MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Petr Pelech

Peridynamické a nelokální modely v mechanice kontinua pevných látek

Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Martin Kružík, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematické modelování ve fyzice a technice

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Peridynamické a nelokální modely v mechanice kontinua pevných látek

Autor: Petr Pelech

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Martin Kružík, Ph.D., Ústav teorie informace a automatizace AV ČR, v.v.i

Abstrakt: V této práci se zabýváme peridynamikou, nelokální teorií mechaniky kontinua představenou Sillingem v roce 2000. Nelokalita této teorie spočívá v silovém působení přítomném mezi body kontinua, které jsou odděleny konečnou vzdáleností. Jsou-li však body od sebe vzdáleny víc než na danou délku zvanou *horizont*, je mezi nimi silové působení nulové. Porovnáváme peridynamiku s elasticitou, zejména pak v situaci, kdy se nelokálnost daná horizontem blíží k nule. Ve zkoumání mizející nelokálnosti se omezujeme na variační popis časově nezávislých procesů. Pro homogenní izotropní materiál počítáme Γ-limitu linearizované peridynamiky. Ukazujeme, že v některých případech je touto Γ-limitou linearizovaná elasticita, ve které je Poissonův poměr homogenního izotropního materiálu roven $\frac{1}{4}$. V závěru práce se snažíme objasnit, proč se v některých situacích může spočtená Γ-limita od linearizované elasticity lišit.

Klíčová slova: peridynamika, linearizovaná elasticita, Γ-konvergence, objektivita

Title: Peridynamic and nonlocal models in continuum mechanics

Author: Petr Pelech

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Martin Kružík, Ph.D., Institute of Information Theory and Automation of the CAS, Public Research Institution

Abstract: In this work we study peridynamics, a non-local model in continuum mechanics introduced by Silling (2000). The non-locality is reflected in the fact that points at finite distance exert a force upon each other. If, however, these points are more distant than a characteristic length called *horizon*, it is customary to assume that they do not interact. We compare peridynamics with elasticity, especially in the limit of small horizon. We restrict ourselves, concerning this vanishing non-locality, to variational formulation of time-independent processes. We compute a Γ-limit for homogeneous and isotropic solid in linear peridynamics. In some cases this Γ-limit coincides with linear elasticity and the Poisson ratio is equal to $\frac{1}{4}$. We conclude by clarifying why in some situation the computed Γ-limit can differ from the linear elasticity.

Keywords: peridynamics, linear elasticity, Γ-convergence, objectivity

Chtěl bych velmi poděkovat doc. Martinu Kružíkovi za dobré vedení, RNDr. Ondřeji Součkovi za ochotu mi poradit a v neposlední řadě mé ženě za podporu a pochopení, kterých se mi od ní dostalo, a dalším lidem z rodinného kruhu i ostatním, kteří mě v práci povzbuzovali.

Obsah

Úvod **2**

1 Elasticita **4**
1.1 Deformace, referenční a deformovaná konfigurace 4
1.2 Vnější a vnitřní síly 4
1.3 Cauchyho tenzor napětí 5
1.4 Princip virtuální práce v deformované konfiguraci 6
1.5 Princip virtuální práce v referenční konfiguraci 6
1.6 Elastický a hyperelastický materiál 7
1.7 Variační formulace pro hyperelastický materiál 7
1.8 Linearizovaná elasticita 8

2 Peridynamika **10**
2.1 Bilanční rovnice 10
2.2 Princip nezávislosti na pozorovateli 12
2.3 Bond-based peridynamika 13
2.4 Linearizovaná bond-based peridynamika 18

3 Porovnání bond-based peridynamiky s elasticitou **23**
3.1 Dřívější porovnání peridynamiky s elasticitou 23
3.2 Odvození Cauchyho a 1. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí 26
3.3 Γ-limita linearizované bond-based peridynamiky 30

Závěr **40**

Literatura **43**

Úvod

Peridynamika je nelokální teorie mechaniky kontinua představená Sillingem ([21], [26]) v roce 2000. Nelokalita je obsažena v předpokladu, že silové působení mezi jednotlivými body kontinua je vymezeno konečnou kladnou vzdáleností. Tato vzdálenost se nazývá *horizont* a představuje tzv. efektivní měřítko, které v klasické mechanice kontinua chybí ([6], [2]). Na rozdíl od jiných nelokálních teorií (např. [3]), nejsou v peridynamice používány derivace deformace, takže pomocí jedné pohybové rovnice je možno popsat samovolný vznik i následné šíření trhlin v materiálu [26]. V pohybové rovnice je totiž působení vnitřních sil vyjádřeno pomocí integrálního operátoru, který používá pouze diference deformace.

V této práci se zaměřujeme na tzv. bond-based peridynamiku (podrobnosti viz část 2.3), ve které je použit původní konstitutivní vztah uvedený v prvním článku o peridynamice [21]. Protože pomocí tohoto konstitutivního vztahu jde popsat jen omezené množství materiálů (Poissonův poměr je vždy roven $\frac{1}{4}$), byla bond-based peridynamika později v [23] rozšířena na takzvanou state-based peridynamiku. Tou se v této práci nezabýváme. Zajímá nás porovnání bond-based peridynamiky s elasticitou a její chování s mizející nelokálností.

První porovnání peridynamiky s elasticitou provedl již Silling ve svém prvním článku o peridynamice [21]. Pro fixní infinitezimální homogenní deformaci porovnává izotropní homogenní materiál v linearizované peridynamice s izotropním homogenním materiálem v linearizované elasticitě. Další porovnání se zabývají chováním peridynamiky v případě, kdy se horizont blíží k nule. V článku [13] uvažují evoluční rovnici linearizované bond-based peridynamiky pro posloupnost horizontů konvergujících k nule. Ukazují, že příslušná posloupnost řešení a posloupnost jejich časových derivací mají konvergentní podposloupnost. Neuvažují okrajové podmínky ani nedokazují, jestli limita této podposloupnosti splňuje Navierovu rovnici linearizované elasticity.

Konvergenci pohybové rovnice pro fixní hladkou deformaci zkoumají v [24]. Rovněž nezahrnují okrajové podmínky, ale uvažují obecný, avšak dostatečně hladký konstitutivní vztah ve state-based peridynamice. Ukazují, že limitní rovnice je formálně podobná té v elasticitě. Obsahuje totiž divergenci tenzorového pole, které závisí pouze na deformačním gradientu v uvažovaném bodě. Taktéž v [11] zkoumají pro fixní deformaci konvergenci pohybové rovnice linearizované state-based peridynamiky. Ukazují, že v tomto případě je limitní rovnicí Navierova rovnice elasticity s libovolným Poissonovým poměrem. Avšak stále neuvažují okrajové podmínky.

Jeden z prvních článků, ve kterém je zkoumáno limitní chování celistvé úlohy, tedy včetně okrajových podmínek, je [19]. Zaměřují se mimo jiné na variační formulaci linearizované state-based peridynamiky a její konvergenci zkoumají ve smyslu Γ-limity. Výhoda tohoto pojetí konvergence funkcionálů spočívá v tom, že dává informaci i o konvergenci minimizérů a jijich energií. Přesněji řečeno, každý hromadný bod posloupnosti minimizérů je minimizér Γ-limitního funkcionálu a energie těchto členů posloupnosti konvergují k energii hromadného bodu. Ukazují, že limitní úloha je dána Navierovou kvadratickou energií s obecným Poissonovým poměrem. Neuvažují však energie obsahující lineární člen nebo-li omezují se jen na referenční konfigurace, ve kterých na sebe body silově nepůsobí. Takové referenční konfigurace zahrnují ve své analýze až v [18]. V kontextu stacionárních parciálních diferenciálních rovnic zkoumají existenci řešení bond-based linearizované peridynamiky se zadanými okrajovými podmínkami a následnou konvergenci řešení těchto úloh pro horizont konvergující k nule. Ukazují, že pokud je toto silové působení přítomné v referenční konfiguraci dostatečně malé, konvergují jednotlivá řešení k limitě, která splňuje statickou Navierovu rovnici s Poissonovým poměrem $\frac{1}{4}$.

Kromě článku [19], používají Γ-limitu jako nástroj i autoři článku [5], kteří však uvažují nekonvexní energie a pokrývají tak větší třídu modelů.

V naší práci se pak zaměřujeme na limitní chování linearizované bond-based peridynamiky pro izotropní homogenní materiál. K jeho vyšetření používáme již zmiňovaný výsledek z [5]. Na rozdíl od tohoto článku se však zajímáme o fyzikální korektnost limitní úlohy, konkrétně objektivitu limitní energie. Také připouštíme i referenční konfigurace, ve kterých je mezi body přítomno nenulové *přitažlivé* silové působení. Rozdíl oproti přístupu autorů [18] spočívá v tom, že uvažujeme Γ-limitu variačních úloh. Ukazujeme, že pro přitažlivé silové působení přítomné v referenční konfiguraci, které je v jistém smyslu příliš velké, není Γ-limitou linearizované peridynamiky linearizovaná elasticita. Pro malé přitažlivé nebo žádné silové působení je Γ-limitou linearizovaná elasticita a výsledný materiál má Poissonův poměr $\frac{1}{4}$. To je výsledek podobný tomu z [18], kde ale uvažují i přitažlivé silové působení. Pro tento druhý závěr je však třeba postup použitý v [5] mírně upravit.

Snaha o lepší pochopení neshody limitní úlohy s linearizovanou pružností nás pak vedla ke konstrukci Cauchyho a prvního Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí, vyjádřeného pomocí silového působení používaného v peridynamice. Při této konstrukci vycházíme z představy Cauchyho vektoru napětí jako plošné hustoty vnitřní síly.

V závěru pak ještě uvádíme následující fakt jednoduše plynoucí z práce [5]. Je-li hustota uložené energie v kontextu bond-based peridynamiky objektivní, je i limitní hustota uložené energie objektivní v kontextu hyperelasticity.

Úvod zakončíme stručným náčrtem obsahu práce. V první kapitole uvádíme základní principy elasticity, hyperelasticity a linearizované pružnosti. V druhé kapitole jsme se pokusili sepsat základy peridynamiky posbírané z různých zdrojů a vysvětlit trochu lépe některé její aspekty, než jak je tomu v [21] nebo [26]. Ve třetí kapitole pak porovnáváme bond-based peridynamiku s elasticitou. Nejdříve obecně pomocí spočteného Cauchyho a prvního Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí, poté pomocí spočítané Γ-limity pro homogenní izotropní materiál v linearizované bond-based peridynamice.

Kapitola 1

Elasticita

Elasticita, na rozdíl od peridynamiky, je klasická teorie. Všechna tvrzení zde proto uvedeme bez důkazů, které lze najít např. v [8]. Cílem této kapitoly je shrnout základní poznatky této teorie, se kterými pak budeme peridynamiku porovnávat. Začneme značením a představením důležitých pojmů. Poté přistoupíme k bilančním rovnicím a konstitutivním vztahům a nakonec popíšeme linearizovanou teorii používanou pro malé deformace. Vzhledem k zaměření práce se omezíme pouze na časově nezávislé procesy.

1.1 Deformace, referenční a deformovaná konfigurace

V následujícím textu nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ značí omezenou oblast s dostatečně hladkou hranicí. Množina $\overline{\Omega}$ značí zkoumané těleso před tím, než podstoupí deformaci, a slouží tak k jeho popisu. Proto $\overline{\Omega}$ nazýváme *referenční konfigurací*. Deformace tělesa je pak definovaná jako zobrazení $\mathbf{y} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, o kterém se předpokládá, že je dostatečně hladké, prosté (možná s výjimkou hranice $\partial\Omega$) a že zachovává orientaci, nebo-li $\det \nabla \mathbf{y} > 0$. Množina $\mathbf{y}(\overline{\Omega})$ tak popisuje těleso po podstoupení deformace a nazývá se proto *deformovaná konfigurace*, značíme $\overline{\Omega}_{\mathbf{y}}$. Její prvky značíme $\mathbf{x}_{\mathbf{y}} := \mathbf{y}(\mathbf{x})$.

1.2 Vnější a vnitřní síly

Předpokládáme, že deformace tělesa je způsobena vnějšími silami, a že v deformovaném tělese je toto působení vnějších sil vyrovnáno takzvanými silami vnitřními, které v materiálu vzniknou reakcí na síly vnější, takže deformované těleso zůstává v klidu. Vnější síly dělíme na objemové, a povrchové. První jsou určeny hustotou $\mathbf{b}_{\mathbf{y}} : \overline{\Omega}_{\mathbf{y}} \to \mathbb{R}^3$ vůči objemu v deformovaném tělese, druhé hustotou $\mathbf{g}_{\mathbf{y}} : \Gamma_{\mathbf{y}} \to \mathbb{R}^3$ vůči povrchu hranice deformovaného tělesa, kde $\Gamma_{\mathbf{y}} \subset \partial\Omega_{\mathbf{y}}$ je měřitelná plošnou mírou $\mathrm{d}S_{\mathbf{y}}$. Podoba vnitřních sil je pak dána axiomaticky pomocí Cauchyho vektoru napětí.

1.3 Cauchyho tenzor napětí

V elasticitě je stěžejní následující předpoklad o charakteru vnitřních sil.

Axiom (existence vektoru napětí) Nechť těleso zaujímá fixní deformovanou konfiguraci $\overline{\Omega}_{\mathbf{y}}$, na kterou působí vnější síly dané hustotami $\mathbf{b}_{\mathbf{y}} : \overline{\Omega}_{\mathbf{y}} \to \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{g}_{\mathbf{y}} : \Gamma_{\mathbf{y}} \to \mathbb{R}^3$. Nechť dále $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ značí jednotkovou sféru se středem v počátku. Pak existuje vektorové pole

$$\mathbf{t}_{\mathbf{y}} : \overline{\Omega}_{\mathbf{y}} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$$

(zvané Cauchyho vektor napětí) takové, že:

1. Pro libovolný kontrolní objem $A_{\mathbf{y}} \subset \overline{\Omega}_{\mathbf{y}}$ a libovolný bod $\mathbf{x}_{\mathbf{y}} \in \Gamma_{\mathbf{y}} \cap \partial A_{\mathbf{y}}$, ve kterém existuje společná vnější jednotková normála $\mathbf{n}_{\mathbf{y}}$, je
$$\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}_{\mathbf{y}}) = \mathbf{g}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}).$$

2. *Axiom bilance sil.* Pro libovolný kontrolní objem $A_{\mathbf{y}} \subset \overline{\Omega}_{\mathbf{y}}$ s vnější jednotkovou normálu $\mathbf{n}_{\mathbf{y}}$ je
$$\int_{A_{\mathbf{y}}} \mathbf{b}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}_{\mathbf{y}} + \int_{\partial A_{\mathbf{y}}} \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}_{\mathbf{y}}) \, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}} = 0.$$

3. *Axiom bilance momentu sil.* Pro libovolný kontrolní objem $A_{\mathbf{y}} \subset \overline{\Omega}_{\mathbf{y}}$ je
$$\int_{A_{\mathbf{y}}} \mathbf{x}_{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}_{\mathbf{y}} + \int_{\partial A_{\mathbf{y}}} \mathbf{x}_{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}_{\mathbf{y}}) \, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}} = 0.$$

   Opět $\mathbf{n}_{\mathbf{y}}$ značí vnější jednotkovou normálu $\partial A_{\mathbf{y}}$.

Poznámka. Axiom zajišťuje existenci elementárních vnitřních sil $\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}_{\mathbf{y}}) \, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}}$ na povrchu libovolného kontrolního objemu, který je částí $\overline{\Omega}_{\mathbf{y}}$. Tyto síly závisí na konkrétním kontrolním objemu pouze skrze jeho vnější jednotkovou normálu. Navíc z posledních dvou bodů plyne, že se deformovaná konfigurace nachází ve statické rovnováze.

Dalším důležitým nástrojem mechaniky kontinua pro popis silového působení uvnitř tělesa je Cauchyho tenzor napětí $\mathbf{T}_C$. Jeho existence plyne z předchozího axiomu a dodatečných předpokladů na regularitu vektorového pole $\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}_{\mathbf{y}})$.

Věta 1.1. *Nechť hustota objemové síly $\mathbf{b}_{\mathbf{y}} : \overline{\Omega}_{\mathbf{y}} \to \mathbb{R}^3$ je spojitá a nechť $\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\cdot, \mathbf{n}) \in C^1(\overline{\Omega}_{\mathbf{y}}, \mathbb{R}^3)$ pro libovolné $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ a $\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}, \cdot) \in C(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ pro libovolné $\mathbf{x}_{\mathbf{y}} \in \overline{\Omega}_{\mathbf{y}}$. Pak výše zformulovaný axiom implikuje existenci symetrického tenzorové pole $\mathbf{T}_C : \overline{\Omega}_{\mathbf{y}} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ patřícího do $C^1(\overline{\Omega}_{\mathbf{y}}, \mathbb{R}^{3\times 3})$ a takového, že*

$$\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}_C(\mathbf{x}_{\mathbf{y}})\mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x}_{\mathbf{y}} \in \Omega_{\mathbf{y}}, \forall \mathbf{n} \in \mathbb{S}^2,$$

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{x}_{\mathbf{y}}} \mathbf{T}_C(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}) = \mathbf{b}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}), \quad \forall \mathbf{x}_{\mathbf{y}} \in \Omega_{\mathbf{y}},$$

$$\mathbf{T}_C(\mathbf{x}_{\mathbf{y}})\mathbf{n}_{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_{\mathbf{y}}), \quad \forall \mathbf{x}_{\mathbf{y}} \in \Gamma_{\mathbf{y}},$$

kde $\mathbf{n}_{\mathbf{y}}$ značí vnější jednotkovou normálu $\partial\Omega_{\mathbf{y}}$.

Rovnice rovnováhy sil, původně napsané pro Cauchyho vektor napětí, mají s použitím Cauchyova tenzoru tvar

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}_{\mathbf{y}}} \mathbf{T}_C &= \mathbf{b}_{\mathbf{y}}, \quad \text{v } \Omega_{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{T}_C \mathbf{n}_{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}_{\mathbf{y}}, \quad \text{v } \Gamma_{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{T}_C &= \mathbf{T}_C^T. \end{aligned}$$

1.4 Princip virtuální práce v deformované konfiguraci

Tyto rovnice se dají přeformulovat jako úloha minimalizace energie deformace. První krok je variační formulace těchto rovnic v deformované konfiguraci.

Věta 1.2 (Princip virtuální práce v deformované konfiguraci)**.** *Úloha s okrajovými podmínkami*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{x_y}} \mathbf{T}_C &= \mathbf{b_y}, \quad v\ \Omega_{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{T}_C \mathbf{n_y} &= \mathbf{g_y}, \quad v\ \Gamma_{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

je formálně ekvivalentní variační úloze

$$\int_{\Omega_{\mathbf{y}}} \mathbf{T}_C \mathbf{n_y} : \nabla_{\mathbf{y}} \theta_{\mathbf{y}} \, \mathrm{d}\mathbf{x_y} = \int_{\Omega_{\mathbf{y}}} \mathbf{b_y} \cdot \theta_{\mathbf{y}} \, \mathrm{d}\mathbf{x_y} + \int_{\Gamma_{\mathbf{y}}} \mathbf{g_y} \cdot \theta_{\mathbf{y}} \, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}},$$

pro všechna $\theta_{\mathbf{y}} \in C^\infty(\overline{\Omega}_{\mathbf{y}}, \mathbb{R}^3)$*,* $\theta_{\mathbf{y}} = 0$ *na* $\partial\Omega_{\mathbf{y}} \setminus \Gamma_{\mathbf{y}}$*.*

1.5 Princip virtuální práce v referenční konfiguraci

Problém je, že máme rovnice rovnováhy formulované v deformované konfiguraci, která však není dopředu známá a je součástí hledaného řešení. Proto je lepší přeformulovat je do proměnných v referenční konfiguraci. Za tímto účelem definujeme první Piola-Kirchhoffův tenzor $\mathbf{T}_{1.} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ jako Piolovu transformaci Cauchyho tenzoru napětí $\mathbf{T}_C$

$$\mathbf{T}_{1.}(\mathbf{x}) := \det \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}) \mathbf{T}_C(\mathbf{x_y}) (\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}))^{-T}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

a hustotu sil $\mathbf{b} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ vůči objemu v referenční konfiguraci jako

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) := \mathbf{b_y}(\mathbf{x_y}) \det \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}).$$

Vzhledem k zaměření práce nebudeme dále uvažovat hustotu plošných sil $\mathbf{g_y}$. Je tedy $\Gamma_{\mathbf{y}} = \emptyset$. Z vlastnosti Piolovy transformace pak plyne

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T}_{1.}(\mathbf{x}) = \det \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}) \operatorname{div}_{\mathbf{x_y}} \mathbf{T}_C(\mathbf{x_y}).$$

Dále první Piola-Kirchhoffův tenzor není obecně symetrický, ale díky vztahu ke Cauchymu tenzoru napětí splňuje

$$\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}) \mathbf{T}_{1.}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_{1.}(\mathbf{x}) (\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}))^T.$$

Máme tak následující úlohu v referenční konfiguraci.

Věta 1.3 (Princip virtuální práce v referenční konfiguraci)**.** *První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí splňuje*

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T}_{1.} = \mathbf{b}, \quad v\ \Omega,$$

což je formálně ekvivalentní variační rovnici

$$\int_\Omega \mathbf{T}_{1.} : \nabla \theta \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \theta \, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

pro všechna $\theta \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$*.*

1.6 Elastický a hyperelastický materiál

Zbývá ještě říct, jakým způsobem závisí tenzorová pole na deformaci, neboli předepsat konstitutivní vztah. Materiál se nazývá *elastický*, existuje-li funkce $\hat{\mathbf{T}}_C : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{3\times 3}_{+} \to \mathbb{R}^{3\times 3}_{sym}$ taková, že Cauchyho tenzor napětí je dán rovností

$$\mathbf{T}_C(\mathbf{x}_\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{T}}_C(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x}_\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}).$$

Symbol $\mathbb{R}^{3\times 3}_{+}$ značí všechny matice s kladným determinantem a symbol $\mathbb{R}^{3\times 3}_{sym}$ všechny symetrické matice. První Piola-Kirchhoffův tenzor je pak dán konstitutivním vztahem

$$\hat{\mathbf{T}}_{1.}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) := \det \mathbf{F}\, \hat{\mathbf{T}}_C(\mathbf{x}, \mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \forall \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{+},$$

tedy

$$\mathbf{T}_{1.}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{T}}_{1.}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})).$$

Speciálním případem elastického materiálu je materiál *hyperelastický*. Pro ten existuje funkce $\hat{W} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{3\times 3}_{+} \to \mathbb{R}$, zvaná *hustota uložené energie*, taková, že pro všechny $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ a všechny $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{+}$ je

$$\hat{\mathbf{T}}_{1.}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{F}).$$

Z *principu nezávislosti na pozorovateli* pro hyperelastický materiál (viz [8, věta 4.2-1]) plyne existence funkce $\tilde{W} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{3\times 3}_{Psym} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{x}, \mathbf{F}^T\mathbf{F}), \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{+}, \tag{1.1}$$

kde symbol $\mathbb{R}^{3\times 3}_{Psym}$ značí množinu všech symetrických a pozitivně definitních matic z $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Tenzor $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ pro $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})$, se nazývá *pravý Cauchy-Greenův* tenzor. Energii $\hat{W}$ mající tuto vlastnost nazýváme *objektivní.*

Materiál se nazývá *homogenní* v dané referenční konfiguraci Ω, jestliže funkce $\hat{\mathbf{T}}_C$, $\hat{\mathbf{T}}_{1.}$, $\hat{W}$ a $\tilde{W}$ nezávisí na proměnné $\mathbf{x}$.

1.7 Variační formulace pro hyperelastický materiál

Závisí-li hustota objemových sil $\mathbf{b}$ pouze na poloze v referenční konfiguraci, je princip virtuální práce v referenční konfiguraci systémem Euler-Lagrangeových rovnic minimalizační úlohy

$$\min_{\mathbf{y}\in\phi} I(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in\phi} \left(\int_\Omega \hat{W}(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}))\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \right),$$
$$\phi = \{\mathbf{y} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3; \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \text{ v } \partial\Omega\},$$

kde $\mathbf{y}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^3$ je zadaná Dirichletova okrajová podmínka.

1.8 Linearizovaná elasticita

Omezíme se pouze na homogenní materiály. V této části je lepší přejít od deformace $\mathbf{y} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, k posunutí $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ definovaném jako

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}.$$

Potom je zřejmě

$$\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}.$$

Deformaci pak považujeme za malou, je-li

$$|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})| \ll 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}$$

Symbol $|\cdot|$ zde značí spektrální normu. Pro malé deformace můžeme spočítat Taylorův rozvoj funkce

$$\hat{W}(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \tilde{W}((\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^T(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))), \tag{1.2}$$

pro $|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})| \to 0$. Díky této reprezentaci má kvadratická aproximace funkce $\hat{W}$ tvar

$$\mathbf{T}^0 : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

kde $\mathbf{T}^0$ je tenzor druhého řádu popisující napětí v referenční konfiguraci a $\mathbf{C}$ je tenzor čtvrtého řádu, zvaný *tenzor elastických konstant*. Díky reprezentaci (1.2) splňují tyto tenzory symetrie

$$T^0_{ij} = T^0_{ji}, \quad C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}.$$

Funkce $\mathring{W} : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ představující tuto aproximaci tak závisí pouze na symetrické části gradientu, tedy

$$\mathring{W}(\mathbf{H}) = \mathbf{T}^0 : \mathbf{H}^s + \frac{1}{2} \mathbf{C} \mathbf{H}^s : \mathbf{H}^s,$$

kde

$$\mathbf{H}^s := \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T).$$

První Piola-Kirchhoffův tenzor je pak roven

$$\mathbf{T}_{1.} = \frac{\partial \mathring{W}}{\partial \mathbf{H}}(\mathbf{H}) = \mathbf{T}^0 + \mathbf{C}\mathbf{H}^s,$$

speciálně je symetrický. Požadavek nezávislosti na pozorovateli je tedy ekvivalentní symetrii 1. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí a ta je ekvivalentní tomu, že hustota uložené energie závisí pouze na symetrické části gradientu posunutí.

Je-li materiál navíc izotropní, zredukuje se tenzor elastických konstant na pouhé dvě $l > 0$ (běžně značené λ, ale to bude mít v této práci jiný význam) a $\mu > 0$, zvané *Lamého konstanty*. V takovém případě je

$$\mathring{W}(\mathbf{H}) = \mathbf{T}^0 : \mathbf{H}^s + \frac{l}{2}(\operatorname{Tr} \mathbf{H})^2 + \mu |\mathbf{H}^s|^2, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{T}_{1.} = \mathbf{T}^0 + l(\operatorname{Tr} \mathbf{H})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{H}^s. \tag{1.4}$$

Někdy se místo Laméo konstant používají *Youngův modul pružnosti* E a Poissonův poměr ν. Převod mezi těmito konstantami je

$$E = \frac{\mu(3l + 2\mu)}{l + \mu} \qquad \nu = \frac{l}{2(l + \mu)}$$
$$l = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Tuto kapitolu bychom zakončili existenční větou pro izotropní lineární materiál.

Věta 1.4. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ lipschitzovská oblast. Dále nechť $l > -\frac{2}{3}\mu$, $\mu > 0$, $\mathbf{b} \in L^{\frac{6}{5}(\Omega)}$. Pak ve $W_0^{1,2}$ existuje právě jeden minimizér funkcionálu*

$$I(\mathbf{u}) = \int_\Omega \frac{l}{2}(\operatorname{Tr}\mathbf{e}(\mathbf{u}))^2 + \mu|\mathbf{e}(\mathbf{u})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Kapitola 2

Peridynamika

V této kapitole se pokusíme vyložit některé části peridynamiky, kterými jsme se zabývali. Nejdříve představíme značení, které ještě nebylo použito v předchozí kapitole. Poté odvodíme rovnice bilance sil a momentu sil a zformulujeme princip nezávislosti na pozorovateli v kontextu peridynamiky. Dále popíšeme základní principy bond-based peridynamiky včetně významu horizntu a odvodíme reprezentaci konstitutivního vztahu pro homogenní izotropní materiál. Končíme variační formulací peridynamiky a její linearizací.

Předpokládáme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ představuje souřadnice referenční konfigurace vůči kartézské bázi spojené s daným pozorovatelem. Deformaci $\mathbf{y} : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ uvažujeme časově závislou. Předpokládáme, že vektor $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ představuje souřadnice deformované konfigurace vůči kartézské bázi spjaté se stejným pozorovatelem.

2.1 Bilanční rovnice

Pro naše účely jsou dostatečné bilance sil a momentu sil. Bilance energie a další podrobnosti lze dohledat v [26, kap. 2].

Kromě deformace budeme ještě potřebovat hustotu $\rho_0 : \Omega \to (0, +\infty)$ tělesa v referenční konfiguraci. Symbolem $\mathbf{L} : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ značíme objemovou hustotu sil vzniklých v důsledku interakce bodu $\mathbf{x}$ s ostatními body tělesa v čase t. Nakonec $\mathbf{b} : \Omega \times [0, +\infty)$ značí hustotu vnějších sil působících na bod $\mathbf{x}$ v čase t. Obě hustoty jsou vůči objemu v referenční konfiguraci.

Bilance momentu sil

Síla působící na podoblast $V \subset \Omega$ je rovna

$$\int_V \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Bilance sil podoblasti V má proto tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho_0(\mathbf{x}) \, \partial_t \, \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_V \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{2.1}$$

a její lokální verze zní

$$\rho_0(\mathbf{x}) \, \partial_t^2 \, \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad \text{s.v. } \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \geq 0.$$

Podle [26] platí bilance $\forall \mathbf{x} \in \Omega$, ale pro deformaci pouze integrovatelnou v prostoru (což jsou deformace, které peridynamika popisuje) je toto příliš silné.

V peridynamice se předpokládá existence vektorové funkce $\mathbf{f} : \Omega \times \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ takové, že

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x}', \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \geq 0. \tag{2.2}$$

Třetí Newtonův pohybový zákon je obsažen v požadavku antisymetrie

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t), \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \geq 0. \tag{2.3}$$

Tato funkce $\mathbf{f}$ se nazývá *hustota vzájemné síly* (orig. *dual force density*) a má rozměr síla na objem na druhou. Vyjadřuje působení bodu $\mathbf{x}'$ na bod $\mathbf{x}$. Její tvar je odvozen z deformace a případně dalších veličin pomocí konstitutivního vztahu jako je tomu např. pro 1. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí. Na rozdíl od klasické mechaniky zde různé části tělesa na sebe nepůsobí skrze společnou hraniční plochu, ale skrze objemy.

Využitím (2.2) dostane bilance hybnosti (2.1) kontrolního objemu $V \subset \Omega$ tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho_0(\mathbf{x}) \, \partial_t \, \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_V \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x}' \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_V \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{2.4}$$

Díky antisymetrii $\mathbf{f}$ uvedené v (2.3) platí (viz [26, kap. 2.1])

$$\int_V \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x}' \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

takže konečný tvar bilance hybnosti $V \subset \Omega$ tvar je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho_0(\mathbf{x}) \, \partial_t \, \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_V \int_{\Omega \setminus V} \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x}' \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_V \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{2.5}$$

Funkce $\mathbf{f}$ zde spojuje body z kontrolního objemu V s těmi mimo něj. Dvojitý integrál v rovnici (2.5) tak reprezentuje nelokální tok hybnosti skrze hranici V a je analogií povrchových sil v klasické mechanice.

Lokální verze rovnice (2.4) má tvar

$$\rho_0(\mathbf{x}) \, \partial_t^2 \, \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x}' + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad \text{s.v. } \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \geq 0. \tag{2.6}$$

Bilance sil se doplní o počáteční a okrajové podmínky. Volba počátečních podmínek je standardní (viz např. [13]), avšak volba okrajových podmínek se od klasické elasticity liší. Přirozeným prostorem pro řešení jsou Lebesgueovy prostory (viz např. [4]), pro které, na rozdíl od Sobolevových prostorů, není definován operátor stop. Nemá tak smysl mluvit o hodnotách funkce na hranici. Proto se Dirichletovy okrajové podmínky nezadávají na části hranice, ale deformace je předepsaná na množině kladné míry v blízkosti hranice. Přesné vymezení pojmu blízkosti pak záleží na konkrétním materiálu či modelu. Analogie Neumanových okrajových podmínek má podobu sil působících na část objemu blízko hranice a proto jsou zahrnuty v $\mathbf{b}$. Podrobnější pojednání o okrajových podmínkách v peridynamice lze nalézt například v [12], [14] nebo [11].

Bilance momentu sil

Definice momentu hybnosti pro $V \subset \Omega$ v čase $t \geq 0$ je

$$\mathbf{A}(V) := \int_V \mathbf{y}(\mathbf{x},t) \times \rho_0(\mathbf{x})\, \partial_t\, \mathbf{y}(\mathbf{x},t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Bilance momentu sil je v [26, kap. 2.3] postulován pouze pro celé těleso Ω, nikoli libovolný kontrolní objem. Má tedy tvar

$$\int_\Omega \mathbf{y}(\mathbf{x},t) \times \rho_0(\mathbf{x})\, \partial_t^2\, \mathbf{y}(\mathbf{x},t)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{y}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{b}(\mathbf{x},t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Odtud s využitím bilance sil (2.6) plyne

$$\int_\Omega \int_\Omega \mathbf{y}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0,$$

což znamená, že celkový moment interakčních sil působící na celé těleso je nulový. Dvojný integrál na levé straně lze formálně upravit

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_\Omega \mathbf{y}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \int_\Omega \mathbf{y}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_\Omega \mathbf{y}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \int_\Omega \mathbf{y}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{x}' + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_\Omega \mathbf{y}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \int_\Omega (\mathbf{y}(\mathbf{x}',t) - \mathbf{y}(\mathbf{x},t)) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}'\, \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

V první rovnosti bylo využito antisymetrie $\mathbf{f}$ (2.3), v druhé bylo prohozeno pořadí integrace a ve třetí byly přeznačeny integrační proměnné $\mathbf{x}' \leftrightarrow \mathbf{x}$. Upravená bilance momentu sil má tedy tvar

$$\int_\Omega \int_\Omega (\mathbf{y}(\mathbf{x}',t) - \mathbf{y}(\mathbf{x},t)) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}'\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

Moment sil se tedy určitě zachovává, pokud platí

$$\int_\Omega (\mathbf{y}(\mathbf{x}',t) - \mathbf{y}(\mathbf{x},t)) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}' = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \geq 0. \tag{2.9}$$

Materiál splňující tuto rovnost se nazývá nepolární [26, kap. 2.3]. V nepolárním materiálu je hustota momentu sil $\mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)$ vzhledem k bodu $\mathbf{y}(\mathbf{x},t)$ nulová.

Zákon zachování momentu sil je speciálně splněn pokud

$$(\mathbf{y}(\mathbf{x}',t) - \mathbf{y}(\mathbf{x},t)) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega, \forall t \geq 0, \tag{2.10}$$

Neboli silové působení mezi částicemi je rovnoběžné s jejich vzájemnou polohou v deformované konfiguraci.

2.2 Princip nezávislosti na pozorovateli

Eukleidovské změně pozorovatele (podrobnosti viz např. [16, kap. 5.2.1]) odpovídá transformace souřadnic $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*$, která je dána vztahem

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}^*(t), \tag{2.11}$$

kde $\mathbf{Q} : [0, +\infty) \to \mathbf{SO_3}$, $\mathbf{c}^* : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$. Symbol $\mathbf{SO_3}$ značí množinu všech ortogonálních matic s kladným determinantem. Předpokládá se, že $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ a $\mathbf{c}^*(0) = \mathbf{0}$, tedy v referenční konfiguraci se souřadnice nemění. Nejedná se o izometrii v eukleidovském prostoru, jako to uvažuje například [28], [15], [17] přestože je použito stejné značení. Podmínky na $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{c}^*$ tedy znamenají, že referenční konfiguraci vidí oba pozorovatelé stejně, přesněji řečeno používají k jejímu popisu stejné souřadnice. Referenční konfiguraci tak můžeme použít pro popis uvažovaného tělesa, protože je pro oba pozorovatele stejný.

Z transformačního vztahu (2.11) plyne, že souřadnice libovolného vektoru se transformují podle pravidla

$$\mathbf{y}^*(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)). \tag{2.12}$$

Podobně jako je tomu pro Cauchyho vektor napětí (viz např. [16, kap. 5.2.2]), princip nezávislosti na pozorovateli pro hustotu vzájemné síly $\mathbf{f}$ vyžaduje, aby se souřadnice $\mathbf{f}$ transformovaly stejně jako pro objektivní vektor v (2.11), tedy

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t), \tag{2.13}$$

$\mathbf{f}^*$ jsou souřadnice druhého pozorovatele.

2.3 Bond-based peridynamika

Původní konstitutivní vztah v peridynamice uvedený v Silling [21] a [26] je tzv. bond-based homogenní materiál, pro který platí

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)),$$

kde $\hat{\mathbf{f}} : \left(\tilde{\Omega} \backslash \{\mathbf{0}\}\right) \times (\mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}) \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{\Omega} := \Omega - \Omega$. Hustota vzájemné síly tedy závisí na vzájemné poloze bodů v referenční a deformované konfiguraci. Polohový vektor $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ nazývá Silling vazbou. V bond-based materiálu reagují vazby okolo bodu $\mathbf{x}$ nezávisle na sobě. To vede k tomu, že lineární izotropní materiál má Poissonův poměr $\frac{1}{4}$. Tento nedostatek je odstraněn v bohatším modelu, tzv. State-based peridynamice (viz [23]), kde síla působící na bod skrze vazbu závisí na deformaci vazeb ostatních. V této práci se však budeme zabývat výhradně bond-based peridynamikou, a nebudeme přívlastek bond-based vždy uvádět.

Od této chvíle budeme používat zkrácené značení pro vektor $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x}' - \mathbf{x}$, nazývaný vazba v referenční konfiguraci, a vektor $\tilde{\mathbf{y}} := \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$, který nazveme vazbou v deformované konfiguraci.

Požadavky na konstitutivní vztah

Zde jsou diskutovány vlastnosti, které musí konstitutivní funkce $\hat{\mathbf{f}}$ z různých důvodů splňovat a díky kterým má jednodušší reprezentaci.

3. Newtonův pohybový zákon

Kvůli antisymetrii $\mathbf{f}$ popsané v (2.3) musí konstitutivní funkce $\hat{\mathbf{f}}$ splňovat

$$\hat{\mathbf{f}}(-\tilde{\mathbf{x}}, -\tilde{\mathbf{y}}) = -\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega} \backslash \{\mathbf{0}\}, \forall \tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}.$$

Princip nezávislosti na pozorovateli pro konstitutivní vztah

Tento princip postuluje, že druhý pozorovatel spjatý s transformací souřadnic (2.11) používá stejný konstitutivní vztah, tedy

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{y}^*(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)). \tag{2.14}$$

Z kombinace rovnic (2.14), (2.13) a (2.12) spolu se skutečností, že změna pozorovatele byla libovolná, plyne

$$\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega} \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall \tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{SO_3}. \tag{2.15}$$

Izotropie

Izotropní materiál má ve všech směrech stejné vlastnosti, ale je potřeba přesně stanovit, co to znamená pro konstitutivní funkci $\hat{\mathbf{f}}$. Nechť $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ jsou dvě referenční konfigurace spjaté vztahem

$$\Omega^* = \mathbf{P}\Omega, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{P} \in \mathbf{SO_3}.$$

Dále nechť $\mathbf{y} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ je libovolná deformace a $\mathbf{y}^* : \Omega^* \to \mathbb{R}^3$ je definovaná jako

$$\mathbf{y}^*(\mathbf{x}^*, t) := \mathbf{y}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t).$$

Současná konfigurace je pro obě deformace společná. Protože $\mathbf{P}^{-1}$ otočí Ω^* jako tuhým tělesem, nezmění se silové působení materiálu a tedy je

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}'^*, \mathbf{x}^*, t), \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \geq 0.$$

Pro referenční konfiguraci Ω respektive Ω^* existuje konstitutivní funkce $\hat{\mathbf{f}}_\Omega$ respektive $\hat{\mathbf{f}}_{\Omega^*}$ tak, že

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{f}}_\Omega(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)),\\ \mathbf{f}(\mathbf{x}'^*, \mathbf{x}^*, t) &= \hat{\mathbf{f}}_{\Omega^*}(\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\mathbf{x}'^*, t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}^*, t)).\end{aligned}$$

Pokud je $\mathbf{P}$ v grupě materiálové symetrie (pro izotropní materiál je to celá $\mathbf{SO_3}$), není v odezvě materiálu žádný rozdíl a obě funkce dávají stejné výsledky, nebo-li

$$\hat{\mathbf{f}}_\Omega(\cdot, \cdot) = \hat{\mathbf{f}}_{\Omega^*}(\cdot, \cdot).$$

Pomocí kombinace uvedených výsledků plyne

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}}_\Omega(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*\prime}, \mathbf{x}^*, t)\\ &= \hat{\mathbf{f}}_{\Omega^*}(\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\mathbf{x}'^*, t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}^*, t))\\ &= \hat{\mathbf{f}}_{\Omega^*}(\mathbf{P}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t))\\ &= \hat{\mathbf{f}}_\Omega(\mathbf{P}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t))\end{aligned}$$

Protože deformace byla libovolná, pro izotropní materiál platí

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega} \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall \tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{SO_3}. \tag{2.16}$$

To je jiný vztah, než uvádí Silling ve svém původním článku [21, r-ce (12)]. Ten má tvar

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega} \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall \tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{SO_3}$$

a není nijak podrobněji vysvětlen. Dá se však odvodit z (2.16) za dodatečného předpokladu platnosti principu nezávislosti na pozorovateli formulovaném v (2.15)

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega} \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall \tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{SO_3}.$$

Reprezentace $\hat{\mathbf{f}}$ pro izotropní materiál

Za předpokladu izotropie a platnosti principu nezávislosti na pozorovateli odvodíme reprezentaci pro konstitutivní funkci $\hat{\mathbf{f}}$.

Nejdříve využijeme výsledku z [26, kap. 4.7], podle kterého pro nepolární materiál (tj. materiál splňující (2.9)) je funkce $\hat{\mathbf{f}}$ tvaru

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)) = \hat{F}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t))\,(\mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)),$$

nebo-li směr $\mathbf{f}$ je rovnoběžný s vazbou v deformované konfiguraci. Funkce $\hat{F}$ má tedy význam amplitudy síly. Navíc díky (2.15) a (2.16) splňuje funkce $\hat{F}$

$$\hat{F}(\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}}) = \hat{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega} \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall \tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{SO_3}.$$

Tedy $\hat{F}$ je izotropní skalární funkce ve smyslu matematické definice a proto závisí jen na $|\tilde{\mathbf{x}}|$, $|\tilde{\mathbf{y}}|$ a $\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{y}}$ (viz [28, kap. B.II. sekc. 11]). Tato závislost nebude přeznačována. Celkem

$$\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \hat{F}(|\tilde{\mathbf{x}}|, |\tilde{\mathbf{y}}|, \tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{y}})\,\tilde{\mathbf{y}}. \tag{2.17}$$

Tato reprezentace je uvedena i v [21], ale není nijak komentována její nevyhnutelnost. Dále budou argumenty funkce $\hat{F}$ značeny

$$I_1 := |\tilde{\mathbf{x}}|, \quad I_2 := |\tilde{\mathbf{y}}|, \quad I_3 := \tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{y}}.$$

Horizont

Nelokálnost obsažená v rovnici (2.6) zpravidla nezahrnuje celé těleso, ale je omezena. V případě bond-based peridynamiky je silové působení omezeno vzdáleností δ zvanou horizont

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \cdot) \equiv 0, \quad \text{pro } |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| > \delta.$$

Body, které jsou v referenční konfiguraci od sebe příliš vzdáleny, se přímo neovlivňují. Takové omezení nelokálnosti je zřejmě vhodné pro izotropní a homogenní materiál, ale je v [21] a [26] uvažováno pro materiál zcela obecný.

Se zadaným horizontem má pak bilance hybnosti tvar

$$\rho_0(\mathbf{x})\, \partial_t^2\, \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \tag{2.18}$$

$$= \int_{\Omega \cap B(\mathbf{x}, \delta)} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t))\, \mathrm{d}\mathbf{x}' + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0. \tag{2.19}$$

Pro pozdější účely bude výhodné zavést následující značení

$$\Omega_\delta := \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \delta\}, \quad \Omega^\delta := \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Množinu Ω_δ lze chápat jako analog vnitřku tělesa a Ω^δ zase jako rozhraní s okolím.

Mezi body $\mathbf{x}'$ a $\mathbf{x}$ nepůsobí fyzikální síla jako např. mezi atomy či molekulami. Jak uvádí [6], horizont je spíše efektivní vzdálenost vzájemného silového působení nebo efektivní měřítko. Toto měřítko je v modelu důležité např. z následujícího důvodu. Jak vysvětluje [3], žádný materiál nikdy není ideální kontinuum, ale má různou strukturu v různých měřítkách. Na některých škálách lze tento fakt zachytit proměnlivými materiálovými parametry. Rozhodně takto nelze postupovat na všech úrovních, protože daný model by byl velmi komplikovaný a neefektivní. Proto se na určité úrovni explicitní popis zastaví a jemnější struktura je do modelu zahrnuta nepřímo pomocí efektivních materiálových parametrů. Nelokalizuje-li se deformace na úrovních menších, než které jsou explicitně zachyceny, je kontinuální popis přiměřený. Pokud tomu tak není, je třeba model upravit. Namísto zjemnění explicitních materiálových parametrů je lepší přejít k zobecněnému kontinuu popisující např. nejednoduché materiály používající vyšší gradienty.

Měřítko obsažené v horizontu se projevuje následovně. Nechť, pro porovnání, je posunutí $\mathbf{u} := \mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{x})$ řešení rovnice linearizované pružnosti

$$-\operatorname{div}(\mathbf{C}\,\mathbf{e}(\mathbf{x})) = \mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

kde $\mathbf{C}$ je tenzor elastických konstant, $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ symetrický gradient $\mathbf{u}$ a $\mathbf{b}$ hustota vnějších sil. Po přechodu na jemnější škálu $\bar{\mathbf{x}}$ a $\bar{\mathbf{u}}$ danou vztahy $\mathbf{x} = s\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{u}(s\bar{\mathbf{x}}) = s\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}})$, $s \in (1, +\infty)$, je situace podobná. Přeškálované posunutí $\bar{\mathbf{u}}$ totiž splňuje formálně stejnou rovnici

$$-\operatorname{div}(\mathbf{C}\,\bar{\mathbf{e}}(\bar{\mathbf{x}})) = \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Omega},$$

kde $\bar{\Omega} = \frac{1}{s}\Omega$ a $\bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{x}}) = s\mathbf{b}(s\bar{\mathbf{x}})$. S použitím přepočítaných objemových sil je tak na menších rozměrech odezva stejná.

V nelokálních teoriích je však situace odlišná. Kvůli výskytu horizontu v rovnici (2.18) splňuje přeškálované posunutí rovnici s horizontem $\frac{\delta}{s}$, tedy s jiným integrálním operátorem. Peridynamický materiál tak není na všech škálách stejný.

Kromě konstantního horizontu používaném v původní teorii z [21], uvažují v [27] a následně v [20] možnost horizontu závislého na poloze v referenční konfiguraci. V [2] je peridynamika navržena jako nástroj pro multiscale modelování a [1] pak tuto myšlenku za využití horizontu dále rozpracovává v kontextu kompozitních materiálů.

V této práci je horizont jen konstanta daná strukturou materiálu. Jak zvolit velikost horizontu pro lineární homogenní izotropní materiál je popsáno v [21, kap. 12].

Mikroelasticita

V této kapitole odvodíme variační formulaci peridynamiky. Nejdříve z rovnice bilance sil odvodíme rovnici virtuální prace (slabou formulaci), ze které přirozeně vyplyne definice mikroelastického materiálu. Ten je obdobou hyperelastického materiálu. Nakonec ukážeme, že konstitutivní vztah pro homogenní izotropní materiál, který je navíc mikroelastický, má ještě jednodušší reprezentaci funkce $\hat{\mathbf{f}}$.

Vzhledem k zaměření práce budeme uvažovat pouze časově nezávislé procesy. V tomto případě má bilance sil spolu s okrajovými podmínkami tvar (viz [26, r-ce 20])

$$\int_{\Omega\cap B(\mathbf{x},\delta)} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}')-\mathbf{y}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'+\mathbf{b}(\mathbf{x})=\mathbf{0},\quad \mathbf{x}\in\Omega\setminus\Omega_D, \tag{2.20}$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x})=\mathbf{y}_0(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Omega_D, \tag{2.21}$$

kde $\Omega_D\subset\Omega^\delta$ značí množinu kladné míry, kde je deformace předepsaná. Síly působící na okraji Ω jsou zahrnuty v $\mathbf{b}$. Pro snazší úpravu neuvádíme explicitně horizontem omezenou oblast, přes kterou se integruje. Po přenásobení rovnice (2.6) libovolnou pevnou funkcí $\theta\in C_c^\infty(\Omega\setminus\Omega_D,\mathbb{R}^3)$ a integrací přes Ω dostaneme

$$\int_\Omega\int_\Omega \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}')-\mathbf{y}(\mathbf{x}))\cdot\theta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\theta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=0,\quad \forall\theta\in C_c^\infty(\Omega\setminus\Omega_D,\mathbb{R}^3).$$

Dále se dvojný integrál upraví podobně jako v (2.7)

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{1}{2}\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}')-\mathbf{y}(\mathbf{x}))\cdot(\theta(\mathbf{x}')-\theta(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\theta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=0,\quad \forall\theta\in C_c^\infty(\Omega\setminus\Omega_D,\mathbb{R}^3).$$

Z této rovnosti přirozeně plyne definice mikroelastického materiálu, která předpokládá existenci skalární funkce $\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}})$ takové, že

$$\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}})=\frac{\partial\,\hat{w}}{\partial\,\tilde{\mathbf{y}}}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}). \tag{2.22}$$

Dosadíme-li totiž tento vztah do předchozí rovnosti, dostaneme

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial\,\hat{w}}{\partial\,\tilde{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}')-\mathbf{y}(\mathbf{x}))\cdot(\theta(\mathbf{x}')-\theta(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\theta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=0,\quad \forall\theta\in C_c^\infty(\Omega\setminus\Omega_D,\mathbb{R}^3),$$

což lze formálně interpretovat jako Euler-Lagrangeovy rovnice funkcionálu

$$I(\mathbf{y})=\int_\Omega\int_\Omega \frac{1}{2}\hat{w}(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}')-\mathbf{y}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},\quad \mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \text{ pro } \mathbf{x}\in\Omega_D.$$

Odvození Euler-Lagrangeových rovnic s konkrétními předpoklady lze nalézt třeba v [4, kap. 8]. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}},\cdot)\equiv 0,\quad \text{pro } |\tilde{\mathbf{x}}|>\delta.$$

Peridynamická variační úloha pak zní

$$\min_{\mathbf{y}\in\mathcal{A}} I(\mathbf{y}), \tag{2.23}$$

$$I(\mathbf{y})=\int_\Omega\int_{\Omega\cap B(\mathbf{x},\delta)} \frac{1}{2}\hat{w}(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}')-\mathbf{y}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{2.24}$$

$$\mathcal{A}=\{\mathbf{y}:\Omega\to\mathbb{R}^3;\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \text{ v } \Omega_D\}. \tag{2.25}$$

Vztah (2.22) přináší další omezení na reprezentaci funkce $\hat{f}$. Nutná podmínka k existenci funkce $\hat{w}$ splňující (2.22) je (za předpokladu záměnnosti 2. parc. der.), aby

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{y}}} \times \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{0}.$$

S využitím reprezentace funkce $\hat{f}$ v (2.17) se po krátkém výpočtu dospěje k podmínce

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial I_3} = \mathbf{0},$$

nebo-li funkce $\hat{F}$ nezávisí na třetí proměnné. Vztah (2.17) se tedy zjednoduší (opět bez přeznačení $\hat{F}$) na

$$\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \hat{F}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, |\mathbf{y}(\mathbf{x}') - \mathbf{y}(\mathbf{x})|)\,(\mathbf{y}(\mathbf{x}') - \mathbf{y}(\mathbf{x})). \tag{2.26}$$

Princip nezávislosti na pozorovateli by se dal použít i pro potenciál $\hat{w}$. V jeho případě by pak tyto úvahy vedli k reprezentaci

$$\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \breve{w}(|\tilde{\mathbf{x}}|, |\tilde{\mathbf{y}}|). \tag{2.27}$$

2.4 Linearizovaná bond-based peridynamika

V poslední části této kapitoly představíme linearizovanou teorii pro mikroelastický materiál, která je vhodná pro malé deformace. Pro tento účel bude lepší přejít od deformace $\mathbf{y}$ k posunutí $\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$, pro které lze předchozí vztahy snadno přeformulovat. Konkrétně pro konstitutivní funkci $\hat{\mathbf{f}}$ přejdeme, bez změny jejího označení, k proměnné $\tilde{\mathbf{u}}$

$$\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) := \hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{u}}).$$

Malé posunutí definuje Silling precizně až v [22, kap. 4.1] podmínkou

$$\sup_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \le \delta} |\mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{u}(\mathbf{x})| \ll \delta. \tag{2.28}$$

V původním článku byla malost $\mathbf{u}$ vyjádřena pouze intuitivně. Výše uvedená podmínka je v celku přirozená. Supremum je omezeno na body bližší než horizont, protože pro body vzdálenější je funkce $\hat{\mathbf{f}}$ nulová a její aproximace je proto triviální. Dále je posunutí porovnáno s velikostí horizontu, protože změny probíhající na škále řádově menší než je ta daná horizontem, lze považovat za malé. Nakonec je tato podmínka analogií té z linearizované pružnosti $|\nabla \mathbf{u}| \ll 1$, která však nepřipouští žádné nespojitosti.

Aby mělo následující použití Taylorova rozvoje smysl, je potřeba přejít k bezrozměrným veličinám. Za charakteristický časový úsek se klidně může zvolit sekunda a za charakteristickou hmotnost klidně kilogram, protože ve statickém případě nehrají tyto veličiny roli. Charakteristická délka δ_0 už byla omezena podmínkou (2.28) na

$$\delta \le \delta_0,$$

takže vztahy mezi bezrozměrnými veličinami značenými # a těmi původními jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^{\#}\,\delta_0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}^{\#}\,\delta_0) &= \mathbf{u}^{\#}(\mathbf{x}^{\#})\,\delta_0, \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}^{\#}\,\delta_0) &= \mathbf{b}^{\#}(\mathbf{x}^{\#})\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\delta_0^{-2}, \\ \hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^{\#}\,\delta_0,\tilde{\mathbf{u}}^{\#}\,\delta_0) &= \hat{\mathbf{f}}^{\#}(\tilde{\mathbf{x}}^{\#},\tilde{\mathbf{u}}^{\#})\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\delta_0^{-5}, \\ \hat{F}(\tilde{\mathbf{x}}^{\#}\,\delta_0,\tilde{\mathbf{u}}^{\#}\,\delta_0) &= \hat{F}^{\#}(\tilde{\mathbf{x}}^{\#},\tilde{\mathbf{u}}^{\#})\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\delta_0^{-6}, \\ \hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}^{\#}\,\delta_0,\tilde{\mathbf{u}}^{\#}\,\delta_0) &= \hat{w}^{\#}(\tilde{\mathbf{x}}^{\#},\tilde{\mathbf{u}}^{\#})\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\delta_0^{-4}. \end{aligned}$$

Kvůli přehlednosti značení však budeme nadále znak $^{\#}$ vynechávat.

Spolu s výše zmíněným přechodem k posunutí přejde bilance sil (2.20) na

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\cap B(\mathbf{x},\frac{\delta}{\delta_0})} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}')-\mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}' + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}\in\Omega\setminus\Omega_D, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_D(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega_D, \end{aligned}$$

upravená bilance momentu sil (2.8) na

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap B(\mathbf{x},\frac{\delta}{\delta_0})} (\mathbf{x}'-\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x}')-\mathbf{u}(\mathbf{x}))\times\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}')-\mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

funkcionál (2.23) na

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}) = \int_\Omega \int_{\Omega\cap B(\mathbf{x},\frac{\delta}{\delta_0})} \frac{1}{2}\hat{w}(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}')-\mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ + \int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \end{aligned}$$

a nakonec podmínka (2.28) na

$$\sup_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|\le\frac{\delta}{\delta_0}} |\mathbf{u}(\mathbf{x}')-\mathbf{u}(\mathbf{x})| \ll \frac{\delta}{\delta_0} \le 1,$$

takže má smysl aproximace pro $|\tilde{\mathbf{u}}|\to 0$. Kvůli dalším kapitolám navazujícím na článek [5] však budeme horizont $s := \frac{\delta}{\delta_0} \le 1$ značit místo s pouze δ.

Je-li tedy posunutí malé podle uvedené definice, lze konstitutivní vztah (2.26) linearizovat v druhé proměnné pomocí Taylorova rozvoje v nule. K tomu je potřeba existence totálního diferenciálu funkce $\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}},\cdot)$. Důležité je, že tato existence se nijak neodvíjí od regularity deformace. Derivace (2.26) podle $\tilde{\mathbf{u}}$ je

$$\frac{\partial\,\hat{\mathbf{f}}}{\partial\,\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{\partial\,\hat{F}}{\partial\,I_2}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}})\frac{(\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{u}})\otimes(\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{u}})}{|\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{u}}|} + \hat{F}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}})\,\mathbf{I},$$

takže Taylorův rozvoj $\hat{\mathbf{f}}$ v proměnné $\tilde{\mathbf{u}}$ má tvar

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}}) &= \frac{\partial\,\hat{\mathbf{f}}}{\partial\,\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{0})\,\tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{0}) + O(|\tilde{\mathbf{u}}|^2) \\ &= \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{x}}|}\frac{\partial\,\hat{F}}{\partial\,I_2}(|\tilde{\mathbf{x}}|,|\tilde{\mathbf{x}}|)\tilde{\mathbf{x}}\otimes\tilde{\mathbf{x}} + \hat{F}(|\tilde{\mathbf{x}}|,|\tilde{\mathbf{x}}|)\mathbb{I}\right)\tilde{\mathbf{u}} + \hat{F}(|\tilde{\mathbf{x}}|,|\tilde{\mathbf{x}}|)\tilde{\mathbf{x}} + O(|\tilde{\mathbf{u}}|^2) \\ &= \frac{1}{|\tilde{\mathbf{x}}|}\frac{\partial\,\hat{F}}{\partial\,I_2}(|\tilde{\mathbf{x}}|,|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}})\tilde{\mathbf{x}} + \hat{F}(|\tilde{\mathbf{x}}|,|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{u}}) + O(|\tilde{\mathbf{u}}|^2) \quad \text{pro } |\tilde{\mathbf{u}}|\to 0. \end{aligned}$$

Označíme-li

$$\lambda(|\tilde{\mathbf{x}}|) := \frac{1}{|\tilde{\mathbf{x}}|}\frac{\partial \hat{F}}{\partial I_2}(|\tilde{\mathbf{x}}|, |\tilde{\mathbf{x}}|), \quad F(|\tilde{\mathbf{x}}|) := \hat{F}(|\tilde{\mathbf{x}}|, |\tilde{\mathbf{x}}|),$$

lze linearizovaný konstitutivní vztah psát v přehledném tvaru

$$\hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \lambda(|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}})\tilde{\mathbf{x}} + F(|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{u}}). \tag{2.29}$$

Funkce F určuje silové působení mezi dvojicemi bodů, které je přítomno v referenční konfiguraci. Je-li $F > 0$, body se navzájem přitahují, pro $F < 0$ se odpuzují. Funkce λ pak souvisí s nárůstem či poklesem této síly způsobenou malou změnou vzdálenosti této dvojice v důsledku deformace. Pro $\lambda > 0$ síla při oddálení bodů vzroste. Při představě vazby $\tilde{\mathbf{x}}$ jako pružinky, udává λ její tuhost. Pro $F \neq 0$ není tato pružinka v referenční konfiguraci v rovnovážné poloze, ale podle znaménka F je buď stlačená nebo natažená.

Linearizovaný konstitutivní vztah $\hat{\mathbf{f}}$ pro hustotu vzájemné síly je tak součtem dvou členů. První člen λ udává velikost silového působení, které je rovnoběžné s vazbou v referenční konfiguraci, druhému členu s F pak odpovídá působení rovnoběžné s vazbou v deformované konfiguraci. Bilance momentu sil (2.10) platná pro bond-based materiál, tak pro linearizovaný konstitutivní vztah není splněna přesně, ale kvůli λ členu pouze přibližně v členech prvního řádu. To je ovšem na úrovni zvolené aproximace přijatelné (srovnej [22, Def. 4.3]).

Kvadratický potenciál pro linearizovanou $\hat{\mathbf{f}}$ je

$$\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\lambda(|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{1}{2}F(|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 + F(|\tilde{\mathbf{x}}|)\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}.$$

Pro pozdější účely bude vhodné tento potenciál normalizovat na

$$\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\lambda(|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{1}{2}F(|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 + F(|\tilde{\mathbf{x}}|)\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k\chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})|\tilde{\mathbf{x}}|^2 \tag{2.30}$$

tak, aby bylo $\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \geq 0$. Konstanta $k > 0$ je volena následovně. Nechť existují konstanty $C, c_0 > 0$ takové, že

$$C \geq F(s) \geq c_0\chi_{(0,\delta)}(s) \quad \text{a } \lambda(s) \geq 0 \quad \text{pro s.v. } s \in (0, +\infty);$$

Pak s pomocí těchto odhadů a vážené Youngovy nerovnosti je

$$\begin{aligned} \hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) &\geq \frac{c_0}{2}\chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})|\tilde{\mathbf{u}}|^2 - C\chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})|\tilde{\mathbf{x}}||\tilde{\mathbf{u}}| + k\chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})|\tilde{\mathbf{x}}|^2 &(2.31)\\ &\geq \chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})(C'|\tilde{\mathbf{u}}|^2 - C''|\tilde{\mathbf{x}}|^2 + k|\tilde{\mathbf{x}}|^2). &(2.32)\end{aligned}$$

Stačí tedy volit $k \geq C''$.

Tuto kapitolu bychom zakončili větou o existenci řešení převzatou z [4, věta 5.1]. Symbol $\mathcal{L}(\tilde{\Omega})$ značí Lebesgueovsky měřitelné podmnožiny $\tilde{\Omega}$ a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ Borelovsky měřitelné podmnožiny $\mathbb{R}^d$. Kladná a záporná část je značena $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$.

Věta 2.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lipschitzovská oblast, $\delta > 0$ a $1 < p < \infty$. Nechť dále $\Omega_D \subset \Omega^\delta$ je měřitelná množina kladné míry. Buď funkce $w : \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}(\tilde{\Omega}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ měřitelná. Předpokládejme, že*

1. existuje $c_0 > 0$ takové, že

$$w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \geq c_0 \chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}}) |\tilde{\mathbf{u}}|^p \quad \text{pro s.v. } \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega} \text{ a } \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^d;$$

2. existují $a_1 \in L^1(\tilde{\Omega})$ a $C > 0$ takové, že

$$w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \leq a_1(\tilde{\mathbf{x}}) + C|\tilde{\mathbf{u}}|^p \quad \text{pro s.v. } \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega} \text{ a } \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^d;$$

3. $w(\tilde{\mathbf{x}}, \cdot)$ je zdola polospojitá pro s.v. $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}$;

4. pro s.v. $\mathbf{x} \in \tilde{\Omega}$ a všechna $\mathbf{u} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ je funkce

$$\mathbf{y} \mapsto \int_\Omega w(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}'$$

konvexní v $\mathbb{R}^d$;

Nechť $G : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{L}(\tilde{\Omega}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ měřitelná a splňuje pro s.v. $\mathbf{x} \in \Omega$, že funkce $G(\mathbf{x}, \cdot)$ je konkávní, shora polospojitá a

$$G^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq a_2(\mathbf{x}) + c_1 |\mathbf{y}|^q,$$
$$G^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq a_2(\mathbf{x}) + \mathbf{a}_3(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \quad \text{pro s.v. } \mathbf{x} \in \Omega \text{ a } \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d,$$

pro nějaké $1 \leq q < p$, $c_1 > 0$, $a_2 \in L^1(\Omega)$ a $\mathbf{a}_3 \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Nechť $\mathbf{u}_0 \in L^p(\Omega_D, \mathbb{R}^d)$ splňuje

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_D} G^-(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega_D} G^-(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\mathbf{x} < \infty.$$

Nechť

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{u} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d) : \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ s.v. v } \Omega_D\}.$$

Pak v $\mathcal{A}$ existuje minimizér funkcionálu

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}) = \int_\Omega \int_\Omega w(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\mathbf{x}' \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

V této situaci je $n = d = 3$ a $p = 2$. Požadavky na funkce λ, F a $\mathbf{b}$ tedy jsou následující (připomeňme, že $F \equiv \lambda \equiv 0$ na $(\delta, +\infty)$).

Věta 2.2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je lipschitzovská oblast a $\delta > 0$. Nechť dále $\Omega_D \subset \Omega^\delta$ je měřitelná množina kladné míry. Buďte funkce $\lambda : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ měřitelné. Předpokládejme, že*

1. existuje $c_0 > 0$ takové, že

$$F(s) \geq c_0 \chi_{(0,\delta)}(s) \quad \text{a } \lambda(s) \geq 0 \quad \text{pro s.v. } s \in (0, +\infty);$$

2. existuje $C > 0$ takové, že

$$F(s) \leq C \quad \text{a } \lambda(s) \leq \frac{C}{s^2} \quad \text{pro s.v. } s \in (0, +\infty);$$

Buď $\mathbf{b} \in L^{q'}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ *pro nějaké* $q' > 2$*,* $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega_D, \mathbb{R}^d)$ *a nechť*

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d) : \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ s.v. v } \Omega_D\}.$$

Pak v $\mathcal{A}$ *existuje minimizér funkcionálu*

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}) = \int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{2} \hat{w}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\mathbf{x}' \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Důkaz. Stačí ověřit předpoklady předešlé věty pro

$$w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}).$$

Zřejmě je pak funkce w je spojitá v druhé proměnné a tedy Borelovsky měřitelná. Díky měřitelnosti funkcí λ a F je měřitelná v první proměnné.

Dolní odhad w už za těchto předpokladů byl v podstatě dokázán v (2.32) a horní odhad w platí díky následujícímu hornímu odhadu $\hat{w}$

$$\begin{aligned}
\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) &\leq \frac{1}{2} \lambda(|\tilde{\mathbf{x}}|) |\tilde{\mathbf{x}}|^2 |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{2} F(|\tilde{\mathbf{x}}|) |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + F(|\tilde{\mathbf{x}}|) |\tilde{\mathbf{x}}| |\tilde{\mathbf{u}}| + k \chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}}) |\tilde{\mathbf{x}}|^2 && (2.33) \\
&\leq \frac{C}{2} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{C}{2} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{2} F(|\tilde{\mathbf{x}}|) |\tilde{\mathbf{x}}|^2 + \frac{1}{2} F(|\tilde{\mathbf{x}}|) |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + k \chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}}) |\tilde{\mathbf{x}}|^2 && (2.34) \\
&\leq \frac{3C}{2} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \left(\frac{C}{2} + k \right) \chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}}) |\tilde{\mathbf{x}}|^2. && (2.35)
\end{aligned}$$

Díky konvexnosti $\hat{w}$ v druhé proměnné je konvexní i funkce

$$\mathbf{y} \mapsto \int_\Omega w(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}'$$

pro s.v. $\mathbf{x} \in \tilde{\Omega}$ a všechna $\mathbf{u} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Stejně snadno se ověří, že volba

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

splňuje potřebné předpoklady. □

Kapitola 3

Porovnání bond-based peridynamiky s elasticitou

V této kapitole se zaměříme na porovnání peridynamiky s elasticitou. Nejdříve stručně shrneme různé přístupy k této problematice počínaje už prvním článkem o peridynamice [21]. Pak ukážeme, jak z bond-based peridynamického konstitutivního modelu spočítat Cauchyho a následně první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí a nakonec použijeme výsledek z [5] ke spočtení Γ-limity linearizované peridynamiky.

3.1 Dřívější porovnání peridynamiky s elasticitou

První porovnání peridynamiky s elasticitou je provedeno už v prvním článku [21]. Při homogenní deformaci se pomocí hustoty uložené energie porovnává mikroelastický materiál s hyperelastickým ([21, kap. 7]). Ve funkcionálu energie (2.23) je vnitřní integrál spolu s $\frac{1}{2}$ interpretován jako hustota uložené energie. Pro homogenní deformaci se pomocí (2.27) dá tato hustota vyjádřit jako funkce deformačního gradientu $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned}\hat{W}(\mathbf{F}) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega\cap B(\mathbf{0},\,\delta)} \hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int_{\Omega\cap B(\mathbf{0},\,\delta)} \breve{w}(|\tilde{\mathbf{x}}|, |\mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}|)\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega\cap B(\mathbf{0},\,\delta)} \breve{w}(|\tilde{\mathbf{x}}|, \sqrt{\tilde{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{F}^T\mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Je sestrojena třída různých mikroelastických modelů, které však dávají stejnou hustotu uložené energie popsanou výše. Přesto se však v experimentech citlivých na nelokalitu liší, jak je následně ukázáno v [21, kap. 12].

Dále je pak v [21, kap. 11] porovnána linearizovaná peridynamika s linearizovanou pružností. Přesněji řečeno pouze izotropní homogenní materiál podstupující infinitezimální homogenní deformaci. Porovnání probíhá následovně. Nejdříve je spočten vektor

$$\begin{aligned}\tau(\mathbf{x},\mathbf{n}) &= \int_0^{+\infty}\int_{\Omega_+^\delta} \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}-s\mathbf{n})\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty}\int_{\Omega_+^\delta} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}+s\mathbf{n}, \mathbf{y}(\mathbf{x}')-\mathbf{y}(\mathbf{x}-s\mathbf{n}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

kde

$$\Omega_+^\delta = \{\mathbf{x}' \in \Omega^\delta : (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} > 0\}.$$

Ten je nazván vektorem plošné hustoty síly v bodě $\mathbf{x} \in \Omega^\delta$ ve směru normály $\mathbf{n}$. Hustota je míněna vůči ploše v referenční konfiguraci. Na základě tohoto vektoru je definována *beznapěťová* (v originále unstressed) referenční konfigurace. V té musí být pro deformaci rovnou identitě

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall \mathbf{n} \in \mathbb{S}^2.$$

Pro beznapěťovou referenční konfiguraci a infinitezimální homogenní deformaci danou gradientem

$$\nabla \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon \ll 1,$$

jsou počítány hodnoty tohoto vektoru ve směrech jednotlivých prvků kartézské báze. Takto získané tenzorové pole se následně identifikuje s prvním Piola-Kirchhoffovým tenzorem napětí. Ten je díky předpokladu beznapěťové referenční konfigurace symetrický, ale není to nikde řečeno. Naopak se uvádí, že stejný výpočet by se dal provést i pro referenční konfiguraci, Avšak nečiní se tak kvůli možné nejednoznačnosti elastických konstant (srovnej [21, část 11]). Z takto spočteného prvního Piola-Kirchhoffova tenzoru jsou nakonec spočítány Lamého konstanty l a μ

$$l = \mu = \frac{2\pi}{15} \int_0^\delta \lambda(r) r^6 \, \mathrm{d}r, \tag{3.1}$$

kde λ je funkce z linearizovaného konstitutivního vztahu (2.29) pro vzájemnou hustotu síly. Je-li funkce λ homogenní stupně $5 - \alpha > 0$ (význam této volby bude zřejmý na konci kapitoly 3.3), jsou tyto konstanty po spočtení integrálu rovny

$$l = \mu = \frac{2\pi\lambda(1)}{15(5-\alpha)} \delta^{5-\alpha}. \tag{3.2}$$

Poissonův poměr je tak roven $\frac{1}{4}$. Má-li tedy nějaký izotropní a homogenní elastický materiál dávat pro malé deformace stejnou odezvu, jako daný peridynamický, musí mít tyto Lamého konstanty. Kvůli fixnímu Poissonovu poměru $\frac{1}{4}$ je materiálová odezva v linearizované bond-based peridynamice značně omezená.

Další porovnání peridynamiky s elasticitou se zaměřuje na limitní chování teorie se stále zmenšujícím se horizontem. V kontextu diskuze v části 2.4 týkající se bezrozměrných veličin, lze tento limitní proces chápat tak, že horizont daného materiálu je mnohonásobně menší, než zvolená charakteristická délka zkoumané úlohy (nebo viz [24, kap. 3]). V tomto článku také používají ke zkoumání konvergence následující tenzorové pole

$$\nu(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha + \beta)^2 \mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{m}, \mathbf{x} - \beta\mathbf{m}, t) \otimes \mathbf{m} \, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \mathrm{d}S(\mathbf{m}),$$

nazývané v [25] jako *peridynamický tenzor* (explicitní závislost na čase není v článku [25] pro větší přehlednost uváděna), pro které platí

$$\operatorname{div} \nu(\mathbf{x}, t) = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}\mathbf{x}'.$$

Bilance sil (2.6) tak lze psát ve tvaru

$$\rho_0(\mathbf{x})\, \partial_t^2\, \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div} \nu(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t),$$

který je formálně podobný bilanci sil v elasticitě. Pro dostatečně hladkou fixní deformaci je pak po příslušném přeškálování zkoumána konvergence takto přepsané rovnice. Za předpokladu určité regularity konstitutivního modelu je ukázáno, že limitní rovnice obsahuje divergenci tenzorového pole, které závisí na gradientu deformace pouze v daném bodě, jako je tomu v elasticitě. Lze tak doufat, že řešení peridynamické rovnice lze pro malé horizonty aproximovat pomocí řešení limitní rovnice, která je formálně podobná bilanci sil v elasticitě.

Nejasnosti ohledně mechanické interpretace peridynamického tenzoru (uvedené v [25, kap. 6]) nás pak vedli ke konstrikci tenzorového pole v deformované konfiguraci, které následně identifikujeme s Cauchyovým tenzorem napětí (viz část 3.2). Z něho pomocí Piolovy transformace spočteme tenzorové pole, které identifikujeme s prvním Piola-Kirchhoffovým tenzorem, a pomocí něhož lze bilanci sil rovněž přepsat do divergentního tvaru. Takto spočtený první Piola-Kirchhoffův tenzor se však od peridynamického tenzoru liší.

Další krok ve zkoumání limitního chování peridynamiky pak udělali mimo jiné [5], kteří zkoumají limitní chování variační formulace peridynamiky. Výhoda jejich přístupu je zaprvé v zahrnutí okrajových podmínek, takže je zkoumána konvergence celistvé úlohy, zadruhé v použití Γ-limity. Ta je považována za správné pojetí konvergence funkcionálů (viz např.), protože, mimo jiné, z její platnosti pak plyne, že každý hromadný bod posloupnosti řešení jednotlivých úloh je řešení limitní úlohy. Což je mnohem víc, než jen znalost limitního chování rovnic či funkcionálů v pevném bodě. Máme tak zajištěno, že pro malé horizonty se minimizéry peridynamického funkcionálu energie liší málo od minimizérů limitní hyperelastické energie. Mimo jiné autoři [5] ukazují, že limitní úloha se sestává z minimalizace funkcionálu, který má stejný tvar jako v hyperelasticitě. Neřeší však otázku objektivity hyperelastické hustoty energie. Pro horizont řádově menší než charakteristická délka uvažované úlohy, tak lze složitější nelokální model nahradit klasickým lokálním. Mikroelasticita v peridynamice je tak v určitém směru rozšířením hyperelasticity.

V poslední části této kapitoly jsme pak použili výsledek z [5] k zodpovězení otázky, jestli Γ-limitou linearizované peridynamiky je linearizovaná elasticita. Nebo-li, jestli je linearizovaná peridynamika rozšířením linearizované elasticity ve smyslu popsaném výše. Ukazuje se, že pro některé peridynamické potenciály $\hat{w}$, nemá limitní hustota uložené energie stejný tvar jako ta v linearizované elasticitě, protože závisí i na nesymetrické části gradientu posunutí. Není tedy v kontextu lineární elasticity objektivní. Pro malé horizonty se tak odezva lineárního peridynamického materiálu liší od odezvy lineárního elastického.

3.2 Odvození Cauchyho a 1. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí

Jak bylo řečeno v kapitole 1, v elasticitě jsou vnitřní síly působící v tělese popsány pomocí Cauchyho tenzoru napětí, popřípadě z něho odvozeného 1. Piola-Krichhoffova tenzoru napětí. V peridynamice je toto působení popsáno hustotou vzájemné síly $\mathbf{f}$. V této kapitole se pokusíme vyjádřit oba tenzory pomocí této hustoty. Pomocí tohoto vztahu pak vyšetříme symetrii obou tenzorů v závislosti na konstitutivním vztahu pro $\mathbf{f}$. Motivací těchto výpočtů pro nás byly jednak nejasnosti ohledně mechanické interpretace peridynamického tenzoru $\nu(\mathbf{x})$, jednak snaha o částečné vysvětlení výsledku získaného Γ-limitou v části 3.3.

V celé této části budeme pro větší přehlednost vynechávat explicitní závislost na čase, protože zde není důležitá. Všechny následující úvahy však zůstávají v platnosti i pro časově závislé deformace, protože se odehrávají v libovolném fixním čase.

Kromě hustoty $\mathbf{f}$ vůči objemu v referenční konfiguraci, budeme potřebovat hustotu síly vůči deformované konfiguraci $\mathbf{f_y}$, která je daná vztahem

$$\mathbf{f_y}(\mathbf{x}'_\mathbf{y}, \mathbf{x_y}) \det \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}') \det \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}'_\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}'),\ \mathbf{x_y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}). \tag{3.3}$$

Z technických důvodů položme

$$\mathbf{f_y}(\mathbf{x}'_\mathbf{y}, \mathbf{x_y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \text{je-li } \mathbf{x}' \notin \Omega \text{ nebo } \mathbf{x}' \notin \Omega.$$

Cauchyho tenzor napětí $\mathbf{T}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y})$ spočítáme pomocí Cauchyho vektoru napětí $\mathbf{t}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y}, \mathbf{n})$. Ten má význam plošné hustoty síly v bodě $\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y}$ vzhledem k ploše s jednotkovou normálou $\mathbf{n}$. Nechť tedy plocha s normálou $\mathbf{n}$ prochází bodem $\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y}$ a rozděluje deformované těleso $\mathbf{y}(\Omega)$ na dvě podmnožiny

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(\Omega)_+ &:= \{\mathbf{x_y} \in \mathbf{y}(\Omega) : (\mathbf{x_y} - \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} > 0\},\\ \mathbf{y}(\Omega)_- &:= \{\mathbf{x_y} \in \mathbf{y}(\Omega) : (\mathbf{x_y} - \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} < 0\}.\end{aligned}$$

Síla, kterou část $\mathbf{y}(\Omega)_+$ působí na část $\mathbf{y}(\Omega)_-$ je podle významu $\mathbf{f_y}$ rovna

$$F(\mathbf{y}(\Omega)_+, \mathbf{y}(\Omega)_-) = \int_{\mathbf{y}(\Omega)_-} \int_{\mathbf{y}(\Omega)_+} \mathbf{f_y}(\mathbf{x}'_\mathbf{y}, \mathbf{x_y})\, \mathrm{d}\mathbf{x}'_\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x_y}. \tag{3.4}$$

Dále vektor $\mathbf{n}$ doplňme do kladně orientované ortogonální báze a nechť $\mathbf{Q}$ značí matici přechodu od této báze ke kanonické bázi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}$. Potom je

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{Q} = 1, \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \tag{3.5}$$

a tedy po použití substituce

$$\mathbf{x}'_\mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y} + \mathbf{Q}\mathbf{u}', \quad \mathbf{x_y} = \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y} + \mathbf{Q}\mathbf{u}$$

přejde rovnost (3.4) na tvar

$$\begin{aligned}&F(\mathbf{y}(\Omega)_+, \mathbf{y}(\Omega)_-)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \mathbf{f_y}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y} + \mathbf{Q}\mathbf{u}', \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y} + \mathbf{Q}\mathbf{u})\, \mathrm{d}u'_1\, \mathrm{d}u'_2\, \mathrm{d}u'_3\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2\, \mathrm{d}u_3,\end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)^T, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T.$$

Každou dvojici bodů $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}$ ležících v opačných poloprostorech můžeme spojit vektorem, který protne rovinu $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : u_1 = 0\}$ právě v jednom bodě $\mathbf{p}$. Taktéž je přesně určena délka vektorů $\mathbf{u}' - \mathbf{p}$ a $\mathbf{u} - \mathbf{p}$, jakož i jejich směr. Naopak udáme-li pevně bod $\mathbf{p}$ a směr $\mathbf{m}$ vektoru $\mathbf{u}' - \mathbf{p}$ (vektor $\mathbf{u} - \mathbf{p}$ má směr přesně opačný)

$$\mathbf{p} = (0, p_2, p_3)^T, \quad \mathbf{m} \in \{(\cos\theta,\, \sin\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi)^T : \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \varphi \in (0, 2\pi)\}, \tag{3.6}$$

stačí už zadat jen délku vektorů α a β a máme jasně určenou dvojici bodů $\mathbf{x}'_\mathbf{y}$, $\mathbf{x}_\mathbf{y}$, které na sebe působí. Zapsáno do vzorců, použijeme substituci

$$\begin{aligned} u'_1 &= \alpha\cos\theta, & u'_2 &= p_2 + \alpha\sin\theta\cos\varphi, & u'_3 &= p_3 + \alpha\sin\theta\sin\varphi, \\ u_1 &= -\beta\cos\theta, & u_2 &= p_2 - \beta\sin\theta\cos\varphi, & u_3 &= p_3 - \beta\sin\theta\sin\varphi, \end{aligned}$$

s jakobiánem

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} -\alpha\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\cos\theta\cos\varphi & -\alpha\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 & 1 & 0 \\ \alpha\cos\theta\sin\varphi & \alpha\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & 0 & 0 & 1 \\ \beta\sin\theta & 0 & 0 & -\cos\theta & 0 & 0 \\ -\beta\cos\theta\cos\varphi & \beta\sin\theta\sin\varphi & 0 & -\sin\theta\cos\varphi & 1 & 0 \\ -\beta\cos\theta\sin\varphi & -\beta\sin\theta\cos\varphi & 0 & -\sin\theta\sin\varphi & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(\alpha+\beta)^2\cos\theta\sin\theta, \end{aligned}$$

kde

$$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \alpha, \beta \in (0, +\infty), \quad p_2, p_3, \in (-\infty, +\infty).$$

Snadno se ověří, že tato je prostá, spojitě diferencovatelná a jakobián je různý od nuly. Působící síla se tak dá zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} &F(\mathbf{y}(\Omega)_+, \mathbf{y}(\Omega)_-) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\qquad (\alpha+\beta)^2\,\mathbf{f}_\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{p}+\alpha\mathbf{m}), \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{p}-\beta\mathbf{m}))\cos\theta\sin\theta \\ &\quad \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}p_2\,\mathrm{d}p_3, \end{aligned}$$

kde je vidět hledaná plošná hustota v bodě $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, který odpovídá bodu $\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y}$ na hraniční ploše. Cauchyho vektor napětí $\mathbf{t}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y}, \mathbf{n})$ se tak spočítá jako

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y}, \mathbf{n}) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\alpha+\beta)^2\,\mathbf{f}_\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y} + \alpha\mathbf{Q}\mathbf{m}, \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{y} - \beta\mathbf{Q}\mathbf{m})\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \end{aligned}$$

Díky symetrii integrandu se po posunutí meze na $\theta \in (0, \pi)$ a vydělení dvěma výsledek nezmění. Dva vnitřní integrály tak spolu s faktorem $\sin\theta$ tak lze zapsat jako integrál přes jednotkovou sféru

$$\begin{aligned}&\mathbf{t}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}, \mathbf{n})\\&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{S}^2}(\alpha+\beta)^2\,\mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}+\alpha\mathbf{Qm}, \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}-\beta\mathbf{Qm})\cos\theta\,\mathrm{d}S(\mathbf{m})\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta.\end{aligned}$$

Dále podle (3.6) a (3.5) platí

$$\cos\theta = \mathbf{m}\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{m}\cdot\mathbf{Q}^T\mathbf{n} = \mathbf{Qm}\cdot\mathbf{n},$$

takže je

$$\begin{aligned}&\mathbf{t}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}, \mathbf{n})\\&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{S}^2}(\alpha+\beta)^2\,\mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}+\alpha\mathbf{Qm}, \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}-\beta\mathbf{Qm})(\mathbf{Qm}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S(\mathbf{m})\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta.\end{aligned}$$

Nakonec použijeme substituci pro plošný integrál (viz např. [8])

$$\mathbf{m}' = \mathbf{Qm}, \quad \mathrm{d}S(\mathbf{m}') = |(\det\mathbf{Q})\,\mathbf{Q}^{-T}\mathbf{m}|\mathrm{d}S(\mathbf{m}) = \mathrm{d}S(\mathbf{m}).$$

Plošný element se tedy nijak nemění a protože bychom si rádi ponechali staré značení, budeme novou proměnnou značit stále $\mathbf{m}$. Výsledný tvar Cauchyho vektoru napětí tak je

$$\begin{aligned}&\mathbf{t}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}, \mathbf{n})\\&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{S}^2}(\alpha+\beta)^2\,\mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}+\alpha\mathbf{m}, \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}-\beta\mathbf{m})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S(\mathbf{m})\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta.\end{aligned}$$

Geometricky lze tento výsledek interpretovat jako tok silového působení skrze bod $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$.

Ze tvaru integrandu je patrno, že Cauchyho tenzor napětí je roven

$$\mathbf{T}_C(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{S}^2}(\alpha+\beta)^2\,\mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}+\alpha\mathbf{m}, \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}-\beta\mathbf{m})\otimes\mathbf{m}\,\mathrm{d}S(\mathbf{m})\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \quad (3.7)$$

Je vidět, že pokud je silové působení $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}$ rovnoběžné s vazbou v deformované konfiguraci

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} + \alpha\mathbf{m} - (\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} - \beta\mathbf{m}) = (\alpha+\beta)\mathbf{m},$$

je Cauchyho tenzor symetrický. Je tedy splněna bilance momentu sil formulovaná v elasticitě. Připomeňme, že bilance momentu sil postulovaná v (2.8), vedla v bond-based peridynamice právě na požadavek této rovnoběžnosti.

Pomocí Piolovy transformace Cauchyho tenzoru se dá spočítat první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí v závislosti na hustotě vzájemné síly $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{1.}(\bar{\mathbf{x}}) &= \det \nabla \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{T}_C(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}})(\nabla \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}))^{-T} \\ &= \frac{\det \nabla \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}})}{2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} \\ &\qquad (\alpha+\beta)^2 \, \mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} + \alpha \mathbf{m}, \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} - \beta \mathbf{m}) \otimes (\nabla \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}))^{-1} \mathbf{m} \\ &\qquad \mathrm{d}S(\mathbf{m}) \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta,\end{aligned}$$

kde $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}})$. Vztahem (3.3) mezi hustotou v deformované a referenční konfiguraci lze tento tenzor vyjádřit pomocí hustoty $\mathbf{f}$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{1.}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\det \nabla \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}})}{2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} \\ (\alpha+\beta)^2 \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}^{-1}(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) + \alpha \mathbf{m}), \mathbf{y}^{-1}(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) - \beta \mathbf{m}))}{\det \nabla \mathbf{y}(\mathbf{y}^{-1}(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) + \alpha \mathbf{m})) \det \nabla \mathbf{y}(\mathbf{y}^{-1}(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) - \beta \mathbf{m}))} \otimes (\nabla \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}))^{-1} \mathbf{m} \\ \mathrm{d}S(\mathbf{m}) \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta.\end{aligned}$$

Na rozdíl od Cauchyho tenzoru není první Piola-Kirchhoffův obecně symetrický. Oba tyto tenzory mají díky jejich konstrukci stejný fyzikální význam jako v elasticitě. Navíc, jak za chvíli ukážeme, je pro dostatečně regulární deformace jejich divergence rovna objemové hustotě sil vůči patřičné konfiguraci.

V bond-based peridynamice je

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}') - \mathbf{y}(\mathbf{x})),$$

takže podle vztahu (3.3) mezi hustotami $\mathbf{f}$ a $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}$ máme

$$\mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}^{-1}(\mathbf{p}) - \mathbf{y}^{-1}(\mathbf{q}), \mathbf{p} - \mathbf{q})}{\det \nabla \mathbf{y}(\mathbf{y}^{-1}(\mathbf{p})) \det \nabla \mathbf{y}(\mathbf{y}^{-1}(\mathbf{q}))}.$$

Tato hustota je pro fixní deformaci funkcí dvou proměnných $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ a její regularita záleží pouze na regularitě deformace $\mathbf{y}$ a konstitutivního vztahu $\hat{\mathbf{f}}$. Ke spočtení divergence Cauchyho tenzoru použiji výsledek z [25, věta 3] a formální podobnosti tenzorových polí $\mathbf{T}_C(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}})$ a $\nu(\mathbf{x})$. Oba tenzory jsou totiž počítány analogicky jen s tím rozdílem, že $\mathbf{T}_C(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}})$ je počítaný v deformované konfiguraci, kdežto $\nu(\mathbf{x})$ v referenční konfiguraci. Označme

$$\mathcal{I} := \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{p} = \mathbf{q}\}$$

a uveďme znění převzaté věty.

Věta 3.1. *Nechť je dána deformace* $\mathbf{y} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, *buď* $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}$ *je odpovídající hustota vzájemné síly a nechť* $\mathbf{T}_C(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}})$ *je dán vztahem* (3.7). *Je-li zároveň* $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}$ *spojitě diferencovatelná na* $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{I}$ *a*

$$\mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{o}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^{-2}) \textit{ pro } |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \to \infty,$$

pak

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}_{\mathbf{y}}} \mathbf{T}_C(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) = \int_{\mathbf{y}(\Omega)} \mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}'_{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}'_{\mathbf{y}} \quad \forall \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \in \mathbf{y}(\Omega).$$

Poznámka. Požadavek na dostatečně rychlý pokles hustoty vzájemné síly je snadno splněn. Je-li totiž deformace spojitá až do hranice Ω, je $\mathbf{y}(\Omega)$ omezená a pro body vně deformovaného tělesa je $\mathbf{f_y}$ nulová.

Z vlastnosti Piolovy transformace, věty o substituci pro objemový integrál a vztahu mezi $\mathbf{f_y}$ a $\mathbf{f_y}$ plyne

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T}_{1.}(\bar{\mathbf{x}}) &= \det \nabla \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) \operatorname{div}_{\mathbf{x_y}} \mathbf{T}_C(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) = \det \nabla \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) \int_{\mathbf{y}(\Omega)} \mathbf{f_y}(\mathbf{x}'_{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}'_{\mathbf{y}} \\ &= \int_\Omega \mathbf{f_y}(\mathbf{x}'_{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) \det \nabla \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}) \det \nabla \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}') \, \mathrm{d}\mathbf{x}' = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}', \bar{\mathbf{x}}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}'.\end{aligned}$$

Takže stejně jako tenzor $\nu(\mathbf{x})$, umožňuje $\mathbf{T}_{1.}(\bar{\mathbf{x}})$ přepsat peridynamickou bilanci hybnosti (2.6) do divergentního tvaru. Navíc je to skutečně první Piola-Kirchoffův tenzor, protože je získaný Piolovou transformací Cauchyho tenzoru, který byl zřetelně odvozen z pojmu napětí v deformované konfiguraci. Umožňuje tak lepší porovnání s elasticitou, než jen přepsání rovnice do formálně stejného tvaru. Dále pak tenzor získaný inverzní Piolovou transformací z peridynamického tenzoru $\nu(\mathbf{x})$ je symetrický pouze pro homogenní deformace.

Uveďme ještě, jak se první Piola-Kirchhoffův tenzor zjednoduší pro homogenní deformaci $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{x}$

$$\mathbf{T}_{1.}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} (\alpha + \beta)^2 \hat{\mathbf{f}}((\alpha+\beta)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{m}, (\alpha+\beta)\mathbf{m}) \otimes \mathbf{F}^{-1}\mathbf{m} \tag{3.8}$$

$$\mathrm{d}S(\mathbf{m}) \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta. \tag{3.9}$$

Je vidět, že pro homogenní deformaci je $\mathbf{T}_{1.}$ určitě symetrický, je-li směr silového působení rovnoběžný s vazbou v referenční konfiguraci. To platí i pro peridynamický tenzor ν, který se však s $\mathbf{T}_{1.}$ neshoduje ani pro homogenní deformace.

3.3 Γ-limita linearizované bond-based peridynamiky

V této části navážeme na výsledek uvedený v [5]. Stručně popíšeme jejich výpočet Γ-limity a zformulujeme předpoklady na funkce λ a F, určující potenciál $\hat{w}$ v linearizované peridynamice, za kterých lze použít věta o Γ-limitě dokázaná v [5]. Nakonec vyjádříme limitní hustotu uložené energie přehledně pomocí gradientu posunutí- Z tohoto tvaru je pak jasně patrné, že pro některé peridynamické potenciály $\hat{w}$ není limitní hustota objektivní, protože závisí i na nesymetrické části gradientu posunutí.

Připomeňme, že variační formulace peridynamiky v posunutí se sestává z minimalizace funkcionálu

$$\tilde{I}(\mathbf{u}) = \int_\Omega \int_{\Omega \cap B(\mathbf{x}, \delta)} \frac{1}{2} \hat{w}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\mathbf{x}' \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

na množině

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3; \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ v } \Omega_D\}.$$

V článku [5] zkoumají případ

$$\tilde{I}(\mathbf{u}) = \int_\Omega \int_{\Omega \cap B(\mathbf{x},\,\delta)} w(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

a

$$\mathcal{A}_\delta = \{\mathbf{u} : L^p(\Omega, \mathbb{R}^d); \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ v } \Omega^\delta\},$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pro $1 < p < \infty$, $n \in \{2,3\}$ a $d \in \{1,2,3\}$ a $\mathbf{u}_0 \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Navíc ještě uvažují závislost potenciálu na prostorové proměnné $w(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$, takže jejich práce pokrývá i nehomogenní materiály. Protože naším cílem je zkoumání linearizované peridynamiky pro homogenní materiály, nebudeme tuto závislost uvádět. Dále je v naší situaci $p = 2$, $n = d = 3$ a

$$w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}).$$

Vynechání funkcionálu vnějších sil nijak neubírá na obecnosti, protože Γ-konvergence je stabilní vůči spojitým perturbacím (viz [7, pozn. 2.2 a část 4]). Je-li tedy funkcionál vnějších sil spojitý, což je náš případ podle předpokladů ve větě 2.2, bude konvergence platit i po jeho přičtení jak ke zkoumanému funkcionálu, tak ke Γ-limitě. Limita je pak počítána pro fixní funkci $w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ a mění se pouze integrační obor vnitřního integrálu a definiční obor funkcionálu $\mathcal{A}_\delta$. Předpokládá se, že růst a koercivita funkce $w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ má přibližnou podobu

$$w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \approx \frac{|\tilde{\mathbf{u}}|^p}{|\tilde{\mathbf{x}}|^\alpha}.$$

Potenciál je tak, zhruba řečeno, skoro homogenní stupně $\beta := p - \alpha$. Zkoumá se pak konvergence přeškálovaného funkcionálu (je $n + \beta > 0$)

$$I_\delta(\mathbf{u}) = \frac{n+\beta}{\delta^{n+\beta}} \int_\Omega \int_{\Omega \cap B(\mathbf{x},\,\delta)} w(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d). \tag{3.10}$$

Samotný potenciál $w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ přesto homogenní být nemusí. Protože nás zajímá situace pro $\delta \to 0$, stačí aby byl potenciál téměř homogenní v okolí $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Přesněji řečeno, je potřeba existence limity

$$w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^\beta} w(t\tilde{\mathbf{x}}, t\tilde{\mathbf{u}}). \tag{3.11}$$

Je přirozené, že chování limitní úlohy je dáno právě funkcí $w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$, která už je homogenní stupně β. Z této funkce je pak sestrojena hustota uložené energie

$$\bar{w}(\mathbf{H}) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} w^\circ(\mathbf{z}, \mathbf{H}\mathbf{z})\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}). \tag{3.12}$$

Pro $n = 3$ značí $\mathrm{d}S(\mathbf{z})$ plošný element na jednotkové sféře, pro $n = 2$ délkový element na jednotkovém kruhu. Ukazuje se, že limita funkcionálů $I_\delta(\mathbf{u})$, pro hladké $\mathbf{u}$, je

$$\bar{I}(\mathbf{u}) := \int_\Omega \bar{w}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Pokusíme se alespoň zhruba nastínit, proč je limitní hustota právě takového tvaru. Pro malé $\tilde{\mathbf{x}}$, je díky hladkosti $\mathbf{u}$ malé i $\tilde{\mathbf{u}}$, takže díky (3.11) máme $w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \approx w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$. Pro malý horizont δ je proto

$$\begin{aligned} I_\delta(\mathbf{u}) &= \frac{n+\beta}{\delta^{n+\beta}} \int_\Omega \int_{\Omega \cap B(\mathbf{x},\delta)} w(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{u}(\mathbf{x}))\, \mathrm{d}\mathbf{x}' \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\approx \frac{n+\beta}{\delta^{n+\beta}} \int_\Omega \int_{\Omega \cap B(\mathbf{x},\delta)} w^\circ(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{u}(\mathbf{x}))\, \mathrm{d}\mathbf{x}' \mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dále je pro malý horizont díky hladkosti $\tilde{\mathbf{u}} \approx \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{x}}$, načež máme

$$\begin{aligned} &\frac{n+\beta}{\delta^{n+\beta}} \int_\Omega \int_{\Omega \cap B(\mathbf{x},\delta)} w^\circ(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}') - \mathbf{u}(\mathbf{x}))\, \mathrm{d}\mathbf{x}' \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\approx \frac{n+\beta}{\delta^{n+\beta}} \int_\Omega \int_{\Omega \cap B(\mathbf{x},\delta)} w^\circ(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}))\, \mathrm{d}\mathbf{x}' \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{n+\beta}{\delta^{n+\beta}} \int_\Omega \int_{\Omega \cap B(0,\delta)} w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{x}})\, \mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}} \mathrm{d}\mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti použili substituci $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$. Pro malé δ je také míra $\Omega \setminus \Omega^\delta$ malá, díky čemuž můžeme psát

$$\begin{aligned} &\frac{n+\beta}{\delta^{n+\beta}} \int_\Omega \int_{\Omega \cap B(0,\delta)} w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{x}})\, \mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}} \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\approx \frac{n+\beta}{\delta^{n+\beta}} \int_{\Omega^\delta} \int_{B(0,\delta)} w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{x}})\, \mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}} \mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Pro libovolné $\mathbf{H} \in \mathbb{R}d \times n$ pak použitím co-area formule (viz [5, lemma 5]), substitucí $\tilde{\mathbf{x}} = t\mathbf{z}$ pro $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^{n-1}$, homogenitě funkce w° a definici $\bar{w}$ v (3.12)

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\delta)} w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}})\, \mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}} &= \int_0^\delta \int_{\partial B(0,t)} w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}})\, \mathrm{d}S(\tilde{\mathbf{x}})\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\delta \int_{\mathbb{S}^{n-1}} t^{n-1} w^\circ(t\mathbf{z}, t\mathbf{H}\mathbf{z})\, \mathrm{d}S(\tilde{\mathbf{x}})\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\delta t^{n+\beta-1}\mathrm{d}t \int_{\mathbb{S}^{n-1}} w^\circ(\mathbf{z}, \mathbf{H}\mathbf{z})\, \mathrm{d}S(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{\delta^{n+\beta}}{n+\beta} \bar{w}(\mathbf{H}). \end{aligned}$$

V tomto místě je jasný důvod zvoleného škálování v (3.10). Kombinací tohoto výsledku s předešlým řetězcem aproximací dostáváme

$$I_\delta(\mathbf{u}) \approx \int_\Omega \bar{w}(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}))\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Podrobné znění a důkaz lze nalézt v [5, věta 9].

K definici limitní hustoty uložené energie budeme potřebovat následující definici (viz např. [9]).

Definice 3.2 (Kvazikonvexita)**.** *Borelovsky měřitelná a lokálně omezená funkce* $v : \mathbb{R}^{d\times n} \to \mathbb{R}$ *se nazývá* kvazikonvexní*, jestliže platí*

$$v(\mathbf{H}) \leq \int_{(0,1)^n} v(\mathbf{H} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,\infty}((0,1)^n, \mathbb{R}^d).$$

Hustotu W pak definujeme jako kvazikonvexní obálku (nebo kvazikonvexifikaci) funkce $\bar{w}$

$$W(\mathbf{H}) := Q\bar{w}(\mathbf{H}) = \sup\{v(\mathbf{H}) : v \leq \bar{w} \text{ a } v \text{ je kvazikonvexní}\}, \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{d\times n}.$$

V našem případě je situace o něco jednodušší. Jak ukážeme později, je funkce $\bar{w}$ konvexní a tedy i kvazikonvexní (viz např. [10, věta 5.3]), takže je rovna své kvazikonvexní obálce. Limitní úloha se pak sestává z minimalizace funkcionálu

$$I(\mathbf{u}) := \int_\Omega W(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

na množině

$$\mathcal{B} := \{\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d) : \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ v } \partial\Omega\}. \tag{3.13}$$

Rovnost $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ je pak chápána ve smyslu stop. Definiční obor limitní funkcionálu I tak je $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, zatímco funkcionály I_δ jsou definovány na prostoru $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Tato změna definičního oboru však není v Γ-konvergenci nijak neobvyklá.

Nyní můžeme uvést znění hlavní věty z článku [5], totiž Γ-konvergenci funkcionálů I_δ k funkcionálu I pro $\delta \to 0$ v silné (normové) topologii prostoru $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$, pro Dirichletovy okrajové podmínky. Značení $\delta \to 0$ je potřeba chápat v následujícím smyslu. Zvolíme libovolnou pevnou posloupnost kladných čísel konvergujících k nule. Písmeno δ pak značí člen této posloupnosti, takže výrazem „pro každé $\delta > 0$“ znamená „pro každý člen δ této posloupnosti“. Dále pak všechny konvergence zahrnující δ jsou ve smyslu konvergence zvolené posloupnosti k nule, zkráceně psáno $\delta \to 0$. Například ve výrazu $\mathbf{u}_\delta \to \mathbf{u}$ se rozumí, že tato konvergence platí pro $\delta \to 0$.

Věta 3.3. *Buď $1 < p < \infty$, $\alpha < n + p$ a položme $\beta := p - \alpha$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená lipschitzovská oblast. Buď $\mathbf{u}_0 \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ a nechť $w : \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňuje následující podmínky:*

1. *w je $\mathcal{L}(\tilde{\Omega}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ měřitelná;*

2. *existuje $r_0 > 0$ takové, že pro s.v. $\mathbf{x} \in \Omega$, všechna $0 < r < r_0$ a všechna $\delta > 0$ je funkce*

   $$\int_{\Omega_r \cap B(\mathbf{x},\delta)} w(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, \cdot)\,\mathrm{d}\mathbf{x}'$$

   konvexní v $\mathbb{R}^d$;

3. *existují $\psi_0 : \tilde{\Omega} \to [0, +\infty]$ a $\tilde{\psi}_0 \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$, $\tilde{\psi}_0 \geq 0$, takové, že*

   $$\limsup_{t\to 0^+} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{z}\in\mathbb{S}^{n-1}} \left[\frac{1}{t^\beta}\psi_0(t\mathbf{z}) - \tilde{\psi}_0(\mathbf{z})\right] \leq 0 \tag{3.14}$$

   a existuje $c_0 > 0$ takové, že

   $$\max\{0, c_0\chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})\frac{|\tilde{\mathbf{u}}|^p}{|\tilde{\mathbf{x}}|^\alpha} - \psi_0(\tilde{\mathbf{x}})\} \leq w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}, \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^d;$$

4. *existují* $\psi_1 : \tilde{\Omega} \to [0, +\infty]$ *a* $\tilde{\psi}_1, h \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$, $\tilde{\psi}_1, h \geq 0$ *takové, že*

$$\limsup_{t\to 0^+} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{z}\in\mathbb{S}^{n-1}} \left[\frac{1}{t^\beta}\psi_1(t\mathbf{z}) - \tilde{\psi}_1(\mathbf{z})\right] \leq 0$$

a

$$w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \leq h\left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}}{|\tilde{\mathbf{x}}|}\right)\frac{|\tilde{\mathbf{u}}|^p}{|\tilde{\mathbf{x}}|^\alpha} + \psi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}, \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^d;$$

5. *funkce* $w^\circ : (\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *definovaná vztahem*

$$w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^\beta} w(t\tilde{\mathbf{x}}, t\tilde{\mathbf{u}})$$

je pro každý kompakt $K \subset \mathbb{R}^d$ *zaprvé stejnoměrně spojitá v* $\mathbb{S}^{n-1} \times K$ *a zadruhé splňuje*

$$\lim_{t\to 0^+} \sup_{\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbb{S}^{n-1}} \sup_{\tilde{\mathbf{u}}\in K} \left|\frac{1}{t^\beta} w(t\tilde{\mathbf{x}}, t\tilde{\mathbf{u}}) - w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})\right| = 0.$$

Pak platí

1. *Pro každé* $\delta > 0$ *nechť* $\mathbf{u}_\delta \in \mathcal{A}_\delta$ *splňuje*

$$\sup_\delta I_\delta(\mathbf{u}_\delta) < \infty.$$

Pak existuje $\mathbf{u} \in \mathcal{B}$ *takové, že pro podposloupnost* $\mathbf{u}_\delta \to \mathbf{u}$ *v* $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

2. *Pro každé* $\delta > 0$ *nechť* $\mathbf{u}_\delta \in \mathcal{A}_\delta$ *a* $\mathbf{u}_\delta \to \mathbf{u} \in \mathcal{B}$ *v* $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$. *Pak*

$$I(\mathbf{u}) \leq \liminf_{\delta\to 0} I_\delta(\mathbf{u}_\delta).$$

3. *Pro každé* $\mathbf{u} \in \mathcal{B}$ *a každé* $\delta > 0$ *existuje* $\mathbf{u}_\delta \in \mathcal{A}_\delta$ *takové, že* $\mathbf{u}_\delta \to \mathbf{u}$ *a*

$$\limsup_{\delta\to 0} I_\delta(\mathbf{u}_\delta) \leq I(\mathbf{u}).$$

Poznámka. Předpoklad na koercivitu (3.14) funkce $w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ je ve skutečnosti uveden v článku [5] ve tvaru

$$\max\{0, c_0\frac{|\tilde{\mathbf{u}}|^p}{|\tilde{\mathbf{x}}|^\alpha} - \psi_0(\tilde{\mathbf{x}})\} \leq w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}, \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^d;$$

Domníváme se však, že jde o překlep. Zaprvé sami autoři komentují fakt, že $w(\tilde{\mathbf{x}}, \cdot) \equiv 0$ pro $|\tilde{\mathbf{x}}| > \delta$, a taková funkce zjevně tento předpoklad nesplňuje (viz komentáře k předpokladům (W1)-(W5) na str. 7 v [5]). Zadruhé, což je hlavní, je tento předpoklad použit jen v [5, dk. r-ce (22), r-ce (32)], a v obou těchto situacích je dostačující předpoklad uvedený výše ve větě.

Poznámka. Aby toto tvrzení byla Γ-konvergence na prostoru $X = L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ve standardním smyslu, museli by se funkcionály I_δ a I dodefinovat plus nekonečnem mimo své přirozené definiční obory $\mathcal{A}_\delta$, respektive $\mathcal{B}$. Toto rozšíření by však podle autorů [5] činilo znění této věty méně přehledným.

V případě linearizované peridynamiky, kterým se zabýváme, je $d = n = 3$ a $p = 2$. Navíc pro $\alpha \neq 0$ je potřeba potenciál $\hat{w}$ normalizovat pomocí členu $k|\tilde{\mathbf{x}}|^{2-\alpha}\chi_{B(0,\,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})$, se stejnou konstantou $k > 0$ (viz rovnice (2.30) a následující diskuse v části 2.4)

$$\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\lambda(|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{1}{2}F(|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 + F(|\tilde{\mathbf{x}}|)\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k\chi_{B(0,\,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})|\tilde{\mathbf{x}}|^{2-\alpha} \tag{3.15}$$

Věta 3.4. *Buď $\alpha < 5$ a položme $\beta := 2 - \alpha$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená lipschitzovská oblast. Buď $\mathbf{u}_0 \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ a nechť funkce $\lambda : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné. Předpokládejme dále, že*

1. *existuje $c_0 > 0$ takové, že*

$$F(s) \geq \chi_{(0,\,\delta)}(s)\frac{c_0}{s^\alpha} \quad a\ \lambda(s) \geq 0 \quad pro\ s.v.\ s \in (0, +\infty);$$

2. *existuje $C > 0$ takové, že*

$$F(s) \leq \frac{C}{s^\alpha} \quad a\ \lambda(s) \leq \frac{C}{s^{2+\alpha}} \quad pro\ s.v.\ s \in (0, +\infty);$$

3. *pro každé $s > 0$ existují limity*

$$\lambda^\circ(s) := \lim_{t \to 0^+} t^{\alpha+2}\lambda(ts), \quad F^\circ(s) := \lim_{t \to 0^+} t^\alpha F(ts).$$

Pak platí závěr předchozí věty pro

$$w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}).$$

Důkaz. První dva body se ověří stejně jako v důkazu existenční věty. Stejně tak třetí bod, kde stačí volit $\psi_0 \equiv \tilde{\psi}_0 \equiv 0$. Ve čtvrtém bodě se volí

$$\psi_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{2} + k\right)\chi_{B(0,\,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})|\tilde{\mathbf{x}}|^{2-\alpha}, \quad \tilde{\psi}_1 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{C}{2} + k\right), \quad h \equiv \frac{1}{2},$$

jak je vidět z (2.35).

Zbývá ověřit poslední předpoklad. Je

$$\begin{aligned}
w^\circ(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^\beta} w(t\tilde{\mathbf{x}}, t\tilde{\mathbf{u}}) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^{2-\alpha}}\Bigg(\frac{1}{2}\lambda(t|\tilde{\mathbf{x}}|)(t\tilde{\mathbf{x}} \cdot t\tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{1}{2}F(t|\tilde{\mathbf{x}}|)|t\tilde{\mathbf{u}}|^2 \\
&\qquad\qquad + F(t|\tilde{\mathbf{x}}|)t\tilde{\mathbf{x}} \cdot t\tilde{\mathbf{u}} + k|t\tilde{\mathbf{x}}|^{2-\alpha}\chi_{B(0,\,\delta)}(t\tilde{\mathbf{x}})\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t \to 0^+} \Bigg(\frac{t^{\alpha+2}}{2}\lambda(t|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{t^\alpha}{2}F(t|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 \\
&\qquad\qquad + t^\alpha F(t|\tilde{\mathbf{x}}|)\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k|\tilde{\mathbf{x}}|^{2-\alpha}\chi_{B(0,\,\delta)}(t\tilde{\mathbf{x}})\Bigg).
\end{aligned}$$

Použitím definic λ° a F° tak máme

$$w^\circ(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{4}\lambda^\circ(|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{1}{4}F^\circ(|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{2}F^\circ(|\tilde{\mathbf{x}}|)\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}} + \frac{k}{2}|\tilde{\mathbf{x}}|^{2-\alpha}.$$

V množině $\mathbb{S}^{n-1}\times K$ je

$$w^\circ(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{4}\lambda^\circ(1)(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{1}{4}F^\circ(1)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{2}F^\circ(1)\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}} + \frac{k}{2}$$

zřejmě spojitá a protože i $\mathbb{S}^{n-1}\times K$ je kompakt, je na něm spojitá stejnoměrně. Nakonec existuje $C>0$ taková, že pro $\tilde{\mathbf{u}}\in K$ je $|\tilde{\mathbf{u}}|\le C$, takže

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^+}\sup_{\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbb{S}^{n-1}}\sup_{\tilde{\mathbf{u}}\in K}\left|\frac{1}{t^\beta}w(t\tilde{\mathbf{x}},t\tilde{\mathbf{u}}) - w^\circ(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}})\right| \\
&\quad= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\sup_{\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbb{S}^{n-1}}\sup_{\tilde{\mathbf{u}}\in K}\Bigg|\frac{t^{\alpha+2}}{2}\lambda(t)(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{t^\alpha}{2}F(t)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 \\
&\qquad\qquad + t^\alpha F(t)\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}} + k\chi_{B(0,\,\delta)}(t\tilde{\mathbf{x}}) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\lambda^\circ(1)(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^2 - \frac{1}{2}F^\circ(1)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 - F^\circ(1)\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}} - k\Bigg| \\
&\quad\le \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\Bigg(\frac{C^2}{2}\left|t^{\alpha+2}\lambda(t) - \lambda^\circ(1)\right| + \frac{C^2}{2}\left|t^\alpha F(t) - F^\circ(1)\right| \\
&\qquad\qquad + C\left|t^\alpha F(t) - F^\circ(1)\right| + k\left|\chi_{B(0,\,\delta)}(t\tilde{\mathbf{x}}) - 1\right|\Bigg) \\
&\quad= 0
\end{aligned}$$

z definice funkcí λ° a F°. □

Poznámka. Aby byly splněny předpoklady existenční věty 2.2, je třeba volit $\alpha = 0$.

Na rozdíl od autorů článku [5], považujeme za vhodnější použít škálování

$$\frac{1}{\delta^{n+\beta}}\int_\Omega\int_{\Omega\cap B(\mathbf{x},\,\delta)} w(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}')-\mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{x},\quad \mathbf{u}\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^d), \tag{3.16}$$

to jest nepřenásobit původní funkcionál konstantou $n+\beta>0$. Z matematického hlediska nemá tato změna škálování žádný význam, je ale důležitá pro materiálové koeficienty dané limitní hustotou uložené energie. Protože je tato konstanta kladná, můžeme s ní podělit funkcionály I_δ i I a závěr věty 3.3 zůstane platný. Připomeňme, že v našem případě je $p=2$ a $n+\beta = 5-\alpha$.

Jednotlivé funkce použité k výpočtu limity jsou rovny

$$\begin{aligned}
w(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2}\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}}) \\
&= \frac{1}{4}\lambda(|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{1}{4}F(|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{2}F(|\tilde{\mathbf{x}}|)\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}} + \frac{k}{2}\chi_{B(0,\,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})|\tilde{\mathbf{x}}|^{2-\alpha}, \\
w^\circ(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{4}\lambda^\circ(|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{1}{4}F^\circ(|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{2}F^\circ(|\tilde{\mathbf{x}}|)\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}} + \frac{k}{2}|\tilde{\mathbf{x}}|^{2-\alpha}, \\
\bar{w}(\mathbf{H}) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{1}{4}\lambda^\circ(1)(\mathbf{Hz}\cdot\mathbf{z})^2 + \frac{1}{4}F^\circ(1)|\mathbf{Hz}|^2 + \frac{1}{2}F^\circ(1)(\mathbf{Hz}\cdot\mathbf{z}) + \frac{k}{2}\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Funkce $\bar{w}(\mathbf{H})$ je tedy opravdu konvexní, takže její kvazikonvexifikace není nutná. Po podělení konstantou $5-\alpha$ je tak limitní funkcionál roven

$$I(\mathbf{u}) = \frac{1}{5-\alpha}\int_\Omega \bar{w}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Položme

$$\begin{aligned}\mathring{W}(\mathbf{H}) &:= \frac{1}{5-\alpha}\bar{w}(\mathbf{H}) &(3.17)\\ &= \frac{1}{5-\alpha}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{4}\lambda^\circ(1)(\mathbf{Hz}\cdot\mathbf{z})^2 + \frac{1}{4}F^\circ(1)|\mathbf{Hz}|^2 + \frac{1}{2}F^\circ(1)(\mathbf{Hz}\cdot\mathbf{z})\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}). &(3.18)\end{aligned}$$

Konstantu k jsme vynechali, protože nebude mít v následujících úvahách žádný význam. Rozepíšeme-li definici $\mathring{W}$ ve složkách $\mathbf{H}$, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathring{W}(\mathbf{H}) = H_{ij}H_{kl}&\left(\frac{\lambda^\circ(1)}{4(5-\alpha)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} z_i z_j z_k z_l\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}) + \frac{F^\circ(1)}{4(5-\alpha)}\delta_{ik}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} z_j z_l\,\mathrm{d}S(\mathbf{z})\right)\\ &+ H_{ij}\frac{F^\circ(1)}{2(5-\alpha)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} z_i z_j\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}).\end{aligned}$$

Přímým výpočtem se dá ověřit, že

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} z_i z_j z_k z_l\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}) &= \frac{4\pi}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),\\ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} z_j z_l\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}) &= \frac{4\pi}{3}\delta_{jl}.\end{aligned}$$

Hustota energie $\mathring{W}(\mathbf{H})$ se pak rovná

$$\begin{aligned}\mathring{W}(\mathbf{H}) = H_{ij}H_{kl}&\left(\frac{\lambda^\circ(1)}{4(5-\alpha)}\frac{4\pi}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{F^\circ(1)}{4(5-\alpha)}\frac{4\pi}{3}\delta_{ik}\delta_{jl}\right)\\ &+ H_{ij}\frac{F^\circ(1)}{2(5-\alpha)}\frac{4\pi}{3}\delta_{ij},\end{aligned}$$

což lze zapsat v bezsouřadnicovém tvaru jako

$$\begin{aligned}\mathring{W}(\mathbf{H}) = {}&\frac{2\pi F^\circ(1)}{3(5-\alpha)}\operatorname{Tr}\mathbf{H} + \frac{\pi\lambda^\circ(1)}{15(5-\alpha)}(\operatorname{Tr}\mathbf{H})^2 &(3.19)\\ &+ 2\frac{\pi\lambda^\circ(1)}{15(5-\alpha)}\mathbf{H}^s : \mathbf{H}^s + \frac{\pi F^\circ(1)}{3(5-\alpha)}\mathbf{H} : \mathbf{H}. &(3.20)\end{aligned}$$

Hustota energie obsahuje lineární člen, což odpovídá nenulovému předpětí v referenční konfiguraci

$$\mathbf{T}^0 = \frac{2\pi F^\circ(1)}{3(5-\alpha)}\mathbf{I}.$$

To není překvapivý výsledek, protože nenulový člen $F(|\tilde{\mathbf{x}}|)$ v peridynamické energii (3.15) odpovídá nenulovému silovému působení mezi body v referenční konfiguraci. Avšak pro $F^\circ(1) \neq 0$ obsahuje tato hustota energie kvadratický člen

$$\frac{\pi F^\circ(1)}{3(5-\alpha)}\mathbf{H} : \mathbf{H},$$

který závisí na celém gradientu posunutí. V kontextu linearizované pružnosti proto není objektivní a 1. Piola-Kirchhoffův tenzor není symetrický. V tomto případě se tedy spočtená Γ-limita neshoduje s linearizovanou elasticitou. Jinými slovy řečeno, jednodušší kontinuální model, kterým by šla linearizovaná peridynamika pro malé horizonty nahradit, není linearizovaná elasticita.

Pro $F^\circ(1) = 0$ pak má limitní hustota energie tvar

$$\mathring{W}(\mathbf{H}) = \frac{\pi\lambda^\circ(1)}{15(5-\alpha)}(\operatorname{Tr}\mathbf{H})^2 + 2\frac{\pi\lambda^\circ(1)}{15(5-\alpha)}\mathbf{H}^s : \mathbf{H}^s.$$

Porovnáním tohoto tvaru s kvadratickou energií (1.3) z linearizované elasticity plyne

$$\mathbf{T}^0 = \mathbf{0}, \quad l = \mu = \frac{2\pi\lambda^\circ(1)}{15(5-\alpha)}. \tag{3.21}$$

Vzhledem ke škálování faktorem $\frac{1}{\delta^{5-\alpha}}$, které jsme použili v (3.16), je tento výsledek v souladu s dřívějším pozorováním v [21] (srovnej (3.2) a předcházející diskusi). To však pouze omezovalo možný elastický model, kterým by se dal ten peridynamický pro malý horizont nahradit. Dále se snadno ověří, že pro $\lambda^\circ(1) > 0$ a okrajovou podmínku z 3.13 $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, splňuje funkcionál

$$I(\mathbf{u}) := \int_\Omega \mathring{W}(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

předpoklady existenční věty 1.4 z části 1.8 o linearizované elasticitě. Limitní úloha má tak pro tuto okrajovou podmínku právě jedno řešení.

Problém je, že požadavek

$$0 = F^\circ(1) = \lim_{t\to 0} t^\alpha F(t) \tag{3.22}$$

je v přímém rozporu s předpokladem 1 věty 3.4, kterou tak nemůžeme použít. Spor s předpokladem 3 z převzaté věty 3.3, se dokázat nepodařilo, avšak nepodařilo se ani najít funkci F takovou, aby byly splněny obě tyto podmínky.

Předpoklad 3 koercivity potenciálu w je však potřeba pouze k následujícím věcem. Jednak k důkazu bodu 1 věty 3.3 (kompaktnosti) a zadruhé k důkazu koercivity limitní hustoty uložené energie W. Kompaktnost je důležitá např. k apriornímu důkazu existence minimizéru Γ-limity. Koercivita W je pak potřeba pro klasický důkaz existence minimizéru v hyperelasticitě pro kvazikonvexní hustoty energie. Ani jedna z těchto věcí není potřeba, protože limitní energii máme explicitně zadanou. K důkazu Γ-limity, skládající se z bodů 2 a 3 ve větě 3.3, tak stačí pouze nezápornost potenciálu w. Ta se ovšem dokáže snadno i bez koercivity, jen je potřeba mít $F \geq 0$ a zvolit normovací konstantu $k = C$. Konkrétně pomocí vážené Youngovy nerovnosti máme

$$\begin{aligned}\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) &\geq \frac{1}{2}F(|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 - C\chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})|\tilde{\mathbf{x}}||\tilde{\mathbf{u}}| + C\chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})|\tilde{\mathbf{x}}|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}F(|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 - \frac{1}{4}F(|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 - C|\tilde{\mathbf{x}}|^2 + C|\tilde{\mathbf{x}}|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Pro malé a přitažlivé silové působení v referenční konfiguraci, tj. $F \geq 0$ splňující podmínku (3.22), je tak Γ-limita stejná, jako pro $F = 0$. V tomto případě lze pro malé horizonty nahradit linearizovanou peridynamiku s izotropním homogenním materiálem linearizovanou pružností s Lamého konstantami uvedenými výše. K podobnému výsledku dospěli i [18], kteří uvažují i malé odpudivé síly. Ona malost však není nijak konkrétně popsána, je to výsledek je to pouze existenční. Oproti tomu podmínka (3.22) jasně omezuje růst F u nuly.

Závěr

Pokusíme se shrnout získané poznatky. Nejdříve podrobně rozebereme výsledek Γ-limity spočtený v části 3.3. K tomu použijeme tenzory spočtené v části 3.2. Dále ukážeme, že pro energii, která je objektivní v kontextu nelinearizované peridynamiky, je i limitní hustota uložené energie objektivní v kontextu hyperelasticity. Nakonec rozebereme možné směry dalšího zkoumání.

Pomocí výsledku z [5] jsme v části 3.3 počítali Γ-limitu funkcionálu

$$\frac{1}{2(\delta^{5-\alpha})}\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap B(\mathbf{x},\delta)} \hat{w}(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}')-\mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{x},$$

kde

$$\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\lambda(|\tilde{\mathbf{x}}|)(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}})^2 + \frac{1}{2}F(|\tilde{\mathbf{x}}|)|\tilde{\mathbf{u}}|^2 + F(|\tilde{\mathbf{x}}|)\tilde{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\mathbf{u}} + k\chi_{B(0,\delta)}(\tilde{\mathbf{x}})|\tilde{\mathbf{x}}|^2$$

je peridynamický potenciál pro izotropní, homogenní a lineární materiál. Jeho vlastnosti jsou plně určeny funkcemi $\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ a $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, které jsou nenulové pouze na intervalu $[0,\delta)$, kde δ je peridynamický horizont. Fyzikální význam těchto funkcí je podrobněji popsán v části 2.4. V naší práci uvažujeme omezení $\lambda \geq 0$ a $F \geq 0$, což mimo jiné odpovídá přitažlivému silovému působení přítomnému v referenční konfiguraci. Vlastnosti Γ-limity jsou pak jasně určeny limitním chováním těchto funkcí u nuly, přesněji řečeno limitami

$$\lambda^\circ(1) := \lim_{t\to 0^+} t^{\alpha+2}\lambda(t), \quad F^\circ(1) := \lim_{t\to 0^+} t^{\alpha}F(t).$$

Pro $F^\circ(1) = 0$ vyšel v Γ-limitě funkcionál energie stejný jako ten používaný v linearizované pružnosti. Také jsme určili Lamého konstanty limitní hustoty uložené energie, které jsou shodné s omezením v [21] (viz 3.2). Podmínku $F^\circ(1) = 0$ lze chápat jako omezení pro růst funkce F u nuly, která určuje silové působení přítomné v referenční konfiguraci. Toto omezení je dáno chováním funkce $\lambda(s) \approx s^{-\alpha-2}$. Silové působení splňující toto omezení v limitě vymizí. Platí pak následující závěr. V situacích, kdy je charakteristická délka zkoumané úlohy mnohonásobně větší než nelokálnost daná uvažovaným materiálem, lze složitější nelokální peridynamický model nahradit jednodušším. Konkrétně linearizovanou pružností s Lamého konstantami danými vztahem 3.21 a Poissonovým poměrem $\frac{1}{4}$. To je závěr podobný tomu ze článku [18]. V něm sice autoři připouští i $F \leq 0$, ale uvažují, přeloženo do našeho značení, jen $\alpha = 0$. Poznamenejme ještě, že pro funkci F splňující $F^\circ(1) = 0$ nejde použít existenční věta 2.2. Lze však použít tvrzení z [11], které je dokázáno pomocí nelokální Kornovy nerovnosti.

Pro $F^\circ(1) > 0$, tedy velké silové působení, které v limitě nevymizí, není Γ-limita shodná s linearizovanou pružností. Pro zmenšující se nelokálnost se tak řešení linearizované peridynamiky neblíží k žádnému řešení danému linearizovanou pružností. Linearizovanou peridynamiku pak nelze v tomto smyslu chápat jako rozšíření linearizované elasticity.

Pokusme se nyní alespoň částečně objasnit tuto neshodu linearizovaných teorií. Limitní hustota uložené energie (3.19) není objektivní v kontextu linearizované elasticity, protože závisí na celém gradientu posunutí. To je ekvivalentní nesymetrii limitního prvního Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí. Ten můžeme formálně spočítat pomocí vztahů (3.12) a (3.17) pro limitní hustotu uložené energie

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{1.} &= \frac{\partial \mathring{W}(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} = \frac{1}{5-\alpha}\frac{\partial \bar{w}(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \\ &= \frac{1}{5-\alpha}\int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial w^\circ}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{z}, \mathbf{Hz}) \otimes \mathbf{z}\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{S}^2} \mathbf{f}^\circ(\mathbf{z}, \mathbf{Hz}) \otimes \mathbf{z}\,\mathrm{d}S(\mathbf{z})\end{aligned}$$

kde pro $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^2$ je

$$\mathbf{f}^\circ(\mathbf{z}, \mathbf{Hz}) = \frac{1}{2}\lambda^\circ(1)(\mathbf{z}\cdot\mathbf{Hz})\mathbf{z} + \frac{1}{2}F^\circ(1)(\mathbf{z}+\mathbf{Hz}).$$

Funkce $\mathbf{f}^\circ$ odpovídá limitní hustotě vzájemné síly pro horizont jdoucí k nule. Je-li $F^\circ(1) = 0$, je tato hustota rovnoběžná s vazbou v referenční konfiguraci a limitní první Piola-Kirchhoffův tenzor je symetrický. Nenulové silové působení přítomné v referenční konfiguraci tak může způsobovat problémy, protože kvůli němu není hustota vzájemné síly (2.29) rovnoběžná s vazbou v referenční konfiguraci.

Nesymetrii prvního limitního Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí nasvědčuje i jeho vyjádření pomocí hustoty vzájemné síly v (3.8), ještě před provedením limity. Toto vyjádření je sice zjednodušeno pro homogenní deformaci, ale pro malý horizont je zahrnuta deformace pouze na malém okolí. Deformaci tak lze na tomto okolí považovat za téměř homogenní. Na druhou stranu symetrie Cauchyho tenzoru napětí spočteného v (3.7) je zajištěna, pokud je hustota vzájemné síly rovnoběžná s vazbou v deformované konfiguraci. To souvisí s tím, že člen s λ v (2.29), který porušuje tuto rovnoběžnost, splňuje bilanci momentu sil (2.10) jen v členech prvního řádu.

Přestože pro $F^\circ(1) \neq 0$ není limitní hustota energie objektivní v kontextu linearizované pružnosti, peridynamická hustota energie $\hat{w}$ v rámci linearizované peridynamiky objektivní je. Splňuje totiž bilanci momentu sil v členech prvního řádu, což je ekvivalentní (viz [22, část 4.3, věta 4.3]).

Uvažujeme-li nelinearizovanou peridynamiku, je hustota vzájemné síly rovnoběžná s vazbou v deformované konfiguraci. Námi spočtený Cauchyho tenzor je tedy symetrický. Dále připomeňme reprezentaci (2.27) pro peridynamický potenciál

$$\hat{w}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \breve{w}(|\tilde{\mathbf{x}}|, |\tilde{\mathbf{y}}|).$$

Položíme-li

$$\breve{w}^\circ(|\tilde{\mathbf{x}}|, |\tilde{\mathbf{y}}|) := \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^\beta}\breve{w}(t|\tilde{\mathbf{x}}|, t|\tilde{\mathbf{y}}|),$$

je podle definice (3.12)

$$\bar{w}(\mathbf{F}) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \breve{w}^\circ(1, |\mathbf{Fz}|)\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \breve{w}^\circ(1, \sqrt{\mathbf{z}\cdot\mathbf{F}^T\mathbf{Fz}})\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}).$$

Hustota uložené energie před kvazikonvexifikací tak závisí na gradientu deformace pouze skrze pravý Cauchy-Greenův deformační tenzor, tudíž je objektivní. Ze vzorce pro kvazikonvexní obálku uvedenou v [10, věta 1.9] pak snadno plyne, že i limitní hustota uložené energie W je objektivní. To je drobné rozšíření výsledku uvedeného v [5], kde otázka objektivity limitní hustoty uložené energie není zkoumána.

Problém je tak způsoben linearizací, protože v jejím důsledku se požadavky na objektivitu hustot energie v jednotlivých teoriích liší.

Na závěr diskuse uveďme ještě jednu poznámku. V prvním článku o peridynamice z roku 2000 je zmínka [21, str. 200], že v kontextu linearizované peridynamiky je předpoklad $F(s) > 0, \forall s \in [0, +\infty)$ nefyzikální. Vysvětlení, v čem by tato nefyzikálnost měla spočívat, se nám však v celém článku nepodařilo nalézt. Pouze v [21, část 9] se dokazuje, že pro beznapěťovou referenční konfiguraci musí F měnit znaménko. Je pravda, že díky předpokladu beznapěťové referenční konfigurace vyšel první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí spočtený pro infinitezimální shear-banding symetrický, ale v článku to nikde řečeno není. Ani ve světle spočtené Γ-limity nemáme tušení, proč by měl být požadavek $F(s) > 0, \forall s \in [0, +\infty)$ nefyzikální.

Nakonec zmíníme, jakým směrem by se mohlo ubírat další bádání. Článek [5] ukazuje, že za jistých předpokladů lze peridynamický model pro malé horizonty nahradit hyperelasticitou. Přitom se autoři zaměřují na to, aby limitní hustota W uložené energie měla vlastnosti, které umožňují použít k důkazu existence minimizéru přímou metodu variačního počtu. Konkrétně kvazikonvexitu a p-růst. Avšak z fyzikálního hlediska musí hustota W splňovat další podmínky. Kromě objektivity, která byla již vyřešena, je to například požadavek

$$W(F) \to +\infty, \quad \text{pro } \det F \to 0^+.$$

Bylo by zajímavé zjistit, za jakých podmínek kladených na peridynamický potenciál w by limitní hustota energie měla tuto vlastnost.

Jiný směr zkoumání by pak zahrnoval rozšíření získaných výsledků na tzv. state-based peridynamiku, která uvažuje bohatší třídu konstitutivních vztahů než původní bond-based peridynamika.

Literatura

[1] B. Alali and R. Lipton. Multiscale analysis of heterogeneous media in the peridynamic formulation. *Journal of Elasticity*, 106(1):71–103, 2012.

[2] E. Askari, F. Bobaru, R.B. Lehoucq, M.L. Parks, S.A. Silling, and O. Weckner. Peridynamics for multiscale materials modeling. *Journal of Physics: Conference Series*, 125:012078, 2008.

[3] Z.P. Bažant and M. Jirásek. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(11):1643–1670, 2002.

[4] J.C. Bellido and C. Mora-Corral. Existence for nonlocal variational problems in peridynamics. *SIAM J. Math. Anal.*, 46:890–916, 2014.

[5] J.C. Bellido, C. Mora-Corral, and P. Pedregal. Hyperelasticity as a gamma-limit of peridynamics when the horizon goes to zero. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 54:1643–1670, 2015.

[6] F. Bobaru and W. Hu. The meaning, selection, and use of the peridynamic horizon and its relation to crack branching in brittle materials. *Mechanical & Materials Engineering Faculty Publications, University of Nebraska - Lincoln*, (81), 2012.

[7] A. Braides. *A handbook of* Γ*-convergence*. North-Holland, 2006.

[8] G.P. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Volume I: Three-dimensional Elasticity*. Elsevier Science Publisher, 1988.

[9] B. Dacorogna. Quasiconvexity and relaxation of nonconvex problems in the calculus of variations. *Journal of Functional Analyzis*, 46:102–118, 1982.

[10] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*. Springer, New York, 2008.

[11] Q. Du, M. Gunzburger, R.B. Lehoucq, and K. Zhou. Analysis of the volume-constrained peridynamic navier equation of linear elasticity. *J. Elasticity*, 113:193–217, 2013.

[12] Q. Du, M. Gunzburger, R.B. Lehoucq, and K. Zhou. A nonlocal vector calculus, nonlocal volume-constrained problems, and nonlocal balance laws. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(03):493–540, 2013.

[13] E. Emmrich and O. Weckner. On the well-posedness of the linear peridynamic model and its convergence towards the navier equation of linear elasticity. *Communications in Mathematical Sciences*, 5:851–864, 2007.

[14] M. Gunzburger and R.B. Lehoucq. A nonlocal vector calculus with application to nonlocal boundary problems. *Multiscale Modelling and Simulation*, 8(5):1581–1598, 2010.

[15] M.E. Gurtin, E. Fried, and L. Anand. *The Mechanocs and Termodynamics of Continua.* Cambridge University Press, 2010.

[16] K. Hutter and K. Jöhnk. *Continuum Methods of Physical Modeling.* Springer, 2004.

[17] I-S. Liu and R. Sampaio. Remarks on material frame-indifference controversy. *Acta Mechanica*, 225:331–348, 2014.

[18] T. Mengesha and Q. Du. The bond-based peridynamic system with dirichlet-type volume constraint. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 144(01):161–186, 2014.

[19] T. Mengesha and Q. Du. On the variational limit of a class of nonlocal functionals related to peridynamics. *Nonlinearity*, 28(11):3999, 2015.

[20] H. Ren, X. Zhuang, Y. Cal, and T. Rabcuk. Dual-horizon peridynamics. *arXiv.org*, 2015.

[21] S.A. Silling. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:175–209, 2000.

[22] S.A. Silling. Linearized theory of peridynamic states. *Journal of elasticity*, 99:85–111, 2010.

[23] S.A. Silling, E. Epton, O. Weckner, J. Xu, and E. Askari. Peridynamic states and constitutive modeling. *Journal of Elasticity*, 88:151–184, 2007.

[24] S.A. Silling and R.B. Lehoucq. Convergence of peridynamics to classical elasticity theory. *Journal of Elasticity*, 93:13–37, 2008.

[25] S.A. Silling and R.B. Lehoucq. Force flux and the peridynamic stress tensor. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(4):1566–1577, 2008.

[26] S.A. Silling and R.B. Lehoucq. Peridynamic theory of solid mechanics. *Advances in applied mechanics*, 44:74–168, 2010.

[27] S.A. Silling, D.J. Littlewood, and P. Seleson. Variable horizon in a peridynamic medium. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 10(5):591–612, 2015.

[28] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics.* Springer, 2004.