebra are illustrated on its state space.

Keywords: Lie algebras, harmonic oscillator, creation and annihilation operators, oscillator realizations

Obsah

Úvod

Teorie Lieových grup a algeber stejně jako mnohé další oblasti matematiky nalezla své uplatnění ve fyzice. V konkrétních příkladech se nejčastěji setkáváme s klasickými jednoduchými Lieovými algeberami A_n, B_n, C_n, D_n. Jedním z jejich možných vyjádření je takzvaná oscilátorová realizace konstruovaná pomocí anihilačních a kreačních bosonových operátorů $b_j, b_k^\dagger$ splňujících kanonické komutační relace

$$\left[b_j, b_k^\dagger\right] = \delta_{jk}\mathbf{1}, \qquad [b_j, b_k] = 0 = \left[b_j^\dagger, b_k^\dagger\right]$$

dané komutátorem($[x, y] := xy - yx$) nebo anihilačních a kreačních fermionových operátorů $f_j, f_k^\dagger$ splňujících kanonické antikomutační relace

$$\left[f_j, f_k^\dagger\right]_+ = \delta_{jk}\mathbf{1}, \qquad [f_j, f_k]_+ = 0 = \left[f_j^\dagger, f_k^\dagger\right]_+$$

určené antikomutátorem ($[x, y]_+ := xy + yx$), kde $\mathbf{1}$ značí jednotkový operátor. Oscilátorové realizace klasických Lieových algeber se využívají při řešení kvantově mechanických systémů s Hamiltonovým operátorem nejvýše kvadratickým v souřadnicových a hybnostních operátorech. Nejznámějším takovým systémem je harmonický oscilátor. Velkou výhodou oscilátorové realizace je fakt, že energetické spektrum uvažovaného problému lze najít jen pomocí kanonických komutačních resp. antikomutačních relací mezi anihilačními a kreačními operátory.

V kapitole 1 této práce nejprve zavedeme základní pojmy z teorie Lieových algeber. Ukážeme, jak zkonstruovat Lieovu algebru příslušnou Lieově grupě a nejdůležitější pojmy demonstrujeme na příkladech. Důkazy používaných vět nebudeme uvádět, vždy se odkážeme na příslušnou literaturu. Nejvíce budeme čerpat z matematických textů [2],[4],[5],[7],[11],[12],[13] a poznámek z lekcí [14].

Pro studium kvantového systému budou významné především jednoduché algebry, konkrétně jejich oscilátorové realizace, kterými se budeme zabývat v podkapitole 1.5. Nejjednodušší konstrukce oscilátorové realizace uvedená v [3] využívá maticové realizace dané jednoduché Lieovy algebry. V případě speciální ortogonální a symplektické algebry alternativně využijeme jejich izomorfismu s jistým podprostorem $V \otimes V$. Analogicky s výpočtem z [2] v sekci 1.5.3 ukážeme, že speciální ortogonální algebra je izomorfní vnější mocnině $\Lambda^2 V \subset V \otimes V$ a symplektická algebra je izomorfní symetrické mocnině $S^2 V \subset V \otimes V$. Předmětem našeho zájmu bude vektorový prostor V bosonových operátorů splňujících kanonické komutační relace, resp. fermionových operátorů splňujících kanonické antikomutační relace. Získáme tak stejný tvar oscilátorové realizace jako v [1].

Takto zavedenou matematickou teorii aplikujeme v kapitolách 2, 3 a 4 na fyzikální problémy. V kapitole 2 zjistíme, že všechny funkce na fázovém prostoru spolu s Poissonovou závorkou tvoří nekonečně dimenzionální Lieovu algebru. V ní identifikujeme Heisenbergovu algebru lineárních funkcí. Explicitním rozepsáním výpočtů z [14] ukážeme, že polynomy druhého stupně na fázovém prostoru tvoří symplektickou algebru.

V následující kapitole 3 se přesuneme ke kvantovému systému se stavy v Hilbertově prostoru. Protože pozorovatelným veličinám odpovídají hermitovské operátory, budeme při kvantování hledat reprezentaci Lieovy algebry funkcí na fázovém prostoru, která je unitární. Abychom takovou reprezentaci nalezli, musíme se omezit na polynomy nejvýše druhého stupně. S tímto omezením lze kvantovat klasický mechanický systém dvěma ekvivalentními způsoby - pomocí Schrödingerovy reprezentace zobecněných souřadnic q_j a zobecněných hybností p_j nebo využitím Bargmann-Fockovy reprezentace komplexních souřadnic $\bar{z}_j, z_j$ parametrizujících fázový prostor. V podkapitole 3.3 uvedeme explicitní výrazy pro izomorfismus mezi těmito reprezentacemi. Nakonec v jednodimenzionálním případě ilustrujeme, jak změna báze na fázovém prostoru konkrétně určuje změnu báze v symplektické algebře a jakým způsobem její adjungovaná akce na lineárních funkcích předepisuje tvar izomorfismu oscilátorové realizace s maticovou realizací.

Předešlé úvahy o obecném kvantovém systému uplatníme v kapitole 4 na příkladě bosonového harmonického oscilátoru. Nejdříve jej vyřešíme klasicky a poté provedeme jeho kvantování pomocí Schrödingerovy a Bargmann-Fockovy reprezentace. V podkapitole 4.3 nalezneme Lieovu algebru generující grupu symetrií studovaného systému. U ní využijeme podobnost mezi konstrukcí bosonové a fermionové oscilátorové realizace k formálnímu definování fermionového harmonického oscilátoru, na jehož stavovém prostoru si ukážeme některé vlastnosti spinorové reprezentace speciální ortogonální algebry.

1. Matematický úvod

V této úvodní části nejprve definujeme základní pojmy z teorie Lieových grup, Lieových algeber a jejich reprezentací. Řekneme, jak spolu tyto dvě struktury souvisí. Zároveň uvedeme některé jejich vlastnosti, které budeme dále využívat. Nakonec se budeme podrobněji zabývat polojednoduchými Lieovými algebrami.

Poznámka: V následujícím textu bude vždy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Pokud není řečeno jinak, V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$.

1.1 Lieova grupa

Definice 1 (Grupa)**.** *Grupu G definujeme jako množinu spolu s binární operací $\centerdot : G \times G \to G$ zvanou grupové násobení, která splňuje*

- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 \centerdot g_2) \centerdot g_3 = g_1 \centerdot (g_2 \centerdot g_3)$,
- $\exists e \in G, \forall g \in G : g \centerdot e = e \centerdot g = g$,
- $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G : g \centerdot g^{-1} = g^{-1} \centerdot g = e$.

Pro nás nejdůležitějším příkladem grupy bude obecná lineární grupa $\mathrm{GL}(V)$ všech invertibilních lineárních zobrazení $V \to V$ spolu s operací skládání zobrazení. Pokud $V = \mathbb{F}^n$, pak

$$\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) := \{M \in \mathrm{M}(n, \mathbb{F}) : \det M \neq 0\}.$$

Definice 2 (Homomorfismus grup)**.** *Nechť G a H jsou grupy s grupovým násobením $\centerdot$ a $\star$. Homomorfismus grup G a H nazveme zobrazení*

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to H \\ g &\mapsto \varphi(g), \end{aligned}$$

splňující $\varphi(g_1 \centerdot g_2) = \varphi(g_1) \star \varphi(g_2)$ pro libovolné $g_1, g_2 \in G$.

Definice 3 (Reprezentace grupy)**.** *Reprezentace (π, V) grupy G na vektorovém prostoru V je homomorfismus grup*

$$\begin{aligned} \pi : G &\to \mathrm{GL}(V) \\ g &\mapsto \pi(g). \end{aligned}$$

Pokud máme na tomto vektorovém prostoru definovaný hermitovský skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pak (π, V) nazveme unitární reprezentace grupy G, jestliže

$$\forall g \in G, v_1, v_2 \in V : \langle \pi(g)v_1, \pi(g)v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle .$$

Definice 4 (Hladká varieta)**.** *Buď M libovolná množina, pak n-**dimenzionální mapa** na M je dvojice (U, φ), kde $U \subset M$ a $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ je prosté zobrazení* *na otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že dvě mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) jsou kompatibilní, pokud přechodová funkce*

$$\varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

je difeomorfismus.
***Hladký atlas** na M je množina map $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ takových, že každé dvě mapy atlasu jsou kompatibilní a $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Řekneme, že $N \subset M$ je otevřená množina, pokud $\forall \alpha \in A : \varphi_\alpha(N \cap U_\alpha)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Tímto způsobem na M definujeme indukovanou topologii.*
***Hladká varieta dimenze** n je množina, na které je dán atlas n-dimenzionálních map $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ takový, že:*

1. *M je Hausdorffův topologický prostor,*

2. *M má spočetnou bázi otevřených množin.*

Pro podrobnější informace o hladkých varietách viz [7, str. 39]. Dále se budeme zabývat jen podvarietami $\mathrm{GL}(V)$. Vlastnosti grupy a hladké variety v sobě spojuje Lieova grupa.

Definice 5 (Lieova grupa)**.** *Řekneme, že množina G je Lieova grupa, pokud je současně grupa a hladká varieta splňující podmínku kompatibility obou struktur, která říká, že zobrazení*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto g \,.\, h^{-1} \end{aligned}$$

je hladké. Tedy grupové násobení a inverze v grupě jsou hladká zobrazení.

Poznámka: Pro $M \in \mathrm{M}(n, \mathbb{F})$ definujeme $M^\dagger := \left(\overline{M}\right)^T$.

Příklady:

1. Speciální lineární grupa $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) : \det M = +1\}$.

2. Nechť $B : V \times V \to \mathbb{F}$ je symetrická bilineární forma. Ortogonální grupu formy B definujeme jako

   $\mathrm{O}(V, B) := \{M \in \mathrm{GL}(V) : B(Mv, Mw) = B(v, w)$ pro libovolné $v, w \in V\}$.

   Pokud $V = \mathbb{F}^n$ a forma B má signaturu $(p, q, 0)$, pak

   - $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: $\mathrm{O}(V, B) \cong O(n, \mathbb{C}) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : M^T M = I_n\}$,
   - $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: $\mathrm{O}(V, B) \cong O(p, q) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : M^T I_{p,q} M = I_{p,q}\}$.[1]

   Pro úplný důkaz těchto tvrzení viz [13, str.4].
   Speciální ortogonální grupou nazveme $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C}) := \mathrm{O}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, popř. $\mathrm{SO}(p, q) := \mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

[1] Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q = n$, pak $I_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$.

3. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a $B : V \times V \to \mathbb{C}$ je hermitovská seskvilineární forma. Unitární grupu formy B definujeme jako

   $$\mathrm{U}(V, B) := \{M \in \mathrm{GL}(V) : B(Mv, Mw) = B(v, w) \text{ pro libovolné } v, w \in V\}.$$

   Pokud $V = \mathbb{C}^n$ a B má signaturu $(p, q, 0)$, pak

   $$U(V, B) \cong U(p, q) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : M^\dagger I_{p,q} M = I_{p,q}\}.$$

   Odvození lze najít v [13, str. 4,8].
   Speciální unitární grupou nazveme $\mathrm{SU}(p, q) := \mathrm{U}(p, q) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

   Poznámka: Je-li (π, V) unitární reprezentace Lieovy grupy G na V, potom

   $$\forall g \in G : \pi(g) \in U(V, B).$$

4. Nechť $B : V \times V \to \mathbb{F}$ je antisymetrická bilineární forma. Symplektickou grupu formy B definujeme jako

   $$\mathrm{Sp}(V, B) := \{M \in \mathrm{GL}(V) : B(Mv, Mw) = B(v, w) \text{ pro libovolné } v, w \in V\}.$$

   Pokud $V = \mathbb{F}^{2n}$, pak

   $$\mathrm{Sp}(V, B) \cong \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F}) := \{M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{F}) : M^T J M = J\},$$

   kde

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

   Kompletní důkaz odůvodňující tuto konkrétní volbu matice J je možné nalézt v [13, str. 7].

1.2 Lieova algebra

Při studiu reprezentací Lieových grup je výhodné věnovat pozornost reprezentacím Lieových algeber. Tato nová struktura je určena vlastnostmi Lieovy grupy G. Na okolí identity v G sestrojíme tečný vektorový prostor, na němž definujeme Lieovu algebru. Zobrazení dvou Lieových grup pak infinitesimálně aproximujeme lineárním zobrazením mezi dvěma vektorovými prostory. Nyní uvedeme náznak toho, jak z dané Lieovy grupy zkonstruovat příslušnou Lieovu algebru. K tomu budeme potřebovat následující pojmy.

Označení:

- Parametrická křivka na Lieově grupě G je hladké zobrazení $\gamma(t) : \mathbb{R} \to G$. Je-li toto zobrazení homomorfismus grup G a $\mathbb{R}$ s operací sčítání, nazýváme jej jednoparametrická podgrupa Lieovy grupy G.

- Tečný vektor k parametrické křivce $\gamma(t)$ v bodě $g := \gamma(t_0) \in G$ definujeme jako lineární zobrazení

  $$\begin{aligned} \mathbf{v} : C^\infty(G) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \mathbf{v}(f) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=t_0}. \end{aligned}$$

  Tečný vektorový prostor $T_g G$ v bodě $g \in G$ je vektorový prostor tečných vektorů ke všem parametrickým křivkám procházejícím bodem g. Tečný bundle je sjednocení $TG := \cup_{g \in G} T_g G$.

- Projekce $\pi : TG \to G$ je zobrazení přiřazující vektoru $\mathbf{v} \in T_gG$ bod $g \in G$. Vektorové pole na G je zobrazení

$$\mathbf{X} : G \to TG$$

splňující $\pi \circ \mathbf{X} = \mathrm{Id}$. Řekneme, že vektorové pole je hladké, pokud

$$\mathbf{X}(g) = \sum_{j=1}^{n} X^j(g) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_g ,$$

kde $X^j(g)$ jsou hladké funkce a $\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_g$ je tečný vektor k lokální j-té souřadnicové křivce. Pro přesnější definici viz [7, str. 48].

- Integrální křivky vektorového pole $\mathbf{X}$ jsou parametrické křivky, jejichž tečné vektory v každém bodě g variety jsou rovny $\mathbf{X}(g)$.

- Mějme hladké zobrazení $f : G \to G$. Pak tečné zobrazení $f_* : T_gG \to T_{f(g)}G$ v bodě $\gamma(t_0) = g \in G$ k zobrazení f definujeme předpisem pro libovolné $h \in C^\infty(G)$ jako

$$\mathbf{v}(h) = \frac{d}{dt}(h \circ \gamma)|_{t=t_0} \mapsto \mathbf{w}(h) = \frac{d}{dt}(h \circ f \circ \gamma)|_{t=t_0}.$$

Definice 6 (Levé násobení)**.** *Pro libovolný prvek Lieovy grupy $g \in G$ definujeme levé násobení*

$$\begin{aligned} L_g : G &\to G \\ h &\mapsto g \,.\, h. \end{aligned}$$

Vektorové pole $\boldsymbol{X}$ na G se nazývá levoinvariantní, pokud

$$\forall h \in G : [(L_g)_*]\boldsymbol{X}(h) = \boldsymbol{X}(g \,.\, h).$$

Vektorový prostor všech levoinvariantních vektorových polí na G označíme $\mathcal{X}_{inv}(G)$.

Věta 1. *Nechť G je Lieova grupa. Pro libovolný tečný vektor $\boldsymbol{v} \in T_eG$ definujeme levoinvariantní vektorové pole $\boldsymbol{X}_v \in \mathcal{X}_{inv}(G)$ předpisem*

$$\boldsymbol{X}_v(g) := [(L_g)_*]\boldsymbol{v} \in T_gG.$$

Přiřazení $v \mapsto \boldsymbol{X}_v$ je izomorfismus vektorových prostorů T_eG a $\mathcal{X}_{inv}(G)$.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [12, str.3]. □

1.2.1 Abstraktní Lieova algebra

Definice 7 (Lieova algebra)**.** *Řekneme, že vektorový prostor L je Lieova algebra, pokud je na něm dána bilineární operace*

$$[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$$

zvaná Lieova závorka. Ta splňuje:

- $\forall X, Y \in L : [X, Y] = -[Y, X]$,
- $\forall X, Y, Z \in L : [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(Jacobiho identita).*

Příklady:

- Obecná lineární algebra $\mathfrak{gl}(V)$ všech endomorfismů $V \to V$ spolu s Lieovou závorkou definovanou jako komutátor endomorfismů

  $$f, g \in \mathfrak{gl}(V): \ [f, g] := f \circ g - g \circ f$$

  tvoří Lieovu algebru. Většina pro nás zajímavých Lieových algeber budou podalgebry obecné lineární algebry. Pokud $V = \mathbb{F}^n$, pak

  $$\mathfrak{gl}(V) \cong \mathrm{M}(n, \mathbb{F}).$$

- Hladká vektorová pole na Lieově grupě G tvoří vektorový prostor $\mathcal{X}(G)$ s operací sčítání a násobení:

  $$\begin{aligned} [\mathbf{X} + \mathbf{Y}](g) &:= \mathbf{X}(g) + \mathbf{Y}(g), \\ [c\mathbf{X}](g) &:= c\mathbf{X}(g), \end{aligned}$$

  kde $c \in \mathbb{C}$, $g \in G$ a $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(G)$. Lieovu závorku na tomto vektorovém prostoru definujeme jako komutátor vektorových polí $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] := \mathbf{XY} - \mathbf{YX}$. Prostor $\mathcal{X}(G)$ tak tvoří Lieovu algebru. Vektorový podprostor levoinvariantních vektorových polí $\mathcal{X}_{inv}(G)$ je uzavřený na operaci komutátoru. Ten na něm i na T_eG definuje strukturu Lieovy algebry.

Definice 8 (Lieova algebra Lieovy grupy)**.** *Lieova algebra příslušná Lieově grupě G je $T_eG \equiv \mathcal{X}_{inv}(G)$, označíme ji $\mathfrak{g}$.*

Každému vektoru $X \in \mathfrak{g}$ lze jednoznačně přiřadit jednoparametrickou podgrupu $\theta_X : \mathbb{R} \to G$, která je integrální křivkou vektorového pole $\mathbf{X}_X$ z Věty 1. To nám umožňuje definovat exponenciální zobrazení.

Definice 9 (Exponenciální zobrazení)**.** *Nechť G je Lieova grupa. Exponenciální zobrazení* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *definujeme následovně:*

$$\forall X \in \mathfrak{g} : \exp(X) := \theta_X(1).$$

Věta 2. *Je-li G Lieova grupa a $X \in \mathfrak{g}$, pak zobrazení $\theta : \mathbb{R} \to G$ definované předpisem*

$$\theta(t) := \exp(tX)$$

je jednoparametrická podgrupa $\theta_X(t)$ odpovídající tečnému vektoru

$$X = \frac{d}{dt} \exp(tX)|_{t=0} = {\theta_X}'(0).$$

Důkaz. Podrobný důkaz lze nalézt v [12, str.6]. □

1.2.2 Reprezentace Lieovy algebry

Definice 10 (Reprezentace Lieovy algebry)**.** *Reprezentace (ϕ, V) Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je lineární zobrazení*

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V),$$

které splňuje podmínku homomorfismu Lieových algeber $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y])$ pro libovolné $X, Y \in \mathfrak{g}$. Pokud $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je hermitovský skalární součin na V a platí

$$\forall X \in \mathfrak{g}, v_1, v_2 \in V : \langle v_1, \phi(X)v_2\rangle = -\langle \phi(X)v_1, v_2\rangle,$$

pak (ϕ, V) je unitární reprezentace.

Příklad: Adjungovaná reprezentace $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je zobrazení

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X & \mapsto & \mathrm{ad}(X) : \begin{array}[t]{rcl} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ Y & \mapsto & [X, Y]. \end{array} \end{array}$$

Podmínka homomorfismu Lieových algeber je Jacobiho identita

$$[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z) = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [[X, Y], Z] = \mathrm{ad}([X, Y])(Z).$$

Ke každé reprezentaci Lieovy grupy přísluší reprezentace odpovídající Lieovy algebry. Nyní bychom chtěli zjistit konkrétní vztah mezi nimi.

Věta 3. *Nechť $\pi : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ je reprezentace Lieovy grupy G. Pak zobrazení*

$$\begin{array}{rcl} \pi' : \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(V) \\ X & \mapsto & \pi'(X) := \dfrac{d}{dt}\pi(\exp(tX))|_{t=0}, \end{array}$$

splňuje:

- $\pi\left(\exp\left(tX\right)\right) = \exp\left(t\pi'(X)\right)$,
- $\pi'\left([X, Y]\right) = [\pi'(X), \pi'(Y)]$, *jedná se tedy o homomorfismus Lieových algeber.*

Důkaz. Důkaz explicitním výpočtem je uveden v [14, str. 52]. □

Zobrazení π' je reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Věta 3 nám říká, že následující diagram komutuje.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\pi'} & \mathfrak{gl}(V) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \exp|_{\mathfrak{g}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp|_{\mathfrak{gl}}} \\ G & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{GL}(V) \end{array}$$

Zobrazení exp je navíc lokální difeomorfismus na jistém okolí jednotky v Lieově algebře. Existuje tedy okolí prvku $e \in G$, na kterém je reprezentace π Lieovy grupy G jednoznačně určena reprezentací π' Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Většinou je potom jednodušší studovat zobrazení π pomocí lineárního zobrazení π'.

Definice 11 (Ireducibilní reprezentace)**.** *Nechť (π, V) je reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ (případně Lieovy grupy G). Podprostor W nazveme invariantní podprostor V, pokud*

$$\forall X \in \mathfrak{g} : \pi(X)(W) \subset W.$$

Invariantní podprostor W je triviální, jestliže $W = \{0\}$ nebo $W = V$. Řekneme, že reprezentace (π, V) je ireducibilní, pokud všechny její invariantní podprostory jsou triviální.

1.3 Maticové Lieovy algebry

Nejdůležitějším příkladem Lieových algeber jsou maticové algebry. Jedná se o podprostory $\mathrm{M}(n, \mathbb{F})$, na nichž je Lieova závorka definována jako komutátor matic. V tomto případě je zobrazení exp shodné s exponenciálou matice:

$$\begin{aligned} \exp : \mathrm{M}(n, \mathbb{F}) &\to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) \\ X &\mapsto \exp(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \end{aligned}$$

Řada $\exp(X)$ je absolutně konvergentní pro libovolné $X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{F})$.

Nyní si uvedeme příklady Lieových podalgeber $\mathfrak{gl}(V)$. U některých maticových algeber předložíme ilustrativní ukázku jejich konstrukce pomocí exponenciály matice. Využijeme při tom Věty 2, z níž plyne, že matice X je prvkem Lieovy algebry grupy G právě tehdy, když $\exp(tX) \in G$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Podobná odvození lze nalézt v [4, str. 40].

Příklady:

1. Speciální lineární algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) := \{X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{F}) : \mathrm{Tr}(X) = 0\}$.

   Odvození: Vztah $\det(\exp(tX)) = \exp(t\,\mathrm{Tr}(X))$ platí pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ a $X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{F})$. Matice $\exp(tX) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$ právě tehdy, když

   $$\exp(t\,\mathrm{Tr}(X)) = 1 \iff t\,\mathrm{Tr}(X) = 2\pi i n, n \in \mathbb{Z}.$$

   Poslední rovnost má být splněna pro všechna reálná t, proto musí $n = 0$ a $\mathrm{Tr}(X) = 0$. Lieovu algebru $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ tvoří matice s nulovou stopou.

2. Nechť $B : V \times V \to \mathbb{F}$ je symetrická bilineární forma. Ortogonální algebrou formy B nazveme

   $$\mathfrak{o}(V, B) := \{X \in \mathfrak{gl}(V) : B(Xu, v) + B(u, Xv) = 0 \text{ pro libovolné } u, v \in V\}.$$

   Pokud $V = \mathbb{F}^n$ a B má signaturu $(p, q, 0)$, pak

   - $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: $\mathfrak{o}(V, B) \cong \mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) := \{X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) : X^T + X = 0\}$,
   - $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: $\mathfrak{o}(V, B) \cong \mathfrak{o}(p, q) := \{X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) : X^T I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\}$.

Odvození: Konstrukci provedeme v případě $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pro $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ by výpočet probíhal analogicky. Ať $X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ a $t \in \mathbb{R}$ jsou libovolné. Potom $\exp(tX) \in \mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ právě tehdy, když splňuje

$$I_n = \exp(tX^T) \exp(tX).$$

Tuto rovnost zderivujeme podle parametru t v bodě $t = 0$ a získané výrazy upravíme:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left[\exp(tX^T)\exp(tX)\right]|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}\left[\exp(tX^T)\right]|_{t=0} \exp(tX)|_{t=0} + \exp(tX^T)|_{t=0}\frac{d}{dt}\left[\exp(tX)\right]|_{t=0} = \\ &= X^T + X. \end{aligned}$$

Ortogonální algebra $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ je podprostor všech antisymetrických matic v $\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$.

3. Speciální ortogonální algebra $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) := \mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, v reálném případě $\mathfrak{so}(p, q) := \mathfrak{o}(p, q) \cap \mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$.

4. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a $B : V \times V \to \mathbb{C}$ je hermitovská seskvilineární forma. Unitární algebrou formy B nazveme

   $$\mathfrak{u}(V, B) := \{X \in \mathfrak{gl}(V) : B(Xu, v) + B(u, Xv) = 0 \text{ pro libovolné } u, v \in V\}.$$

   Pokud $V = \mathbb{C}^n$ a B má signaturu $(p, q, 0)$, potom

   $$\mathfrak{u}(V, B) \cong \mathfrak{u}(p, q) := \{X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) : X^\dagger I_{p,q} + I_{p,q}X = 0\}.$$

   Poznámka: Je-li (π', V) unitární reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, pak

   $$\forall X \in \mathfrak{g} : \pi'(X) \in \mathfrak{u}(V, B).$$

5. Speciální unitární algebra $\mathfrak{su}(p, q) := \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{C})$.

6. Nechť $B : V \times V \to \mathbb{F}$ je antisymetrická bilineární forma. Symplektickou algebrou formy B nazveme

   $$\mathfrak{sp}(V, B) := \{X \in \mathfrak{gl}(V) : B(Xu, v)+B(u, Xv) = 0 \text{ pro libovolné } u, v \in V\}.$$

   Pokud $V = \mathbb{F}^{2n}$, potom

   $$\mathfrak{sp}(V, B) \cong \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{F}) := \{X \in \mathrm{M}(2n, \mathbb{F}) : X^T J + JX = 0\},$$

   kde matice J je definována v podkapitole 1.1 v příkladě 4 symplektické Lieovy grupy.

V každé komplexní Lieově algebře existují dvě podalgebry se specifickými vlastnostmi. Díky tomu se stačí věnovat reprezentacím jen jisté třídy Lieových algeber.

Definice 12. *Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra. Její podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ je ideálem právě tehdy, když $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ pro libovolné $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$. Za triviální ideál považujeme $\{0\}$ a $\mathfrak{g}$.*
Řekneme, že komplexní Lieova algebra je

1. *řešitelná, pokud je izomorfní s jistou podalgebrou horních trojúhelníkových matic,*

2. *jednoduchá, pokud* $\dim \mathfrak{g} > 1$ *a neobsahuje žádné netriviální ideály,*

3. *polojednoduchá, pokud ji lze zapsat jako konečný direktní součet jednoduchých Lieových algeber.*

Označení: matice $E_{k,l} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{F})$ má na k-tém řádku v l-tém sloupci jedničku a všude jinde nuly.

Jak uvidíme v podkapitole 2.1, pro nás nejdůležitější řešitelná Lieova algebra je Heisenbergova algebra.

Definice 13 (Heisenbergova algebra)**.** *Heisenbergova algebra $\mathfrak{h}_{2d+1}$, $d \in \mathbb{N}$ je vektorový prostor $\mathbb{R}^{2d} \oplus \mathbb{R}$ spolu s komutačními relacemi definovanými na bázi $\{X_j, Y_j, Z : j = 1, \ldots, d\}$:*

$$[X_j, Y_k] = \delta_{jk} Z, \ [X_j, Z] = 0 = [Y_j, Z].$$

Izomorfismus Heisenbergovy algebry a podalgebry matic $\mathrm{M}(d+2, \mathbb{R})$ je dán předpisem na bázových elementech $\mathfrak{h}_{2d+1}$:

$$\begin{aligned} X_j &\mapsto E_{1,j+1}, \\ Y_j &\mapsto E_{j+1,d+2}, \\ Z &\mapsto E_{1,d+2}. \end{aligned}$$

Věta 4 (Leviho)**.** *Nechť $\mathfrak{g}$ je libovolná komplexní Lieova algebra, $\mathfrak{r}$ je její maximální řešitelný ideál. Pak existuje polojednoduchá Lieova algebra $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ taková, že $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$ (jako vektorový prostor) a*

$$[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}, \ [\mathfrak{r}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{r}, \ [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [2, str. 499] □

1.4 Polojednoduché Lieovy algbery

Z Leviho věty (Věta 4) vyplývá, že ke studiu reprezentace libovolné komplexní Lieovy algebry potřebujeme znát vlastnosti reprezentací řešitelných a polojednoduchých Lieových algeber. Každá ireducibilní reprezentace komplexní řešitelné Lieovy algebry je jednodimenzionální (viz [11, str. 21]). Na druhou stranu reprezentace polojednoduchých algeber jsou složitější. Budeme se jimi proto zabývat podrobněji.

1.4.1 Kořenový rozklad polojednoduché Lieovy algebry

Polojednoduché Lieovy algebry lze rozložit na kořenové podprostory. Ty můžeme využít při zkoumání jejich reprezentací. Proto si uvedeme postup, jak je získat.

1. Nejdříve nalezneme maximální podalgebru $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ vzájemně komutujících diagonalizovatelných prvků zvanou Cartanova podalgebra. Číslo $k := \dim \mathfrak{h}$ se nazývá rank algebry $\mathfrak{g}$.

2. Pokud pro nenulové $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ množina

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, H \in \mathfrak{h}\}$$

obsahuje více než jen nulový vektor, nazveme ji kořenový podprostor příslušný kořenu α. Jedná se o společný vlastní podprostor adjungované reprezentace všech prvků Cartanovy podalgebry na $\mathfrak{g}$. Množinu všech kořenů označíme R.

Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ je potom možné rozložit na direktní součet Cartanovy podalgebry a kořenových podprostorů.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\in R}\, \mathfrak{g}_\alpha)$$

Strukturu polojednoduché komplexní Lieovy algebry lze znázornit Dynkinovými diagramy. Na $\mathfrak{h}^*$, resp $\mathfrak{h}$ definujeme skalární součin (explicitně v [12, str. 27]) $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}$. Mějme navíc $l \in \mathfrak{h}^*$ splňující

$$\langle l, \alpha\rangle \neq 0 \text{ pro libovolné } \alpha \in R.$$

Množinu všech kořenů rozdělíme na záporné kořeny

$$R_- := \{\alpha \in R : \langle l, \alpha\rangle < 0\}$$

a kladné kořeny

$$R_+ := \{\alpha \in R : \langle l, \alpha\rangle > 0\}.$$

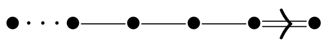
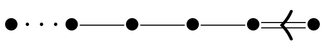
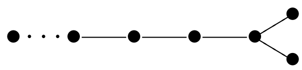
Řekneme, že $\alpha \in R_+$ je jednoduchý kořen, pokud ho nelze zapsat jako součet jiných kladných kořenů. Množinu všech jednoduchých kořenů označíme S. Ta tvoří bázi $\mathfrak{h}^*$ a počet jejích prvků je roven k.

Definice 14 (Dynkinův diagram)**.** *Nechť $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá Lieova algebra. Její Dynkinův diagram je graf, jehož množina vrcholů je S a dva vrcholy α_i, α_j jsou spojeny hranou s násobností*

$$n_{ij} = 4\frac{\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle} \in \{0, 1, 2, 3\},$$

pokud $\alpha_i \neq \alpha_j$. Je-li $n_{ij} > 1$ a $\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle > \langle\alpha_j, \alpha_j\rangle$, orientujeme hranu šipkou od vrcholu α_i k vrcholu α_j.

Polojednoduché Lieovy algebry jsou direktním součtem jednoduchých algeber, proto jsou jejich Dynkinovy diagramy složeny z komponent souvislosti odpovídajících jednotlivým sčítancům. Konečně-dimenzionální komplexní jednoduché Lieovy algebry lze klasifikovat pomocí jejich Dynkinových diagramů. Rank algebry k udává počet vrcholů diagramu.

Dynkinův diagram			Lieova algebra
A_k :		$k \geq 1$	$\mathfrak{sl}(k+1, \mathbb{C})$
B_k :		$k \geq 2$	$\mathfrak{so}(2k+1, \mathbb{C})$
C_k :		$k \geq 3$	$\mathfrak{sp}(2k, \mathbb{C})$
D_k :		$k \geq 4$	$\mathfrak{so}(2k, \mathbb{C})$

Výše uvedené jednoduché algebry nazýváme klasické Lieovy algebry. Kromě nich existuje pět výjimečných Lieových algeber E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. Pro podrobnější informace viz [1, str. 49].

1.4.2 Příklady jednoduchých algeber

Nyní rozebereme podrobněji symplektickou algebru $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ a speciální ortogonální algebru $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$. Jak uvidíme v 2.2, první jmenovaná je izomorfní jisté podalgebře funkcí na fázovém prostoru a po kvantování v kapitole 3 bude tvořit určitou množinu operátorů na Hilbertově prostoru, které využijeme při studiu bosonového harmonického oscilátoru. Druhou zmíněnou jednoduchou algebrou se naopak budeme zabývat v 4.5 v kontextu fermionového oscilátoru.

Symplektická algebra

Maticovou realizaci symplektické algebry definovanou na začátku podkapitoly 1.3 (příklad 6) můžeme použitím explicitního tvaru matice J přepsat do podoby

$$\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C}) = \left\{ X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} : A, B, C \in \mathrm{M}(d, \mathbb{C}); B = B^T, C = C^T \right\}.$$

Cartanovu podalgebru tvoří matice

$$H_i := E_{i,i} - E_{d+i,d+i},$$

kde $i \in \{1, \ldots, d\}$. Kořenové podprostory jsou generovány prvky $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ tvaru

$$\begin{aligned} X_{+j-k} &:= E_{j,k} - E_{d+j,d+k}, \ j \neq k, \\ X_{+j+k} &:= E_{j,d+k} + E_{k,d+j}, \\ X_{-j-k} &:= E_{d+j,k} + E_{d+k,j} \end{aligned}$$

pro $j, k \in \{1, \ldots, d\}$. Platí potom následující komutační relace:

$$\begin{aligned}
[H_i, X_{+j-k}] &= (\delta_{ij} - \delta_{ik})X_{+j-k}, \\
[H_i, X_{+j+k}] &= (\delta_{ij} + \delta_{ik})X_{+j+k}, \\
[H_i, X_{-j-k}] &= (-\delta_{ij} - \delta_{ik})X_{-j-k}.
\end{aligned}$$

Ztotožníme-li $\mathfrak{h}^*$ s $\mathbb{R}^d$ se standardní bází $\{e_j\}_{j=1}^d$, množina všech kořenů symplektické algebry je

$$R = \{\pm(e_j - e_k), \pm(e_j + e_k) : j < k; j, k = 1, \ldots, d\} \cup \{\pm 2e_j : j = 1, \ldots, d\}.$$

Z nich pomocí konkrétní volby $l = \sum_{j=1}^d \frac{1}{j} e_j$ (viz sekce 1.4.1) vybereme kladné kořeny

$$R_+ = \{e_j - e_k, e_j + e_k : j < k; j, k = 1, \ldots, d\} \cup \{2e_j : j = 1, \ldots, d\}.$$

Množina jednoduchých kořenů je pak

$$S = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{d-1} - e_d, 2e_d\}.$$

Tvar Dynkinova diagramu algebry $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ je znázorněn v 1.4.1.

Symplektická algebra jako symetrická mocnina

Mějme vektorový prostor $V = \mathbb{C}^{2d}$ spolu s bilineární formou $B : V \times V \to \mathbb{C}$. Pomocí ní lze definovat akci $V \otimes V$ na V:

$$\begin{aligned}
\cdot : V \otimes V \times V &\to V \\
(u \otimes v, w) &\mapsto (u \otimes v) \cdot w := u\ B(v, w).
\end{aligned}$$

Pokud B je nedegenerovaná, existuje izomorfismus mezi vektorovými prostory $V \otimes V$ a $\mathrm{End}(V)$:

$$\begin{aligned}
\omega : V \otimes V &\to \mathrm{End}(V) \\
u \otimes v &\mapsto u\ B(v, \cdot).
\end{aligned}$$

Všimněme si nyní případu, kdy B je nedegenerovaná antisymetrická bilineární forma. Symetrická mocnina druhého stupně $S^2V \subset V \otimes V$ je vektorový prostor, jehož prvky můžeme psát jako lineární kombinace výrazů tvaru

$$u \odot v := u \otimes v + v \otimes u \in S^2V,$$

kde $u, v \in V$. Restrikce ω na podprostor symetrické mocniny je zobrazení

$$\begin{aligned}
\omega|_{S^2V} : S^2V &\to \mathrm{End}(V) \\
u \odot v &\mapsto u\ B(v, \cdot) + v\ B(u, \cdot) =: X_{u \odot v}.
\end{aligned}$$

Rozepsáním z definice lze ověřit, že

$$B(t, X_{u\odot v}(w)) + B(X_{u\odot v}(t), w) = 0$$

pro libovolné $t, w \in V$. Srovnáme-li tento výsledek s definicí symplektické algebry z podkapitoly 1.3 (příklad 6), pak $X_{u\odot v} \in \mathfrak{sp}(V, B) \cong \mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$. Protože B je nedegenerovaná bilineární forma, potom $X_{u\odot v}(w) = 0 = uB(v, w) + vB(u, w)$ pro každé $w \in V$ právě tehdy, když $u = 0 = v$. Z toho vyplývá, že $\omega|_{S^2V}$ je prosté zobrazení. Zároveň víme, že

$$\dim \mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C}) = \frac{2d(2d + 1)}{2} = \dim S^2V.$$

Zobrazení $\omega|_{S^2V}$ je tudíž izomorfismus vektorových prostorů S^2V a $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$.

Na symplektické algebře máme operaci Lieova závorka danou komutátorem endomorfismů. Platí

$$\begin{aligned}[X_{t\odot u}, X_{v\odot w}](y) = B(u, v)X_{t\odot w}(y) + B(u, w)X_{t\odot v}(y) +& \\ + B(t, w)X_{u\odot v}(y) + B(t, v)X_{u\odot w}(y),&\end{aligned}$$

kde $X_{t\odot u}, X_{v\odot w} \in \mathrm{End}(V)$, $y \in V$. Na prostoru S^2V chceme dodefinovat Lieovu závorku $[\cdot, \cdot]$ tak, aby zobrazení $\omega|_{S^2V}$ byl izomorfismus Lieových algeber:

$$\begin{array}{cccll} [\cdot, \cdot] : S^2V \times S^2V & \to & S^2V & & \\ (t \odot u, v \odot w) & \mapsto & [t \odot u, v \odot w] & := & B(u, v)t \odot w + B(u, w)t \odot v + \\ & & & & +B(t, w)u \odot v + B(t, v)u \odot w. \end{array}$$

Existuje tak izomorfismus Lieových algeber $\mathfrak{sp}(V, B)$ a symetrické mocniny druhého stupně S^2V.

Speciální ortogonální algebra

Další z jednoduchých klasických Lieových algeber je speciální ortogonální algebra $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$. V následujícím textu se budeme zabývat případem $n = 2d$, pro $n = 2d + 1$ by výpočty probíhaly podobně.

Zvolme bázi vektorového prostoru $V = \mathbb{C}^{2d}$ tak, aby matice symetrické bilineární formy $B : V \times V \to \mathbb{C}$ byla tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix}.$$

Maticovou realizaci speciální ortogonální algebry definovanou v podkapitole 1.3 (příklad 2 a 3) lze přepsat do tvaru

$$\mathfrak{so}(2d, \mathbb{C}) = \{X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} : A, B, C \in \mathrm{M}(d, \mathbb{C}); B = -B^T, C = -C^T\}.$$

Cartanovu podalgebru tvoří matice

$$H_i := E_{i,i} - E_{d+i,d+i}$$

pro $i \in \{1, \ldots, d\}$ a kořenové podprostory jsou generovány prvky

$$\begin{aligned} X_{+j-k} &:= E_{j,k} - E_{d+j,d+k}, \ j \neq k, \\ X_{+j+k} &:= E_{j,d+k} - E_{k,d+j}, \\ X_{-j-k} &:= E_{d+j,k} - E_{d+k,j}, \end{aligned}$$

kde $j, k \in \{1, \ldots, d\}$. Ty splňují stejné komutační relace jako stejnojmenné matice v symplektické algebře (viz začátek sekce 1.4.2).

Pokud $\mathfrak{h}^*$ opět ztotožníme s $\mathbb{R}^d$ se standardní bází $\{e_j\}_{j=1}^d$, získáme množinu kořenů

$$R = \{\pm(e_j - e_k), \pm(e_j + e_k) : j < k; j, k = 1, \ldots, d\}.$$

Zvolíme-li $l \in \mathfrak{h}^*$ stejně jako v případě symplektické algebry, kladné kořeny jsou

$$R_+ = \{e_j - e_k, e_j + e_k : j < k; j, k = 1, \ldots, d\}$$

a množinu jednoduchých kořenů tvoří

$$S = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{d-1} - e_d, e_{d-1} + e_d\}.$$

Dynkinův diagram speciální ortogonální algebry je znázorněn v 1.4.1.

Speciální ortogonální algebra jako vnější mocnina

Mějme prostor $V = \mathbb{C}^{2d}$. Vnější mocnina druhého stupně $\Lambda^2 V \subset V \otimes V$ je vektorový prostor, jehož prvky lze psát jako lineární kombinace výrazů tvaru

$$u \wedge v := u \otimes v - v \otimes u \in \Lambda^2 V$$

pro $u, v \in V$. Na V definujeme nedegenerovanou symetrickou bilineární formu $B : V \times V \to \mathbb{C}$. Z předchozí části věnované symplektické algebře víme, že existuje izomorfismus $\omega : V \otimes V \to \mathrm{End}(V)$. Restringujeme toto lineární zobrazení na prostor $\Lambda^2 V$.

$$\begin{aligned} \omega|_{\Lambda^2 V} : \Lambda^2 V &\to \mathrm{End}(V) \\ u \wedge v &\mapsto u\ B(v, \cdot) - v\ B(u, \cdot) =: X_{u \wedge v} \end{aligned}$$

Pro libovolné $t, w \in V$ lze rozepsáním všech výrazů ověřit platnost rovnosti

$$B(t, X_{u\wedge v}(w)) + B(X_{u\wedge v}(t), w) = 0.$$

Z definice speciální ortogonální algebry z podkapitoly 1.3 (příklad 2 a 3) vidíme, že $X_{u\wedge v} \in \mathfrak{so}(V, B) \cong \mathfrak{so}(2d, \mathbb{C})$. Jelikož B je nedegenerovaná bilineární forma, potom $X_{u\wedge v}(w) = 0 = uB(v, w) - vB(u, w)$ pro každé $w \in V$ právě tehdy, když $u = 0 = v$. Z toho plyne, že zobrazení $\omega|_{\Lambda^2 V}$ je prosté. Zároveň víme, že

$$\dim \mathfrak{so}(2d, \mathbb{C}) = \frac{2d(2d-1)}{2} = \dim \Lambda^2 V.$$

Zobrazení $\omega|_{\Lambda^2 V}$ je tudíž izomorfismus vektorových prostorů $\Lambda^2 V$ a $\mathfrak{so}(2d, \mathbb{C})$.

Na $\mathfrak{so}(V,B)$ máme definovanou operaci Lieova závorka danou komutátorem endomorfismů. Platí potom

$$[X_{t\wedge u}, X_{v\wedge w}](y) = B(u,v)X_{t\wedge w}(y) - B(u,w)X_{t\wedge v}(y) + \\ + B(t,w)X_{u\wedge v}(y) - B(t,v)X_{u\wedge w}(y)$$

pro všechny $X_{t\wedge u}, X_{v\wedge w} \in \mathrm{End}(V)$, $y \in V$. Na prostoru $\Lambda^2 V$ zavedeme Lieovu závorku takovým způsobem, aby $\omega|_{\Lambda^2 V}$ byl izomorfismus Lieových algeber.

$$\begin{array}{rclcl} [\cdot,\cdot] : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V & \to & \Lambda^2 V & & \\ (t\wedge u, v\wedge w) & \mapsto & [t\wedge u, v\wedge w] & := & B(u,v)t\wedge w - B(u,w)t\wedge v + \\ & & & & +B(t,w)u\wedge v - B(t,v)u\wedge w. \end{array}$$

Existuje tak izomorfismus Lieových algeber $\mathfrak{so}(V,B)$ a vnější mocniny druhého stupně $\Lambda^2 V$.

Poznámka: Podobné výpočty pro speciální ortogonální algebru lze nalézt v [2, str. 303]. My jsme analogický postup využili jak v případě algebry $\mathfrak{so}(2d,\mathbb{C})$, tak i pro symplektickou algebru $\mathfrak{sp}(2d,\mathbb{C})$.

1.4.3 Reprezentace polojednoduché Lieovy algebry

Mějme komplexní polojednoduchou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$. Dle Weylovy věty (viz [5, str. 28]) je každá konečně dimenzionální reprezentace (π, V) algebry $\mathfrak{g}$ kompletně reducibilní, tedy

$$\exists n \in \mathbb{N} : (\pi, V) \cong \oplus_{j=1}^{n} (\pi_j, V_j),$$

kde (π_j, V_j) jsou ireducibilní reprezentace. Ke studiu reprezentace (π_j, V_j) využijeme kořenového rozkladu $\mathfrak{g}$.

- Nechť $H, H' \in \mathfrak{h}$ jsou libovolné prvky Cartanovy podalgebry. Pak $\pi_j(H)$ lze diagonalizovat a $[\pi_j(H), \pi_j(H')] = 0$.
- Pokud pro nenulové $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ množina

  $$V_\lambda := \{v \in V_j : \pi_j(H)(v) = \lambda(H)(v), H \in \mathfrak{h}\}$$

  obsahuje víc než jen nulový vektor, nazveme ji váhový podprostor příslušný váze λ. Jedná se o společný vlastní podprostor reprezentace π_j všech prvků Cartanovy podalgebry. Nenulový vektor $v \in V_\lambda$ nazveme váhový vektor. Množinu všech vah reprezentace π_j označíme Λ_j. Vektorový prostor V_j je potom direktním součtem váhových podprostorů

  $$V_j = \oplus_{\lambda\in\Lambda_j} V_\lambda.$$

Pro každou ireducibilní konečně dimenzionální reprezentaci polojednoduché Lieovy algebry existuje váha λ_h taková, že platí

$$\pi_j(\mathfrak{g}_\alpha)(v_h) = 0 \text{ pro libovolné } \alpha \in R_+, v_h \in V_{\lambda_h}.$$

Pojmenujeme ji nejvyšší váha reprezentace (π_j, V_j) a příslušný vektor v_h nazveme vektor nejvyšší váhy. Ten je až na násobek určen jednoznačně (viz [11, str. 40]). Navíc vezmeme-li libovolné $\beta \in R$, pak

$$\pi_j(\mathfrak{g}_\beta) : V_\lambda \to \begin{cases} V_{\lambda+\beta} & \text{pokud } \lambda + \beta \in \Lambda_j \\ 0 & \text{pokud } \lambda + \beta \notin \Lambda_j. \end{cases}$$

Všechny váhy reprezentace jsou tedy tvaru

$$\lambda_h - \sum_{j=1}^{k} n_j \alpha_j, \text{ kde } \alpha_j \in S, n_j \in \mathbb{Z}^+$$

a prostor V_j je lineárním obalem vektorů

$$\left\{\pi_j(X_{\alpha_1})\pi_j(X_{\alpha_2}) \dots \pi_j(X_{\alpha_n})(v_h) : \alpha_k \in R_-, X_{\alpha_k} \in \mathfrak{g}_{\alpha_k}, n \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Každou konečně dimenzionální ireducibilní reprezentaci polojednoduché komplexní Lieovy algebry můžeme popsat pomocí nejvyšší váhy a odpovídajícího vektoru nejvyšší váhy. Jakmile je známe, jsme schopni použitím kořenových podprostorů generovat celý vektorový prostor V_j dané reprezentace.

1.5 Oscilátorové realizace

Oscilátorovou realizací nazýváme vyjádření Lieovy algebry pomocí bosonových nebo fermionových operátorů - hovoříme o takzvané bosonové, resp. fermionové oscilátorové realizaci. Nejprve si tyto operátory definujeme a poté ukážeme dva způsoby, jak oscilátorovou realizaci zkonstruovat. Získané výsledky později využijeme při kvantování klasického mechanického systému v kapitole 3 a následně při studiu bosonového a fermionového harmonického oscilátoru v kapitole 4.

1.5.1 Bosonové a fermionové operátory

Nechť $W, \widetilde{W}$ jsou vektorové prostory. Jednotkový operátor $\mathbf{1} \in \operatorname{End}(W)$ definujeme tak, že pro všechna $w \in W$: $\mathbf{1}(w) = w$. Analogicky zavedeme jednotkový operátor $\mathbf{1} \in \operatorname{End}(\widetilde{W})$.

Na W mějme operátory $\{a_1, \dots, a_d, a_1^\dagger, \dots, a_d^\dagger\} \subseteq \operatorname{End}(W)$, které tvoří bázi $2d-$dimenzionálního vektorového prostoru V nad $\mathbb{C}$. Na $V \oplus \mathbf{1}$ zavedeme Lieovu závorku danou komutátorem endomorfismů

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot] : V \oplus \mathbf{1} \times V \oplus \mathbf{1} &\to V \oplus \mathbf{1} \\ (x, y) &\mapsto [x, y] := xy - yx. \end{aligned}$$

Bázové elementy splňují kanonické komutační relace

$$[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk}\mathbf{1},\ [a_j, a_k] = 0 = [a_j^\dagger, a_k^\dagger],\ [a_j, \mathbf{1}] = 0 = [a_j^\dagger, \mathbf{1}].$$

Operátory s těmito vlastnostmi nazýváme bosonové anihilační operátory a_j a bosonové kreační operátory $a_j^\dagger$. Při kvantování klasického systému v podkapitole 3.2 budou stejné vztahy splňovat anihilační a kreační operátory na Fockově prostoru.

Nyní vezměme jinou množinu operátorů $\{f_1, \dots, f_d, f_1^\dagger, \dots, f_d^\dagger\} \subseteq \mathrm{End}(\widetilde{W})$. Ty ať generují vektorový prostor $\widetilde{V}$ nad $\mathbb{C}$ dimenze $2d$. Na prostoru $\widetilde{V} \oplus \mathbf{1}$ definujeme bilineární symetrické zobrazení endomorfismů zvané antikomutátor

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot]_+ : \widetilde{V} \oplus \mathbf{1} \times \widetilde{V} \oplus \mathbf{1} &\to \widetilde{V} \oplus \mathbf{1} \\ (x, y) &\mapsto [x, y]_+ := xy + yx. \end{aligned}$$

Bázové elementy splňují kanonické antikomutační relace

$$[f_j, f_k^\dagger]_+ = \delta_{jk}\mathbf{1},\ [f_j, f_k]_+ = 0 = [f_j^\dagger, f_k^\dagger]_+,\ [f_j, \mathbf{1}]_+ = 2f_j,\ [f_j^\dagger, \mathbf{1}]_+ = 2f_j^\dagger.$$

Operátory s těmito vlastnostmi nazýváme fermionové anihilační operátory f_j a fermionové kreační operátory $f_j^\dagger$. Setkáme se s nimi v podkapitole 4.5, kde budou působit na fermionovém Fockově prostoru. Jejich komutátor formálně zavedeme jako $[x, y] := [x, y]_+ - 2yx$.

1.5.2 Konstrukce pomocí maticové realizace

Oscilátorovou realizaci Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ lze velmi jednoduše zkonstruovat pomocí její maticové realizace. Každému prvku $X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{F})$ dané Lieovy algebry následujícím způsobem přiřadíme jistou bilineární kombinaci bosonových nebo fermionových operátorů:

$$X \mapsto \sum_{j,k=1}^{n} a_j^\dagger X_{jk} a_k,$$

popřípadě

$$X \mapsto \sum_{j,k=1}^{n} f_j^\dagger X_{jk} f_k.$$

Protože $a_j, a_j^\dagger \in \mathrm{End}(W)$, resp. $f_j, f_j^\dagger \in \mathrm{End}(\widetilde{W})$, elementy oscilátorové realizace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ generují její reprezentaci na vektorovém prostoru W, resp. $\widetilde{W}$.

Konvence: Pří níže uvedených výpočtech budeme používat Einsteinovu sumační konvenci. Přes opakující se index vždy sčítáme od 1 do n.

Snadno ověříme, že uvedená přiřazení splňují podmínku homomorfismu Lieových algeber. Ať $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ a $[X, Y] = Z$, potom

$$\begin{aligned}[a_j^\dagger X_{jk} a_k, a_l^\dagger Y_{lm} a_m] &= X_{jk} Y_{lm} [a_j^\dagger a_k, a_l^\dagger a_m] = X_{jk} Y_{lm} (a_j^\dagger a_l^\dagger [a_k, a_m] + a_j^\dagger [a_k, a_l^\dagger] a_m + \\ &\quad + a_l^\dagger [a_j^\dagger, a_m] a_k + [a_j^\dagger, a_l^\dagger] a_m a_k) = X_{jk} Y_{lm} (a_j^\dagger a_m \delta_{kl} - a_l^\dagger a_k \delta_{jm}) = \\ &= a_j^\dagger (X_{jk} Y_{km} - Y_{jk} X_{km}) a_m = a_j^\dagger Z_{jk} a_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[f_j^\dagger X_{jk} f_k, f_l^\dagger Y_{lm} f_m] &= X_{jk} Y_{lm} [f_j^\dagger f_k, f_l^\dagger f_m] = X_{jk} Y_{lm} (f_j^\dagger [f_k, f_l^\dagger]_+ f_m - f_l^\dagger [f_j^\dagger, f_m]_+ f_k + \\ &\quad + [f_j^\dagger, f_l^\dagger]_+ f_m f_k - f_j^\dagger f_l^\dagger [f_k, f_m]_+) = X_{jk} Y_{lm} (f_j^\dagger f_m \delta_{kl} - f_l^\dagger f_k \delta_{jm}) = \\ &= f_j^\dagger (X_{jk} Y_{km} - Y_{jk} X_{km}) f_m = f_j^\dagger Z_{jk} f_k.\end{aligned}$$

Ve výpočtech jsme využili linearity komutátoru (antikomutátoru), kanonických komutačních (antikomutačních) relací a vztahů

$$\begin{aligned}[xy, zw] &= xz[y, w] + x[y, z]w + z[x, w]y + [x, z]wy = \\ &= x[y, z]_+ w - z[x, w]_+ y + [x, z]_+ wy - xz[y, w]_+.\end{aligned}$$

Poznámka: Právě provedenou konstrukci oscilátorové realizace Lieovy algebry lze v obecném tvaru nalézt v [3, str. 88]. Pro konkrétní příklad jednoduché algebry $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ dostaneme tímto postupem stejný tvar bosonové i fermionové oscilátorové realizace, jako je uveden v [1, str. 89].

1.5.3 Konstrukce pomocí symetrické/vnější mocniny

Další oscilátorovou realizaci symplektické a speciální ortogonální algebry lze zkonstruovat pomocí symetrického součinu S^2V a vnější tenzorové mocniny $\Lambda^2 V$ vektorového prostoru V.

Symplektická algebra

V souladu s komutačními relacemi bosonových operátorů z sekce 1.5.1 definujeme antisymetrickou bilineární formu $B : V \times V \to \mathbb{C}$, jejíž hodnoty na bázi $\{a_1, \ldots, a_d, a_1^\dagger, \ldots, a_d^\dagger\}$ jsou

$$B(a_j, a_k) = 0 = B(a_j^\dagger, a_k^\dagger),\ B(a_j, a_k^\dagger) = \delta_{jk}.$$

Matice formy B má vůči této bázi tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}.$$

V 1.4.2 jsme si ukázali, že $\mathfrak{sp}(V, B) \cong S^2V$. To platí pro libovolný konečně dimenzionální vektorový prostor. V našem případě je V tvořen operátory na prostoru W. Definujeme si proto množinu

$$S := \left\{ \frac{1}{2}(xy + yx) = xy - \frac{1}{2}[x, y] : x, y \in V \subseteq \mathrm{End}(W); xy := x \circ y \right\}.$$

Prvky S generují Lieovu algebru a pro libovolné $x, y, z, w \in V$ splňují stejné komutační relace

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}[xy + yx, zw + wz] = \frac{1}{2}(xz + zx)B(y, w) + \frac{1}{2}(xw + wx)B(y, z) + \\ + \frac{1}{2}(zy + yz)B(x, w) + \frac{1}{2}(wy + yw)B(x, z)\end{aligned}$$

jako prvky symetrického tenzorového součinu (srovnej se sekcí 1.4.2). Proto existuje izomorfismus Lieových algeber S a $S^2V \cong \mathfrak{sp}(V, B)$. Prvky prostoru S generují reprezentaci symplektické algebry na vektorovém prostoru bosonových operátorů díky jejich adjungované akci na V:

$$\frac{1}{2}[xy + yx, z] = x\ B(y, z) + y\ B(x, z) = (x \otimes y + y \otimes x) \cdot z.$$

Použijeme-li právě provedené úvahy o izomorfismu $S \cong \mathfrak{sp}(V, B)$, získáme bosonovou oscilátorovou realizaci symplektické algebry:

$$\left\{ \frac{1}{2}(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger), a_i^\dagger a_j, a_i^\dagger a_j^\dagger, a_i a_j, {a_i^\dagger}^2, {a_i}^2 \right\}_{i,j=1; i<j}^{d}.$$

Cartanova podalgebra je generována operátory $H_i := \frac{1}{2}(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger) = a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2}$ a kořenové podprostory jsou pro $j \neq k$ určeny elementy

$$X_{+j+k} := a_j^\dagger a_k^\dagger,\ X_{-j-k} := a_j a_k,\ X_{j-k} := a_j^\dagger a_k,\ X_{2j} := {a_j^\dagger}^2 \text{ a } X_{-2j} := {a_j}^2.$$

Jelikož $S \subset \mathrm{End}(W)$, generátory bosonové realizace symplektické algebry tvoří její reprezentaci na vektorovém prostoru W. V podkapitole 3.2 uvidíme, že tato reprezentace přesně koresponduje s Bargmann-Fockovou (oscilátorovou) reprezentací algebry $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ na Fockově prostoru.

Speciální ortogonální algebra

Z maticové realizace symplektické algebry zavedené v 1.4.2 je vidět, že speciální ortogonální algebra $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ je podalgebrou $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$:

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2n, \mathbb{C}) : A + A^T = 0 \right\} \subset \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}).$$

Algebra $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ je generována maticemi $E_{j,k} - E_{n+j,n+k}$; $j, k = 1, \ldots, n$; $j \neq k$. Z oscilátorové realizace symplektické algebry získáme bosonovou oscilátorovou realizaci speciální ortogonální algebry generovanou operátory

$$\{a_j^\dagger a_k - a_j a_k^\dagger\}_{j,k=1}^{n}.$$

Všimněme si, že stejný výsledek bychom získali použitím matic $E_{j,k} - E_{n+j,n+k}$ v konstrukci z sekce 1.5.2.

Jinou oscilátorovou realizaci speciální ortogonální algebry lze zkonstruovat pomocí fermionových operátorů. Od této chvíle se budeme zabývat případem $n = 2d$, pro $n = 2d + 1$ by výpočty probíhaly obdobně. Ve shodě s antikomutačními relacemi z 1.5.1 definujeme na $\widetilde{V}$ bilineární symetrickou formu $B : \widetilde{V} \times \widetilde{V} \to \mathbb{C}$, jejíž hodnoty na bázi $\{f_1, \ldots, f_d, f_1^\dagger, \ldots, f_d^\dagger\}$ jsou

$$B(f_j, f_k^\dagger) = \delta_{jk},\ B(f_j, f_k) = 0 = B(f_j^\dagger, f_k^\dagger).$$

Matice formy B má vůči této bázi tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix}.$$

V 1.4.2 jsme ukázali, že $\mathfrak{so}(\widetilde{V}, B) \cong \Lambda^2 \widetilde{V}$. Podobně jako v případě symplektické algebry definujeme množinu

$$A := \left\{ \frac{1}{2}(xy - yx) = xy - \frac{1}{2}[x, y]_+ : x, y \in \widetilde{V} \subseteq \mathrm{End}(\widetilde{W}); xy := x \circ y \right\}.$$

Prvky A generují Lieovu algebru a splňují pro libovolné $x, y, z, w \in \widetilde{V}$ stejné komutační relace

$$\frac{1}{4}[xy - yx, zw - wz] = \frac{1}{2}(xw - wx)B(y, z) - \frac{1}{2}(xz - zx)B(y, w) + \\ + \frac{1}{2}(yz - zy)B(x, w) - \frac{1}{2}(yw - wy)B(x, z)$$

jako elementy antisymetrického tenzorového součinu (viz sekce 1.4.2). Proto existuje izomorfismus Lieových algeber A a $\Lambda^2\widetilde{V} \cong \mathfrak{so}(\widetilde{V}, B)$. Prvky algebry A tvoří reprezentaci speciální ortogonální algebry na prostoru fermionových operátorů pomocí jejich adjungované akce na $\widetilde{V}$:

$$\frac{1}{2}[xy - yx, z] = x\ B(y, z) - y\ B(x, z) = (x \otimes y - y \otimes x) \cdot z.$$

Díky právě dokázanému izomorfismu $A \cong \mathfrak{so}(\widetilde{V}, B)$ jsme získali fermionovou oscilátorovou realizaci speciální ortogonální algebry s bází

$$\left\{ \frac{1}{2}\left(f_j^\dagger f_j - f_j f_j^\dagger\right), f_j^\dagger f_k, f_j^\dagger f_k^\dagger, f_j f_k \right\}_{j,k=1; j<k}^{d}.$$

Cartanovu podalgebru generují elementy $H_i := \frac{1}{2}\left(f_j^\dagger f_j - f_j f_j^\dagger\right) = f_i^\dagger f_i - \frac{1}{2}$ a kořenové podprostory jsou pro $j \neq k$ určeny operátory

$$X_{+j+k} := f_j^\dagger f_k^\dagger,\ X_{-j-k} := f_j f_k,\ X_{j-k} := f_j^\dagger f_k.$$

Protože $A \subset \mathrm{End}(\widetilde{W})$, generátory fermionové realizace speciální ortogonální algebry tvoří její reprezentaci na vektorovém prostoru $\widetilde{W}$. V sekci 4.5.1 si ukážeme, že tímto způsobem získáme dvě ireducibilní reprezentace algebry $\mathfrak{so}(2d, \mathbb{C})$ na fermionovém Fockově prostoru. Bude se jednat o takzvané spinorové reprezentace speciální ortogonální algebry, jejichž váhy budou mít vždy poločíselné hodnoty (viz [6, str. 44]).

V případě $n = 2d + 1$ je nutné bázi vektorového prostoru $\widetilde{V}$ rozšířit o prvek $u \in \mathrm{End}(\widetilde{W})$. S fermionovými operátory splňuje antikomutační relace

$$[f_j, u]_+ = 0 = [f_j^\dagger, u]_+,\ [u, u]_+ = 1,$$

tudíž $B(f_j, u) = 0 = B(f_j^\dagger, u)$, $B(u, u) = 1$ pro $j \in \{1, \dots, d\}$. Díky adjungované akci bilineární kombinace $f_j^\dagger u$ na $\widetilde{V}$ je pro libovolné $x, y \in \widetilde{V}$ splněno

$$\begin{aligned} B(x, &[f_j^\dagger u, y]) + B([f_j^\dagger u, x], y) = \\ &= B(x, f_j^\dagger B(u, y) - uB(f_j^\dagger, y)) + B(f_j^\dagger B(u, x) - uB(f_j^\dagger, x), y) = \\ &= B(u, y)(-B(f_j^\dagger, x) + B(x, f_j^\dagger)) + B(f_j^\dagger, y)(B(u, x) - B(x, u)) = 0 \end{aligned}$$

a pro $f_j u$ podobně. Srovnáme-li tuto rovnost s definicí speciální ortogonální algebry z podkapitoly 1.3 (příklad 2 a 3), vidíme, že $f_j^\dagger u, f_j u \in \mathfrak{so}(\widetilde{V}, B)$. Fermionová oscilátorová realizace algebry $\mathfrak{so}(2d+1,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(\widetilde{V}, B)$ tak oproti $\mathfrak{so}(2d,\mathbb{C})$ obsahuje prvky

$$\{f_j u, f_j^\dagger u\}_{j=1}^d.$$

Ty vyhovují spolu s elementy Cartanovy podalgebry následujícím komutačním relacím

$$[H_i, f_j^\dagger u] = (\delta_{ji}) f_j^\dagger u,\ [H_i, f_j u] = (-\delta_{ji}) f_j u.$$

Užijeme-li notaci z 1.4.2, operátory $X_{+j} := f_j^\dagger u,\ X_{-j} := f_j u$ generují kořenové podprostory příslušné kořenům $e_j, -e_j$.

Poznámka: Totožnou oscilátorovou realizaci symplektické i speciální ortogonální algebry můžeme nalézt v [1, str. 89]. Za povšimnutí také stojí fakt, že na rozdíl od konstrukce pomocí maticové realizace z sekce 1.5.2 v tomto případě potřebujeme k sestrojení oscilátorové realizace poloviční počet bosonových, resp. fermionových operátorů.

2. Klasický mechanický systém

Fyzikální problém s d stupni volnosti v hamiltonovském formalismu klasické fyziky popíšeme pomocí zobecněných souřadnic q_j a zobecněných hybností p_j, $j \in \{1, ..., d\}$. Ty tvoří souřadnice fázového prostoru $M = \mathbb{R}^{2d}$. Stav zkoumaného systému je dán bodem v M, tedy konkrétními hodnotami zobecněných souřadnic a zobecněných hybností. Na fázový prostor se také můžeme dívat jako na prostor počátečních podmínek fyzikálního problému, které již přesně určují jeho další časový vývoj.

Veličiny, které je možné měřit, tvoří vektorový prostor všech funkcí $\mathrm{Fun}(M)$ na fázovém prostoru. Nejdůležitější takovou pozorovatelnou je Hamiltonova funkce h, jež má u většiny fyzikálních systémů význam celkové energie. Vývoj stavů daného problému je určen Hamiltonovými kanonickými rovnicemi

$$\dot{q_j} = \frac{\partial h}{\partial p_j}\,, \qquad \dot{p_j} = -\frac{\partial h}{\partial q_j}\,.$$

Definice 15 (Poissonova závorka)**.** *Poissonova závorka*

$$\begin{aligned} \{\cdot,\cdot\} : \mathrm{Fun}(M) \times \mathrm{Fun}(M) &\to \mathrm{Fun}(M) \\ (f_1, f_2) &\mapsto \{f_1, f_2\} := \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_j}\frac{\partial f_2}{\partial p_j} - \frac{\partial f_1}{\partial p_j}\frac{\partial f_2}{\partial q_j} \right) \end{aligned}$$

je bilineární operace na funkcích na fázovém prostoru $M = \mathbb{R}^{2d}$.

Jednoduchým rozepsáním dle Definice 7 lze ověřit, že Poissonova závorka je antisymetrická a splňuje Jacobiho identitu. Vyhovuje tedy definici Lieovy závorky a vektorový prostor $\mathrm{Fun}(M)$ spolu s Poissonovou závorkou tvoří nekonečně dimenzionální Lieovu algebru.

2.1 Heisenbergova algebra

Duální prostor k fázovému prostoru M označíme $M^* := \langle q_j, p_j \rangle \cong \mathbb{R}^{2d}$. Nyní si všimněme prostoru $M^* \oplus \mathbb{R}$ všech lineárních funkcí na M. Na jeho bázi $\{q_j, p_j, 1\}_{j=1}^{d}$ má Poissonova závorka hodnoty:

$$\begin{aligned} \{q_j, 1\} &= 0, & \{p_j, 1\} &= 0, \\ \{q_j, q_k\} &= 0, & \{p_j, p_k\} &= 0, \\ \{q_j, p_k\} &= \delta_{jk}. \end{aligned}$$

Srovnáním s Definicí 13 vidíme, že vektorový prostor lineárních funkcí $M^* \oplus \mathbb{R}$ na fázovém prostoru tvoří spolu s Poissonovou závorkou Heisenbergovu algebru $\mathfrak{h}_{2d+1}$.

Poznámka: Stejný výpočet je možné provést, připustíme-li komplexní lineární kombinace prvků Heisenbergovy algebry. Získáme homomorfismus komplexifikace[1] Heisenbergovy algebry $\mathfrak{h}_{2d+1} \otimes \mathbb{C}$ a Lieovy algebry komplexních lineárních funkcí na fázovém prostoru.

2.2 Symplektická algebra

Poissonova závorka na lineárních funkcích je antisymetrická bilineární forma, kterou lze rozšířit na komplexní lineární kombinace funkcí $M^* \oplus \mathbb{C}$ na fázovém prostoru. Její restrikce na M^* má vůči bázi $\{q_1, ..., q_d, p_1, ..., p_d\}$ matici tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}.$$

Symplektická grupa $\mathrm{Sp}(M^*, \{\cdot, \cdot\}) \cong \mathrm{Sp}(2d, \mathbb{C})$ je grupa lineárních transformací na M^*, které zachovávají hodnoty Poissonových závorek. Jak jsme si ukázali v sekci 1.4.2, prvky příslušné symplektické algebry jsou tvaru

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \text{ kde } A, B, C \in \mathrm{M}(d, \mathbb{C}) \text{ a } B = B^T, C = C^T.$$

Věta 5. *Lieova algebra $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ je izomorfní s Lieovou algebrou homogenních komplexních polynomů stupně dva na fázovém prostoru $M = \mathbb{R}^{2d}$. Tento izomorfismus jednoznačně přiřazuje každému $X \in \mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ polynom*

$$\mu_X := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}^T & \boldsymbol{p}^T \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & -I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix},$$

kde $\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}^T & \boldsymbol{p}^T \end{pmatrix} = (q_1, \ldots, q_d, p_1, \ldots, p_d)$.[2]

Poznámka: Rozepíšeme-li výraz

$$\mu_X = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^T B \mathbf{q} - 2\mathbf{q}^T A \mathbf{p} - \mathbf{p}^T C \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} (B_{ij} q_i q_j - 2A_{ij} q_i p_j - C_{ij} p_i p_j),$$

vidíme, že μ_X je reálný polynom právě tehdy, když $X \in \mathfrak{sp}(2d, \mathbb{R})$.

Pro důkaz Věty 5 potřebujeme dokázat následující větu:

Věta 6. *Nechť pro libovolný prvek $X \in \mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ je dána jeho adjungovaná akce na komplexifikované Heisenbergově algebře:*

$$\pi(X)(\boldsymbol{c}_q^T \boldsymbol{q} + \boldsymbol{c}_p^T \boldsymbol{p} + c) := \{\mu_X, \boldsymbol{c}_q^T \boldsymbol{q} + \boldsymbol{c}_p^T \boldsymbol{p} + c\} = \boldsymbol{c}_q'^T \boldsymbol{q} + \boldsymbol{c}_p'^T \boldsymbol{p}$$

Potom platí, že

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_q' \\ \boldsymbol{c}_p' \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_q \\ \boldsymbol{c}_p \end{pmatrix}$$

[1] Komplexifikace vektorového prostoru V je vektorový prostor $V \otimes \mathbb{C}$ všech vektorů ve tvaru $u + iv$, kde $u, v \in V$.

[2] Homomorfismus Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ a funkcí na fázovém prostoru $\mathrm{Fun}(M)$ nazýváme momentovým zobrazením. Pro přesnější definici a podrobnější informace viz [14, str. 176]

nebo ekvivalentně na souřadnicové bázi M^*

$$\left\{\mu_X, \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}\right\} = X^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}$$

a touto akcí je určena reprezentace $(\pi, \mathfrak{h}_{2d+1} \otimes \mathbb{C})$ *symplektické algebry na komplexifikované Heisenbergově algebře.*

Konvence: Pří níže uvedených výpočtech budeme opět používat Einsteinovu sumační konvenci. Přes opakující se index vždy sčítáme od 1 do d.

Důkaz. Mějme $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$. Pak $X^T \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T\mathbf{q} + C^T\mathbf{p} \\ B^T\mathbf{q} - A\mathbf{p} \end{pmatrix}$. Na druhé straně

$$\begin{aligned}
\{\mu_X, q_l\} &= \left\{\frac{1}{2}(q_j B_{jk} q_k - 2q_j A_{jk} p_k - p_j C_{jk} p_k), q_l\right\} \\
&= q_j A_{jk} \delta_{kl} + \frac{1}{2}(p_j C_{jk} \delta_{kl} + C_{jk} p_k \delta_{jl}) \\
&= A^T_{lj} q_j + C^T_{lj} p_j
\end{aligned}$$

a podobně

$$\{\mu_X, p_l\} = \frac{1}{2}(q_j B_{jk} \delta_{kl} + B_{jk} q_k \delta_{jl}) - A_{jk} p_k \delta_{jl} = B^T_{lj} q_j - A_{lj} p_j.$$

Tím jsme ukázali platnost vztahu $\left\{\mu_X, \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}\right\} = X^T \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$. Každou lineární funkci na fázovém prostoru můžeme zapisovat ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{d} (c_{qj} q_j + c_{pj} p_j) + c = \mathbf{c}_q^T \mathbf{q} + \mathbf{c}_p^T \mathbf{p} + c = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_q^T & \mathbf{c}_p^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} + c,$$

kde $\begin{pmatrix} \mathbf{c}_q^T & \mathbf{c}_p^T \end{pmatrix} = (c_{q1}, \ldots, c_{qd}, c_{p1}, \ldots, c_{pd})$. Pro obecný element Heisenbergovy algebry potom platí

$$\begin{aligned}
\left\{\mu_X, \begin{pmatrix} \mathbf{c}_q^T & \mathbf{c}_p^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} + c\right\} &= \begin{pmatrix} \mathbf{c}_q^T & \mathbf{c}_p^T \end{pmatrix} \left\{\mu_X, \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}\right\} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{c}_q^T & \mathbf{c}_p^T \end{pmatrix} X^T \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \left(X \begin{pmatrix} \mathbf{c}_q \\ \mathbf{c}_p \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{c}_q'^T \mathbf{q} + \mathbf{c}_p'^T \mathbf{p},
\end{aligned}$$

kde $\begin{pmatrix} \mathbf{c}_q' \\ \mathbf{c}_p' \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \mathbf{c}_q \\ \mathbf{c}_p \end{pmatrix}$.

Nakonec zbývá dokázat, že reprezentace π splňuje podmínku homomorfismu Lieových algeber. Ať $X, Y \in \mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$. V tom případě

$$[\pi(X), \pi(Y)](\mathbf{c}_q^T\mathbf{q} + \mathbf{c}_p^T\mathbf{p} + c) =$$

$$= \pi(X)\pi(Y)(\mathbf{c}_q^T\mathbf{q} + \mathbf{c}_p^T\mathbf{p} + c) - \pi(Y)\pi(X)(\mathbf{c}_q^T\mathbf{q} + \mathbf{c}_p^T\mathbf{p} + c) =$$

$$= \{\mu_X, \{\mu_Y, \mathbf{c}_q^T\mathbf{q} + \mathbf{c}_p^T\mathbf{p} + c\}\} - \{\mu_Y, \{\mu_X, \mathbf{c}_q^T\mathbf{q} + \mathbf{c}_p^T\mathbf{p} + c\}\} =$$

$$= \left\{\mu_X, \left(Y\begin{pmatrix}\mathbf{c}_q\\ \mathbf{c}_p\end{pmatrix}\right)^T\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}\right\} - \left\{\mu_Y, \left(X\begin{pmatrix}\mathbf{c}_q\\ \mathbf{c}_p\end{pmatrix}\right)^T\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left((XY - YX)\begin{pmatrix}\mathbf{c}_q\\ \mathbf{c}_p\end{pmatrix}\right)^T\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix} = \left([X, Y]\begin{pmatrix}\mathbf{c}_q\\ \mathbf{c}_p\end{pmatrix}\right)^T\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix} =$$

$$= \{\mu_{[X,Y]}, \mathbf{c}_q^T\mathbf{q} + \mathbf{c}_p^T\mathbf{p} + c\} = \pi([X, Y])(\mathbf{c}_q^T\mathbf{q} + \mathbf{c}_p^T\mathbf{p} + c).$$

□

Pomocí Věty 6 a jejího důkazu jsme již schopni dokázat Větu 5.

Důkaz. Rozepíšeme-li si výraz $\mu_X = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^T B\mathbf{q} - 2\mathbf{q}^T A\mathbf{p} + \mathbf{p}^T C\mathbf{p})$ stejně jako v poznámce pod Větou 5, vidíme, že přiřazení $X \mapsto \mu_X$ je izomorfismus vektorových prostorů (je na i prostý). Využitím Jacobiho identity pro Poissonovu závorku a výpočtů z důkazu Věty 6 získáme rovnost

$$\{\{\mu_X, \mu_Y\}, \mathbf{c}_q^T\mathbf{q} + \mathbf{c}_p^T\mathbf{p} + c\} =$$

$$= \{\mu_X, \{\mu_Y, \mathbf{c}_q^T\mathbf{q}+\mathbf{c}_p^T\mathbf{p}+c\}\} - \{\mu_Y, \{\mu_X, \mathbf{c}_q^T\mathbf{q}+\mathbf{c}_p^T\mathbf{p}+c\}\} = \{\mu_{[X,Y]}, \mathbf{c}_q^T\mathbf{q}+\mathbf{c}_p^T\mathbf{p}+c\},$$

tedy $\{\mu_X, \mu_Y\} = \mu_{[X,Y]}$. Je proto splněna i podmínka homomorfismu Lieových algeber. □

Izomorfismus symplektické algebry a komplexních polynomů druhého stupně jsme získali jen díky jejich akci na lineárních funkcích. Jedná se ve skutečnosti o stejnou konstrukci jako v sekci 1.4.2. V našem případě máme vektorový prostor V tvořený zobecněnými souřadnicemi a hybnostmi spolu s operací Poissonova závorka. Potom báze S^2V je určena polynomy druhého stupně.

2.3 Shrnutí

Vektorový prostor všech funkcí na fázovém prostoru $M = \mathbb{R}^{2d}$ spolu s Poissonovou závorkou tvoří Lieovu algebru. Její podalgebra lineárních polynomů je izomorfní Heisenbergově algebře $\mathfrak{h}_{2d+1}$ a podalgebra polynomů druhého stupně odpovídá symplektické algebře $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{R})$. Dohromady tvoří Lieovu algebru polynomů stupně menšího nebo rovného dvěma.

Tato Lieova algebra ovšem není direktním součtem $\mathfrak{h}_{2d+1} \oplus \mathfrak{sp}(2d, \mathbb{R})$, protože existují nenulové Poissonovy závorky polynomů druhého stupně s lineárními funkcemi. Díky tomu existuje reprezentace symplektické algebry určená adjungovanou akcí na Heisenbergově algebře. Daná tvrzení jsme dokázali i pro obecnější komplexní případy. Jsme tedy v situaci Leviho věty (Věta 4), kde máme Lieovu algebru komplexních polynomů nejvýše druhého stupně, jejímž maximálním řešitelným ideálem je Heisenbergova algebra lineárních polynomů.

3. Kvantově mechanický systém

Stav kvantového systému je popsán vektorem v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Podobně jako prostor všech funkcí $\mathrm{Fun}(M)$ na fázovém prostoru tvoří Lieovu algebru vektorový prostor všech operátorů na $\mathcal{H}$ spolu s operací komutátor. Při přechodu od klasické mechaniky ke kvantové bychom chtěli každé funkci na fázovém prostoru jednoznačně přiřadit operátor na Hilbertově prostoru při současném zachování hodnot Lieových závorek. Proces kvantování je pak možné popsat reprezentací Lieovy algebry $\mathrm{Fun}(M)$ na $\mathcal{H}$.

Ve skutečnosti ne každý operátor na Hilbertově prostoru odpovídá reálně měřitelné veličině. Nepochybně musí být lineární, protože chceme zachovat princip superpozice stavů systému. Všechny možné výstupy měření dané pozorovatelné leží ve spektru příslušného operátoru, proto pozorovatelným veličinám odpovídají operátory s reálným spektrem. Z toho důvodu budeme požadovat, aby hledané operátory byly hermitovské, resp. jejich násobek imaginární jednotkou byl antihermitovský operátor.

Při kvantování tedy usilujeme o nalezení unitární reprezentace $(\pi', \mathcal{H})$ algebry všech funkcí $\mathrm{Fun}(M)$, jež vzájemně jednoznačně přiřadí funkci $f \in \mathrm{Fun}(M)$ antihermitovský operátor $-i\hat{O}_f$ takovým způsobem, aby odpovídající hermitovské pozorovatelné splňovaly

$$\hat{O}_{\{f,g\}} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{O}_f, \hat{O}_g].$$

Uvedeme si dvě konkrétní realizace kvantování a najdeme izomorfismus mezi nimi. Ve výpočtech položíme $\hbar = 1$.

3.1 Schrödingerova reprezentace

Definice 16. *Nechť $L^2(\mathbb{R}^d)$ je vektorový prostor všech komplexních kvadraticky integrabilních funkcí na $\mathbb{R}^d$ spolu se skalárním součinem*

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle : L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) &\to \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \langle\varphi,\psi\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\varphi}\psi dq^d, \end{aligned}$$

kde $\overline{\varphi}(q_1,\ldots,q_d) = \overline{\varphi(q_1,\ldots,q_d)}$. Schrödingerovu reprezentaci $(\Gamma'_S, L^2(\mathbb{R}^d))$ Heisenbergovy algebry $\mathfrak{h}_{2d+1}$ lineárních funkcí definujeme na bázi jako

$$\begin{aligned} \Gamma'_S(q_j)\psi &:= -i\hat{Q}_j\psi := -iq_j\psi, \\ \Gamma'_S(p_j)\psi &:= -i\hat{P}_j\psi := -\frac{\partial}{\partial q_j}\psi, \\ \Gamma'_S(1)\psi &:= -i\mathbf{1}\psi := -i\psi, \end{aligned}$$

kde $j \in \{1,\ldots,d\}$, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Z definice skalárního součinu na $L^2(\mathbb{R}^d)$ lze ověřit, že operátory $\Gamma'_S(q_j)$, $\Gamma'_S(p_j)$ a $\Gamma'_S(1)$ jsou antihermitovské a proto

$$\hat{Q}_j^\dagger = \hat{Q}_j,\ \ \hat{P}_j^\dagger = \hat{P}_j.$$

Výpočet demonstrujeme na příkladě operátoru $\Gamma'_S(q_j)$:

$$\langle \varphi, \Gamma'_S(q_j)\psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi}(-iq_j\psi)\ dq^d = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{(iq_j\varphi)}\psi\ dq^d = \langle -\Gamma'_S(q_j)\varphi, \psi\rangle.$$

Navíc platí, že

$$\left[-i\hat{Q}_j, -i\hat{Q}_k\right] = -\left[q_j, q_k\right] = 0,\ \left[-i\hat{P}_j, -i\hat{P}_k\right] = \left[\frac{\partial}{\partial q_j}, \frac{\partial}{\partial q_k}\right] = 0,$$

$$\left[-i\hat{Q}_j, -i\hat{P}_k\right] = i\left[q_j, \frac{\partial}{\partial q_k}\right] = -i\delta_{jk}\mathbf{1}.$$

Schrödingerova reprezentace je tedy dobře definovaná unitární reprezentace Heisenbergovy algebry. Rozšíříme ji na reálné polynomy druhého stupně, které tvoří Lieovu algebru $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{R})$ s bází

$$\{q_jq_k, p_jp_k : j \leq k; j, k = 1, \ldots, d\} \cup \{q_jp_k : j, k = 1, \ldots, d\}.$$

Věta 7. *Existuje unitární reprezentace $(\Gamma'_S, L^2(\mathbb{R}^d))$ Lieovy algebry $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{R})$ na Hilbertově prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$, která je definována na bázi:*

$$\begin{aligned}
\Gamma'_S(q_jq_k) &:= -i\hat{Q}_j\hat{Q}_k,\\
\Gamma'_S(p_jp_k) &:= -i\hat{P}_j\hat{P}_k,\\
\Gamma'_S(q_jp_k) &:= -i\frac{1}{2}\left(\hat{Q}_j\hat{P}_k + \hat{P}_k\hat{Q}_j\right).
\end{aligned}$$

Důkaz. Protože $\hat{Q}_j, \hat{P}_k$ jsou hermitovské operátory, lze využitím jejich komutačních relací odvodit

$$\left(\hat{Q}_j\hat{Q}_k\right)^\dagger = \hat{Q}_k\hat{Q}_j = \hat{Q}_j\hat{Q}_k\,,\ \left(\hat{P}_j\hat{P}_k\right)^\dagger = \hat{P}_k\hat{P}_j = \hat{P}_j\hat{P}_k\,,$$

$$\frac{1}{2}\left(\hat{Q}_j\hat{P}_k + \hat{P}_k\hat{Q}_j\right)^\dagger = \frac{1}{2}\left(\hat{P}_k\hat{Q}_j + \hat{Q}_j\hat{P}_k\right).$$

Operátor $\Gamma'_S(X)$ je tak antihermitovský pro libovolné $X \in \mathfrak{sp}(2d, \mathbb{R})$. Stačí ještě ověřit přímým výpočtem podmínku homomorfismu algeber:

$$\begin{aligned}
[\Gamma'_S(q_jp_k), \Gamma'_S(q_lq_m)] &= -\frac{1}{2}[\hat{Q}_j\hat{P}_k + \hat{P}_k\hat{Q}_j, \hat{Q}_l\hat{Q}_m] =\\
&= -\frac{1}{2}\hat{Q}_j[\hat{P}_k, \hat{Q}_l\hat{Q}_m] - \frac{1}{2}[\hat{P}_k, \hat{Q}_l\hat{Q}_m]\hat{Q}_j =\\
&= i\hat{Q}_j\hat{Q}_l\delta_{km} + i\hat{Q}_j\hat{Q}_m\delta_{kl} = \Gamma'_S(-q_jq_l\delta_{km} - q_jq_m\delta_{kl}) =\\
&= \Gamma'_S(\{q_jp_k, q_lq_m\})
\end{aligned}$$

a analogicky v ostatních případech. Využili jsme zde vztahy uvedené nad Větou 7 a hodnoty Poissonových závorek z podkapitoly 2.1. □

Schrödingerovu reprezentaci můžeme využít ke kvantování kvadratických polynomů na fázovém prostoru. Ukazuje se, že algebra polynomů nejvýše druhého stupně je největší podmnožina algebry všech polynomů na fázovém prostoru, která je uzavřená na operaci Poissonova závorka. Při zobecňování Schrödingerovy reprezentace na polynomy vyššího stupně bychom zjistili, že monom $q_j^l p_k^m$, $l, m \in \mathbb{N}, l + m > 2$ můžeme po kvantování zapsat pomocí součinu nekomutujících operátorů $\hat{Q}_j, \hat{P}_k$ v různém pořadí. Je možné dokázat, že toto uspořádání nelze volit jednoznačně pro všechny monomy libovolného stupně. Musíme se tudíž pří kvantování omezit na klasické pozorovatelné tvaru kvadratických polynomů (viz Groenewold-van Hoveho věta v [14, str.198]).

3.2 Bargmann-Fockova reprezentace

Prostor $M = \mathbb{R}^{2d}$ se zobecněnými souřadnicemi q_j a hybnostmi p_j je možné parametrizovat pomocí komplexních čísel

$$\begin{aligned} z_j &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j + ip_j), \\ \bar{z}_j &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j - ip_j). \end{aligned}$$

Fázový prostor lze potom chápat jako prostor počátečních podmínek $(z_j(0), \bar{z}_j(0))$ a časový vývoj systému popíšeme funkcemi tvaru

$$\begin{aligned} z_j(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j(t) + ip_j(t)), \\ \bar{z}_j(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j(t) - ip_j(t)). \end{aligned}$$

Ty spolu s konstantní funkcí $(-i)$ splňují komutační relace z Definice 13 Heisenbergovy algebry:

$$\begin{aligned} \{z_j, \bar{z}_k\} &= \frac{1}{2}\{q_j + ip_j, q_k - ip_k\} = -i\delta_{jk}, \\ \{z_j, z_k\} &= \frac{1}{2}\{q_j + ip_j, q_k + ip_k\} = 0, \\ \{\bar{z}_j, \bar{z}_k\} &= \frac{1}{2}\{q_j - ip_j, q_k - ip_k\} = 0. \end{aligned}$$

Definice 17. *Nechť $\mathcal{F}_d$ je vektorový prostor všech holomorfních funkcí na $\mathbb{C}^d$ v d komplexních proměnných spolu se skalárním součinem*

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{F}_d \times \mathcal{F}_d &\to \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \langle \varphi | \psi \rangle := \int_{\mathbb{C}^d} \overline{\varphi} \psi \exp\left(-\sum_{j=1}^{d} |w_j|^2 \right) dx^d dy^d, \end{aligned}$$

kde $w_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ a $\overline{\varphi}(w_1, \ldots, w_d) = \overline{\varphi(w_1, \ldots, w_d)}$. Nazveme jej Fockův prostor. Bargmann-Fockovu (oscilátorovou) reprezentaci $(\Gamma'_B, \mathcal{F}_d)$ algebry $\mathfrak{h}_{2d+1} \otimes$

$\mathbb{C}$ *na Fockově prostoru definujeme na bázi jako*

$$\begin{aligned}\Gamma'_B(1)\psi &:= -i\mathbf{1}\psi := -i\psi,\\ \Gamma'_B(\bar{z}_j)\psi &:= -ia_j^\dagger\psi := -iw_j\psi,\\ \Gamma'_B(z_j)\psi &:= -ia_j\psi := -i\frac{\partial}{\partial w_j}\psi\end{aligned}$$

pro libovolné $j \in \{1, \ldots, d\}$, $\psi \in \mathcal{F}_d$.

Vzájemné komutační relace výše uvedených operátorů jsou:

$$\begin{aligned}\left[a_k, a_j^\dagger\right] &= \frac{\partial}{\partial w_k}w_j - w_j\frac{\partial}{\partial w_k} = \delta_{jk}\mathbf{1} + w_j\frac{\partial}{\partial w_k} - w_j\frac{\partial}{\partial w_k} = \delta_{jk}\mathbf{1},\\ [a_k, a_j] &= \frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial}{\partial w_j} - \frac{\partial}{\partial w_j}\frac{\partial}{\partial w_k} = 0,\\ \left[a_k^\dagger, a_j^\dagger\right] &= w_k w_j - w_j w_k = 0.\end{aligned}$$

Vyhovují tak definici bosonových operátorů a splňují kanonické komutační relace definované v sekci 1.5.1

$$[a_k, a_j^\dagger] = \delta_{kj}\mathbf{1},\ [a_k, a_j] = 0 = [a_k^\dagger, a_j^\dagger].$$

Anihilační a kreační operátory tvoří vektorový prostor $\{a_j, a_j^\dagger\}_{j=1}^d \subseteq \operatorname{End}(\mathcal{F}_d)$ operátorů obecně zavedených v 1.5.1. Pomocí jejich symetrické mocniny jsme v sekci 1.5.3 odvodili tvar oscilátorové realizace symplektické algebry. Ke stejnému závěru bychom chtěli dojít z rozšíření Bargmann-Fockovy reprezentace na Lieovu algebru komplexních polynomů druhého stupně.

Z 1.4.2 víme, že symplektická algebra je izomorfní symetrické mocnině druhého stupně na prostoru funkcí $\{z_j, \bar{z}_j\}_{j=1}^d$. Tu generují právě komplexní polynomy druhého stupně. Jejich kvantováním získáme (až na konstantu) oscilátorovou realizaci symplektické algebry z sekce 1.5.3. Schématicky lze uvedený proces znázornit jako:

$$S^2(\langle z_j, \bar{z}_j\rangle) \cong \mathfrak{sp}(\langle z_j, \bar{z}_j\rangle, \{\cdot,\cdot\}) \xrightarrow[\textit{reprezentace}]{\textit{Barg.-Fockova}} S^2(\langle a_j, a_j^\dagger\rangle) \cong \mathfrak{sp}(\langle a_j, a_j^\dagger\rangle, [\cdot,\cdot]).$$

Popsaným způsobem je možné zkonstruovat oscilátorovou realizaci symplektické algebry jen díky adjungované akci bilineárních kombinací bosonových operátorů na anihilačních a kreačních operátorech. Ta se na ně přenese Bargmann-Fockovou reprezentací z adjungované akce polynomů druhého stupně na lineárních funkcích.

Věta 8. *Existuje reprezentace* $(\Gamma'_B, \mathcal{F}_d)$ *Lieovy algebry* $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ *na Fockově prostoru, která je definována na bázi:*

$$\begin{aligned}&\Gamma'_B(z_j z_k) := -ia_j a_k,\ \Gamma'_B(\bar{z}_j\bar{z}_k) := -ia_j^\dagger a_k^\dagger,\\ &\Gamma'_B(\bar{z}_j z_k) := -ia_j^\dagger a_k \quad \textit{pro } j \neq k,\\ &\Gamma'_B(\bar{z}_j z_j) := -\frac{i}{2}(a_j^\dagger a_j + a_j a_j^\dagger) = -i(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

Tato reprezentace je unitární pro podalgebru $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{R})$ reálných polynomů stupně dva.

Důkaz. Stačí nám ověřit podmínku homomorfismu algeber. Opět nebudeme propočítávat všechny komutační relace, ale ukážeme si jeden příklad. Ve výpočtu použijeme kanonické komutační relace a hodnoty Poissonových závorek uvedených nad Definicí 17.

$$\begin{aligned}[\Gamma'_B(\bar{z}_j z_k), \Gamma'_B(z_l z_m)] = -[a_j^\dagger a_k, a_l a_m] = a_m a_k \delta_{lj} + a_l a_k \delta_{jm} = \\ = \Gamma'_B(i z_m z_k \delta_{lj} + i z_l z_k \delta_{jm}) = \Gamma'_B(\{\bar{z}_j z_k, z_l z_m\}).\end{aligned}$$

Daná reprezentace tedy splňuje podmínku homomorfismu algeber. Restrikcí Γ'_S na podalgebru $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{R})$ se omezíme na reálné polynomy stupně dva, které jsou generovány množinou

$$\{z_j z_k + \bar{z}_j \bar{z}_k, i(z_j z_k - \bar{z}_j \bar{z}_k), \bar{z}_j z_k + \bar{z}_k z_j, i(\bar{z}_j z_k - \bar{z}_k z_j) : j \leq k; j,k = 1, \ldots, d\}.$$

Bargmann-Fockovou reprezentací dostáváme pro $j \neq k$ operátory:

$$\begin{aligned}\Gamma'_B(z_j z_k + \bar{z}_j \bar{z}_k) &= -i(a_j a_k + a_j^\dagger a_k^\dagger), \\ \Gamma'_B(i(z_j z_k - \bar{z}_j \bar{z}_k)) &= (a_j a_k - a_j^\dagger a_k^\dagger), \\ \Gamma'_B(\bar{z}_j z_k + z_j \bar{z}_k) &= -i(a_j^\dagger a_k + a_j a_k^\dagger), \\ \Gamma'_B(i(\bar{z}_j z_k - z_j \bar{z}_k)) &= (a_j^\dagger a_k - a_j a_k^\dagger), \\ \Gamma'_B(\bar{z}_j z_j) &= -i(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

Analogicky jako při důkazu antihermitovskosti operátorů ve Schrödingerově reprezentaci lze ověřit, že $(a_j)^\dagger = a_j^\dagger$. Proto výše uvedené operátory jsou antihermitovské a jedná se o unitární reprezentaci algebry $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{R})$. □

Poznámka: Bosonová oscilátorová realizace symplektické algebry $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ a Heisenbergovy algebry $\mathfrak{h}_{2d+1}$ tvoří podmnožinu nekonečně dimenzionální komplexní Weylovy algebry $\mathrm{Weyl}(2d, \mathbb{C})$. Ta je generována bosonovými operátory, které splňují kanonické komutační relace uvedené v sekci 1.5.1. Její báze jakožto vektorového prostoru je dána jednotkovým operátorem $\mathbf{1}$ a elementy tvaru

$$\prod_{j,k=1}^{d} (a_j^\dagger)^{l_j} (a_k)^{m_k},$$

kde $l_j, m_k \in \mathbb{N}_0$.

3.3 Vztah Schrödingerovy a Bargmann-Fockovy reprezentace

Pokud uvažujeme jen unitární reprezentace Heisenbergovy algebry, které vznikly jako tečné zobrazení k reprezentaci příslušné Heisenbergovy grupy, Stone-von Neumannova věta nám zaručuje jedinečnost Schrödingerovy reprezentace Γ'_S.

Věta 9 (Stone-von Neumann)**.** *Jakákoliv ireducibilní reprezentace $(\pi', \mathcal{H})$ Heisenbergovy algebry na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ splňující $\pi'(1) = -i\mathbf{1}$ je unitárně ekvivalentní s ireducibilní Schrödingerovou reprezentací.*

Z Věty 9 vyplývá existence bijektivního zobrazení $\mathcal{B}$ splňujícího

$$\mathcal{B} : \mathcal{F}_d \to L^2(\mathbb{R}^d),$$

které se nazývá Bargmannova transformace. Po libovolné $X \in \mathfrak{h}_{2d+1}$ platí, že

$$\Gamma'_B(X) = \mathcal{B}^{-1}\Gamma'_S(X)\mathcal{B}.$$

V souladu s naší volbou souřadnic $\{z_j, \bar{z}_j\}_{j=1}^d$ na fázovém prostoru (viz [14, str.264] a [14, kapitola 26]) můžeme anihilačním a kreačním operátorům přiřadit operátory ze Schrödingerovy reprezentace

$$a_j^\dagger \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}_j - i\hat{P}_j), \qquad a_j \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}_j + i\hat{P}_j)$$

nebo inverzně

$$\hat{Q}_j \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(a_j^\dagger + a_j), \qquad \hat{P}_j \mapsto i\frac{1}{\sqrt{2}}(a_j^\dagger - a_j).$$

3.4 Příklad pro $d = 1$

Lineární polynomy na fázovém prostoru $M = \mathbb{R}^2$ tvoří Heisenbergovu algebru s bází $\{p, q, 1\}$. Polynomy druhého stupně $\{pq, q^2, p^2\}$ jsou díky jejich adjungované akci na lineárních funkcích izomorfní symplektické algebře. Konkrétně lze využít výsledků z Věty 6, pomocí nichž získáme explicitní tvar zobrazení mezi maticovou realizací $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ a funkcemi na fázovém prostoru:

$$\begin{aligned}
\left\{pq, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\right\} &= \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} &&\Rightarrow pq \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: -H, \\
\left\{p^2, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\right\} &= \begin{pmatrix} -2p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} &&\Rightarrow p^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =: -X_-, \\
\left\{q^2, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\right\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} &&\Rightarrow q^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := X_+.
\end{aligned}$$

Tyto matice jsme definovali v sekci 1.4.2. Zde jsme využili zjednodušeného značení $H \equiv H_1$, $X_+ \equiv X_{+1+1}$ a $X_- \equiv X_{-1-1}$. Jejich reálné lineární kombinace generují algebru $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Fázový prostor lze také chápat jako komplexní rovinu parametrizovanou souřadnicemi

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \text{ a } \bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip).$$

Množina $\{z, \bar{z}, 1\}$ tvoří bázi algebry $\mathfrak{h}_3 \otimes \mathbb{C}$. Jedná se tak o unitární transformaci souřadnic fázového prostoru

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} =: B\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Akce polynomů druhého stupně na funkcích $\{q, p\}$ je

$$\left\{\bar{z}z, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\right\} = -iB \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{z}z \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: \tilde{H},$$
$$\left\{\bar{z}^2, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\right\} = -iB \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{z}^2 \mapsto \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} =: \tilde{X}_-,$$
$$\left\{z^2, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\right\} = -iB \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \Rightarrow z^2 \mapsto \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} =: \tilde{X}_+.$$

Změna báze komplexních lineárních funkcí na fázovém prostoru potom odpovídá změně báze v maticové realizaci $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ z matic $\{-H, X_+, -X_-\}$ na matice $\{\tilde{H}, \tilde{X}_+, \tilde{X}_-\}$. Podalgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ reálných matic s nulovou stopou je izomorfní s reálnými polynomy druhého stupně

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \bar{z}z, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto z^2 + \bar{z}^2, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mapsto i(z^2 - \bar{z}^2).$$

Kvantování kvadratických funkcí lze provést dvěma způsoby - Schrödingerovou reprezentací na $L^2(\mathbb{R})$ nebo Bargmann-Fockovou reprezentací na Fockově prostoru $\mathcal{F}_1$ všech holomorfních funkcí na $\mathbb{C}$. Adjungovaná akce polynomů druhého stupně na lineárních funkcích se přenese na akci bilineárních kombinací bosonových operátorů na $\{\mathbf{1}, a, a^\dagger\}$, popř. na akci operátorů $\hat{Q}^2, \hat{P}^2, \frac{1}{2}(\hat{P}\hat{Q} + \hat{Q}\hat{P})$ na $\{\mathbf{1}, \hat{Q}, \hat{P}\}$. Přesně tuto akci jsme v sekci 1.5.1 použili ke konstrukci oscilátorové realizace symplektické algebry. Konkrétně tedy pro anihilační a kreační operátory platí

$$\left[a^\dagger a + \frac{1}{2}, \begin{pmatrix} a^\dagger \\ a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a^\dagger \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger \\ a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a^\dagger a + \frac{1}{2} \mapsto H,$$
$$\left[a^{\dagger 2}, \begin{pmatrix} a^\dagger \\ a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger \\ a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a^{\dagger 2} \mapsto -X_+,$$
$$\left[a^2, \begin{pmatrix} a^\dagger \\ a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger \\ a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a^2 \mapsto X_-.$$

Vztah mezi operátory z Bargmann-Fockovy a Schrödingerovy reprezentace je určen Bargmannovou transformací. Protože obě reprezentace působí na dvou různých Hilbertových prostorech, její tvar je složitější, než jen změna báze na vektorovém prostoru. Konkrétní předpis je pak uveden v 3.3.

Poznámka: V podkapitole 1.5 jsme si uvedli dva způsoby, jak získat bosonovou oscilátorovou realizaci symplektické algebry. Při kvantování jsme využili konstrukci pomocí symetrické mocniny vektorového prostoru bosonových operátorů. Na druhou stranu bychom mohli využít maticovou realizaci. K tomu bychom potřebovali dvojnásobný počet anihilačních a kreačních operátorů, které ale nedostaneme z kvantování Heisenbergovy algebry lineárních funkcí. V další kapitole ovšem uvidíme, že pro jisté podalgebry $\mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ se operátory získané Bargmann-Fockovou reprezentací shodují s operátory, které bychom získali při konstrukci oscilátorové realizace algebry pomocí její maticové realizace.

4. Harmonický oscilátor

Výsledky dosažené v předchozích kapitolách nyní demonstrujeme na příkladě harmonického oscilátoru. Jeho Hamiltonova funkce je kvadratická v zobecněných souřadnicích a hybnostech, proto můžeme využít kvantování pomocí Schrödingerovy nebo Bargmann-Fockovy reprezentace.

4.1 Klasický harmonický oscilátor

Mějme částici, která se pohybuje v silovém poli, jehož potenciál $V(r)$ závisí jen na radiální vzdálenosti od centra síly. Pokud má tento potenciál své lokální minimum v bodě r_0 a existuje pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ konečná derivace $\left.\frac{d^n V}{dr^n}\right|_{r=r_0}$, můžeme $V(r)$ na okolí minima rozvinout do Taylorovy řady

$$V(r+r_0) = V(r_0) + r\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=r_0} + \frac{1}{2}r^2\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_0} + \dots$$

Při volbě nulové hladiny $V(r_0) = 0$ s přeškálováním $r_0 = 0$ aproximujeme v blízkosti minima potenciál harmonickým oscilátorem $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ o hmotnosti m a úhlové frekvenci $\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_0}}$.[1] Hamiltonova funkce na fázovém prostoru $M = \mathbb{R}^{2d}$ má potom tvar

$$h = \sum_{j=1}^{d}\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \sum_{j=1}^{d}\left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_j^2\right).$$

Pro jednoduchost následujících výpočtů položíme $m = 1 = \omega$. Časový vývoj systému je popsán Hamiltonovými kanonickými rovnicemi

$$\dot{q}_j = \frac{\partial h}{\partial p_j} = p_j, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial h}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = -q_j.$$

Derivací podle času jedné rovnice a dosazením do druhé dostáváme diferenciální rovnice druhého řádu pro zobecněné souřadnice $q_j(t)$ a zobecněné hybnosti $p_j(t)$

$$\ddot{q}_j + q_j = 0, \qquad \ddot{p}_j + p_j = 0.$$

Řešením jsou pro počáteční podmínky $q_j(0), p_j(0)$ funkce

$$q_j(t) = q_j(0)\cos t + p_j(0)\sin t,$$
$$p_j(t) = p_j(0)\cos t - q_j(0)\sin t.$$

[1]Úhlová frekvence ω je tímto způsobem dobře definovaná, protože v minimu $\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_0} \geq 0$. V naší práci budeme předpokládat, že $\omega \neq 0$.

Jak jsme uvedli v podkapitole 3.2, fázový prostor lze chápat jako vektorový prostor $\mathbb{C}^d$. Časový vývoj systému popíšeme pomocí funkcí $z_j(t)$ a $\bar{z}_j(t)$, které splňují diferenciální rovnici prvního řádu

$$\dot{z}_j(t) + iz_j(t) = 0.$$

Toto tvrzení je možné odvodit z konkrétního tvaru pohybových rovnic pro zobecněné souřadnice a hybnosti

$$\dot{z}_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot{q}_j(t) + i\dot{p}_j(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial h}{\partial p_j} - i\frac{\partial h}{\partial q_j}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_j(t) - iq_j(t)\right) = -iz_j(t).$$

Hamiltonova funkce na $\mathbb{C}^d$ má potom jednoduchý tvar $h = \sum_{j=0}^{d} \bar{z}_j z_j$.

4.2 Kvantový harmonický oscilátor

Od klasického přejdeme ke kvantovému harmonickému oscilátoru. Z kapitoly 3 známe dva způsoby kvantování klasického systému - pomocí Schrödingerovy nebo Bargmann-Fockovy reprezentace. V obou případech uvedeme řešení problému harmonického oscilátoru a porovnáme obě metody. V následujících výpočtech opět budeme počítat s $\omega = m = 1 = \hbar$.

4.2.1 Harmonický oscilátor ve Schrödingerově reprezentaci

Každý bod $(q_j(0), p_j(0))$ fázového prostoru $M = \mathbb{R}^{2d}$ parametrizuje jedno řešení Hamiltonových rovnic pro harmonický oscilátor. Přejdeme-li ke kvantovému harmonickému oscilátoru, stav systému je plně popsán vektorem v Hilbertově prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$. Podalgebra kvadratických funkcí na M se Schrödingerovou reprezentací zobrazí na antihermitovské operátory na $L^2(\mathbb{R}^d)$. Vynásobením imaginární jednotkou získáme hermitovské operátory náležející pozorovatelným veličinám. Konkrétně pro Hamiltonovu funkci dostáváme příslušný Hamiltonův operátor

$$h = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(p_j^2 + q_j^2\right) \mapsto \hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(\hat{P}_j^2 + \hat{Q}_j^2\right).$$

Vlastní čísla Hamiltonova operátoru interpretujeme jako celkovou energii systému, která je součtem potenciální a kinetické energie harmonického oscilátoru. Protože $\hat{H}$ není funkcí času, bude stav o dané energii E popsán vlnovou funkcí $\psi(q_1, \ldots, q_d) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ splňující nečasovou Schrödingerovu rovnici

$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

Předpokládejme, že $\psi(q_1, \ldots, q_d) = \prod_{j=1}^{d} \psi_j(q_j)$ a $E = \sum_{j=1}^{d} E_j$. Z jedné rovnice pro funkci o d neznámých tak získáme d nezávislých rovnic pro funkce jedné proměnné

$$\frac{1}{2}\left(\hat{P}_j^2 + \hat{Q}_j^2\right)\psi_j(q_j) = E_j\psi_j(q_j).$$

Řešení těchto diferenciálních rovnic bychom hledali ve tvaru mocninné řady a pomocí podmínek na konečnost funkcí $\psi_j(q_j)$. Z požadavků na asymptotické chování stavů systému bychom následně určili energetické spektrum. Přesný výpočet zde nebudeme uvádět, je možné jej nalézt v [10, str. 57]. Nakonec bychom získali

$$E_j = E_{jn} = n_j + \frac{1}{2},\ n_j \in \mathbb{N}_0, \qquad \psi_j(q_j) \propto H_n(q_j) \exp\left(-\frac{q_j^2}{2}\right),$$

kde $H_n(q_j)$ je Hermitův polynom.[2]

4.2.2 Harmonický oscilátor v Bargmann-Fockově reprezentaci

Body $(z_j(0), \bar{z}_j(0)) \in \mathbb{C}^d$ na fázovém prostoru parametrizují řešení pohybových rovnic harmonického oscilátoru. Prostor stavů příslušného kvantového systému tvoří Fockův prostor $\mathcal{F}_d$. Pro označení vektorů na tomto Hilbertově prostoru budeme používat Diracovu notaci. Normalizovaný stavový vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{F}_d$ nazveme ket-vektorem a jemu příslušný lineární funkcionál $\langle\psi|$ pojmenujeme bra-vektor.

Pomocí Bargmann-Fockovy reprezentace kvantujeme kvadratické funkce na $\mathbb{C}^d$. Hamiltonova funkce h má na kvantovém systému odpovídající Hamiltonův operátor $\hat{H}$ takzvaného bosonového harmonického oscilátoru

$$h = \sum_{j=0}^{d} \bar{z}_j z_j \mapsto \hat{H} = \sum_{j=0}^{d} \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2}\right) =: \sum_{j=0}^{d} \hat{H}_j.$$

Stejně jako v případě Schrödingerovy reprezentace hledáme řešení nečasové Schrödingerovy rovnice

$$\hat{H}|\psi_j\rangle = E|\psi_j\rangle$$

pro $|\psi_j\rangle \in \mathcal{F}_d$. Předpokládejme opět, že $|\psi\rangle = \otimes_{j=1}^{d}|\psi_j\rangle$, $|\psi_j\rangle \in \mathcal{F}_1$ a $E = \sum_{j=1}^{d} E_j$. Stačí nám potom řešit d nezávislých rovnic

$$\hat{H}_j|\psi_j\rangle = \left(\hat{N}_j + \frac{1}{2}\right)|\psi_j\rangle = E_j|\psi_j\rangle,$$

kde $\hat{N}_j := a_j^\dagger a_j$ je operátor počtu částic. Ten splňuje s anihilačními a kreačními operátory následující komutační relace:

$$\left[\hat{N}_j, a_j\right] = -a_j, \qquad \left[\hat{N}_j, a_j^\dagger\right] = a_j^\dagger.$$

Ať tedy $|n_j\rangle \in \mathcal{F}_1$ a $\hat{N}_j|n_j\rangle = n_j|n_j\rangle$. Potom $n_j \in \mathbb{R}_0^+$, protože

$$n_j = \langle n_j|\hat{N}_j|n_j\rangle = \langle n_j|a_j^\dagger a_j|n_j\rangle = |\ a_j|n_j\rangle\ |^2 \geq 0.$$

[2]Pokud bychom nevolili jednotky $m = 1 = \omega = \hbar$, dostali bychom výsledek

$$E_{jn} = \hbar\omega\left(n_j + \frac{1}{2}\right),\ n_j \in \mathbb{N}_0, \qquad \psi_j(q_j) \propto H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} q_j\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} q_j^2\right).$$

Navíc

$$\hat{N}_j a_j|n_j\rangle = (a_j\hat{N}_j - a_j)|n_j\rangle = (n_j - 1)a_j|n_j\rangle \Rightarrow a_j|n_j\rangle \propto |n_j - 1\rangle$$

a

$$\hat{N}_j a_j^\dagger|n_j\rangle = (a_j^\dagger\hat{N}_j + a_j^\dagger)|n_j\rangle = (n_j + 1)a^\dagger|n_j\rangle \Rightarrow a_j^\dagger|n_j\rangle \propto |n_j + 1\rangle.$$

Vidíme, že aplikováním operátoru a_j (anihilační operátor) získáme stav s vlastním číslem o jedničku menším a naopak použitím operátoru $a_j^\dagger$ (kreační operátor) dostáváme stav s vlastním číslem o jedničku větším. Proto

$$E_j = E_{jn} = \left(n_j + \frac{1}{2}\right),$$

$n_j \in \mathbb{N}_0$. Jelikož spektrum operátoru $\hat{H}_j$ je zdola omezené, existuje jeho vlastní stav $|0_j\rangle$ s nejnižší energií $E_{j0} = \frac{1}{2}$ splňující rovnici

$$a_j|0_j\rangle = 0.$$

Řešení je možné získat explicitním dosazením tvaru anihilačního operátoru z Definice 17. Vlastní stav Hamiltonova operátoru harmonického oscilátoru s nejnižší energií $E_0 = \frac{d}{2}$ je v tom případě

$$|0\rangle = \otimes_{j=1}^d |0_j\rangle$$

a lze jej vynulovat působením jakéhokoliv anihilačního operátoru. Vyhovuje tudíž podmínce pro vektor nejvyšší váhy reprezentace (viz sekce 1.4.3). Ostatní vlastní stavy operátoru $\hat{H}$ příslušející energii

$$E = \sum_{j=1}^{d}\left(n_j + \frac{1}{2}\right)$$

jsou určeny vztahem

$$|n\rangle = \otimes_{j=1}^d |n_j\rangle \propto \prod_{j=1}^{d}\left(a_j^\dagger\right)^{n_j}|0\rangle.$$

Na rozdíl od Schrödingerovy reprezentace jsme byli schopni v Bargmann-Fockově reprezentaci odvodit hodnoty energií E_j jen z komutačních relací bez znalosti konkrétního tvaru vlastních vektorů Hamiltonova operátoru. Pro získání energetického spektra kvantového harmonického oscilátoru je tedy výhodnější použít kvantování pomocí Bargmann-Fockovy reprezentace.

4.3 Symetrie harmonického oscilátoru

Ať f je funkce na fázovém prostoru. Předpokládáme-li, že $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, pak v klasickém systému se hodnota této pozorovatelné veličiny s časem nemění právě tehdy, když $\{h, f\} = 0$. Funkci f nazveme integrálem pohybu.

V kapitole 2 jsme ukázali, že komplexní polynomy nejvýše druhého stupně na fázovém prostoru tvoří Lieovu algebru. Její bázi lze psát

$$\{1, z_j, \bar{z}_j, z_j z_k, \bar{z}_j \bar{z}_k, \bar{z}_j z_k : j \leq k; j, k = 1, \ldots, d\}.$$

Poissonovy závorky Hamiltonovy funkce $h = \sum_{j=1}^{d} \bar{z}_j z_j$ harmonického oscilátoru spolu s těmito polynomy jsou:

$$\begin{array}{lll} \{h, 1\} = 0, & \{h, z_k\} = i z_k, & \{h, \bar{z}_k\} = -i \bar{z}_k, \\ \{h, z_k z_l\} = 2i z_k z_l, & \{h, \bar{z}_k \bar{z}_l\} = -2i \bar{z}_k \bar{z}_l, & \{h, \bar{z}_k z_l\} = 0. \end{array}$$

Pokud neuvažujeme triviální integrál pohybu $1 \in \mathrm{Fun}(M)$, pak podmnožina zachovávajících se polynomů maximálně druhého stupně je generována funkcemi

$$\{\bar{z}_j z_k : j, k = 1, \ldots, d\}.$$

Ty splňují stejné komutační relace jako bázové elementy maticové realizace algebry $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$:

$$[E_{k,j}, E_{l,m}] = E_{k,m} \delta_{jl} - E_{l,j} \delta_{km} \quad \leftrightarrow \quad \{\bar{z}_k z_j, \bar{z}_l z_m\} = -i \left(\bar{z}_k z_m \delta_{jl} - \bar{z}_l z_j \delta_{km} \right).$$

Prvky $\bar{z}_j z_k$ tedy generují Lieovu algebru izomorfní s obecnou lineární algebrou. Při studiu fyzikálního systému ovšem nechceme kvantovat komplexní, ale reálné polynomy druhého stupně. Protože $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{C}) = \mathfrak{u}(d) \otimes \mathbb{C}$,[3] hledané reálné polynomy tvoří unitární algebru, která je generována množinou

$$\{\bar{z}_j z_j, \bar{z}_j z_k + \bar{z}_k z_j, i(\bar{z}_j z_k - \bar{z}_k z_j) : j, k = 1, \ldots, d\}.$$

Hamiltonova funkce harmonického oscilátoru je generátorem jednodimenzionální podalgebry $\mathfrak{u}(1) \in \mathfrak{u}(d)$, dokonce

$$\mathfrak{u}(d) = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(d).$$

Příslušný Hamiltonův operátor komutuje se všemi zbývajícími operátory z podalgebry $\mathfrak{su}(d)$. Analogicky s klasickým systémem se v čase zachovávají hodnoty příslušných pozorovatelných[4] odpovídajících operátorům unitární algebry. Řekneme pak, že algebra $\mathfrak{u}(d)$ generuje grupu $\mathrm{U}(d)$ symetrií harmonického oscilátoru. Ve Schrödingerově reprezentaci se jedná o operátory

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(\hat{Q}_j^2 + \hat{P}_j^2 \right), \hat{Q}_j \hat{Q}_k + \hat{P}_j \hat{P}_k, \hat{Q}_k \hat{P}_j - \hat{Q}_j \hat{P}_k : j, k = 1, \ldots, d \right\}$$

a v Bargmann-Fockově reprezentaci mají tvar

$$\left\{ a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2}, a_j^\dagger a_k + a_j a_k^\dagger, i \left(a_j^\dagger a_k - a_j a_k^\dagger \right) : j, k = 1, \ldots, d \right\}.$$

[3]Toto tvrzení můžeme jednoduše dokázat v maticové realizaci obecné lineární algebry. Mějme libovolný prvek $X \in \mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$. Pak $X = \frac{1}{2} i \left((iX)^\dagger - iX \right) + \frac{1}{2} \left(X - X^\dagger \right)$. Protože $\left[\frac{1}{2} \left((iX)^\dagger - iX \right) \right]^\dagger = -\frac{1}{2} \left((iX)^\dagger - iX \right)$ a $\left[\frac{1}{2} \left(X - X^\dagger \right) \right]^\dagger = -\frac{1}{2} \left(X - X^\dagger \right)$, můžeme psát $X = U + iV$, $U, V \in \mathfrak{u}(d)$. Tedy $X \in \mathfrak{u}(d) \otimes \mathbb{C}$. Stejně tak každý prvek komplexifikované algebry $\mathfrak{u}(d)$ je zároveň prvkem algebry $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$.

[4]Přesněji řečeno se v čase zachovává rozdělení pravděpodobností naměření jednotlivých hodnot pozorovatelných.

4.3.1 Prostorové rotace

Zajímavou podalgebrou zachovávajících se pozorovatelných veličin je $\mathfrak{so}(d, \mathbb{R}) \in \mathfrak{su}(d)$. Příslušné hermitovské operátory mají v Bargmann-Fockově reprezentaci tvar $\hat{X}_{jk} = i\left(a_j^\dagger a_k - a_j a_k^\dagger\right)$ a ve Schrödingerově reprezentaci $\hat{L}_{jk} = \hat{Q}_j\hat{P}_k - \hat{Q}_k\hat{P}_j$. Jejich vzájemné komutační relace jsou

$$[\hat{L}_{jk}, \hat{L}_{lm}] = i\left(\hat{L}_{jm}\delta_{kl} + \hat{L}_{kl}\delta_{mj} + \hat{L}_{mk}\delta_{jl} + \hat{L}_{lj}\delta_{km}\right).$$

Splňují stejné komutační relace jako operátory momentu hybnosti zobecněné do d dimenzí (viz [6, str. 148]). Ty jsou infitesimálními generátory reprezentace Lieovy grupy prostorových rotací. Lieova grupa $SO(d, \mathbb{R})$ je tudíž grupou symetrií harmonického oscilátoru. To nám říká, že stav systému harmonického oscilátoru je invariantní vůči všem prostorovým rotacím. Ke stejnému závěru bychom obecně došli u všech fyzikálních systémů, u nichž potenciál závisí jen na radiální vzdálenosti od centra síly.

4.4 Harmonický oscilátor v $\mathbb{R}^3$

Nakonec si uvedeme konkrétní příklad harmonického oscilátoru ve třech dimenzích. Výsledky předložíme včetně náležitého použití konstant $m, \omega, \hbar$. Stav klasického systému popíšeme jako bod $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ ve fázovém prostoru $M = \mathbb{R}^6$. Na něm máme Hamiltonovu funkci

$$h = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{p_j^2}{m} + m\omega^2 q_j^2\right).$$

Pomocí Schrödingerovy reprezentace přejdeme k Hamiltonovu operátoru

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\hat{P}_j^2}{m} + m\omega^2 \hat{Q}_j^2\right),$$

který působí na prostoru $L^2(\mathbb{R}^3)$ všech stavů kvantového harmonického oscilátoru.

Alternativně lze fázový prostor chápat jako vektorový prostor $\mathbb{C}^3$, který v tomto případě parametrizujeme pomocí komplexních čísel

$$z_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(q_j + \frac{i}{m\omega}p_j\right),$$
$$\bar{z}_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(q_j - \frac{i}{m\omega}p_j\right).$$

Aktuální stav harmonického oscilátoru je jednoznačně charakterizován bodem $(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$. Hamiltonova funkce má tvar

$$h = \sum_{j=1}^{3}\omega\bar{z}_j z_j.$$

Pomocí Bargmann-Fockovy reprezentace při správném použití konstanty $\hbar$ získáme Hamiltonův operátor

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\sum_{j=1}^{3} a_j^\dagger a_j + \frac{3}{2} \right),$$

který působí na Fockově prostoru $\mathcal{F}_3$ všech stavů kvantového systému.

V obou uvedených případech lze určit vztah pro energii kvantového harmonického oscilátoru

$$E = \hbar\omega \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right),$$

kde $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$. Vidíme, že jedné energii může náležet více stavů systému s různými trojicemi čísel n_j, $j \in \{1, \dots, 3\}$. To indikuje přítomnost netriviální grupy symetrií systému. Reprezentace příslušné Lieovy algebry na prostoru stavů by nám dala operátory odpovídající zachovávajícím se pozorovatelným veličinám. Jak jsme zjistili na začátku podkapitoly 4.3, takovou Lieovou algebrou je $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$, resp. unitární algebra $\mathfrak{u}(3)$, budeme-li připouštět jen operátory odpovídající reálně měřitelným veličinám.

Harmonický oscilátor patří mezi fyzikální systémy, jejichž Hamiltonův operátor je invariantní vůči prostorovým rotacím. Proto mezi zachovávajícími se pozorovatelnými nalezneme i operátory algebry $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$. Bázové prvky maticové realizace speciální ortogonální algebry jsou

$$\tilde{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odpovídající hermitovské operátory můžeme zapsat ve Schrödingerově reprezentaci jako

$$\hat{L}_j = \epsilon_{jkl} \hat{Q}_k \hat{P}_l.$$

Bargmann-Fockova reprezentace nám dává pro speciální ortogonální algebru operátory, které lze rovněž získat konstrukcí oscilátorové realizace z sekce 1.5.2 pomocí výše uvedené maticové realizace:

$$\hat{X}_j = i\hbar \epsilon_{jkl} a_k^\dagger a_l = i\hbar \sum_{k,l=1}^{3} a_k^\dagger \left(\tilde{L}_j \right)_{kl} a_l.$$

Ve všech třech případech pak platí pro komutační relace jednoduchý vztah

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar \epsilon_{jkl} \hat{L}_l.$$

4.5 Fermionový harmonický oscilátor

Operátory algebry $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$ mají v Bargmann-Fockově reprezentaci tvar bilineárních kombinací bosonových operátorů, pro které platí

$$a_j^\dagger a_k = \sum_{l,m=1}^{d} a_l^\dagger \left(E_{j,k} \right)_{lm} a_m.$$

Tato oscilátorová realizace obecné lineární, resp. unitární algebry je určena její maticovou realizací stejným způsobem, jako jsme si uvedli v sekci 1.5.2. Formálně bychom mohli tyto algebry také zkonstruovat pomocí fermionových operátorů zavedených v 1.5.1:

$$f_j^\dagger f_k = \sum_{l,m=1}^{d} f_l^\dagger \left(E_{j,k}\right)_{lm} f_m.$$

Protože

$$\sum_{j=1}^{d} \left(f_j^\dagger f_j + f_j f_j^\dagger\right) = \sum_{j=1}^{d} \mathbf{1},$$

definujeme Hamiltonův operátor fermionového harmonického oscilátoru jako

$$\hat{H} := \sum_{j=1}^{d} \left(f_j^\dagger f_j - f_j f_j^\dagger\right) = \sum_{j=1}^{d} \left(f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2}\right).$$

Oproti bosonovému případu se zde vyskytuje rozdíl bilineárních kombinací operátorů.

Opět budeme předpokládat, že vlastní stavy $\hat{H}$ jsou ve tvaru $|n\rangle = \otimes_{j=1}^{d} |n_j\rangle$ a splňují $\hat{N}_j|n_j\rangle := f_j^\dagger f_j |n_j\rangle = n_j|n_j\rangle$. Komutační relace fermionových operátorů $f_j, f_j^\dagger$ s operátorem počtu částic $\hat{N}_j$ jsou

$$\left[\hat{N}_j, f_j\right] = -f_j, \qquad\qquad \left[\hat{N}_j, f_j^\dagger\right] = f_j^\dagger.$$

Podobně jako v bosonovém případě získáme aplikací anihilačního operátoru f_j vlastní stav operátoru $\hat{N}_j$ s vlastním číslem o jedničku menším a naopak použitím kreačního operátoru $f_j^\dagger$ dostaneme stav s vlastním číslem o jedničku větším. Protože platí

$$0 = \frac{1}{2} f_j^\dagger [f_j, f_j]_+ |n_j\rangle = f_j^\dagger f_j^2 |n_j\rangle = \hat{N}_j f_j |n_j\rangle = (f_j \hat{N}_j - f_j)|n_j\rangle = (n_j - 1) f_j |n_j\rangle$$

a

$$f_j|n_j\rangle = 0 \Rightarrow f_j^\dagger f_j |n_j\rangle = \hat{N}_j|n_j\rangle = n_j|n_j\rangle = 0,$$

pak $n_j \in \{0, 1\}$. Fermionový oscilátor má tudíž spektrum omezené zdola i shora a vlastní čísla Hamiltonova operátoru jsou

$$E_n = \sum_{j=1}^{d} \left(n_j - \frac{1}{2}\right) \in \left\{-\frac{d}{2}, -\frac{d}{2} + 1, \ldots, \frac{d}{2} - 1, \frac{d}{2}\right\}.$$

Opět zde existuje stav

$$|0\rangle = \otimes_{j=1}^{d} |0_j\rangle$$

příslušný nejnižší energii $E_0 = -\frac{d}{2}$, který je možné vynulovat působením libovolného fermionového anihilačního operátoru. Splňuje tedy podmínku pro nejvyšší váhu reprezentace (viz sekce 1.4.3). Ostatní vlastní stavy operátoru $\hat{H}$ získáme ze vztahu

$$|n\rangle = \otimes_{j=1}^{d} |n_j\rangle \propto \prod_{j=1}^{d} \left(f_j^\dagger\right)^{n_j} |0\rangle.$$

Hilbertův prostor všech stavů fermionového oscilátoru tvoří konečně dimenzionální fermionový Fockův prostor $\mathcal{F}_d^+$ generovaný množinou

$$\left\{|0\rangle, f_j^\dagger|0\rangle, f_j^\dagger f_k^\dagger|0\rangle, \dots, f_1^\dagger f_2^\dagger \dots f_d^\dagger|0\rangle : 1 \le j < k < \dots \le d\right\}.$$

4.5.1 Spinorové reprezentace

Z tvaru maticové realizace speciální ortogonální algebry z 1.4.2 si lze všimnout, že $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(2d,\mathbb{C})$. Právě uvedené vyjádření obecné lineární algebry pomocí fermionových operátorů je možné získat z fermionové oscilátorové realizace $\mathfrak{so}(2d,\mathbb{C})$ zkonstruované v 1.5.3. Jednalo by se o analogický postup, jakým jsme z bosonové oscilátorové realizace symplektické algebry $\mathfrak{sp}(2d,\mathbb{C})$ získali realizaci podalgebry $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$. Potom fermionová reprezentace speciální ortogonální algebry na prostoru $\mathcal{F}_d^+$ tvoří takzvanou spinorovou reprezentaci. Nyní si demonstrujeme některé její vlastnosti zmíněné na konci sekce 1.5.3.

Generátory Cartanovy podalgebry $\left\{f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2}\right\}_{j=1}^d \subset \mathfrak{so}(2d,\mathbb{C})$ splňují pro každé $j,k \in \{1,\dots,d\}$ rovnosti

$$\left(f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2}\right) f_k^\dagger|0\rangle = \left(\delta_{jk} - \frac{1}{2}\right) f_k^\dagger|0\rangle.$$

Jejich akce na libovolný prvek fermionového Fockova prostoru určený množinou indexů $I := \{i_1,\dots,i_k : i_j \in \mathbb{N}, 1 \le i_1 < \dots < i_k \le d\}$ je

$$\left(f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2}\right) f_{i_1}^\dagger \dots f_{i_k}^\dagger|0\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{i_1}^\dagger \dots f_{i_k}^\dagger|0\rangle & \text{pokud } j \in I, \\ -\frac{1}{2} f_{i_1}^\dagger \dots f_{i_k}^\dagger|0\rangle & \text{pokud } j \notin I, \end{cases}$$

Všechny váhy spinorové reprezentace jsou tudíž tvaru $\underbrace{(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{2})}_{d}$.

Zbývající bázové elementy speciální ortogonální algebry navíc při své akci na prostor $\mathcal{F}_d^+$ zachovávají paritu počtu fermionových kreačních operátorů aplikovaných na stav $|0\rangle$:

- $(f_j^\dagger f_l) f_{i_1}^\dagger \dots f_{i_k}^\dagger|0\rangle = \begin{cases} \pm f_{\tilde{i}_1}^\dagger \dots f_{\tilde{i}_k}^\dagger|0\rangle & \text{pokud } j \notin I \text{ a } l \in I, \\ 0 & \text{pokud } j \in I \text{ nebo } l \notin I, \end{cases}$
  kde $\{\tilde{i}_1,\dots,\tilde{i}_k\} = (I \cup \{j\}) \setminus \{l\}$,
- $(f_j f_l) f_{i_1}^\dagger \dots f_{i_k}^\dagger|0\rangle = \begin{cases} \pm f_{\tilde{i}_1}^\dagger \dots f_{\tilde{i}_{k-2}}^\dagger|0\rangle & \text{pokud } j,l \in I, \\ 0 & \text{pokud } j \notin I \text{ nebo } l \notin I, \end{cases}$
  kde $\{\tilde{i}_1,\dots,\tilde{i}_{k-2}\} = I \setminus \{j,l\}$,
- $(f_j^\dagger f_l^\dagger) f_{i_1}^\dagger \dots f_{i_k}^\dagger|0\rangle = \begin{cases} \pm f_{\tilde{i}_1}^\dagger \dots f_{\tilde{i}_{k+2}}^\dagger|0\rangle & \text{pokud } j,l \notin I, \\ 0 & \text{pokud } j \in I \text{ nebo } l \in I, \end{cases}$
  kde $\{\tilde{i}_1,\dots,\tilde{i}_{k+2}\} = I \cup \{j,l\}$.

Tímto způsobem zkonstruovaná reprezentace algebry $\mathfrak{so}(2d, \mathbb{C})$ na fermionovém Fockově prostoru je reducibilní. Existují v ní dva invariantní podprostory

$$\mathcal{F}^+_{\text{sudé}} := \left\langle |0\rangle, f_j^\dagger f_k^\dagger |0\rangle, \ldots : 1 \leq j < k < \cdots \leq d \right\rangle,$$

$$\mathcal{F}^+_{\text{liché}} := \left\langle f_j^\dagger |0\rangle, f_j^\dagger f_k^\dagger f_l^\dagger |0\rangle, \ldots : 1 \leq j < k < l < \cdots \leq d \right\rangle.$$

Sestrojili jsme tak dvě ireducibilní spinorové reprezentace speciální ortogonální algebry, pro které platí:

(a) d je sudé:

- $f_1^\dagger \ldots f_d^\dagger |0\rangle \in \mathcal{F}^+_{\text{sudé}}$ je vektor nejvyšší váhy reprezentace na $\mathcal{F}^+_{\text{sudé}}$ příslušející nejvyšší váze $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- $f_1^\dagger \ldots f_{d-1}^\dagger |0\rangle \in \mathcal{F}^+_{\text{liché}}$ je vektor nejvyšší váhy reprezentace na $\mathcal{F}^+_{\text{liché}}$ příslušející nejvyšší váze $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(b) d je liché:

- $f_1^\dagger \ldots f_{d-1}^\dagger |0\rangle \in \mathcal{F}^+_{\text{sudé}}$ je vektor nejvyšší váhy reprezentace na $\mathcal{F}^+_{\text{sudé}}$ příslušející nejvyšší váze $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
- $f_1^\dagger \ldots f_d^\dagger |0\rangle \in \mathcal{F}^+_{\text{liché}}$ je vektor nejvyšší váhy reprezentace na $\mathcal{F}^+_{\text{liché}}$ příslušející nejvyšší váze $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Poznámka: V případě algebry $\mathfrak{so}(2d+1, \mathbb{C})$ musíme množinu fermionových operátorů doplnit o operátor u, který splňuje $u|0\rangle = |0\rangle$. Jeho akce na libovolný prvek prostoru $\mathcal{F}^+_d$ je pro libovolné $k \in \{1, \ldots, d\}$:

$$(u) f_{i_1}^\dagger \ldots f_{i_k}^\dagger |0\rangle = (-1)^k f_{i_1}^\dagger \ldots f_{i_k}^\dagger |0\rangle.$$

Na konci sekce 1.5.3 jsme ukázali, že $\left\{ f_j^\dagger u, f_j u \right\}_{j=1}^d \subset \mathfrak{so}(2d+1, \mathbb{C})$. Platí pro ně:

- $(f_j^\dagger u) f_{i_1}^\dagger \ldots f_{i_k}^\dagger |0\rangle = \begin{cases} \pm(-1)^k f_{\tilde{i}_1}^\dagger \ldots f_{\tilde{i}_{k+1}}^\dagger |0\rangle & \text{pokud } j \notin I, \\ 0 & \text{pokud } j \in I, \end{cases}$
  kde $\{\tilde{i}_1, \ldots, \tilde{i}_{k+1}\} = I \cup \{j\}$,
- $(f_j u) f_{i_1}^\dagger \ldots f_{i_k}^\dagger |0\rangle = \begin{cases} \pm(-1)^k f_{\tilde{i}_1}^\dagger \ldots f_{\tilde{i}_{k-1}}^\dagger |0\rangle & \text{pokud } j \in I, \\ 0 & \text{pokud } j \notin I, \end{cases}$
  kde $\{\tilde{i}_1, \ldots, \tilde{i}_{k-1}\} = I \setminus \{j\}$.

Díky tomu fermionový Fockův prostor $\mathcal{F}^+_d$ tvoří jednu ireducibilní reprezentaci speciální ortogonální algebry $\mathfrak{so}(2d+1, \mathbb{C})$.

Souvislost s Cliffordovou algebrou

Obecně lze Cliffordovu algebru definovat pro vektorový prostor $\widetilde{V}$ nad $\mathbb{F}$ spolu se symetrickou bilineární formou B. $\mathrm{Cliff}(\widetilde{V}, B)$ je algebra generovaná jednotkou 1 a elementy $\widetilde{V}$, které splňují relace

$$\forall v, w \in \widetilde{V} : vw + wv = 2B(v, w).$$

Pokud B má signaturu $(p, q, 0)$, $p+q = n$ a $\widetilde{V} \cong \mathbb{R}^n$, resp. $\widetilde{V} \cong \mathbb{C}^n$, pak Cliffordova algebra $\mathrm{Cliff}(\widetilde{V}, B) \cong \mathrm{Cliff}(p, q, \mathbb{R})$, resp. $\mathrm{Cliff}(\widetilde{V}, B) \cong \mathrm{Cliff}(n, \mathbb{C})$. Zvolíme-li ortonormální bázi $\{e_j\}_{j=1}^n \in \widetilde{V}$, splňují její vektory relace

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}.$$

V případě $\mathrm{Cliff}(2d, \mathbb{C})$ existuje takzvaná Wittova báze $\{w_j, \bar{w}_j\}_{j=1}^d \in \widetilde{V}$, kde

$$w_j := \frac{1}{2}(e_{2j-1} + ie_{2j}), \qquad \bar{w}_j := \frac{1}{2}(e_{2j-1} - ie_{2j}).$$

Bázové elementy potom vyhovují kanonickým antikomutačním relacím (srovnej s definicí v 1.5.1)

$$w_j \bar{w}_k + \bar{w}_k w_j = \delta_{jk}, \qquad w_j w_k + w_k w_j = 0 = \bar{w}_j \bar{w}_k + \bar{w}_k \bar{w}_j.$$

Množina operátorů $\{f_j^\dagger, f_j\}_{j=1}^d$ generuje vektorový prostor $\widetilde{V} \cong \mathbb{C}^{2d}$. Fermionové operátory splňují kanonické antikomutační relace (viz sekce 1.5.1), pomocí nichž lze na $\widetilde{V}$ definovat symetrickou bilineární formu B (viz 1.5.3). Tvoří Wittovu bázi Cliffordovy algebry $\mathrm{Cliff}(\widetilde{V}, B) \cong \mathrm{Cliff}(2d, \mathbb{C})$. Příslušná ortonormální báze je generována operátory definovanými pro $j \in \{1, \ldots, d\}$:

$$\gamma_{2j-1} := f_j + f_j^\dagger, \qquad \gamma_{2j} := i\left(f_j^\dagger - f_j\right).$$

Protože $\dim \mathrm{Cliff}(2d, \mathbb{C}) = 2^{2d} = \dim \mathrm{M}(2^d, \mathbb{C})$, potom $\mathrm{Cliff}(2d, \mathbb{C}) \cong \mathrm{M}(2^d, \mathbb{C})$. Celkově lze Cliffordovu algebru vyjádřit několika izomorfními způsoby:

$$\mathrm{Cliff}(2d, \mathbb{C}) \cong \left\langle \mathbf{1}, f_j, f_j^\dagger, f_j f_k, f_j^\dagger f_k^\dagger, f_j^\dagger f_k, \ldots \right\rangle \cong \langle \mathbf{1}, \gamma_j, \gamma_j\gamma_k, \ldots \rangle \cong \mathrm{M}(2^d, \mathbb{C}).$$

Poznámka: Operátory γ_j mají své využití v relativistické kvantové mechanice a lze se s nimi setkat pod názvem gamma matice nebo Diracovy matice. Zde spolu s jednotkovým operátorem $\mathbf{1}$ generují Cliffordovu algebru $\mathrm{Cliff}(3, 1, \mathbb{R})$. Její podalgebrou je $\mathfrak{so}(1, 3)$ algebra operátorů generujících podgrupu $\mathrm{SO}(3, 1)$ Lorentzových transformací. Pro více informací viz [14, str. 442].

V sekci 1.5.3 jsme viděli, že bilineární kombinace $f_j^\dagger f_k$, resp. $\gamma_j\gamma_k$ generují speciální ortogonální algebru $\mathfrak{so}(2d, \mathbb{C})$. V 4.5.1 jsme si ukázali některé vlastnosti její spinorové reprezentace na $\mathcal{F}_d^+ \cong \mathbb{C}^{2^d}$. Ve skutečnosti se jedná o ireducibilní reprezentaci celé Cliffordovy algebry $\mathrm{Cliff}(2d, \mathbb{C})$. To si nejlépe demonstrujeme na následujícím příkladě.

Příklad: Uvažujme situaci, kdy $d = 1$. V tom případě

$$\mathrm{Cliff}(2,\mathbb{C}) \cong \left\langle \mathbf{1}, f, f^\dagger, f^\dagger f \right\rangle \cong \langle \mathbf{1}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1\gamma_2 \rangle\,,$$

kde $\gamma_1 := f + f^\dagger$ a $\gamma_2 := i\left(f^\dagger - f\right)$. Protože fermionové operátory splňují kanonické antikomutační relace, jednoduše ověříme, že

$$[\gamma_1,\gamma_1]_+ = [f + f^\dagger, f + f^\dagger]_+ = 2 = -[f - f^\dagger, f - f^\dagger]_+ = [\gamma_2,\gamma_2]_+,$$

$$[\gamma_1,\gamma_2]_+ = i[f + f^\dagger, f - f^\dagger]_+ = 0.$$

Tato Cliffordova algebra má spinorovou reprezentaci na fermionovém Fockově prostoru s bází $\{|0\rangle, f^\dagger|0\rangle\}$. Podobně jako jsme v podkapitole 3.4 nalezli izomorfismus mezi maticemi a bosonovými operátory, můžeme pomocí akce elementů $\mathrm{Cliff}(2,\mathbb{C})$ na prostoru $\mathcal{F}_1^+$ získat konkrétní tvar izomorfismu mezi Cliffordovou algebrou a $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}\begin{pmatrix} f^\dagger|0\rangle \\ |0\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^\dagger|0\rangle \\ |0\rangle \end{pmatrix} & \Rightarrow \qquad & \mathbf{1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
f\begin{pmatrix} f^\dagger|0\rangle \\ |0\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^\dagger|0\rangle \\ |0\rangle \end{pmatrix} & \Rightarrow \qquad & f \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\\
f^\dagger\begin{pmatrix} f^\dagger|0\rangle \\ |0\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^\dagger|0\rangle \\ |0\rangle \end{pmatrix} & \Rightarrow \qquad & f^\dagger \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\\
f^\dagger f\begin{pmatrix} f^\dagger|0\rangle \\ |0\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^\dagger|0\rangle \\ |0\rangle \end{pmatrix} & \Rightarrow \qquad & f^\dagger f \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Maticové vyjádření operátorů γ_j je:[5]

$$\gamma_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1, \quad \gamma_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2, \quad \gamma_1\gamma_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3.$$

Pokud $|0\rangle$ ztotožníme s vektorem $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ a $f^\dagger|0\rangle$ s vektorem $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, pak spinorová reprezentace Cliffordovy algebry $\mathrm{Cliff}(2,\mathbb{C})$ na fermionovém Fockově prostoru je izomorfní s ireducibilní vektorovou reprezentací $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^2$.

Nakonec si všimněme, že zkonstruovaná bosonová realizace symplektické algebry má podobné vlastnosti jako fermionová realizace speciální ortogonální algebry. Na závěr podkapitoly 3.2 jsme poznamenali, že bosonové operátory díky svým kanonickým komutačním relacím tvoří nekonečně dimenzionální Weylovu algebru $\mathrm{Weyl}(2d,\mathbb{C})$. Bilineární kombinace bosonových operátorů generovaly oscilátorovou reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{sp}(2d,\mathbb{C})$ na $\mathcal{F}_d$, která přísluší Lieově grupě transformací zachovávajících antisymetrickou bilineární formu definovanou pomocí komutátoru(viz 1.5.3). Analogicky fermionové operátory díky svým kanonickým antikomutačním relacím tvoří v tomto případě konečně dimenzionální Cliffordovu algebru $\mathrm{Cliff}(2d,\mathbb{C})$. Bilineární kombinace fermionových operátorů potom generují spinorovou reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{so}(2d,\mathbb{C})$ na $\mathcal{F}_d^+$, jež přísluší Lieově grupě transformací zachovávajících symetrickou bilineární formu definovanou pomocí antikomutátoru(viz 1.5.3).

[5] Matice $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nazýváme Pauliho matice. Ty generují maticovou realizaci Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ (viz [1, str.148]).

Závěr

Pomocí maticové realizace jednoduchých klasických Lieových algeber A_n, B_n, C_n a D_n jsme ukázali explicitní konstrukci jejich oscilátorových realizací. V případě symplektické algebry jsme získali alternativní tvar oscilátorové realizace využitím symetrické mocniny S^2V prostoru bosonových operátorů. Podobně u speciální ortogonální algebry jsme sestrojili její fermionovou realizaci za pomoci vnější mocniny Λ^2V prostoru fermionových operátorů. Na rozdíl od postupu využívajícího maticovou realizaci nám stačil poloviční počet operátorů. To bylo způsobeno tím, že prvky dané Lieovy algebry tvořily jak bilineární kombinace složené z jednoho anihilačního a jednoho kreačního oprátoru, tak i součiny čistě dvou anihilačních nebo kreačních operátorů. Vysvětlili jsme tedy tvar oscilátorových realizací klasických Lieových algeber uvedený v [1]. Mimo čtyři klasické Lieovy algebry, jimiž jsme se v této práci zabývali, existuje pět výjimečných Lieových algeber E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 stručně popsaných v [1]. V každé výjimečné Lieově algebře je možné nalézt podalgebru, u níž již známe její oscilátorovou realizaci - například $\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(8,\mathbb{C}) \subset E_8$. Tuto realizaci lze případně rozšířit z podalgebry na celou výjimečnou algebru. V případě zájmu čtenáře je možné podrobný popis celého postupu najít v [1] nebo v článku [9].

Mezi funkcemi na fázovém prostoru jsme nalezli Heisenbergovu algebru lineárních funkcí a symplektickou algebru polynomů druhého stupně. Jejich kvantování jsme provedli dvěma ekvivalentními způsoby - Schrödingerovou a Bargmann-Fockovou reprezentací. V druhém případě jsme získali stejnou oscilátorovou realizaci algebry $\mathfrak{sp}(2d,\mathbb{C})$ jako při její předchozí formální konstrukci ze symetrické mocniny druhého stupně prostoru bosonových operátorů. Celý postup jsme demonstrovali na ilustrativním příkladě harmonického oscilátoru. Viděli jsme, že k získání jeho energetického spektra nám v Bargmann-Fockově reprezentaci na rozdíl od Schrödingerovy reprezentace stačí jen znalost vzájemných komutačních relací anihilačních a kreačních operátorů. Pomocí nich jsme také nalezli podalgebru $\mathfrak{u}(d) \subset \mathfrak{sp}(2d,\mathbb{C})$, která generuje grupu symetrií $\mathrm{U}(d)$ harmonického oscilátoru.

Studovaný bosonový harmonický oscilátor tvoří podalgebru $\mathfrak{u}(1) \subset \mathfrak{sp}(2d,\mathbb{C})$ symplektické algebry, jejíž oscilátorovou reprezentaci na Fockově prostoru jsme zkonstruovali ze symetrické mocniny vektorového prostoru bosonových operátorů. Analogicky jsme definovali fermionový harmonický oscilátor generující podalgebru $\mathfrak{u}(1) \subset \mathfrak{so}(2d,\mathbb{C})$. Spinorovou reprezentaci speciální ortogonální algebry na fermionovém Fockově prostoru jsme získali z vnější mocniny vektorového prostoru fermionových operátorů. Použité bosonové a fermionové operátory navíc dávají vzniknout strukturám s podobnými vlastnostmi. První zmíněné pomocí kanonických komutačních relací generují Weylovu algebru, druhé uvedené díky kanonickým antikomutačním relacím tvoří Cliffordovu algebru. V každé z těchto algeber nalezneme Lieovu podalgebru operátorů příslušejících Lieově grupě transformací zachovávajících určitou bilineární formu. Pro bosonové operátory se jedná o Lieovu algebru $\mathfrak{sp}(2d,\mathbb{C})$ a antisymetrickou bilineární formu definovanou pomocí komutátoru(viz 1.5.3), v případě fermionových operátorů jde o Lieovu algebru $\mathfrak{so}(2d,\mathbb{C})$ a symetrickou bilineární formu definovanou pomocí antikomutátoru(viz 1.5.3). Jediným výraznějším rozdílem je fakt, že oscilátorovou reprezentaci symplektické algebry jsme zavedli na nekonečně dimenzionálním Fockově prostoru, zatímco spinorovou reprezentaci speciální ortogonální algebry na konečně dimenzionálním fermionovém Fockově prostoru.

Zjistili jsme, že polopřímý součin $\mathfrak{h}_{2d+1} \rtimes \mathfrak{sp}(2d, \mathbb{C})$ tvoří Lieovu algebru operátorů, které jsou nejvýše kvadratické v bosonových operátorech. Podobně bychom chtěli, aby lineární a bilineární kombinace fermionových operátorů generovaly Lieovu algebru danou polopřímým součinem $\{\mathbf{1}, f_j, f_j^\dagger\}_{j=1}^d \rtimes \mathfrak{so}(2d, \mathbb{C})$. To ovšem není možné, protože množina všech fermionových anihilačních a kreačních operátorů není uzavřená na operaci komutátoru, ale antikomutátoru. Mohli bychom tedy hledat obecnější strukturu, než je Lieova algebra, na níž by byla přirozeně definována bilineární operace, která by se pro určitou dvojici operátorů vždy shodovala s komutátorem nebo antikomutátorem. Takovým objektem je Lieova superalgebra definovaná jako vektorový prostor s bilineární operací $[\cdot, \cdot]_\pm$ zvanou Lieova superzávorka, která splňuje

$$[X, Y]_\pm = -(-1)^{|X||Y|}[Y, X]_\pm$$

a super-Jacobiho identitu

$$[X, [Y, Z]_\pm]_\pm = [[X, Y]_\pm, Z]_\pm + (-1)^{|X||Y|}[Y, [X, Z]_\pm]_\pm,$$

kde $|X| = 0$ pro bosonové operátory a $|X| = 1$ pro fermionové operátory. Mezi Lieovými superalgebrami existují superalgebry $A(m-1, n-1)$, $A(n, n)$, $B(m, n)$, $C(n)$ a $D(m, n)$, které jsou analogiemi ke klasickým Lieovým algebrám. Použijeme-li bilineární kombinace bosonových i fermionových operátorů, můžeme opět nalézt jejich oscilátorové realizace (viz [1, str. 218] nebo [8], kde je zmíněna i reprezentace $B(n, m)$ na analogii Fockova prostoru). Přirozeným zobecněním námi zkoumaného harmonického oscilátoru by pak byl kvantový systém, jehož Hamiltonova funkce by byla součtem Hamiltonovy funkce bosonového a fermionového harmonického oscilátoru. Zajímavý je fakt, že z řešení tohoto problému (viz například [14, str. 353]) vyplývá existence zachovávajících se veličin míchajících bosonové a fermionové operátory.

Seznam použité literatury

[1] Frappat, L.; Sciarrino, A.; Sorba, P.: *Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras.* Academic Press, 2000.

[2] Fulton, W.; Harris, J.: *Representation theory: a first course.* Springer, 1991, ISBN 0-387-97495-4.

[3] Gilmore, R.: *Lie groups, physics, and geometry: an introduction for physicists, engineers and chemists.* Cambridge University Press, 2008, ISBN 978-0-521-88400-6.

[4] Hall, B. C.: *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction.* Springer, 2003, ISBN 0-387-40122-9.

[5] Humphreys, J. E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer, 1972, ISBN 0-387-90052-7.

[6] Iachello, F.: *Lie Algebras and Applications.* Springer, 2006, ISBN 978-3-540-36236-4.

[7] Krump, L.; Souček, V.; Těšínský, J. A.: Matematická analýza na varietách, 2002.

[8] Palev, T. D.: Para-Bose and para-Fermi operators as generators of orthosymplectic Lie superalgebras. *Journal of Mathematical Physics*, rok 1982, 23: s. 1100–1102.

[9] Sciarrino, A.: Exceptional Lie algebras in terms of fermionic creation-annihilation operators. *Journal of Mathematical Physics*, rok 1989, 30: s. 1674–1678.

[10] Skála, L.: *Úvod do kvantové mechaniky.* Karolinum, 2011, ISBN 978-80-246-2022-0.

[11] Slovák, J.: Reprezentace Lieových algeber a Lieových grup, 1995.

[12] Souček, V.: Reprezentace Lieových grup a algeber, 2002.

[13] Wallach, N.: Lie Groups and Algebraic Groups, [cit. 2016-05-04].
URL `http://math.ucsd.edu/~nwallach/chapter1.pdf`

[14] Woit, P.: Quantum Theory, Groups and Representations: An Introduction, 2015, [cit. 2016-05-04].
URL `http://www.math.columbia.edu/~woit/QM/qmbook.pdf`