

Posudek oponenta diplomové práce

T. Hudec: Absorption cascades of one-dimensional diffusions

Cílem diplomové práce bylo dosti dalekosáhlé rozšíření dřívějších prací Diaconise a Micla [2] a Swarta [10], kteří poskytli pravděpodobnostní důkaz že čas, kdy proces zrození a úmrtí dosáhne určité úrovně, je rozdělen jako součet exponenciálně rozdělených náhodných veličin s jistými parametry. Diplomant měl zobecnit tyto výsledky na případ, kdy namísto procesu zrození a úmrtí uvažujeme difuzi. V daném případě pak šlo o Wrightovu- Fisherovu difuzi. V podstatě je úkolem najít (explodující) proces „čistého“ zrození explodující ve stejném čase, kdy daná WF difuze dosáhne zadané hodnoty. Technika, která k tomu slouží (podobně jako ve výše citovaných pracích) se nazývá splétání (intertwining) Markovských procesů. Jak bylo dále ukázáno Fillem [4], tato technika umožňuje dosáhnout hlubší závěry o vztahu obou procesů, které už nezávisí jen na jejich marginálních rozděleních, při vhodném spárování (couplingu) obou procesů na jednom pravděpodobnostním prostoru, např. že oba časy absorpce splývají s.j. I zde je zajímavou otázkou, zda dříve dosažený výsledky týkající se markovských markovských procesů s diskrétními stavy lze rozšířit na difuze.

V diplomové práci bylo dokázáno technikou splétání, že čas absorpce WF difuze startující v bodě 0 má stejné rozdělení jako proces zrození startující z nuly, což je součet nezávislých exponenciálních náhodných veličin se známými intenzitami (Věty 3.7, 3.8). Co se týče couplingu, tato úloha byla vyřešena pro pozmeněný proces difuze, přibližně řečeno pro proces WF difuze s odrazem v bodě nula a absorpcí v bodě 1 a proces zrození na množině $\{1,2,\dots,n\}$.

Hlavní technikou použitou v práci je teorie fellerovských semigrup (speciálně, Hilleova-Yosidova věta) kombinovaná s pravděpodobnostními technikami. Některé částečné výsledky jsou zajímavé samy o sobě (např. Věta 3.1 – splétání dvou semigrup je ekvivalentní splétání jejich generátorů). V podstatě je zde podán nový důkaz rozdělení časů absorpce příslušných procesů.

Výsledky dosažené v práci považuji za vynikající, jak pokud jde o použité techniky, které dost významně přesahují normy magisterského studia, tak i co se týče hloubky a pracnosti provedených důkazů. Práci bych určitě doporučil, po vhodné úpravě, k publikaci. Práce je napsána jasně a srozumitelně, řada výsledků je nových a netriviálních.

Připomínek je možno formulovat několik, jedná se ale spíše o drobnosti většinou formálního charakteru.

Předně, díky tiskařskému šotku se v celé práci nevytiskly znaky integrálu, což čitelnosti zrovna nepřispívá.

Některé konvence, byť jsou běžné v časopiseckých publikacích, působí v diplomové práci trochu příliš velkoryse. Hned na počátku autor definuje lineární operátor a pak jeho normu, aniž předtím definoval zavedl normu příslušného Banachova prostoru. Operátorovou normu pak značí stejně, jako normu domainu. Pro koho je toto běžné,

ten nepotřebuje uvádět definici lineárního operátoru. Podobně působí ztotožnění značení integrálního operátoru (daného jádrem) a tohoto jádra. I to je v oboru běžná praxe, ale v úvodních kapitolách trochu velkorysá. Navíc místy je ztotožněn operátor s jádrem i při slovním popisu. V Definici 1.2 (silně spojená semigrupa) má být jednostranná limita, podobně v definici derivace v krajních bodech na následující stránce.

V části věnované základům fellerovských semigrup je standardní referencí kniha Ethiera a Kurtze [3]. To je ale dost daleko od originální citace, přitom v samotné této knize jsou originální zdroje uváděny. Proposition 1.28 je něco mnohem obecnějšího než zmiňovaná Kolmogorovova retrospektivní rovnice. Reference [9] jsou nepublikovaná skripta (výborně napsaná, ale aspoň v této fázi také ztěží základní zdroj pro citace).

To jsou lze považovat za drobné nedostatky, někdy možná i záležitosti osobního vkusu.

Autor pracuje s WF difuzí důsledně v rámci teorie markovských procesů, využívá znalosti jejího generátorů. Mohl by se případně vyjádřit (např. i v rámci obhajoby) k otázce, zda a jak je tento proces reprezentován stochastickou diferenciální rovnicí a zda je možné, že by tato reprezentace mohla být v tomto směru užitečná.

Jak už jsem se zmínil, považuji práci za výbornou a **doporučuji uznat jako diplomovou.**

V Praze, dne 29.8.2016

Bohdan Maslowski