

Posudek školitele k diplomové práci "Deskriptivní kvalita množin v analýze" studenta Mateje Drahovského

Úkolem diplomanta bylo zabývat se analýzou problému, zda existuje borelovská množina B reálných čísel, která je "generující" v tom smyslu, že každé reálné číslo lze napsat jako součet jediné dvojice (ne nutně různých) prvků B . Autorem tohoto problému je Z. Vidnyanski.

Protože jde pravděpodobně o velmi obtížný problém, bylo hlavním úkolem studovat, jaké další vlastnosti namísto borelovskosti (kromě deskriptivních vlastností též např. ohledně různých typů velikosti ap.) může "generující" množina B mít. Dále bylo úkolem zabývat se známými případy metod důkazu neexistence či existence dalších nekonstruktivně nalezených množin s dalšími vlastnostmi ohledně měřitelnosti (např. Hamelova báze; selekce, které dávají tzv. "matching", ...).

Diplomant provedl podrobně nekonstruktivní důkaz existence "generující" množiny B upravený tak, aby ukázal, že tato množina může být neanalytická a nekoanalytická. Dále ukázal, že může být pórovitá (tedy lebesgueovsky měřitelná míry nula a první kategorie). Citovaný výsledek M. Zeleného nasvědčuje tomu, že "generující" množina nemusí být σ -pórovitá. "Generující" množina B má nutně packing dimenzi aspoň jedna polovina. Další výsledky naznačují, že o její Hausdorffově dimenzi nelze nic říci.

Diplomant ukázal, že pokud je "generující" množina analytická, je automaticky i borelovská. Dále, že "generující" množina nemůže být sigma-kompaktní. Nepodařilo se však vyřešit otázku, zda může být typu G -delta. Diplomant se v práci nezabývá netriviálním problémem, zda může být koanalytická. U zmíněného případu Hamelovy báze je známo, že ta může být koanalytická za dodatečného množinového axiomu. Dle sdělení autora problému, umí ukázat koanalytičnost "generující" množiny (pravděpodobně též za dodatečného množinového axiomu).

Tvrzení 15 je uvedeno i s důkazem, který náleží T. Keletimu (diplomant si původně dokázal podstatně slabší výsledek). Věta 17 je uvedena i s důkazem, který sleduje důkaz M. Laczkoviche. Ostatní důkazy, jak všeobecně známých, tak nepublikovaných výsledků, které jsou provedeny, provedl samostatně. Kromě uvedeného věnoval mnoho času snaze vyřešit zadaný problém či aspoň některý s ním související částečný problém (např. existenci G -delta "generující" množiny). Domnívám se, že uvedený text by mohl být z hlediska analýzy zadané problematiky o něco úplnější (např. lze zodpovědět otázku, zda existuje "generující" množina, která splňuje vlastnosti z vět 5 a 8 současně?).

Zejména v úvodu práce se vyskytuje větší množství překlepů svědčící o závěrečném spěchu při sepisování. Níže uvádím seznam několika věcnějších připomínek k textu. Připomínka 5 se týká snad jediného pochybení, které vyžaduje trochu práce k nápravě. Celkově shrnuji, že diplomant pracoval na práci až na pár návodů velmi samostatně. Mnoho času věnoval studiu literatury a snaze o modifikace jiných výsledků ke studiu zadaného problému, z čehož ne vše bylo úspěšné. Jsem přesvědčen, že práce je napsána s porozuměním a žádný z mnou nalezených formálních nedostatků není způsoben neporozuměním. Diplomant udělal řadu vlastních pozorování. Problém jako takový je zdá se velmi obtížný. Proto se domnívám, že práce splňuje požadavky kladené na diplomovou práci.

Připomínky k podrobnosti, ev. přesnosti formulací.

1. Zobrazení p v úvodu není definováno pro prázdnou množinu.
2. V důkazu věty 5 není definována množina B .
3. V důkazu věty 6 by mělo být vysvětleno, že množiny, které se sjednocují, jsou analytické. Formulace "Nechť ... pro nějaký interval." by měla znít např. "Existuje interval takový, že ...".
4. V důkazu věty 7 si čtenář domyslí, co znamená "generuje", ale bylo by lepší to říci přesněji. Podobně si čtenář asi domyslí, o jaké úsečce U je řeč, ale lepší by bylo to říci jednoznačně. Slovo "stěna" tamtéž má být zřejmě "strana".
5. Důkaz věty 8 je asi největším nedostatkem, který jsem našel, i když jde o důkaz jednodušší než je podobný důkaz následující věty 9. Domnívám se, že v důkazu věty 8 musíme volit x_1, x_2 speciálněji než je vyřčeno tak, abychom dostali to, co potřebujeme. Různé posuny G mají v našem případě nejvýš jednoprvkový průnik díky vlastnosti (P). Nevidím, proč by měly být disjunktní.
6. V důkazu věty 9 bych považoval za vhodné vysvětlit, o jakém pojmu dimenze je zde řeč.
7. Pro pohodlí čtenáře by bylo dobré v důkazu věty 11 explicitně upozornit na to, že množina čísel $x \in R$, která dále neuvažujeme, je zřejmě spočetná.
8. Značení (s, t) v důkazu nepovažuji za vhodné a pro přehlednost důkazu přínosné.
9. Na straně 11, řádek 12 má zřejmě být 3^{n-1} namísto 3^n .
10. V tvrzení 14 má být zřejmě řeč o uzavřených množinách E a F . V důkazu se užívá tvrzení o dimenzi sjednocení. Myslím, že by v práci tohoto druhu bylo vhodné na fakta o dimenzích uvádět odkazy a pokud možno všechna použitá tvrzení o dimenzích by měla být uvedena v předcházejícím úvodu do teorie dimenze.
11. Slovo "takéto" na straně 19, řádek 5 se mi zdá nadbytečné.
12. V definici souvislého podgrafu by neměl vystupovat žádný konkrétní vrchol v .
13. Tato definice nekonečné cesty se skutečně vyskytuje v literatuře. V dalším je pak v tom případě potřeba mluvit i o "jednostranně nekonečných cestách"?
14. Míra μ v důkazu věty 17 je měrou na R , písmeno H je použito omylem. T ve stejném důkazu je konkrétní topologický prostor s prvky $0, \frac{1}{2}$ atd. (faktorizace uzavřeného intervalu $[0, 1]$ s ekvivalencí $0 = 1$ a Lebesgueovou měrou na něm). Není tedy přesné říci jen to, že je to "kružnice s Lebesgueovou měrou".

V Praze dne 5. 9. 2016

Petr Holický
vedoucí diplomové práce