MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Maroš Kuzmiak

Evoluční hry a jejich využití v ekonomických konfliktech

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Evoluční hry a jejich využití v ekonomických konfliktech

Autor: Maroš Kuzmiak

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V úvodu této diplomové práce definujeme základní pojmy jako výplata, strategie, nejlepší odpověď a Nashova rovnováha. Dále zavádíme hledisko populace, což znamená, že když se setká dvojice hráčů, tito hráči na sebe vzájemně reagují podle svých strategií a obdrží výplaty. Definujeme kritérium evoluční stability, které popisuje propojení mezi výplatami ve hře a rozšiřováním strategie v populaci. Nejběžnější popis takovéto evoluce je založen na replikátorových rovnicích. Analyzujeme jejich základní vlastnosti a zkoumáme vztah mezi stacionárními body tohoto systému a koncepty Nashova equilibria a evoluční stability. Následuje praktická část, ve které aplikujeme vyloženou teorii na model Cournotova duopolu. Jejím cílem je analyzovat vlastnosti použitého modelu z hlediska evoluční stability a určit chování duopolisty v dlouhodobém horizontu.

Klíčová slova: Teorie her, replikátorové rovnice, evoluční hry

Title: Evolutionary games and their applications to economic conflicts

Author: Maroš Kuzmiak

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: At the beginning of my Master's thesis we define basic terms such as payoff, strategy, best reply and Nash equilibrium. Furthermore, we introduce the population perspective, in which during a random meeting of a pair of players, these players interact according to their strategies and they receive payoffs. We define the criterion of evolutionary stability, which shows a link between payoffs in the game and strategy spreading among population. The most common description of this evolution is based on the replicator equations. We analyze their basic properties and examine the relationship between the stationary points of this system and the concepts of Nash equilibrium and evolutionary stability. In the following practical part, we apply the introduced theory to model the Cournot duopoly. Its aim is to analyze the model characteristics in terms of evolutionary stability and to determine the duopolist's behavior in the long run.

Keywords: Game theory, replicator dynamics, evolutionary games

Názov práce: Evolučné hry a ich využitie v ekonomických konfliktoch

Autor: Maroš Kuzmiak

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V úvode tejto diplomovej práce definujeme základné pojmy ako výplata, stratégia, najlepšia odpoveď a Nashova rovnováha. Ďalej zavádzame hľadisko populácie, kedy sa náhodne stretne dvojica hráčov, ktorá interaguje podľa svojich stratégií a obdrží výplaty. Definujeme kritérium evolučnej stability, ktoré poukazuje na prepojenie medzi výplatami v hre a rozširovaním stratégie v populácií. Najbežnejší popis takejto evolúcie je založený na replikátorových rovniciach. V práci analyzujeme ich základné vlastnosti a skúmame vzťah medzi stacionárnymi bodmi tohto systému a konceptmi Nashovho equilibria a evolučnej stability. Nasleduje praktická časť, v ktorej aplikujeme vyloženú teóriu na model Cournotovho duopolu. Jej cieľom je analyzovať vlastnosti použitého modelu z hľadiska evolučnej stability a determinovať správanie duopolistov v dlhodobom časovom horizonte.

Kľúčové slová: Teória hier, replikátorové rovnice, evolučné hry

Týmto by som rád poďakoval svojmu vedúcemu diplomovej práce pánovi doc. RNDr. Ing. Milošovi Kopovi, Ph.D. za jeho odbornú pomoc a cenné rady, ktoré mi pomohli s vypracovaním tejto práce.

Obsah

Predslov

Motívom tejto diplomovej práce je predstaviť teóriu evolučných hier a ukázať jej využitie v ekonomických konfliktoch.

Teória evolučných hier vznikla aplikáciou matematickej teórie hier na sféru biológie v zmysle definovania štruktúry súťaží, stratégií a analýz, ktorými môžeme modelovať Darwinovskú rivalitu. Jej počiatok datujeme od roku 1973, kedy britský biológ *John Maynard Smith* v spolupráci s americkým genetikom *Georgeom Robertom Priceom* formálne predstavili spôsoby, akými môžu byť tieto súťaže analyzované v zmysle stratégií a taktiež aj matematické kritéria, ktoré môžu byť použité na predikciu výsledného výskytu takýchto konkurenčných stratégií. Výsledky počiatočného rozvoja tejto oblasti sú komplexne sumarizované v diele Maynard Smith (1982). Nasledovalo mnoho významných diel, napríklad (Bomze, 1986), Swinkels (1992), van Damme (1991) alebo Weibull (1995), ktoré sa výraznou mierou pričinili o ďalší rozvoj tejto problematiky. V súčasnosti je koncept evolučne stabilnej stratégie a jej matematického prieskumu integrovaný do širokého spektra oblasti nekooperatívnych hier.

Teória evolučných hier sa odlišuje od klasickej teórie hier zameraním sa skôr na dynamiku zmeny stratégie determinovanú nielen kvalitou rôznych konkurenčných stratégií, ale aj frekvenciou, s ktorou sú tieto rôzne konkurenčné stratégie zastúpené v populácií. Teória evolučných hier, ako explicitne dynamická teória, predstavuje dôležitý prvok absentujúci v tradičnej teórii hier. S konceptom evolučných hier samozrejme úzko súvisí dynamika (vývoj) hier.

Dynamika hier modeluje ako jednotlivci alebo populácie menia svoje stratégie v priebehu času, pričom tieto zmeny sú založené na porovnaní výhier. To je v kontraste s klasickou teóriou nekooperatívnych hier, ktorá analyzuje správanie racionálnych hráčov pomocou statických konceptov riešenia ako je napríklad *Nashova rovnováha* (t.j. strategická voľba každého hráča, voči ktorej nemá žiaden jednotlivec jednostranný stimul k zmene svojho správania). Obecne dynamika hry predpokladá, že stratégie s vyššou výplatou sú výhodnejšie. Ako uvidíme ďalej, evolučný výstup je často *Nashovým equilibriom* s dodatočnými vlastnosťami stability.

Práca je rozčlenená do piatich kapitol. Prvá kapitola obsahuje úvod do konceptu a výsledkov nekooperatívnych hier, ktoré aplikujeme v nasledujúcej analýze evolúcie. Definujeme v nej základné pojmy ako hra v normálnom tvare, zmiešané stratégie alebo Nashove equilibrium. Taktiež zavádzame spresnenia konceptu Nashovej rovnováhy, ktoré majú súvislosť s určitými evolučnými kritériami. Záver tejto kapitoly je venovaný analýze symetrických hier dvoch hráčov.

V druhej kapitole zavádzame formálnu definíciu evolučne stabilnej stratégie, ktorá predstavuje základný stavebný kameň teórie evolučných hier a taktiež sa venujeme jej súvislosti s Nashovým equilibriom. V ďalších častiach tejto kapitoly uvádzame slabšie kritéria evolučnej stability a následne predstavujeme množinové zobecnenia evolučnej stability. V závere tejto kapitoly sa zameriavame na vlastnosti evolučnej teórie v dvojnásobne symetrických hrách.

Tretia kapitola je venovaná replikátorovým rovniciam, ktoré predstavujú deterministický dynamický model vývoja populácie využívaný v teórii evolučných hier. V jej úvode uvádzame základné poznatky z teórie obyčajných diferenciálnych rovníc. Ďalej prechádzame k odvodeniu replikátorových rovníc a vysvetľujeme niektoré ich vlastnosti, pričom kladieme dôraz na súvislosti s konceptom Nashovho equilibria a evolučnej stability.

V štvrtej kapitole aplikujeme vyloženú teóriu na model Cournotovho duopolu firiem zaoberajúcich sa ťažbou ropy. V prvej polovici odvodíme základné vlastnosti Cournotovho duopolu, ktorý speje k hre typu väzňova dilema. Táto kapitola obsahuje dve simulácie, kde v prvom prípade uvažujeme model jednoduchej väzňovej dilemy so stratégiami spolupráca a zrada. V druhej simulácií rozšírime predošlý model o stratégiu pôžička. Cieľom numerických štúdií je determinovať správanie duopolistov v dlhodobom časovom horizonte s využitím poznatkov uvedených v predošlých kapitolách.

Práca je zhrnutá v záverečnej piatej kapitole.

1. Úvod do teórie hier

Teória hier je matematická disciplína, ktorá študuje všeobecné zásady, ako sa ľudia alebo organizácie správajú v strategických situáciách. Strategickej situácie sa zúčastnia dva alebo viac subjektov, ktorých konanie sa vzájomne ovplyvňuje. Účastníkov takejto situácie budeme nazývať jednoducho hráčmi a budeme o nich v celom texte tejto práce predpokladať, že sú racionálni. Ich cieľom je rozhodovať sa o voľbe vhodnej stratégií a zároveň predvídať akcie a reakcie ostatných účastníkov s cieľom maximalizovať vlastný zisk. Teóriu hier môžeme rozdeliť na dva základné typy: *kooperatívnu* a *nekooperatívnu.* Nekooperatívna teória hier sa zaoberá analýzou situácií, v ktorých jednotliví hráči sledujú svoje vlastné záujmy bez možnosti vzájomnej spolupráce. Analýza v tejto práci, pokiaľ nebude uvedené inak, je obmedzená na konečné hry s úplnou informáciou. Konečnou budeme rozumieť v tom zmysle, že množiny stratégií jednotlivých hráčov sú konečné. Typickým príkladom konečnej hry je kameň-papier-nožnice, v ktorej má každý hráč konečnú množinu stratégií $\{kame\check{n}, papier, no\check{z}nice\}$. Naopak zástupcom nekonečných hier je napríklad aukcia, kedy množiny stratégií (prihodení) jednotlivých hráčov nie sú konečné. V hrách s úplnou informáciou sú výplatné funkcie jednotlivých hráčov determinované voľbou stratégií všetkých účastníkov hry a zároveň každý z hráčov má dokonalú znalosť o výplatných funkciách všetkých zúčastnených subjektov hry. Podkladom k tejto kapitole sú diela Fudenberg a Tirole (1991), Gibbons (1992), Vega-Redondo (2003) a Weibull (1995).

1.1 Základné pojmy a definície

V tejto podkapitole predstavíme základný koncept teórie nekooperatívnych hier. Matematickým modelom konfliktnej situácie je *hra v normálnom tvare.* Presnejšie, nech $P = \{1, 2, ..., n\}$ predstavuje množinu hráčov, kde n je kladné celé číslo. Pre ľubovoľného hráča $i \in P$ označme $S_i = \{1, 2, ..., m_i\}$ množinu jeho stratégií, ktorú budeme nazývať *priestorom stratégií* i-tého hráča. Prvok $s_k \in S_i$ nazveme k-tou stratégiou i-tého hráča. Pre jednoduchosť značenia budeme jednotlivé stratégie značiť kladnými celými číslami. Vektor stratégií $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, ..., s_n)$, kde prvok s_j, pre $j = 1, ..., n$, reprezentuje nejakú stratégiu j-tého hráča, budeme nazývať *profil stratégií.* Množina profilov stratégií hry je potom kartézsky súčin $S = \times_{i \in P} S_i$ priestorov stratégií hráčov.

Pre ľubovoľný profil stratégií $\boldsymbol{s}$ označíme výplatnú funkciu hráča i príslušnú tomuto profilu ako $\pi_i(\boldsymbol{s}) \in \mathbb{R}$. V ekonómií predstavuje obvykle výplata napríklad zisk firmy, na druhej strane v mikroekonomickom pohľade môže reprezentovať úžitok spotrebiteľa. V biológii rozumieme výplatou predpokladaný počet preživších potomkov jedinca, čiže jeho schopnosť úspešne sa reprodukovať. Funkciu $\pi_i : S \to \mathbb{R}$, pre každé $i \in P$, budeme nazývať *výplatnou funkciou* i-tého hráča.

Definícia 1. *Gibbons (1992) Hrou n hráčov v normálnom tvare nazveme množinu:*

$$G = \{P; S_1, \dots, S_n; \pi_1(s_1, \dots, s_n), \dots, \pi_n(s_1, \dots, s_n)\}, \tag{1.1}$$

kde $P = \{1, 2, \dots, n\}$ *predstavuje množinu hráčov,* S_i*,* $i \in P$*, je priestorom stratégií i-tého hráča a* $\pi_i(\boldsymbol{s})$ *značí výplatnú funkciu i-tého hráča.*

V špeciálnom prípade hry dvoch hráčov budeme zapisovať každú z výplatných funkcií π_1 a π_2 formou matíc typu $m_1 \times m_2$. Výplatnou maticou prvého hráča budeme rozumieť maticu $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde prvok $a_{ij} = \pi_1(s_i, s_j)$ pre každé $s_i \in S_1$ a $s_j \in S_2$. Rovnakým spôsobom definujeme výplatnú maticu druhého hráča $\mathbf{B} = (b_{ij})$, kde $b_{ij} = \pi_2(s_i, s_j)$. Každý riadok oboch matíc teda zodpovedá stratégií prvého hráča a každý stĺpec stratégií druhého hráča.

Stratégie, ktoré sme doposiaľ definovali sa obvykle nazývajú rýdzimi stratégiami. To znamená, že jednotliví hráči si volia svoje stratégie deterministickým spôsobom. Avšak existuje mnoho hier, ktorých analýza je značne limitovaná v prípade, kedy sa obmedzíme len na koncept rýdzich stratégií. V rámci takéhoto obmedzenia dospievajú niektoré hry do stavu, kedy nie je možné určiť optimálne riešenie hry. To je hlavnou motiváciou, ktorá vedie k rozšíreniu deterministického konceptu voľby stratégie, ktorý sa nazýva zmiešané stratégie.

Zmiešanou stratégiou i-tého hráča budeme rozumieť pravdepodobnostné rozdelenie na jeho priestore stratégií S_i. Pretože pre každého hráča $i \in P$ je množina S_i konečná, môžeme jeho ľubovoľnú zmiešanú stratégiu x_i označovať vektorom $\boldsymbol{x}_i$ v m_i-dimenzionálnom euklidovskom priestore $\mathbb{R}^{m_i}$. K-tý prvok vektoru $\boldsymbol{x}_i$ môžeme interpretovať ako pravdepodobnosť, že i-tý hráč príjma k-tú rýdzu stratégiu pri voľbe zmiešanej stratégie $\boldsymbol{x}_i$. Množina rýdzich stratégií, ktorým je priradená kladná pravdepodobnosť pri voľbe zmiešanej stratégie $\boldsymbol{x}_i$, nazývame nosičom $\boldsymbol{x}_i$ a budeme ju značiť:

$$C(\boldsymbol{x}_i) = \{j \in S_i : x_{ij} > 0\}.$$

Ďalej zavedieme definíciu zmiešaných stratégií hry n-hráčov:

Definícia 2. *Gibbons (1992) Majme hru v normálnom tvare* (1.1) *s priestorom stratégií i-tého hráča $S_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$, kde stratégiu $s_k \in S_i$ budeme nazývať k-tou rýdzou stratégiou i-tého hráča. Potom priestorom zmiešaných stratégií i-tého hráča je vektor pravdepodobností na priestore rýdzich stratégií S_i:*

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i}), \tag{1.2}$$

kde $x_{ij} \geq 0, j = 1, \dots, m_i$ a $\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} = 1$. Prvky z priestoru $\boldsymbol{x}_i$ budeme nazývať zmiešanými stratégiami i-tého hráča.

Pretože všetky pravdepodobnosti x_{ij}, pre $j = 1, ..., m_i$ sú nezáporné a ich súčet je rovný 1, tak vektor $\boldsymbol{x}_i$ leží v simplexe Δ_i definovaného nasledovne:

$$\Delta_i = \{\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}_+^{m_i} : \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} = 1\}. \tag{1.3}$$

Vrcholy simplexu Δ_i sú m_i-rozmerné jednotkové vektory $e_i^1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_i^2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, …, $e_i^{m_i} = (0, 0, 0, ..., 1)$. Každý vrchol e_i^k odpovedá zmiešanej stratégií hráča i, ktorý priradzuje pravdepodobnosť 1 jeho k-tej rýdzej stratégií. Simplex Δ_i zmiešaných stratégií hráča i je *konvexný obal* jeho vrcholov. Z toho plynie, že každá zmiešaná stratégia $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i$ je nejakou konvexnou kombináciou jednotkových vektorov, čiže zmiešaných stratégií e_i^k:

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} e_i^k.$$

Rovnako ako v prípade rýdzich stratégií definujeme *profil zmiešaných stratégií*. Je to vektor $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n)$, kde každý prvok $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i$ predstavuje zmiešanú stratégiu hráča $i \in P$. Profil zmiešaných stratégií preto náleží priestoru zmiešaných stratégií hry definovaného nasledovne:

$$\Theta = \times_{i \in P} \Delta_i.$$

Množina Θ je $(m-n)$-rozmerný mnohosten v $\mathbb{R}^m$, kde $m = \sum_{i=1}^n m_i$ je celkový počet rýdzich strategií v hre. Okrem toho budeme uvažovať variáciu stratégií jedného hráča i, pričom stratégie ostatných hráčov budeme považovať za pevné. Symbolom:

$$\Theta_{-i} = \times_{j \in P \setminus i} \Delta_j$$

budeme značit priestor zmiešaných stratégií všetkých hráčov okrem hráča i, teda množiny hráčov $P \setminus i$. Profil stratégií, v ktorom hráč $i \in P$ hraje stratégiu $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i$, pokiaľ všetci ostatní hráči hrajú podľa profilu $\boldsymbol{y} \in \Theta$, kde $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$, $i = 1, ..., n$, budeme značiť $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_{-i})$, pričom $\boldsymbol{y}_{-i} \in \Theta_{-i}$. Formálne je profil stratégií $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_{-i}) \in \Theta$ definovaný ako $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x}_i$ a $\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{y}_j$ pre všetky $j \neq i$. Tento zápis je vhodný v situácií, kedy nastáva u jedného hráča i odchýlka $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i$ od daného profilu $\boldsymbol{y} \in \Theta$.

Ďalej budeme predpokladať, že „náhodnosť" každého hráča je (štatisticky) nezávislá na náhodnosti jeho súperov (pozri Fudenberg a Tirole (1991)). Preto pravdepodobnosť, že nastane určitý profil rýdzich stratégií $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, ..., s_n) \in S$ v prípade, ak bude hraný profil zmiešaných stratégií $\boldsymbol{x} \in \Theta$, sa jednoducho rovná súčinu:

$$\prod_{i=1}^{n} x_{is_i},$$

teda súčinu pravdepodobností, ktorú priradzujú zmiešané stratégie $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i$ jednotlivých hráčov ich rýdzim stratégiám $s_i \in S_i$ pre $i = 1, ..., n$. Potom očakávaná hodnota výplaty hráča i zodpovedajúca profilu zmiešaných stratégií $\boldsymbol{x} \in \Theta$ je rovná:

$$u_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{is_i} \right) \pi_i(\boldsymbol{s}). \tag{1.4}$$

Funkciu $u_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ budeme nazývať výplatnou funkciou (zmiešaných stratégií) i-tého hráča a reálne číslo $u_i(\boldsymbol{x})$ budeme jednoducho nazývať výplatou i-tého hráča vzhľadom k profilu stratégií $\boldsymbol{x}$.

Zamerajme sa teraz na špeciálny prípad hry dvoch hráčov. Rovnako ako sme uviedli vyššie v kontexte rýdzich stratégií, môžeme túto hru zapísať vo forme príslušných výplatných matíc, kde matica $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$) predstavuje výplatnú maticu prvého (druhého) hráča. Teda pre nejaký pár zmiešaných stratégií $\boldsymbol{x}_1 \in \Delta_1$ a $\boldsymbol{x}_2 \in \Delta_2$ platí:

$$u_1(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} x_{1i} a_{ij} x_{2j} = \boldsymbol{x}_1^\top \mathbf{A} \boldsymbol{x}_2 \tag{1.5}$$

a

$$u_2(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} x_{1i} b_{ij} x_{2j} = \boldsymbol{x}_1^\top \mathbf{B} \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x}_2^\top \mathbf{B}^\top \boldsymbol{x}_1. \tag{1.6}$$

V teórii nekooperatívnych hier sa obvykle používa nasledujúce usporiadanie množín stratégií jednotlivých hráčov definované v zmysle dopadu na výplatu hráčov. Rýdze stratégie sú iba špeciálnym prípadom zmiešaných stratégií, a preto definujeme toto usporiadanie na priestore zmiešaných stratégií Δ_i každého hráča i.

Povieme, že stratégia *slabo dominuje* inú stratégiu, ak táto stratégia nikdy neposkytuje nižšiu výplatu ako iná stratégia a existujú prípady, kedy poskytuje hráčovi vyššiu výplatu. Stratégiu nazveme nedominovanú, pokiaľ ju žiadna stratégia nedominuje slabo.

Definícia 3. *Fudenberg a Tirole (1991) Stratégia $\boldsymbol{y}_i \in \Delta_i$ dominuje slabo stratégiu $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i$ pokiaľ:*

$$u_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{z}_{-i}) \geq u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_{-i}) \tag{1.7}$$

pre všetky $\boldsymbol{z}_{-i} \in \Theta_{-i}$ a pre nejaké $\boldsymbol{z}_{-i}$ je nerovnica (1.7) *ostrá. Stratégia $\boldsymbol{x}_i$ je nedominovaná, pokiaľ neexistuje žiadna takáto stratégia $\boldsymbol{y}_i$.*

Podobne definujeme *striktnú dominanciu*, pri ktorej dominujúca stratégia ponúka vždy vyššiu výhru než dominovaná stratégia.

Definícia 4. *Fudenberg a Tirole (1991) Stratégia $\boldsymbol{y}_i \in \Delta_i$ striktne dominuje stratégiu $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i$, ak platí:*

$$u_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{z}_{-i}) > u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_{-i})$$

pre všetky $\boldsymbol{z}_{-i} \in \Theta_{-i}$.

Základným racionálnym predpokladom nekooperatívnych hier je, že inteligentní hráči nebudú aplikovať striktne dominované stratégie. V takomto prípade je možné zanedbať všetky striktne dominované stratégie hry bez toho, aby bol ovplyvnený výsledok hry. Po tejto eliminácií sa ale môžu niektoré zvyšné stratégie stať striktne dominované v tejto novej redukovanej hre. Iteratívne opakovanie redukcie striktne dominovaných rýdzich stratégií hry G vedie k nasledujúcej definícií:

Definícia 5. *Stratégiu $s_i \in S_i$ nazveme iteratívne striktne nedominovanú, pokiaľ nie je striktne dominovaná v hre G, ani v žiadnej inej hre, ktorá vznikne iteratívnou redukciou hry G.*

Keďže uvažujeme konečný počet hráčov a rýdzich stratégií, tento proces iteratívnej eliminácie vždy skončí po konečnom počte krokov a je možné ukázať, že množina zvyšných stratégií je nezávislá na poradí v akom eliminujeme stratégie (pozri Fudenberg a Tirole (1991)).

Pre každú konečnú hru v normálnom tvare G označme $S^D \in S$ jej (neprázdnu) podmnožinu iteratívne striktne nedominovaných profilov stratégií. Potom pokiaľ množina S^D je jednoprvková množina, nazývame hru G *striktne dominantne riešiteľná*. Koncept iteratívnej eliminácie striktne dominovaných stratégií vyžaduje, aby hráči mali znalosť o všetkých výplatných funkciách ostatných hráčov. Navyše tento poznatok musí byť známy všetkým hráčom a všetci hráči majú znalosť o racionalite ostatných účastníkov hry. V takomto prípade môžu hráči eliminovať stratégie, ktoré sú striktne dominované v redukovanej hre až po nejaký okamih, kedy už v nasledujúcej iterácií nie je možné eliminovať žiadne ďalšie stratégie. Tento koncept sa obvykle nazýva *všeobecná znalosť racionality.*

V nasledujúcej časti tejto kapitoly zavedieme koncept nazývaný „*najlepšia odpoveď*". *Rýdzou najlepšou odpoveďou* hráča i na profil stratégií $\boldsymbol{y}_{-i} \in \Theta_{-i}$ je rýdza stratégia $s_i \in S_i$, pre ktorú žiadna iná dostupná rýdza stratégia neponúka hráčovi i vyššiu výhru vzhľadom na profil $\boldsymbol{y}_{-i}$.

Definícia 6. *Rýdza najlepšia odpoveď i-tého hráča je zobrazenie $\beta_i : \Theta_{-i} \to S_i$, ktoré zobrazuje každý profil $\boldsymbol{y}_{-i} \in \Theta_{-i}$ do neprázdnej (konečnej) množiny*

$$\beta_i(\boldsymbol{y}_{-i}) = \{k \in S_i : u_i(e_i^k, \boldsymbol{y}_{-i}) \geq u_i(e_i^l, \boldsymbol{y}_{-i}) \quad \forall l \in S_i\}$$

rýdzich najlepších odpovedí i-tého hráča na profil $\boldsymbol{y}_{-i}$.

Keďže každá zmiešaná stratégia $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i$ je konvexnou kombináciou rýdzich stratégií a funkcia $u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_{-i})$ je lineárna v $\boldsymbol{x}_i$, a teda žiadna zmiešaná stratégia $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i$ nemôže poskytnúť hráčovi i vyššiu výhru proti profilu $\boldsymbol{y}_{-i} \in \Theta_{-i}$ ako nejaká jeho rýdza najlepšia odpoveď na $\boldsymbol{y}_{-i}$.

Zmiešanou najlepšou odpoveďou hráča i na profil stratégií $\boldsymbol{y}_{-i} \in \Theta_{-i}$ rozumieme stratégiu $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i$, pre ktorú žiadna iná zmiešaná stratégia neponúka vyššiu výplatu hráčovi i proti $\boldsymbol{y}_{-i}$. Taktiež každá rýdza najlepšia odpoveď je zároveň aj zmiešanou najlepšou odpoveďou. Navyše z linearity $u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_{-i})$ pre $\boldsymbol{x}_i$ vyplýva, že každá konvexná kombinácia rýdzich najlepších odpovedí je zmiešaná najlepšia odpoveď.

Definícia 7. *Vega-Redondo (2003) Zmiešaná najlepšia odpoveď i-tého hráča je zobrazenie $\tilde{\beta}_i : \Theta_{-i} \to \Delta_i$:*

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_i(\boldsymbol{y}_{-i}) &= \{\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i : u_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_{-i}) \geq u_i(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{y}_{-i}) \quad \forall \boldsymbol{z}_i \in \Delta_i\} = \\ &= \{\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i : x_{ik} = 0 \quad \forall k \notin \beta_i(\boldsymbol{y}_{-i})\} = \{\boldsymbol{x}_i \in \Delta_i : C(\boldsymbol{x}_i) \subset \beta_i(\boldsymbol{y}_{-i})\}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Definícia 8. *Združená rýdza najlepšia odpoveď je zobrazenie $\boldsymbol{\beta} : \Theta \to S$:*

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{y}) = \times_{i \in P} \beta_i(\boldsymbol{y}_{-i}) \subset S. \tag{1.9}$$

Podobne zavedieme predpis $\tilde{\boldsymbol{\beta}} : \Theta \to \Theta$ pre zmiešané najlepšie odpovede hráčov nasledovne:

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{y}) = \times_{i \in P} \tilde{\beta}_i(\boldsymbol{y}_{-i}) \subset \Theta. \tag{1.10}$$

Veta 1. *Uvažujme nejakú hru dvoch hráčov v normálnom tvare. Potom rýdza stratégia $s_i \in S_i$ nie je striktne dominovaná práve vtedy, ak $s_i \in \beta_i(\boldsymbol{y}_{-i})$ pre nejaké $\boldsymbol{y}_{-i} \in \Theta_{-i}$. Taktiež platí, že stratégia $s_i \in S_i$ je nedominovaná práve vtedy, keď $s_i \in \beta_i(\boldsymbol{y}_{-i})$ pre nejaké $\boldsymbol{y}_{-i} \in int(\Theta_{-i})$.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 1.1).

□

1.2 Nashovo equilibrium

Nashovo equilibrium je základným konceptom teórie hier a najpoužívanejšia metóda k odhadnutiu výsledku strategickej interakcie v sociálnych vedách. Tento prístup je jedným zo základných kameňov modernej ekonomickej teórie. Koncept Nashovej rovnováhy predstavil ako prvý významný francúzsky matematik a filozof *Antoine Augustin Cournot* (1801 - 1877) a predbehol tým jej definíciu o takmer storočie. V priekopníckom diele *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (*Výskumy matematických princípov teórie bohatstva*) zaviedol Cournot koncept oligopolistickej konkurencie, ktorú analyzoval metódou Nashovho equilibria. V svojom modele duopolu rozhodovali firmy o objeme produkcie s cieľom maximalizácie vlastného zisku. Cournot ukázal, že najvýhodnejší objem produkcie je závislý na produkcii druhej firmy a rovnováha potom nastáva v bode, kde obe firmy dosahujú najvyšší zisk s ohľadom na zvolený objem produkcie konkurenta. Cournot ďalej nevyvíjal vo svojich dielach koncepčný rozdiel medzi formuláciou z jeho konkrétnych herných modelov a všeobecnou metodológiou používanej k ich analýze. Ako prvý formálne skonštruoval základný koncept riešenia nekooperatívnej teórie hier americký matematik *John Forbes Nash* (1928 - 2015), ktorý je po ňom pomenovaný. *Nashovou rovnováhou* (equilibriom) rozumieme v kontexte teórie hier takú situáciu, kedy žiaden z hráčov nemôže jednostrannou zmenou zvolenej stratégie vylepšiť svoju situáciu. V podstate Nashovo equilibrium vyžaduje profil stratégií $\boldsymbol{x} \in \Theta$, ktorý nielenže by mal byť pre každú stratégiu $\boldsymbol{x}_i$ optimálny na základe nejakých očakávaní i-tého hráča o stratégií ostatných hráčov, ale mal by byť optimálny na základe očakávania, že profil $\boldsymbol{x}$ bude hraný všetkými hráčmi. Formálne definujeme Nashovu rovnováhu nasledovne:

Definícia 9. *Vega-Redondo (2003) Majme hru n-hráčov v normálnom tvare* (1.1). *Potom profil $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ nazývame Nashovým equilibriom, pokiaľ pre každé $i = 1, 2, ..., n$ a $\forall s_i \in S_i$ platí:*

$$\pi_i(\boldsymbol{s}^*) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^*). \tag{1.11}$$

V prípade hry dvoch hráčov môžeme použiť k nájdeniu Nashovej rovnováhy v obore rýdzich stratégií zjednodušenú metódu. Hru prepíšeme do dvojmatice a hľadáme jej sedlový bod. To znamená, že hľadáme stĺpcové maxima pre výplaty prvého hráča a riadkové maxima pre výplaty druhého hráča. Tam kde sa tieto body zhodujú nastáva Nashova rovnováha. Koncept Nashovej rovnováhy zavedený v definícií 9 ďalej zovšeobecníme v kontexte zmiešaných stratégií. Je zrejmé, že ide o modelovanie hry pomocou jej zmiešaného rozšírenia. V takom rozšírení môže byť koncept Nashovej rovnováhy ľahko preformulovaný nasledovne:

Definícia 10. *Vega-Redondo (2003) Majme hru n-hráčov v normálnom tvare* (1.1) *s daným zmiešaným rozšírením. Potom Nashovým equilibriom budeme rozumieť profil stratégií $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n)$, pre ktorý platí, že $\forall i = 1, 2, ..., n$ a $\forall \boldsymbol{z}_i \in \Delta_i$:*

$$u_i(\boldsymbol{x}) \geq u_i(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{x}_{-i}). \tag{1.12}$$

V kontexte najlepších odpovedí rozumieme Nashovým equilibriom profil stratégií $\boldsymbol{x} \in \Theta$, ktorý je sám najlepšou odpoveďou na seba a to v prípade, kedy je pevným bodom zmiešaných najlepších odpovedí $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$.

Definícia 11. *Weibull (1995) Profil $\boldsymbol{x} \in \Theta$ je Nashovým equilibriom, ak platí:*

$$\boldsymbol{x} \in \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}). \tag{1.13}$$

Táto definícia plynie zo vzťahu (1.8), kde v prípade, že $\boldsymbol{x} \in \Theta$ je Nashovým equilibriom, tak potom každá rýdza stratégia ktorú zahŕňa nosič každej zložky $\boldsymbol{x}_i$ je najlepšou odpoveďou na $\boldsymbol{x}$:

$$s_i \in C(\boldsymbol{x}_i) \Rightarrow s_i \in \beta_i(\boldsymbol{x}_{-i}).$$

Nashove equilibrium $\boldsymbol{x} \in \Theta$ nazývame *striktné*, pokiaľ každá zložka stratégie $\boldsymbol{x}_i$ je jedinou najlepšou odpoveďou na profil $\boldsymbol{x}$, teda ak $\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x}\}$. Inými slovami pokiaľ kritérium Nashovho equilibria vyžaduje, aby žiadna jednostranná zmena stratégie nebola výnosná, tak striktné Nashove equilibrium požaduje, aby každá takáto odchýlka znamenala pre daného hráča explicitne nižší zisk. Z definície 9 vyplýva, že stratégie Nashovho equilibria nemôžu byť striktne dominované, avšak môžu byť slabo dominované. Nashovo equilibrium $\boldsymbol{x}$ nazývame *nedominované*, pokiaľ každá zložka stratégie $\boldsymbol{x}_i$ je nedominovaná.

Existencia Nashovho equilibria bola prvýkrát ukázaná v práci Nash (1950). Majme nejakú hru n-hráčov v normálnom tvare (1.1). Potom symbolom $\Theta^{NE} \subset \Theta$ budeme rozumieť množinu Nashových equilibrií tejto hry v zmiešaných stratégiách.

Veta 2. *Pre každú konečnú hru G (1.1) so zmiešaným rozšírením platí:*

$$\Theta^{NE} \neq \emptyset.$$

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, veta 1.1).

□

Množinu Nashových equilibrií môžeme prepísať pomocou profilov zmiešaných stratégií, ktoré splňujú určité nerovnice:

$$\Theta^{NE} = \{\boldsymbol{x} \in \Theta : u_i(\boldsymbol{x}) - u_i(e_i^k, \boldsymbol{x}_{-i}) \geq 0 \quad \forall i \in P, k \in S_i\}. \tag{1.14}$$

Každá funkcia v uvedenej nerovnici je polynóm premennej $\boldsymbol{x}$ (plynie z definície $u_i(\boldsymbol{x})$, pozri vzťah (1.4)) a počet takýchto algebraických nerovníc je konečný. Uvažujme nejaký polynóm jednej premennej. Je intuitívne zrejmé, že množina na ktorej je tento polynóm nezáporný je zjednotením konečného počtu intervalov. Potom množina na pravej strane vzťahu (1.14) je prienikom konečného počtu nezáporných množín polynómov vektorovej premennej $\boldsymbol{x}$. Z poznatkov algebraickej geometrie plynie, že takáto množina pozostáva z konečného počtu disjunktných, uzavretých a súvislých množín. Tie sa obvykle nazývajú *komponenty* Nashovho equilibria hry.

1.3 Spresnenia Nashovho equilibria

Koncept *Nashovho equilibria* je kardinálny teoretický nástroj najčastejšie používaný v analýze teórii nekooperatívnych hier. Ako sme uviedli v predchádzajúcej podkapitole, môže byť koncipovaný ako základný predpoklad strategickej stability (tzv. nevyhnutnou podmienkou) v tom zmysle, že akákoľvek predpoveď pre hru, ktorá stelesňuje racionálne správanie a presné (alebo racionálne) očakávania, musí byť Nashovou rovnováhou. Avšak vzhľadom na to, že v mnohých hrách sa vyskytuje viac než jedno equilibrium, sú podmienky charakterizujúce túto rovnováhu často nedostatočné k identifikácií jednoznačného výsledku. K odstráneniu tejto nejednoznačnosti zavedieme ďalšie kritériá strategickej stability, ktoré ponúkajú efektívnejšiu voľbu rovnováhy. Približne od roku 1970 boli postupne formované spresnenia Nashovho equilibria, ktoré sú však často založené na ad hoc kritériách. V tejto práci uvedieme niekoľko prístupov spresnenia rovnováhy, ktoré majú súvislosť s určitými evolučnými kritériami.

1.3.1 Perfektné equilibrium

Ako prvý predstavíme koncept nekooperatívneho vylepšenia *perfektné equilibrium*, niekedy taktiež aj nazývané ako „perfekcia trasúcej sa ruky”, ktorý definoval významný nemecký ekonóm *Reinhard Selten* (pozri Selten (1975)). Perfektné equilibrium je rovnováha, ktorá pripúšťa možnosť, že jednotliví hráči sa môžu odkloniť od rovnovážnej hry („trasúca sa ruka”) a to napríklad z dôvodu chybne zvolenej stratégie.

Uvažujme hru n-hráčov v normálnom tvare $G = \{P, \Theta, u\}$. Nech $\boldsymbol{\mu}$ predstavuje nejakú chybovú funkciu, ktorá každej rýdzej stratégií $k \in S_i$ i-tého hráča priradí číslo $\mu_{ik} \in (0, 1)$, ktoré predstavuje pravdepodobnosť, že táto stratégia bola zvolená chybne, tak aby $\sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij} < 1$. Táto chybová funkcia $\boldsymbol{\mu}$ definuje pre každého hráča $i \in P$ podmnožinu

$$\Delta_i(\boldsymbol{\mu}) = \{\boldsymbol{x} \in \Delta_i : x_{ik} \geq \mu_{ik}\} \subset int(\Delta_i) \tag{1.15}$$

zmiešaných stratégií hráča i vzhľadom k pravdepodobnostiam chyby. Priestor definovaný vzťahom (1.15) nazývame priestor *absolútne zmiešaných stratégií* vzhľadom k pravdepodobnostiam chyby. Absolútne zmiešaná stratégia je špeciálny prípad zmiešanej stratégie, kde každej rýdzej stratégií je priradená nenulová pravdepodobnosť. V tomto kontexte závislosti na chybovej funkcii definujeme zodpovedajúcu modifikovanú hru $G(\boldsymbol{\mu})$ nasledovne:

$$G(\boldsymbol{\mu}) = \{P, \Theta(\boldsymbol{\mu}), u\}, \tag{1.16}$$

kde $\Theta(\boldsymbol{\mu}) = \times_{i \in P} \Delta_i(\boldsymbol{\mu}) \subset int(\Theta)$. Symbolom $\Theta^{NE}(\boldsymbol{\mu}^t)$ rozumieme množinu Nashových equilibrií v hre $G(\boldsymbol{\mu})$. Modifikovaná hra $G(\boldsymbol{\mu})$ je reprodukciou štandardnej hry G s reštrikciou, kedy hráčom sú prípustné iba absolútne zmiešané stratégie. Ďalej platí, že čím sú všetky pravdepodobnosti chýb nižšie, tým je množina $\Theta(\boldsymbol{\mu})$ väčšia, a pokiaľ všetky pravdepodobnosti chýb konvergujú k nule ($\boldsymbol{\mu} \to \boldsymbol{0}$), tak zodpovedajúca modifikovaná hra $G(\boldsymbol{\mu})$ sa približuje k pôvodnej hre G.

Definícia 12. *Weibull (1995) Profil $\boldsymbol{x} \in \Theta^{NE}$ je perfektným equilibriom, pokiaľ pre nejakú postupnosť $\{G(\boldsymbol{\mu}^t)\}_{\boldsymbol{\mu}^t \to \boldsymbol{0}}$, $t = 1, ..., \infty$, modifikovaných hier existuje profil $\boldsymbol{x}^t \in \Theta^{NE}(\boldsymbol{\mu}^t)$ taký, že $\boldsymbol{x}^t \to \boldsymbol{x}$.*

Môžeme to interpretovať ako „limitnú rovnovážnu situáciu"(alebo presnejšie povedané ako limitu postupnosti rovnovážnych situácií), kde sa znižujú pravdepodobnosti chýb. Pokiaľ $\boldsymbol{x} \in int(\Theta)$, tak potom pre dostatočne malé pravdepodobnosti chýb μ_{ik} platí, že $\boldsymbol{x} \in \Theta(\boldsymbol{\mu})$. Navyše, keď takéto $\boldsymbol{x} \in \Theta^{NE}$, tak potom $\boldsymbol{x} \in \Theta^{NE}(\boldsymbol{\mu})$. Symbolom Θ^{PE} budeme značiť množinu perfektných Nashových equilibrií.

Veta 3. *Pre každú konečnú hru so zmiešaným rozšírením platí:*

$$\Theta^{PE} \neq \emptyset.$$

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 1.3).

□

Selten (1975) ukázal, že Nashovo equilibrium $\boldsymbol{x}$ je perfektné vtedy a len vtedy, ak v každom okolí $\boldsymbol{x}$ existuje nejaký vnútorný profil stratégií $\boldsymbol{y}$, ku ktorému je $\boldsymbol{x}$ najlepšou odpoveďou. Inými slovami, hráči by mali byť ochotní hrať svoje rovnovážne stratégie $\boldsymbol{x}_i$, aj keď existuje neistota o stratégiách ostatných hráčov, a práve z tohto dôvodu budú pripisovať malé kladné pravdepodobnosti všetkým čistým stratégiám v hre.

Veta 4. *Každý $\boldsymbol{x} \in \Theta^{PE}$ je nedominovaný. Ak je $\boldsymbol{x} \in \Theta^{NE}$ v hre dvoch hráčov nedominovaný, tak potom $\boldsymbol{x} \in \Theta^{PE}$.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 1.4).

□

Poznámka. Veta 4 platí iba v prípade hry dvoch hráčov.

1.3.2 Vlastné equilibrium

Koncept perfektného equilibra uvedeného v predošlej časti vyžaduje iba robustnosť s ohľadom na arbitrárne odchýlky bez toho, aby stanovil nejakú podmienku, či sú tieto vychýlenia akceptovateľné v istom zmysle. Myerson (1978) navrhol alternatívne kritérium robustnosti, ktoré je v tomto ohľade striktnejšie. *Vlastná rovnováha* ďalej spresňuje Seltenovu predstavu dokonalého equilibria za predpokladu, že drahšie chyby (indukujú nižšiu očakávanú výplatu) sú menej pravdepodobné než tie menej nákladné. Teda uvažujeme akýsi element racionality vzhľadom k možnosti chybne zvolenej stratégie, ktorú môžeme interpretovať tak, že hráči sami seba viac upozorňujú na nákladnejšie (škodlivejšie) chyby než na tie menej nákladne.

Uvažujme nejaké $\epsilon > 0$. Potom profil $\boldsymbol{y} \in int(\Theta)$ je ϵ - vlastný ak:

$$u_i(e_i^k, \boldsymbol{y}_{-i}) < u_i(e_i^l, \boldsymbol{y}_{-i}) \Rightarrow y_{ik} \leq \epsilon \cdot y_{il}.$$

Čiže vždy, keď má hráč i dve rýdze stratégie $s_k, s_l \in S_i$ také, že očakávaná výplata pri voľbe stratégie s_k je nižšia než očakávaný zisk pri stratégií s_l, potom pravdepodobnosť voľby stratégie s_k je nanajvýš rovná ϵ-krát pravdepodobnosti priradenej voľbe s_l.

Každé vnútorné Nashovo equilibrium $\boldsymbol{y} \in \Theta^{NE}$, $\boldsymbol{y} \in int(\Theta)$, je nepochybne ϵ - vlastné pre nejaké $\epsilon > 0$, a preto všetky rýdze stratégie, pre každého hráča i, prinesú rovnaký (maximálny) zisk proti profilu $\boldsymbol{y}$.

Definícia 13. *Weibull (1995) Profil $\boldsymbol{x} \in \Theta^{NE}$ je vlastný, pokiaľ pre nejakú postupnosť $\epsilon^t \to 0$, existujú ϵ - vlastné profily $\boldsymbol{y}(\epsilon^t)$ také, že $\boldsymbol{y}(\epsilon^t) \to \boldsymbol{x}$.*

Evidentne každé vnútorné Nashovo equilibrium $\boldsymbol{x} \in int(\Theta)$ je taktiež vlastné - stačí položiť $\boldsymbol{y}(\epsilon^t) = \boldsymbol{x}$ pre každé t. Myerson (1978) taktiež ukázal, že každé vlastné Nashovo equilibrium je perfektné.

1.4 Symetrické hry dvoch hráčov

Skupina symetrických hier dvoch hráčov poskytuje základný rámec pre teóriu evolučných hier a vskutku mnoho dôležitých poznatkov môžeme získať práve pomocou tohto konceptu.

Presnejšie, symetrickou hrou dvoch hráčov $G = \{P, S, \pi\}$ myslíme strategickú interakciu dvoch subjektov, pričom každý subjekt má rovnaký počet rýdzich stratégií a výplata zodpovedajúca akejkoľvek stratégií nezávisí od toho, kto volí danú stratégiu. Inak povedané, ak môžeme zameniť hráčov a výplaty budú stále rovnaké, potom je takáto hra symetrická. Formálne:

Definícia 14. *Weibull (1995) Hru $G = \{P, S, \pi\}$ nazývame symetrickou hrou dvoch hráčov, ak $P = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2$ a $\pi_2(s_1, s_2) = \pi_1(s_2, s_1)$ pre každé $(s_1, s_2) \in S$.*

Podmienka symetrie výplatných funkcií na rýdzich stratégiách je ekvivalentná požiadavke, aby výplatná matica druhého hráča bola transpozíciou výplatnej matici prvého hráča, t.j. $\mathbf{B}^\top = \mathbf{A}$ (matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú štvorcové, rovnakého stupňa, čo vyplýva z predpokladu, že $S_1 = S_2$). Inými slovami, výplata druhého hráča b_{ij}, kde prvý hráč volí i-tú rýdzu stratégiu a jeho oponent volí j-tú rýdzu stratégiu je rovná výplate a_{ji} prvého hráča, kde naopak prvý hráč volí j-tú stratégiu a druhý hráč volí i-tú rýdzu stratégiu.

Symbolom $K = \{1, 2, ..., k\}$ budeme značiť spoločný súbor rýdzich stratégií, kde k predstavuje počet rýdzich stratégií oboch hráčov. Zmiešané stratégie prvého hráča budeme označovať symbolom $\boldsymbol{x} \in \Delta$ a pre zmiešané stratégie druhého hráča použijeme značenie $\boldsymbol{y} \in \Delta$, kde Δ označuje spoločnú množinu zmiešaných stratégií. Čiže $\Delta = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k_+ : \sum_{i \in K} x_i = 1\}$ (teda $\Theta = \Delta \times \Delta$). Výplatu zodpovedajúcu každej rýdzej stratégií $i \in K$ proti nejakej zmiešanej stratégií $\boldsymbol{y} \in \Delta$ budeme označovať $u(e^i, \boldsymbol{y}) = (e^i)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{y}$. Množinu najlepších odpovedí na každú súperovu zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{y} \in \Delta$ budeme značiť symbolom $\beta^*(\boldsymbol{y})$:

$$\beta^*(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x} \in \Delta : u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq u(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{x}' \in \Delta\}.$$

Na rozdiel od obvyklého konceptu najlepšej odpovedi $\tilde{\beta}$, ktorá zobrazuje profily stratégií na množinu profilov stratégií, tak β^* zobrazuje stratégie do množín stratégií. V akejkoľvek symetrickej hre dvoch hráčov platí pre každý profil nasledujúca vlastnosť:

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Theta : \tilde{\beta}_1(\boldsymbol{y}) = \beta^*(\boldsymbol{y}); \ \tilde{\beta}_2(\boldsymbol{x}) = \beta^*(\boldsymbol{x}).$$

Ďalším špeciálnym prípadom, ktorým sa budeme zaoberať je symetrická hra dvoch hráčov, v ktorej obaja hráči vždy dopadnú rovnako dobre alebo naopak rovnako zle. V takomto type hry je výplatná matica $\mathbf{A}$ symetrická. Z tohto dôvodu sa táto podtrieda symetrický hier dvoch hráčov nazýva *dvojnásobne symetrická.*

Definícia 15. *Weibull (1995) Symetrická hra dvoch hráčov sa nazýva dvojnásobne symetrická práve vtedy, ak* $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$.

Keďže symetria vyžaduje, aby $\mathbf{B}^\top = \mathbf{A}$, tak potom symetrická hra je dvojnásobne symetrická práve vtedy, ak $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, alebo ekvivalentne, pokiaľ $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Delta$.

V kontexte symetrických hier predstavuje dvojica stratégií $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Theta = \Delta \times \Delta$ Nashovo equilibrium, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Theta^{NE}$, vtedy a len vtedy, ak $\boldsymbol{x} \in \beta^*(\boldsymbol{y})$ a zároveň $\boldsymbol{y} \in \beta^*(\boldsymbol{x})$. Nashovo equilibrium nazývame *symetrické*, pokiaľ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. To znamená, že obaja hráči použijú rovnakú (rýdzu alebo zmiešanú) stratégiu. Podmnožinu stratégií $\boldsymbol{x} \in \Delta$, ktoré sú Nashovým equilibriom sami so sebou budeme následne značiť:

$$\Delta^{NE} = \{\boldsymbol{x} \in \Delta : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \Theta^{NE}\}. \tag{1.17}$$

Geometricky to môžeme interpretovať ako priesečník množiny Θ^{NE} s uhlopriečkou $D = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Theta : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}$ priestoru Θ. Ekvivalentne $\Delta^{NE} \subset \Delta$ je množinou pevných bodov najlepšej odpovede $\beta^* : \Delta \to \Delta$.

Veta 5. *Zmiešaná stratégia* $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NE}$ *práve vtedy, keď:*

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} \geq (e^i)^\top \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} \qquad \forall i \notin C(\boldsymbol{x}). \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = (e^i)^\top \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} \qquad \forall i \in C(\boldsymbol{x}). \tag{1.19}$$

Dôkaz. Nech $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NE}$, tak potom platí:

$$(e^j)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} \qquad \forall j \in \{1, 2, ..., k\}. \tag{1.20}$$

Ďalej pripusťme, že existuje nejaké $m \in C(\boldsymbol{x})$ také, že $(e^m)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} < \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x}$. Potom:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \sum_{j=1}^{k} x_j (e^j)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j \in C(\boldsymbol{x})} x_j (e^j)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} = x_m (e^m)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \\ &+ \sum_{j \in C(\boldsymbol{x}) \setminus m} x_j (e^j)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} < x_m \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \sum_{j \in C(\boldsymbol{x}) \setminus m} x_j \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \\ &= \sum_{j=1}^{k} x_j \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

čo je spor, ktorý dokazuje nutnosť podmienok (1.18) a (1.19). Poznamenajme, že druhý člen pravej strany nerovnosti (1.21) plynie zo vzťahu (1.20). Nech platia tieto vzťahy. Tak potom pre všetky $j \in \{1, 2, ..., k\}$ platí, že $(e^j)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x}$. Uvažujme ľubovoľnú zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{z} \in \Delta$, tak potom:

$$\boldsymbol{z}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} z_j (e^j)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \sum_{j=1}^{k} x_j \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}.$$

Teda $\boldsymbol{x}$ je rovnovážna stratégia, čo implikuje, že podmienky (1.18) a (1.19) sú postačujúce.

$\square$

Nie všetky Nashove equilibria symetrickej hry musia byť nutne symetrické. Napriek tomu má každá symetrická hra aspoň jedno symetrické Nashovo equilibrium.

Veta 6. *Pre každú konečnú a symetrickú hru dvoch hráčov so zmiešaným rozšírením platí:*

$$\Delta^{NE} \neq \emptyset.$$

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 1.5).

$\square$

2. Evolučné hry

Základným konceptom teórie evolučných hier je *evolučne stabilná stratégia.* V presnom slova zmysle je takáto stratégia robustná voči nátlaku evolučnej selekcie. Uvažujme nejakú dostatočne veľkú populáciu, z ktorej náhodne volíme dvojice jednotlivcov, ktoré opakovane absolvujú symetrickú hru dvoch hráčov a navyše predpokladajme, že všetci jedinci sú pôvodne „predprogramovaní" hrať určitú rýdzu alebo zmiešanú stratégiu. V tomto kontexte predstavujú stratégie fenotyp konania, pričom fenotypom rozumieme súbor pozorovateľných vlastností a znakov. Ďalej predpokladajme, že do populácie vstúpi malá (v porovnaní s pôvodnou populáciou) skupina „mutantov", ktorá je predprogramovaná hrať nejakú odlišnú rýdzu alebo zmiešanú stratégiu od fenotypu veľkej populácie. Zavedenú stratégiu populácie nazývame evolučne stabilnú, ak pre každú takúto stratégiu mutantov existuje nejaká kladná invazívna bariéra taká, že podiel jednotlivcov populácie, ktorí hrajú túto stratégiu mutantov bude postupne nižší než je táto bariéra. Potom zavedená stratégia poskytuje vyšší prínos, než stratégia mutantov. Tento prístup je teda zameraný na symetrickú interakciu dvojíc v rámci nejakej jednej veľkej populácie. Navyše kritérium evolučnej stability poukazuje na úzke spojenie medzi výplatami v hre a rozširovaním stratégie v populácií. V kontexte biológie predstavuje výplatná funkcia reprodukčnú zdatnosť („fitness"), teda schopnosť zachovať gén a rozšíriť ho v genotype populácie (genotypom rozumieme súbor všetkých génov, ktoré má organizmus k dispozícií).

Klasická darwinistická teória evolúcie predpokladá, že kritériom evolučného úspechu jedinca je jeho schopnosť reprodukcie. Podľa klasických predstáv by sa v dôsledku prirodzeného výberu mali v populácii zachovať tie gény, ktoré svojmu nositeľovi poskytujú najväčší fitness. S nástupom evolučnej teórie hier sa však ukázalo, že z dlhodobého hľadiska nie je dôležité ako príslušný gén mení fitness nositeľa, ale to, či podmieňuje evolučne stabilnú stratégiu, t.j. takú stratégiu, ktorá ak raz v populácii prevládne, nemôže byť potlačená žiadnou inou minoritnou stratégiou. V evolúcii teda nevyhráva vždy zdatnejší, ako si predstavoval Charles Darwin, ale stabilnejší. Je potrebné si uvedomiť, že hovoríme o selekcii fenotypu a nie o jeho mutácii. V prípade vstupu nového fenotypu ide totiž o zmenu priestoru stratégií Δ. Využívali sme diela Swinkels (1992), Maynard Smith (1982), Vega-Redondo (2003) a Weibull (1995). Všetky definície uvedené v tejto kapitole sú prevzaté z diela Weibull (1995).

2.1 Evolučná stabilita

Uvažujme malú skupinku mutantov pôsobiacu vo veľkej populácií jedincov, pričom všetci zástupcovia veľkej populácie sú predprogramovaní k určitému správaniu, tj. hrajú rovnakú (rýdzu alebo zmiešanú) *zavedenú stratégiu* $\boldsymbol{x} \in \Delta$. Taktiež predpokladajme, že všetci mutanti sú predprogramovaní hrať nejakú inú (rýdzu alebo zmiešanú) *deviantnú stratégiu* (mutantnú) $\boldsymbol{y} \in \Delta$. Nech podiel mutantov v *následnej populácií* (vrátane skupiny mutantov) je rovný nejakému ϵ, kde $\epsilon \in (0, 1)$. Náhodné dvojice jednotlivcov z tejto bimorfickej populácie (vyskytujú sa v nej dve odlišné stratégie) sú opakovane vybrané hrať hru, pričom každý jednotlivec má rovnakú pravdepodobnosť, že bude súčasťou strategickej interakcie. Uvažujme nejakého jednotlivca, ktorý je účastníkom hry. Potom pravdepodobnosť, že si jeho súper zvolí deviantnú stratégiu $\boldsymbol{y}$ je rovná ϵ a pravdepodobnosť zavedenej stratégie $\boldsymbol{x}$ je $1 - \epsilon$. Výplata zodpovedajúca duelu v tejto bimorfickej populácií je ekvivalentná hre dvoch hráčov, v ktorej oponent hrá zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{w} = \epsilon\boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x} \in \Delta$. Potom *následná výplata* zodpovedajúca zavedenej stratégií je $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ a deviantnej stratégií je $u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w})$.

Z biologického hľadiska hovoríme, že populácia fenotypu $\boldsymbol{x}$ je evolučne stabilná voči fenotypu $\boldsymbol{y}$, ak sú jedinci fenotypu $\boldsymbol{x}$ pri vstupe malého počtu mutantného fenotypu $\boldsymbol{y}$ zdatnejší, teda majú vyšší fitness:

$$u\left(\boldsymbol{x}, \epsilon\boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}\right) > u\left(\boldsymbol{y}, \epsilon\boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}\right) \tag{2.1}$$

alebo ekvivalentne

$$\boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}[\epsilon\boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}] > \boldsymbol{y}^\top \mathbf{A}[\epsilon\boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}]$$

pre ľubovoľne dostatočne malé $\epsilon > 0$. Povieme, že stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je *evolučne stabilná*, ak nerovnica (2.1) platí pre každú deviantnú stratégiu $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ za predpokladu, že podiel mutantov je dostatočne nízky.

Definícia 16. *Stratégiu $\boldsymbol{x} \in \Delta$ nazývame evolučne stabilnou stratégiou (ESS), ak pre každú stratégiu $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ existuje nejaké $\bar{\epsilon}_y \in (0,1)$ také, že nerovnica (2.1) platí pre každé $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_y)$.*

Označme $\Delta^{ESS} \subset \Delta$ množinu evolučne stabilných stratégií. Ak by stratégia $\boldsymbol{x}$ nebola optimálna voči sebe samej, tzn. najlepšia odpoveď samu na seba, tak potom existuje stratégia $\boldsymbol{y}$, ktorá ponúka vyššiu výplatu („fitness") proti stratégií $\boldsymbol{x}$ než ponúka sama stratégia $\boldsymbol{x}$. Teda, ak populácia o podiele ϵ takejto deviantnej stratégií $\boldsymbol{y}$ je dostatočne malá, potom zo spojitosti u takáto stratégia ponúka vyššiu výplatu proti stratégií $\boldsymbol{w} = \epsilon\boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}$, než ponúka zavedená stratégia $\boldsymbol{x}$. Tým pádom $\boldsymbol{x}$ nie je evolučne stabilná. Formálne teda musí platiť:

$$\Delta^{ESS} \subseteq \Delta^{NE}.$$

Kritérium evolučnej stability je ale striktnejšie. Ak je stratégia $\boldsymbol{x}$ evolučne stabilná a $\boldsymbol{y}$ je alternatívna najlepšia odpoveď na $\boldsymbol{x}$, tak potom $\boldsymbol{x}$ je výhodnejšia odpoveď než $\boldsymbol{y}$ na $\boldsymbol{y}$. K overeniu, že nejaká ESS $\boldsymbol{x}$ má túto druhú vlastnosť predpokladajme, že alternatívna najlepšia odpoveď $\boldsymbol{y}$ na $\boldsymbol{x}$ ponúka aspoň toľko proti sebe samej ako $\boldsymbol{x}$. Ďalej platí, že stratégia $\boldsymbol{y}$ utŕži aspoň toľko ako $\boldsymbol{x}$ takisto proti stratégií $\boldsymbol{w} = \epsilon\boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}$, nezávisle na ϵ. Z toho plynie, že $\boldsymbol{x}$ nie je evolučne stabilná, čo je spor s predpokladom. Taktiež platí opačná implikácia tejto úvahy. Ak $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NE}$ a každá alternatívna najlepšia odpoveď $\boldsymbol{y}$ utŕži menej proti sebe samej než utŕži $\boldsymbol{x}$ proti nej, tak potom si takýto mutanti počínajú horšie v následnej populácií. Keďže rovnako aj stratégie $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$, ktoré nie sú najlepšou odpoveďou na $\boldsymbol{x}$ si počínajú v následnej populácií horšie než $\boldsymbol{x}$, takže pre dostatočne malé $\epsilon > 0$ zhrnieme túto úvahu do nasledujúceho tvrdenia:

Tvrdenie 7. $\Delta^{ESS} = \{\boldsymbol{x} \in \Delta^{NE} : u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) < u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{y} \in \beta^*(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}\}.$

Ekvivalentný spôsob vyjadrenia tejto analýzy je, že stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je evolučne stabilná, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

$$u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \leq u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{y}, \tag{2.2}$$

$$u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \Rightarrow u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) < u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}. \tag{2.3}$$

Spolu tieto dve podmienky definujú evolučnú stabilitu. V skutočnosti bola takto pôvodne definovaná evolučná stabilita v dielach Maynard Smith a Price (1973) a Maynard Smith (1974).

Na základe vlastnosti množiny Δ^{ESS} uvedenej v tvrdení 7 poznamenal Haigh (1975), že nosič jednej ESS nemôže obsahovať nosič inej ESS.

Tvrdenie 8. *Ak $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$ a $C(\boldsymbol{y}) \subset C(\boldsymbol{x})$ pre nejakú stratégiu $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$, potom $\boldsymbol{y} \notin \Delta^{NE}$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$ a $C(\boldsymbol{y}) \subset C(\boldsymbol{x})$ pre nejakú stratégiu $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$. Keďže $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NE}$ tak využitím vzťahu (1.19) z vety 5 platí:

$$u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{j \in C(\boldsymbol{y})} y_j u(e^j, \boldsymbol{x}) = \sum_{j \in C(\boldsymbol{y})} y_j u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}).$$

Podmienka (2.3) implikuje, že $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$. Z toho vyplýva, že $\boldsymbol{y} \notin \Delta^{NE}$.

□

Obzvlášť, ak je nejaká ESS vnútorná (v rámci množiny Δ), potom sa jedná o ESS hry s jednoznačným riešením. Navyše v konečnej hre je počet nosičov konečný, tak potom je počet ESS taktiež konečný.

Dôsledok. Množina $\Delta^{ESS} \subset \Delta$ je konečná. $\Delta^{ESS} = \{\boldsymbol{x}\}$ ak $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS} \cap int(\Delta)$.

V závere tejto podkapitoly ukážeme prepojenie medzi evolučnou stabilitou a kritériami nekooperatívnych hier uvedenými v predošlej kapitole.

Tvrdenie 9. *Ak $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je slabo dominovaná, tak potom $\boldsymbol{x} \notin \Delta^{ESS}$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NE}$ je slabo dominovaná stratégiou $\boldsymbol{y} \in \Delta$. Potom je $\boldsymbol{y}$ alternatívnou najlepšou odpoveďou na $\boldsymbol{x}$ a z definície slabej dominancie (pozri definíciu 3) plynie, že $u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \geq u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Tým pádom stratégia $\boldsymbol{x}$ nesplňuje podmienku (2.3).

□

V prípade, ak je stratégia $\boldsymbol{x}$ evolučne stabilná, tak potom profil $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \Theta$ je nedominovaným Nashovým equilibriom, a keďže každé nedominované Nashovo equilibrium hry dvoch hráčov je perfektné, tak platí:

Dôsledok. Ak $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$, tak potom $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \Theta^{PE}$.

V skutočnosti evolučná stabilita implikuje ešte väčšiu robustnosť než vyžaduje prístup perfektného equilibria.

Veta 10. *Ak $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$, tak potom $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \Theta^{NE}$ je vlastným equilibriom.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 2.4). □

Pokiaľ perfekcia vyžaduje robustifikáciu voči nejakým málo pravdepodobným chybám, tak koncept vlastného equilibria požaduje robustnosť s ohľadom na akýsi prvok racionality v mechanizme vzniku chýb (pozri oddiel 1.3.2). Na základe vety 10 môžeme očakávať, že evolučná stabilita vyžaduje správanie, ktoré je nielen „racionálne" a „koordinované", v zmysle Nashovho equilibria, ale taktiež aj „obozretné". Opačná implikácia vety 10 neplatí, tzn. vlastné equilibrium nemusí nutne spĺňať predpoklady evolučnej stability (pozri (Weibull, 1995, kapitola 2.1)).

2.2 Charakteristiky ESS

V tvrdení 7 sme predstavili jednu z charakteristík evolučnej stability. V tejto podkapitole uvedieme ďalšie dve vlastnosti, ktoré vystihujú evolučnú stabilitu.

2.2.1 Invazívne bariéry

Definícia evolučnej stability stratégie $\boldsymbol{x}$ požaduje, aby pre každú deviantnú stratégiu $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ existovalo nejaké $\bar{\epsilon}_y > 0$ také, že jedinci fenotypu $\boldsymbol{x}$ sú odolní voči fenotypu $\boldsymbol{y}$, pokiaľ je podiel mutantov menší než $\bar{\epsilon}_y$. V tomto zmysle teda existuje nejaká invazívna bariéra voči každej deviácií. V súvislosti s konečnými hrami evolučná stabilita implikuje, že $\bar{\epsilon}_y$ môžeme zovšeobecniť tak, aby bolo rovnaké pre všetky deviácie (predpokladáme, že počet deviácií je konečný). Potom hovoríme, že evolučne stabilná stratégia $\boldsymbol{x}$ má *rovnomernú invazívnu bariéru.* Majme nejakú ESS $\boldsymbol{x}$ robustnú voči mutácii $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ vo veľkej, ale konečnej populácií, ktorá pozostáva z n jedincov. Je nevyhnutné, aby invazívna bariéra $\bar{\epsilon}_y$ voči deviácií $\boldsymbol{y}$ bola vyššia než $1/n$, kde n je veľkosť populácie, keďže ľubovoľná skupina mutantov pozostáva z aspoň jedného jedinca. Teda v kontexte existencie rovnomernej invazívnej bariéry je ESS $\boldsymbol{x}$ robustná voči akejkoľvek mutácií $\boldsymbol{y}$ o rozsahu $m \in \mathbb{N}$ jedincov, ak pre konečnú populáciu veľkosti $n \in \mathbb{N}$, $m < n$, je podiel m/n nižší než rovnomerná invazívna bariéra.

Definícia 17. *Stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta$ má rovnomernú invazívnu bariéru, ak existuje nejaké $\bar{\epsilon} \in (0,1)$ také, že nerovnica* (2.1) *platí pre všetky stratégie $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ a pre každé $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$.*

Predtým než vyslovíme konkrétny záver, zavedieme nasledujúci teoretický rámec. Pre akúkoľvek $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$ definujme jej invazívnu bariéru $b(\boldsymbol{y})$ voči nejakej deviácií $\boldsymbol{y}$ ako najvyššiu možnú hodnotu $\bar{\epsilon}_y$ v zmysle nerovnice (2.1). Potom pre bariéru $b(\boldsymbol{y})$ platí:

$$b(\boldsymbol{y}) = sup \ \{\delta \in [0,1] : f(\epsilon, \boldsymbol{y}) > 0 \ \ \forall \epsilon \in [0, \delta]\},$$

kde funkciu $f \ : \ [0,1] \times \Delta \to \mathbb{R}$ definovanú predpisom

$$f(\epsilon, \boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \epsilon \boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}) \tag{2.4}$$

nazývame *skórová funkcia.* Keďže podľa hypotézy je $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$, tak potom $b(\boldsymbol{y}) > 0$ pre všetky $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$. Navyše $\boldsymbol{x}$ má rovnomernú invazívnu bariéru vtedy a len vtedy, ak existuje nejaké $\alpha > 0$ také, že $b(\boldsymbol{y}) \geq \alpha$ pre všetky $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$.

Veta 11. *Stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$ vtedy a len vtedy, ak $\boldsymbol{x}$ má rovnomernú invazívnu bariéru.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 2.5).

□

2.2.2 Lokálna prevaha

Druhá charakteristika evolučnej stability súvisí s predošlým poznatkom tak, že vnútorná ESS nutne poskytuje vyššiu výhru proti všetkým deviáciám než tieto poskytujú proti sebe samým (pozri tvrdenie 8 a dôsledok 2.1). Presnejšie sa ukazuje, že sa dá zovšeobecniť táto globálna prevaha vnútornej ESS na tvrdenie, že akákoľvek ESS je miestne lepšia v tom zmysle poskytnúť vyššiu výplatu proti všetkým okolitým deviáciám ako ponúknu proti sebe samým.

Definícia 18. *Stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta$ má lokálnu prevahu v prípade, že má nejaké okolie $U_{\boldsymbol{x}}$ také, pre ktoré $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ pre všetky $\boldsymbol{y} \in U_{\boldsymbol{x}} \setminus \{\boldsymbol{x}\}$.*

Veta 12. *Stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$ vtedy a len vtedy, ak $\boldsymbol{x}$ má lokálnu prevahu.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 2.6).

□

2.3 Slabšie kritéria evolučnej stability

V tejto podkapitole sa budeme venovať menej striktným podmienkam evolučnej stability. Prvý prístup, ktorým sa budeme zaoberať je *neutrálna stabilita.* Namiesto požiadavky evolučnej stability, v ktorej všetci mutanti utŕžia menej než zavedená stratégia, neutrálna stabilita požaduje, aby žiaden z mutantov nezískal viac než poskytuje zavedená stratégia.

Definícia 19. *Stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je neutrálne stabilná (NSS), ak pre všetky stratégie $\boldsymbol{y} \in \Delta$ existuje nejaké $\bar{\epsilon}_y \in (0, 1)$ také, že nerovnica*

$$u[\boldsymbol{x}, \epsilon\boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}] \geq u[\boldsymbol{y}, \epsilon\boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}] \tag{2.5}$$

platí pre každé $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_y)$.

V tomto kontexte označme symbolom $\Delta^{NSS} \subset \Delta$ množinu neutrálne stabilných stratégií. Z definície 19 plynie, že stratégia $\boldsymbol{x}$ je neutrálne stabilná práve vtedy, ak spĺňuje podmienku (2.2) a nasledujúcu upravenú verziu podmienky (2.3):

$$u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \Rightarrow u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \leq u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{y}. \tag{2.6}$$

V skutočnosti bola takto pôvodne definovaná neutrálna stabilita v práci Maynard Smith (1982). Aj keď je tento koncept menej striktný než evolučná stabilita, napriek tomu stále ide o spresnenie Nashovho equilibria:

$$\Delta^{ESS} \subseteq \Delta^{NSS} \subseteq \Delta^{NE}.$$

Podobné charakteristiky ako sme uviedli v prípade evolučnej stability môžeme zaviesť aj pre neutrálnu stabilitu. Keďže jediný rozdiel medzi týmito dvoma prístupmi je len v type nerovnosti (neostrá nerovnosť (2.6) namiesto ostrej nerovnosti (2.3)), tak nie je prekvapením, že charakteristiky neutrálnej stability sa líšia iba v tomto ohľade. Avšak, v prípade neutrálnej stability existuje mierna komplikácia (nevyskytuje sa v prípade evolučnej stability), ktorá spočíva v tom, že zodpovedajúca slabá invazívna bariéra nie je nutne spojitá. Táto nespojitosť sa prejavuje, ak je stratégia $\boldsymbol{x}$ neutrálne, ale nie evolučne stabilná a $\boldsymbol{y}$ je nejaká alternatívna najlepšia odpoveď taká, že príslušné skóre $f(\epsilon, \boldsymbol{y})$, definované vzťahom (2.4), je nulové pre všetky ϵ. V takomto prípade môže slabá invazívna bariéra poklesnúť v prípade, keď $\boldsymbol{y}$ je mierne modifikovaná. Napriek tomu je možné ukázať, že nemôže poklesnúť na nulu (pozri Bomze a Weibull (1995)). Formálne definujeme slabú invazívnu bariéru $b^*(\boldsymbol{y})$ stratégie $\boldsymbol{x}$ voči nejakej deviácií $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ vzťahom:

$$b^*(\boldsymbol{y}) = sup\ \{\delta \in [0,1] : f(\epsilon, \boldsymbol{y}) \geq 0 \quad \forall \epsilon \in [0, \delta]\}.$$

K formálnemu zavedeniu konceptu neutrálnej stability konštatujeme, že stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta$ má *rovnomernú slabú invazívnu bariéru*, ak existuje nejaké $\bar{\epsilon} \in (0,1)$ také, že nerovnica (2.5) platí pre každé $\boldsymbol{y} \in \Delta$ a $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$. Podobne budeme hovoriť, že nejaká stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta$ má *lokálne slabú prevahu*, ak $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ pre všetky $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ v nejakom okolí $U_{\boldsymbol{x}}$. Z Weibull (1995) prevezmeme nasledujúce tvrdenie:

Tvrdenie 13. *Pre akúkoľvek $\boldsymbol{x} \in \Delta$ sú nasledujúce výroky ekvivalentné:*

1. $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NSS}$;
2. $\boldsymbol{x}$ *má rovnomernú slabú invazívnu bariéru;*
3. $\boldsymbol{x}$ *má lokálne slabú prevahu.*

Druhý prístup slabšej evolučnej stability analyzovaný v tejto časti sa nazýva *odolnosť (robustnosť) voči súčastiam equilibria* (pozri Swinkels (1992)), ktorý vyžaduje, aby žiaden z mutantov neutŕžil maximálnu možnú výplatu. Kritérium evolučnej stability neobsahuje žiadnu reštrikciu voči mutantným stratégiám. V ekonomickom prostredí, kde mutácie môžu byť spôsobené experimentovaním malej skupiny jednotlivcov (firiem), Swinkels (1992) argumentuje, že môže byť rozumné požadovať robustnosť iba vzhľadom na také mutantné stratégie, ktoré sú optimálnymi v následnej populácií, tzv. súčastí equilibria. Presnejšie, nech $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je zavedená stratégia, $\boldsymbol{y} \in \Delta$ je nejaká deviácia, ϵ predstavuje podiel mutantov a $\boldsymbol{w} = \epsilon \boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x} \in \Delta$ je následná zmiešaná stratégia. Potom $\boldsymbol{y}$ nazývame *súčasťou equilibria*, ak je najlepšou odpoveďou na $\boldsymbol{w}$.

Definícia 20. *Stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je robustná voči súčastiam equilibria (REE), ak existuje nejaké $\bar{\epsilon} \in (0,1)$ také, že nasledujúca podmienka:*

$$\boldsymbol{y} \notin \beta^*[\epsilon \boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}]$$

platí pre všetky $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ a $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$.

Na základe vety 11 môžeme predpokladať, že invazívna bariéra voči nejakej ESS je rovnomerná a z toho vyplýva, že každá ESS je robustná voči súčastiam equilibria. Avšak neutrálne stabilná stratégia nemusí byť nutne takto robustná. Predstavme si hru, v ktorej sú všetky výplaty rovnaké, tak potom je každá stratégia NSS, ale žiadna nie je REE.

2.4 Množinové kritéria evolučnej stability

V tejto časti budeme uvažovať množinové zobecnenia kritérií evolučnej stability a robustnosti voči súčastiam equilibria.

Uzavretú množinu stratégií, ktoré sú symetrickým Nashovým equilibriom budeme nazývať evolučne stabilnú, ak každá stratégia z tejto množiny poskytuje aspoň rovnaký zisk proti každej blízkej alternatívnej najlepšej odpovedi ako tie ponúkajú voči sebe samým a s rovnakou výplatou v prípade, kedy mutantná stratégia taktiež patrí do množiny.

Definícia 21. *Množinu $X \subset \Delta^{NE}$ nazývame evolučne stabilnou (ES), ak je neprázdna a uzavretá a pre každé $\boldsymbol{x} \in X$ existuje nejaké okolie $U_{\boldsymbol{x}}$ také, že:*

$$u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

pre všetky $\boldsymbol{y} \in U_{\boldsymbol{x}} \cap \beta^*(\boldsymbol{x})$ a s ostrou nerovnosťou v prípade, ak $\boldsymbol{y} \notin X$.

Thomas (1985) ukázal, že táto definícia sa nezmení, ak vynecháme prienik s množinou najlepších odpovedí $\beta^*(\boldsymbol{x})$. Za tohto predpokladu vyplýva, že evolučne stabilná množina pozostáva z neutrálne stabilných stratégií. Predpokladajme, že $\boldsymbol{x} \in X$, kde X je evolučne stabilná množina. Potom $\boldsymbol{x}$ má okolie $U_{\boldsymbol{x}}$ také, že $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ pre všetky stratégie $\boldsymbol{y}$ v $U_{\boldsymbol{x}}$, a preto $x \in \Delta^{NSS}$ podľa tvrdenia 13. Celkom, ak X je nejaká ES množina, tak potom $X \subset \Delta^{NSS}$. V dôsledku toho, že existujú hry, ktoré nemajú neutrálne stabilné stavy, tak nemajú žiadnu ES množinu. Navyše sme odvodili inklúziu $X \subset \Delta^{NSS}$ bez toho, aby sme sa vyžadovali podmienky Nashovho equilibria v definícií ES množiny.

Veta 14. *$X \subset \Delta^{NE}$ je ES množina vtedy a len vtedy, ak je neprázdna a uzavretá a pre každé $\boldsymbol{x} \in X$ existuje nejaké okolie $U_{\boldsymbol{x}}$ také, že $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ pre všetky $\boldsymbol{y} \in U_{\boldsymbol{x}}$, s ostrou nerovnosťou v prípade, ak $\boldsymbol{y} \notin X$.*

Druhá časť charakterizácie nejakej ES množiny vo vete 14 zaručuje, že každá stratégia z tejto množiny sa správa ako evolučne stabilná proti blízkym mutantom mimo takejto množiny. To znamená, že každá $\boldsymbol{x} \in X$ poskytuje vyššiu výplatu proti všetkým blízkym mutantom $\boldsymbol{y} \notin X$ než poskytujú voči sebe samým. Preto jednoprvková množina $X = \{\boldsymbol{x}\}$ je ES vtedy a len vtedy, ak $\boldsymbol{x}$ je ESS. Navyše platí nasledujúce tvrdenie (pozri Thomas (1985)).

Tvrdenie 15. *Vlastnosti ES množín:*

1. *Ak $X \subset \Delta^{ESS}$, tak potom X je ES množina;*
2. *Zjednotenie ES množín je opäť ES množina;*
3. *Ak je nejaká ES množina konečným zjednotením disjunktných a uzavretých množín, potom každá z týchto disjunktných a uzavretých množín je zároveň ES množinou.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 2.11).

□

Swinkels (1992) navrhol nasledujúcu množinovú verziu robustnosti voči súčastiam equilibria:

Definícia 22. *$X \subset \Delta$ nazývame equilibristicky evolučne stabilnou (EES) množinou, ak je minimálna s ohľadom na nasledujúcu vlastnosť: X je neprázdnou a uzavretou podmnožinou Δ^{NE}, pre ktorú existuje nejaké $\bar{\epsilon} \in (0,1)$ také, že ak $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in \Delta$, $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ a $\boldsymbol{y} \in \beta^*[\epsilon \boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}]$, potom $[\epsilon \boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}] \in X$.*

Inými slovami, EES množina je minimálna uzavretá množina stratégií, ktoré sú symetrickým Nashovým equilibriom taká, že žiadna malá invázia súčastí equilibria nemôže viesť obyvateľstvo mimo množinu X. V špeciálnom prípade jednoprvkovej množiny $X = \{\boldsymbol{x}\}$ je toto množinové kritérium stability zhodné s bodovým prvkom kritéria robustnosti voči súčastiam equilibria uvedenom v predošlej časti. V prvej kapitole sme poznamenali, že množina $\Theta^{NE} \subset \Theta$ Nashových equilibrií konečnej hry n-hráčov je konečné zjednotenie disjunktných, uzavretých a súvislých množín, ktoré sme nazvali komponenty množiny Θ^{NE}. Podobne, v akejkoľvek symetrickej hre dvoch hráčov je množina $\Delta^{NE} \subset \Delta$ konečným zjednotením disjunktných, uzavretých a súvislých množín - komponent Δ^{NE}. Swinkels (1992) ukázal, že tieto prvky sú jedinými kandidátmi na EES množiny.

Veta 16. *Každá EES množina $X \subset \Delta^{NE}$ je komponenta množiny Δ^{NE}.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 2.12).

□

Samozrejme existujú hry, ktoré nemajú žiadnu EES množinu. Avšak každá ES množina obsahuje nejakú EES množinu. Pretože kritérium EES vyžaduje robustnosť s ohľadom na menšiu množinu mutantov než ES kritérium, je postačujúce uvažovať mutantov, ktorí sú optimálni v následnej populácií (zahrňuje skupinu mutantov). Preto každá ES množina spĺňa toto kritérium a obsahuje minimálnu množinu splňujúcu toto slabšie vstupné kritérium, teda ESS množinu. V tomto tvrdení nastáva jedna komplikácia, keďže zanedbáva, že ES množiny sú definované v zmysle okolí jednotlivých bodov z ES množiny, kým EES množiny sú definované v zmysle jednotnej medze $\bar{\epsilon}$ podielu mutantov v následnej populácií. Napriek tomu Balkenborg a Schlag (1995) ukázali, že pre každú ES množinu X existuje nejaké $\bar{\epsilon} \in (0,1)$ také, že:

$$u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) \geq u(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$$

pre všetky $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in \Delta$ a $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, kde $\boldsymbol{w} = \epsilon \boldsymbol{y} + (1-\epsilon)\boldsymbol{x}$.

Veta 17. *Každá ES množina obsahuje nejakú EES množinu. Akákoľvek súvislá ES množina je zároveň aj EES množinou.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 2.13).

□

2.5 Spoločenská zdatnosť v dvojnásobne symetrických hrách

V podkapitole 1.4 sme definovali symetrickú hru dvoch hráčov ako dvojnásobnú, pokiaľ je výplatná matica $\mathbf{A}$ prvého hráča symetrická, teda $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$. Keďže výplatná matica druhého hráča je v akejkoľvek symetrickej hre rovná $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$, tak v prípade dvojnásobne symetrickej hry platí, že $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Inými slovami, každý hráč môže utŕžiť rovnaký zisk ako jeho protihráč.

Teoretický rámec kritérií evolučnej stability, ktorý sme doposiaľ zaviedli bol založený na tom, že všetci členovia (jednotlivci) veľkej populácie hrajú rovnakú rýdzu alebo zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{x} \in \Delta$. Vlastnosti evolučnej stability boli definované s ohľadom na to, ako ovplyvní výplatu stratégie $\boldsymbol{x}$ skutočnosť, že niekoľko jednotlivcov z populácie zmení svoje správanie a namiesto stratégie $\boldsymbol{x}$ bude hrať inú stratégiu $\boldsymbol{y} \in \Delta$. V tejto podkapitole budeme uvažovať výplatu zodpovedajúcu nejakej stratégií $\boldsymbol{x}$, ktorú hrajú všetci členovia populácie a porovnáme ju s výplatou inej stratégie $\boldsymbol{y}$, ak všetci jednotlivci prejdú od stratégie $\boldsymbol{x}$ k $\boldsymbol{y}$. Spoločenská zdatnosť (efektívnosť) stratégie $\boldsymbol{x}$ spočíva v takomto porovnaní výplat. Takže stratégiu $\boldsymbol{x}$ nazývame *lokálne efektívnu*, ak neexistuje blízka stratégia $\boldsymbol{y}$, ktorá poskytuje vyššiu výplatu v prípade, že všetci jednotlivci zmenia svoju stratégiu za $\boldsymbol{y}$ a stratégiu $\boldsymbol{x}$ nazývame *globálne efektívnu*, ak obecne neexistuje žiadna takáto stratégia $\boldsymbol{y} \in \Delta$. Presnejšie:

Definícia 23. *Stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je*

1. *lokálne striktne efektívna, ak existuje nejaké okolie $U_{\boldsymbol{x}}$ také, že $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ pre všetky stratégie $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ v $U_{\boldsymbol{x}}$;*

2. *lokálne slabo efektívna, pokiaľ existuje nejaké okolie $U_{\boldsymbol{x}}$ také, že $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ pre všetky stratégie $\boldsymbol{y}$ v $U_{\boldsymbol{x}}$;*

3. *globálne efektívna, ak $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ pre všetky stratégie $\boldsymbol{y} \in \Delta$.*

Keďže výplatná funkcia u je spojitá a množina stratégií Δ je kompaktná, potom vždy existuje aspoň jedna globálne efektívna stratégia v každej konečnej a symetrickej (nemusí byť nutne dvojnásobne symetrická) hre. Množinu globálne efektívnych stratégií budeme značiť:

$$\Delta^* = \arg\max_{\boldsymbol{x} \in \Delta} u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x} \in \Delta : u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{y} \in \Delta\}.$$

Na základe spojitosti u je táto množina uzavretá a každá stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta^*$ je lokálne slabo efektívna.

Ukázalo sa, že evolučná stabilita v dvojnásobne symetrických hrách je ekvivalentná lokálne striktnej efektívnosti (pozri Schlag (1993)). Táto ekvivalencia vyplýva z vlastnosti evolučnej stability v zmysle lokálnej prevahy (pozri vetu 12) v kombinácií so symetriou výplatnej funkcie.

Veta 18. *Stratégia $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$ vtedy a len vtedy, ak $\boldsymbol{x}$ je lokálne striktne efektívna.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 2.14).

□

Nahradením ostrej nerovnosti neostrou a využitím vlastnosti neutrálnej stability v tvrdení 13 dosiahneme, že neutrálna stabilita je v dvojnásobne symetrických hrách ekvivalentná lokálne slabej efektívnosti. Nasledujúce tvrdenie prevezmeme z Weibull (1995):

Tvrdenie 19. *Stratégia* $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NSS}$ *vtedy a len vtedy, ak* $\boldsymbol{x}$ *je lokálne slabo efektívna.*

Dôsledkom tohto záveru je, že všetky globálne efektívne stratégie v dvojnásobne symetrickej hre sú neutrálne stabilné:

$$\Delta^* \subset \Delta^{NSS}.$$

Obzvlášť, keďže množina Δ^* je neprázdna, tak potom je zaručená existencia neutrálne stabilných stratégií v dvojnásobne symetrických hrách.

Schlag (1993) taktiež ukázal, že množina lokálne efektívnych stratégií v dvojnásobne symetrických hrách predstavuje ES množinu.

Definícia 24. *Neprázdna a uzavretá množina* $X \subset \Delta$ *je lokálne efektívna, pokiaľ je obsiahnutá v nejakej otvorenej množine* M *takej, že:*

$$X = \arg \max_{\boldsymbol{x} \in \Delta \cap M} u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x} \in \Delta : u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq u(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{y} \in \Delta \cap M\}.$$

Veta 20. *Každá lokálne efektívna množina* $X \subset \Delta$ *je ES množinou. Každá súvislá ES množina* $X \subset \Delta$ *je lokálne efektívna.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 2.16).

□

3. Replikátorové rovnice

V predošlej kapitole sme sa venovali konceptu evolučnej stratégie. Aj keď tento pojem implicitne predpokladá existenciu akejsi evolučnej dynamiky, neposkytuje jej úplný popis. Zatiaľ čo kritérium evolučnej stability zdôrazňuje rolu mutácií, replikátorová dynamika kladie dôraz na úlohu selekcie. Táto kapitola je venovaná jej štandardnej formulácií ako systému obyčajných diferenciálnych rovníc, ktoré vôbec neobsahujú žiaden mechanizmus mutácie.

V rámci kritéria evolučnej stability popísaného v kapitole 2 sme uvažovali, že jednotlivci sú predprogramovaní hrať určitú rýdzu alebo zmiešanú stratégiu. Naopak, replikátorová dynamika obvykle predpokladá, že jednotlivci môžu hrať iba rýdze stratégie. Namiesto interpretácie zmiešanej stratégie ako určitej náhodnosti uskutočnenej každým jedincom z populácie, môžeme zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{x}$ reprodukovať ako *stav populácie* a každá jej zložka x_i reprezentuje podiel jednotlivcov z populácie, ktorí sú predprogramovaní hrať odpovedajúcu i-tú rýdzu stratégiu.
Predtým, než sa naša analýza v tejto kapitole upriami na teoretický rámec *replikátorových rovníc*, je vhodné uviesť niekoľko poznatkov z teórie obyčajných diferenciálnych rovníc. Zdrojom poznatkov pre túto kapitolu je dielo Weibull (1995).

3.1 Úvod do teórie obyčajných diferenciálnych rovníc

Systém obyčajných diferenciálnych rovníc (ODR) je klasickým spôsobom ako matematicky reprezentovať deterministický dynamický proces v spojitom čase. Tento prístup je taktiež využívaný v teórií evolučných hier, kde uvažovaný dynamický proces predstavuje zmeny rozdelenia správania sa (stratégií) v časovej doméne v nejakej veľkej populácií interagujúcich jedincov. V obvyklej situácií interakcia nadobúda podobu náhodného porovnávania dvojíc jednotlivcov z veľkej populácie, kde vzájomná interakcia dvoch subjektov je modelovaná pomocou symetrickej hry dvoch hráčov. Všeobecne, diferenciálne rovnice sa môžu meniť v čase. Povedzme, že budeme uvažovať závislosť procesu biologického alebo ekonomického rastu na externých ale časovo premenných faktoroch ako napríklad počasie. Systém diferenciálnych rovníc, ktorý nezávisí na čase nazývame *autonómny*, alebo *časovo homogénny*. V tejto práci sa zameriame výlučne na takúto dynamiku. Navyše budeme brať na zreteľ iba diferenciálne rovnice prvého rádu, teda také, ktoré obsahujú iba derivácie prvého rádu a žiadne derivácie vyšších rádov. Všetky derivácie sme získali derivovaním podľa premennej času. Použitím bodiek ako symbolu pre derivácie podľa času môžeme takýto systém zapísať nasledovne:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \varphi(\boldsymbol{x}), \tag{3.1}$$

kde

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_k) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, ..., \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\right) \tag{3.2}$$

a φ je zobrazenie otvorenej množiny $X \subset \mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^k$. Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_k)$ nazývame *stavový vektor*, množinu X *stavový priestor* a pravá strana rovnice

(3.1) určuje smer a rýchlosť zmeny stavu v každom bode $\boldsymbol{x}$ zo stavového priestoru X. Funkcia φ sa nazýva vektorové pole, ktorá definuje v každom bode $\boldsymbol{x}$ smer a rýchlosť priebehu $\boldsymbol{x}$. Pre každú zložku x_i stavu $\boldsymbol{x}$ predstavuje $\varphi_i(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ jeho deriváciu podľa času. Prvá otázka, ktorá vyvstáva je, či takýto systém diferenciálnych rovníc (3.1) má v nejakom presnom zmysle riešenie, a ak áno, tak potom či toto riešenie je jednoznačné. Navyše vyvstáva otázka, či toto riešenie je globálne v zmysle definovania stavu po celú dobu.

Definícia 25. *(Lokálne) riešenie systému* (3.1) *v bode* $\boldsymbol{x}^0 \in X$ *je definované ako funkcia* $\xi(\cdot, \boldsymbol{x}^0) : T \to X$, *kde* T *je otvorený interval obsahujúci* $t = 0$ *taký, že* $\xi(0, \boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{x}^0$ *a taký, že nasledujúca podmienka:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t, \boldsymbol{x}^0) = \varphi[\xi(t, \boldsymbol{x}^0)] \tag{3.3}$$

platí pre všetky $t \in T$. *Riešenie nazývame globálne, ak* $T = \mathbb{R}$.

Ukazuje sa, že existencia a jednoznačnosť (lokálneho) riešenia je garantovaná pre všetky vektorové polia φ, ktoré sú v istom zmysle dostatočne hladké. Podmienka, nazývaná *Lipschitzovská spojitosť* predstavuje striktnejšiu verziu spojitosti. Táto podmienka vyžaduje, aby existovala nejaká konštanta $\lambda \in \mathbb{R}$ taká, že rozdiel v intenzite a smere φ v ľubovoľných dvoch stavoch $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ je menší než λ-krát vzdialenosť medzi stavmi $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Presnejšie a v mierne slabšej, lokálnej verzii:

Definícia 26. *Funkcia* $\varphi : X \to \mathbb{R}^k$, *kde* $X \subset \mathbb{R}^k$ *je lokálne Lipschitzovksy spojitá, ak pre každú kompaktnú podmnožinu* $C \subset X$ *existuje nejaké reálne číslo* λ *také, že podmienka:*

$$\|\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{y})\| \leq \lambda\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \tag{3.4}$$

platí pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$.

V tejto práci budeme vždy uvažovať iba také vektorové polia, ktoré splňujú túto podmienku spojitosti.

Je možné ukázať, že ak má vektorové pole φ spojité prvé parciálne derivácie, tak potom je Lipschitzovsky spojité. V prípade, ak φ je Lipschitzovsky spojité, tak potom je rozhodne spojité.

Veta 21. *(Picard-Lindelöf) Nech* $X \subset \mathbb{R}^k$ *je otvorená množina a vektorové pole* $\varphi : X \to \mathbb{R}^k$ *je Lipschitzovsky spojité, tak potom systém* (3.1) *má jednoznačné riešenie* $\xi(t, \boldsymbol{x}^0) : T \to X$ *pre každé* $\boldsymbol{x}^0 \in X$. *Navyše* $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)$ *je spojité v* $t \in T$ *a* $\boldsymbol{x}^0 \in X$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, veta 6.1).

□

Predpokladajme, že všetky relevantné stavy patria do nejakej kompaktnej podmnožiny C domény X vektorového poľa φ. Presnejšie, majme $\boldsymbol{x}^0 \in C$ a $\xi(t, \boldsymbol{x}^0) \in C$ pre každé $t \in T(\boldsymbol{x}^0)$, kde $T(\boldsymbol{x}^0) \subset \mathbb{R}$ je otvorený interval, na ktorom je definované riešenie pre $\boldsymbol{x}^0$. V prípade aplikácie tohto prístupu na teóriu evolučných hier bude $X = \mathbb{R}^k$ a C buďto simplex zmiešaných stratégií hráča alebo mnohosten Θ profilov zmiešaných stratégií uvažovanej hry. Je možné ukázať, že v takomto zoskupení je riešenie pre ľubovoľné $\boldsymbol{x}^0 \in C$ globálne (pozri (Hale, 1969, veta 2.1)). Nasledujúce tvrdenie prevezmeme z Weibull (1995):

Tvrdenie 22. *Nech $X \subset \mathbb{R}^k$ je nejaká otvorená množina taká, že $\varphi: X \to \mathbb{R}^k$ je Lipschitzovsky spojité a C je kompaktnou podmnožinou X pre ktorú platí, že $\xi(t, \boldsymbol{x}^0) \in C$ pre každé $\boldsymbol{x}^0 \in C$ a $t \in T(\boldsymbol{x}^0)$. Potom môžeme za $T(\boldsymbol{x}^0)$ položiť $\mathbb{R}$ a odvodené zobrazenie $\xi : \mathbb{R} \times C \to C$ bude spĺňať nasledujúce tri podmienky:*

$$\xi(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in C, \tag{3.5}$$

$$\xi\left(t, \xi(s, \boldsymbol{x})\right) = \xi(t + s, \boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in C, \forall s, t \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

$$\xi \text{ je spojité.} \tag{3.7}$$

Prvá podmienka hovorí, že stav je po $t = 0$ jednotkách času identický východiskovému stavu. Druhá podmienka hovorí, že stav je po $t + s$ jednotkách času identický stavu získaného najprv z riešenia pre počiatočný stav $\boldsymbol{x}$ po s jednotkách času (označme $\boldsymbol{y} = \xi(s, \boldsymbol{x})$) a následne z riešenia pre počiatočný stav $\boldsymbol{y}$ po t jednotkách času.

Rovnako ako trojica $G = \{P, S, \pi\}$ formálne definuje hru v normálnom tvare, tak trojica $D = \{\mathbb{R}, C, \xi\}$ definuje dynamický systém na (kompaktnom) priestore stavov $C \subset X$ v spojitom čase $t \in \mathbb{R}$ so zobrazením ξ splňujúcim podmienky (3.5), (3.6) a (3.7). V ďalšom texte tejto práce budeme požadovať, aby analyzované systémy obyčajných diferenciálnych rovníc splňovali takýto dynamický systém D.

Pri štúdiu týchto dynamických systémov majú zásadný význam pojmy trajektória, orbita, invariancia a stacionarita. Trajektóriou rozumieme graf riešenia $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)$ pre stav $\boldsymbol{x}^0$. Formálne:

$$\tau(\boldsymbol{x}^0) = \left\{(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \times C : \boldsymbol{x} = \xi(t, \boldsymbol{x}^0)\right\}.$$

Inými slovami, trajektória obsahuje všetky dáta o vývoji stavu $\boldsymbol{x}^0$ v čase. Naopak orbita stavu predstavuje množinu stavov, ktoré sú dosiahnuteľné v nejakom čase. Presnejšie, orbita $\gamma(\boldsymbol{x}^0)$ počiatočného stavu $\boldsymbol{x}^0$ je obrazom celej časovej osi funkcie $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)$:

$$\gamma(\boldsymbol{x}^0) = \left\{\boldsymbol{x} \in C : \boldsymbol{x} = \xi(t, \boldsymbol{x}^0) \text{ pre nejaké } t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Množina stavov $A \subset C$ je invariantná voči danej funkcii ξ, ak celá orbita akéhokoľvek bodu z množiny A leží v A. Inými slovami, ak je známe, že konkrétny stav sa v určitom okamžiku nachádza v A, tak potom musí byť vždy v A a vždy zotrvá v A. Množina je *pozitívne invariantná*, ak riešenie pre akýkoľvek bod v A ostane v A.

Definícia 27. *Podmnožina $A \subset C$ je invariantná, ak $\gamma(\boldsymbol{x}^0) \subset A$ pre každé $\boldsymbol{x}^0 \in A$. A je pozitívne invariantná, pokiaľ $\gamma^+(\boldsymbol{x}^0) \subset A$ pre každé $\boldsymbol{x}^0 \in A$, kde:*

$$\gamma^+(\boldsymbol{x}^0) = \left\{\boldsymbol{x} \in C : \boldsymbol{x} = \xi(t, \boldsymbol{x}^0) \text{ pre nejaké } t \geq 0\right\}.$$

Dôležitou triedou invariantných množín sú stacionárne stavy.

Definícia 28. *Stacionárny stav vzhľadom k funkcii ξ je stav $\boldsymbol{x} \in C$, pre ktorý platí, že $\xi(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$.*

Preto stav $\boldsymbol{x} \in X$ je stacionárny vtedy a len vtedy, ak orbita $\gamma(\boldsymbol{x})$ stavu $\boldsymbol{x}$ je jednoprvková množina $\{\boldsymbol{x}\}$ alebo ekvivalentne vtedy a len vtedy, ak množina $A = \{\boldsymbol{x}\}$ je invariantná. Vyjadrené v kontexte obyčajných diferenciálnych rovníc (3.1), stav $\boldsymbol{x} \in C$ je stacionárny práve vtedy, ak $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$. Poznamenajme, že v prípade ak $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ pre nejaké $\boldsymbol{x} \in C$, tak potom jediné riešenie systému (3.1) je $\xi(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ pre všetky t. Z Picard-Lindelöfovej vety plynie, že je to jediné riešenie pre $\boldsymbol{x}$ a teda $\boldsymbol{x}$ je stacionárne.

Užitočný dôsledok pravidiel (3.5), (3.6) a (3.7) je, že ak riešenie konverguje v čase, potom je limitný stav nevyhnutne stacionárny. Intuitívne, ak sa riešenie pre nejaký počiatočný stav $\boldsymbol{x}$ ustáli smerom k stavu $\boldsymbol{y}$, potom vektorové pole by malo byť slabé v blízkosti $\boldsymbol{y}$ a teda v $\boldsymbol{y}$ vymizne.

Veta 23. *Ak $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ a $\lim_{t\to\infty} \xi(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, potom je $\boldsymbol{y}$ stacionárny.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 6.3).

□

Poznamenajme, že konvergencia riešenia smerom k nejakému bodu neimplikuje, že tento bod bude niekedy dosiahnutý (v konečnom čase).

Majme dynamický systém $D = \{R, C, \xi\}$. Budeme používať dve odlišné pojmy stability: *Lyapunovská* a *asymptotická* stabilita. Intuitívne, stav $\boldsymbol{x} \in C$ je Lyapunovsky stabilný, pokiaľ žiadna malá odchylka stavu neimplikuje odklon od $\boldsymbol{x}$. Asymptotická stabilita navyše vyžaduje existenciu (lokálnej) návratnosti k stavu: stav $\boldsymbol{x} \in C$ je asymptoticky stabilný, ak je Lyapunovsky stabilný a každá malá odchylka od stavu implikuje návrat späť smerom k $\boldsymbol{x}$.

Definícia 29. *Stav $\boldsymbol{x} \in C$ je Lyapunovsky stabilný, ak každé okolie B stavu $\boldsymbol{x}$ obsahuje okolie B^0 také, že $\xi(t, \boldsymbol{x}^0) \in C$ pre každé $\boldsymbol{x}^0 \in B^0 \cap C$ a $t \geq 0$. Stav $\boldsymbol{x} \in C$ je asymptoticky stabilný, ak je Lyapunovsky stabilný a existuje okolie B^* také, že podmienka:*

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t, \boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{x} \tag{3.8}$$

platí pre každé $\boldsymbol{x}^0 \in B^* \cap C$.

Podmienka Lyapunovej stability je ekvivalentná požiadavke, aby každá orbita γ^+ z B^0 bola obsiahnutá v B:

$$\gamma^+(B^0 \cap C) \subset B.$$

Veta 24. *Lyapunovsky stabilný stav je stacionárny.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 6.4).

□

Predchádzajúce definície rôznych vlastností stability jednotlivých stavov $\boldsymbol{x} \in C$ je možné zovšeobecniť na vlastnosti množín $A \subset C$ stavov. Ďalej budeme predpokladať, že uvažované podmnožiny A sú uzavreté a zavedieme interpretáciu nasledujúcich pojmov. *Vzdialenosťou* medzi nejakým bodom $\boldsymbol{y} \in C$ a uzavretou množinou $A \subset C$ budeme chápať ako minimálnu vzdialenosť medzi $\boldsymbol{y}$ a ľubovoľným bodom a z A: $d(\boldsymbol{y}, A) = \min_{a\in A} d(\boldsymbol{y}, a)$. Povieme, že riešenie $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)$

konverguje k uzavretej množine $A \subset C$, označíme $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)_{t\to\infty} \to A$, ak vzdialenosť $d(\xi(t, \boldsymbol{x}^0), A)$ konverguje k nule pre $t \to \infty$. *Okolím* uzavretej množiny A budeme rozumieť otvorenú množinu B obsahujúcu A.

Definícia 30. *Uzavretá množina $A \subset C$ je Lyapunovsky stabilná, ak každé okolie B množiny A obsahuje okolie B^0 také, že $\gamma^+(B^0 \cap C) \subset B$. Uzavretá množina $A \subset C$ je asymptoticky stabilná, ak je Lyapunovsky stabilná a ak existuje okolie B^* také, že $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)_{t\to\infty} \to A$ pre každé $\boldsymbol{x}^0 \in B^* \cap C$.*

Veta 25. *Ak je uzavretá množina $A \subset C$ Lyapunovsky stabilná, potom je pozitívne invariantná.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 6.5).

□

3.1.1 Priama Lyapunova metóda

Priama Lyapunova metóda je obecný nástroj určený k stanoveniu podmienok stability jednotlivých stavov, poprípade uzavretých množín. Nech $A \subset C$ je uzavretá množina o ktorej chceme vedieť, či je Lyapunovsky stabilná pri danom ξ na množine C. Predpokladajme nejakú reálnu, spojitú funkciu υ definovanú na okolí D množiny A takú, že $\upsilon(\boldsymbol{x})$ je nulová na A a kladná mimo A. Ďalej predpokladajme, že υ je pre akúkoľvek trajektóriu riešenia na jej obore D nerastúca v čase. V tomto kontexte nazývame υ lokálne Lyapunovskou funkciou.

Veta 26. *Nech $A \subset C$ je uzavretá. Navyše, ak existuje okolie D množiny A a spojitá funkcia $\upsilon : D \to \mathbb{R}$ splňujúca podmienky:*

$$\upsilon(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{vtedy a len vtedy, ak } \boldsymbol{x} \in A, \tag{3.9}$$

$$\upsilon(\xi(t, \boldsymbol{x})) \leq \upsilon(\boldsymbol{x}) \quad \text{ak } \boldsymbol{x} \notin A, t > 0, \text{ a } \xi(s, \boldsymbol{x}) \in D \quad \forall s \in [0, t], \tag{3.10}$$

tak potom je množina A Lyapunovsky stabilná.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, veta 6.2).

□

Ak zameníme nerovnosť vo vzťahu (3.10) na ostrú nerovnosť, tak potom odpovedajúcu funkciu nazveme striktne Lyapunovsky stabilnú a uvažovaná množina A je v tomto prípade asymptoticky stabilná. Formálne:

Veta 27. *Predpokladajme, že $A \subset C$ je uzavretá množina. Potom existuje okolie D množiny A a spojitá funkcia $\upsilon : D \to \mathbb{R}_+$ splňujúca podmienku* (3.9) *a požiadavku:*

$$\upsilon(\xi(t, \boldsymbol{x})) < \upsilon(\boldsymbol{x}) \quad \text{ak } \boldsymbol{x} \notin A, t > 0, \text{ a } \xi(s, \boldsymbol{x}) \in D \quad \forall s \in [0, t] \tag{3.11}$$

vtedy a len vtedy, ak A je asymptoticky stabilná.

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci (Weibull, 1995, veta 6.3).

□

Nevýhodou tohto prístupu je, že neponúka žiaden návod ako nájsť takúto Lyapunovskú funkciu. Na druhej strane existuje skupina funkcií, u ktorých sa ukazuje, že sú prospešné v kontexte dynamiky evolučných hier, napríklad logaritmická funkcia.

3.2 Základy replikátorových rovníc

Uvažujme veľkú ale konečnú populáciu jednotlivcov, ktorí sú predprogramovaní hrať rýdze stratégie $i \in K$ v symetrickej hre dvoch hráčov so simplexom zmiešaných stratégií Δ a výplatnou funkciou u. Potom v každom bode t označme $p_i(t) \geq 0$ počet jednotlivcov, ktorí sú aktuálne predprogramovaní k rýdzej stratégií $i \in K$ a nech $p(t) = \sum_{i \in K} p_i(t) > 0$ predstavuje celkovú populáciu. Príslušný stav populácie je definovaný ako vektor $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), ..., x_k(t))$, kde každá zložka $x_i(t)$ reprezentuje podiel populácie predprogramovanej k rýdzej stratégií i v čase t: $x_i(t) = p_i(t)/p(t)$. Inými slovami, stav populácie $\boldsymbol{x}(t) \in \Delta$ zodpovedá nejakej zmiešanej stratégií. Očakávaná výplata akejkoľvek rýdzej stratégie i pri náhodnej hre, kedy populácia je v stave $\boldsymbol{x} \in \Delta$, je teda $u(e^i, \boldsymbol{x})$. V skutočnosti je pre jednotlivca nepodstatné, či interaguje s náhodne zvoleným jednotlivcom z takejto polymorfickej populácie alebo ako v systéme evolučnej stability s jednotlivcom hrajúcim zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{x}$. Príslušná *priemerná výplata* v takejto populácií, ktorá zodpovedá výplate náhodne zvoleného jednotlivca z populácie, je:

$$u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} x_i u(e^i, \boldsymbol{x}). \tag{3.12}$$

Teda rovnakú výplatu, akú poskytuje zmiešaná stratégia $\boldsymbol{x}$, ak je hraná proti sebe samej.

Teraz predpokladajme, že výplata reprezentuje mieru rastu, ako dôsledok reprodukčnej zdatnosti jednotlivca (fitness), meranú počtom potomkov za jednotku času. Predpokladajme tiež, že každý potomok zdedí jeho jedinečnú stratégiu rodiča. Ak reprodukcia prebieha kontinuálne, potom *natalita* v ľubovoľnom čase t jednotlivcov naprogramovaných na rýdzu stratégiu i je $\beta + u\left[e^i, \boldsymbol{x}(t)\right]$, kde $\beta \geq 0$ je nejaká miera zdatnosti jednotlivca v populácií nezávislá na výstupe analyzovanej hry. Nech mortalita $\delta \geq 0$ je rovnaká pre všetkých jednotlivcov. Zanedbaním argumentu času získame nasledujúcu populačnú dynamiku:

$$\dot{p}_i = \left[\beta + u(e^i, \boldsymbol{x}) - \delta\right] p_i,$$

kde symbol bodky predstavuje deriváciu podľa času. Zodpovedajúca dynamika pre podiel populácie x_i je v tvare:

$$\dot{x}_i = \left[u(e^i, \boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\right] x_i. \tag{3.13}$$

K overeniu tohto vzťahu vezmeme deriváciu podľa času identity $px_i = p_i$:

$$p\dot{x}_i = \dot{p}_i - \dot{p}x_i = \left[\beta + u(e^i, \boldsymbol{x}) - \delta\right] p_i - \left[\beta + u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \delta\right] px_i,$$

kde vydelením oboch strán rovnice členom p získame vzťah (3.13). Tempo rastu $\dot{x}_i/x_i$ podielu jednotlivcov hrajúceho i-tú stratégiu je rovné rozdielu medzi aktuálnou výplatou stratégie (fitness) a aktuálnou priemernou výplatou v populácií. Toto tempo rastu nezávisí na hodnotách β a δ, keďže tie sú rovnaké pre všetky subpopulácie. Rovnica (3.13) definuje replikátorovú dynamiku. Využitím linearity výplatnej funckie $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ v $\boldsymbol{x}$ môžeme túto dynamiku zapísať ako:

$$\dot{x}_i = u(e^i - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})x_i. \tag{3.14}$$

Replikátorová dynamika (3.14) je invariantná voči kladnej afinnej transformácií (zloženie lineárnej transformácie a posunutia). Ak nahradíme výplatnú funkciu u funkciou $\bar{u} = \lambda u + \mu$, pre nejaké kladné reálne λ a reálne μ, potom replikátorová dynamika je v tvare:

$$\dot{x}_i = \bar{u}(e^i - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})x_i = \lambda u(e^i - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})x_i.$$

Efekt takejto transformácie výplatnej funkcie je teda ekvivalentný zmene merítka času koeficientom $\lambda > 0$ v replikátorovej dynamike (3.14). Obzvlášť všetky orbity riešenia sú rovnaké pre obe dynamiky, líšia sa iba rýchlosťou pri ktorej sa stav populácie pohybuje pozdĺž týchto orbít o faktor λ.

Pravá strana vzťahu (3.14) definuje príslušné vektorové pole $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, kde

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = u(e^i - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})x_i.$$

Keďže toto vektorové pole je polynómom populačného podielu (vyplýva z definície $u_i(\boldsymbol{x})$, pozri vzťah (1.4)), tak systém diferenciálnych rovníc (3.14) má podľa vety 21 jednoznačné riešenie pre akýkoľvek počiatočný stav $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^k$. Navyše je možné ukázať, že simplex $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ je v tejto dynamike invariantný (pozri (Weibull, 1995, tvrdenie 3.20)). To znamená, že orbita riešenia (3.14) pre akýkoľvek počiatočný stav v Δ je obsiahnutá v Δ. Intuitívne to je zrejmé, keďže podľa (3.14), súčet všetkých podielov v populácií nutne zostáva rovný jednej, pričom platí $\sum_i \dot{x}_i = 0$, a žiaden podiel v populácií nemôže nadobudnúť zápornú hodnotu (zo vzťahu (3.14) vyplýva: $x_i = 0 \Rightarrow \dot{x}_i = 0$). Presnejšie, systém diferenciálnych rovníc (3.14) definuje spojité zobrazenie $\xi : \mathbb{R} \times \Delta \to \Delta$, ktoré každému počiatočnému stavu $\boldsymbol{x}^0 \in \Delta$ a času $t \in \mathbb{R}$ priradí stav populácie $\xi(t, \boldsymbol{x}^0) \in \Delta$ v čase t.

3.3 Dominantné stratégie

Podiel jednotlivcov z populácie naprogramovaných k určitej rýdzej stratégii rastie v replikátorovej dynamike (3.14) práve vtedy, ak táto stratégia poskytuje vyššiu výplatu než je aktuálny populačný priemer. Pretože aj striktne dominovaná stratégia môže utŕžiť viac než populačný priemer, tak apriori nie je jasné, či takáto stratégia nutne vymizne v replikátorovej dynamike. Napriek tomu sa ukazuje, že v replikátorovej dynamike v prípade spojitého času (3.14) sa nakoniec striktne dominované stratégie vytratia. K rovnakému záveru je možné dospieť aj v prípade iteratívne striktne dominovaných stratégií, no na druhej strane to nemusí platiť pre všetky slabo dominované stratégie.

3.3.1 Striktná a iteratívne striktná dominancia

Nasledujúce tvrdenie (pozri Samuelson a Zhang (1992)) preukazuje, že replikátorová dynamika eliminuje všetky striktne dominované rýdze stratégie z populácie za predpokladu, že všetky rýdze stratégie sú dostupné na začiatku hry.

Veta 28. *Nech rýdza je stratégia i striktne dominovaná. Potom platí, že pre akékoľvek* $\boldsymbol{x}^0 \in int(\Delta)$*:* $\xi_i(t, \boldsymbol{x}^0)_{t\to\infty} \to 0$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.1).

□

Podľa vety 1 je stratégia striktne nedominovaná v hre dvoch hráčov práve vtedy, ak je najlepšou odpoveďou na nejakú (rýdzu alebo zmiešanú) stratégiu. Tento výsledok môžeme interpretovať tak, že evolúcia selektuje správanie, ktoré je iracionálne v zmysle, kedy je suboptimálne voči nejakým pravdepodobnostným očakávaniam o stratégii protihráča. Táto selekcia nastáva nezávisle na tom, či trajektória riešenia evolúcie konverguje alebo nie, takže dlhodobo sa žiaden jednotlivec nebude správať iracionálne v tomto zmysle, aj keď sa komplexné správanie populácie vychyľuje. Poznamanejme, že pre túto hypotézu je dôležité, aby všetky rýdze stratégie hry boli dostupné na jej začiatku. Napríklad, ak nejaká stratégia i je striktne dominovaná, ale žiadna iná rýdza stratégia nie je prvotne dostupná, tak potom zrejme $\xi_i(t, \boldsymbol{x}^0) = 1$ pre každé t. Obecnejšie, ak stratégia i už nie je striktne dominovaná potom, čo odstránime stratégiu j, tak v prípade, ak stratégia j nie je prvotne dostupná nemusí platiť, že $\xi_i(t, \boldsymbol{x}^0) \to 0$.

Samuelson a Zhang (1992) navyše ukázali, že replikátorová dynamika taktiež vyhubí aj všetky iteratívne striktne dominované rýdze stratégie z populácie. Na základe vety 28 bude a zostane po dostatočne dlhom čase stav populácie ľubovoľne blízko subsimplexu zmiešaných stratégií Δ, ktorý je generovaný podmnožinou $K^1 \subset K$ rýdzich stratégií, ktoré nie sú striktne dominované. Rýdze stratégie, ktoré sú striktne dominované v redukovanej hre G^1 (s množinou rýdzich stratégií K^1) vymiznú podľa vety 28 a takto pokračujeme ďalej, až pokiaľ nemôže byť žiadna ďalšia rýdza stratégia eliminovaná.

Veta 29. *Pokiaľ je rýdza stratégia i iteratívne striktne dominovaná, tak potom pre akékoľvek* $\boldsymbol{x}^0 \in int(\Delta)$ *platí, že* $\xi_i(t, \boldsymbol{x}^0)_{t\to\infty} \to 0$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, veta 3.1).

□

3.3.2 Slabá dominancia

V predošlej časti sme preukázali, že replikátorová dynamika vyhubí všetky striktne dominované stratégie. To ale obecne neplatí v prípade slabo dominovaných stratégií. Napriek tomu je možné ukázať, že ak rýdza stratégia i je slabo dominovaná nejakou stratégiou $\boldsymbol{y} \in \Delta$ a subpopulácia naprogramovaná k stratégii i nevymizne, potom všetky rýdze stratégie j, proti ktorým $\boldsymbol{y}$ je lepšia než i, vymiznú z populácie.

Veta 30. *Nech je rýdza stratégia i slabo dominovaná nejakou stratégiou* $\boldsymbol{y} \in \Delta$. *Ak* $u(\boldsymbol{y} - e^i, e^j) > 0$, *potom* $\xi_i(t, \boldsymbol{x}^0)_{t\to\infty} \to 0$ *alebo* $\xi_j(t, \boldsymbol{x}^0)_{t\to\infty} \to 0$ *(alebo oba) pre ľubovoľné* $\boldsymbol{x}^0 \in int(\Delta)$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.2).

□

V zmysle vety 1 je rýdza stratégia nedominovaná práve vtedy, ak je najlepšou odpoveďou na nejakú úplne zmiešanú stratégiu. Preto môžeme tento výsledok reprodukovať tak, že evolúcia selektuje slabo správanie, ktoré je suboptimálne voči nejakému pravdepodobnostnému očakávaniu o stratégií súpera, ktorá priradzuje kladné pravdepodobnosti všetkým jeho rýdzim stratégiám. Selekcia je slabá v zmysle, že takéto správanie nemusí byť nutne vyhubené v dlhodobom časovom horizonte, ak tieto rýdze stratégie j, voči ktorým je i suboptimálna, vymiznú.

3.4 Stratégie Nashovho equilibria

Uvažujme nejakú konečnú a symetrickú hru dvoch hráčov, kde $\Delta^{NE} \subset \Delta$ predstavuje (neprázdnu) podmnožinu stratégií, ktoré sú Nashovým equilibriom sami so sebou. Poznamenajme, že stratégia $\boldsymbol{x}$ náleží do Δ^{NE} vtedy a len vtedy, ak všetky rýdze stratégie, ktorým $\boldsymbol{x}$ priradí kladnú pravdepodobnosť poskytujú maximálnu výplatu, ktorá môže byť dosiahnutá proti $\boldsymbol{x}$. Formálne zo vzťahu (1.17) a definície 10 plynie:

$$\Delta^{NE} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \Delta : u(e^i, \boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{z} \in \Delta} u(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) \quad \forall i \ \in C(\boldsymbol{x}) \right\}. \tag{3.15}$$

V tejto podkapitole sa budeme venovať vzťahu medzi touto množinou a množinami stacionárnych, Lyapunovsky stabilných a limitných stavov v tomto poradí vzhľadom k replikátorovej dynamike (3.14).

Stav populácie $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je stacionárny v replikátorovej dynamike (3.14) práve vtedy, ak súčin $u(e^i - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot x_i$ je nula pre všetky rýdze stratégie $i \in K$ alebo ekvivalentne vtedy a len vtedy, ak všetky rýdze stratégie, ktoré sú prítomné v stave populácie $\boldsymbol{x}$, poskytujú presne rovnakú výhru. Označme symbolom $\Delta^0 \subset \Delta$ množinu stacionárnych stavov v (3.14):

$$\Delta^0 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \Delta : u(e^i, \boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \quad \forall i \ \in C(\boldsymbol{x}) \right\}. \tag{3.16}$$

Podmienku stacionarity splňujú všetky vrcholy $\boldsymbol{x} = e^i$ simplexu, keďže v takomto stave populácie $\boldsymbol{x}$ používajú všetci jednotlivci rovnakú rýdzu stratégiu i a získajú rovnakú výplatu. Teda konečná množina $\{e^1, ..., e^k\}$ vrcholov je podmnožinou Δ^0. Na základe porovnania vzťahov (3.15) a (3.16) môžeme konštatovať, že (neprázdna a uzavretá) množina Δ^{NE} je taktiež podmnožinou Δ^0. Ak všetky rýdze stratégie z nosiča stratégie $\boldsymbol{x}$ poskytujú rovnakú maximálnu výhru proti $\boldsymbol{x}$, potom všetky utŕžia priemernú výplatu populácie:

$$u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} u(e^i, \boldsymbol{x}) x_i = \sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} u(e^i, \boldsymbol{x}) x_i.$$

Pre vnútorný stav populácie $\boldsymbol{x}$ platí taktiež opak: Ak $\boldsymbol{x} \in int(\Delta)$ je stacionárny v (3.14), potom $u(e^i, \boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ pre všetky rýdze stratégie i hry (podľa vzťahu (3.16)), a tak všetky rýdze stratégie sú najlepšou odpoveďou na zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{x}$, a teda $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NE}$. Nech Δ^{00} predstavuje množinu vnútorných stacionárnych stavov: $\Delta^{00} = \Delta^0 \cap int(\Delta)$. Práve sme ukázali, že množina Δ^{00} je podmnožinou Δ^{NE}, a keďže všetky Nashove equilibria sú stacionárne, tak v skutočnosti máme $\Delta^{00} = \Delta^{NE} \cap int(\Delta)$. Navyše, Zeeman (1981) poznamenal, že množina Δ^{00} je nutne konvexná. V skutočnosti ľubovoľná lineárna kombinácia $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in \Delta$ stavov $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}$ z Δ^{00}, je znova stacionárny stav, ktorý skutočne patrí podmnožine Δ^{NE} stacionárnych stavov.

Veta 31. *$\{e^1, ..., e^k\} \cup \Delta^{NE} \subset \Delta^0$, $\Delta^{00} = \Delta^{NE} \cap int(\Delta)$ a Δ^{00} je konvexná množina taká, že ľubovoľná kombinácia stavov $\boldsymbol{z} \in \Delta$ z Δ^{00} patrí do Δ^{NE}.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.3).

□

Na začiatku tejto kapitoly sme poznamenali, že replikátorová dynamika neberie do úvahy možnosti mutácií. V tejto štruktúre predstavujú úlohu replikátorov rýdze stratégie hry, a teda mutácia môže mať podobu posunu z jednej rýdzej stratégie na inú. Predpokladajme, že populácia je na začiatku v nejakom stacionárnom stave $\boldsymbol{x} \in \Delta$ a odrazu sa uskutoční takáto mutácia v malej skupine ε jedincov z populácie. Napríklad, ak všetky rýdze stratégie sú rovnako náchylné k mutácií a y_i predstavuje pravdepodobnosť, že sa mutácia rozvinie na nejakej rýdzej stratégií $i \in K$, potom to predstavuje posun z počiatočného stavu populácie $\boldsymbol{x}$ do stavu $\boldsymbol{x}' = (1-\varepsilon)\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{y} \in \Delta$. Stacionárne stavy, ktoré nie sú robustné voči takémuto typu vychýleniu populačného stavu sa teda zdajú menej zaujímavé z evolučného hľadiska. Ukazuje sa, že všetky stacionárne stavy, ktoré nie sú v Δ^{NE}, môžu byť z týchto dôvodov odmietnuté. Dynamická stabilita v (3.14) vyžaduje Nashovo equilibrium, podobne ako evolučná a neutrálna stabilita ako sme uviedli v kapitole 2.

Presnejšie, stacionárny stav, ktorý nie je Nashovým equilibriom porušuje taktiež aj slabé dynamické kritérium Lyapunovskej stability. Dôvod prečo je stacionárny stav $\boldsymbol{x} \notin \Delta^{NE}$ dynamicky nestabilný je jednoducho ten, že existuje rýdza stratégia i, ktorá je nevyužitá v stave populácie ($x_i = 0$), ale utŕži vyššiu výhru proti $\boldsymbol{x}$ ako tie rýdze stratégie, ktoré sú použité v stave $\boldsymbol{x}$. Zo stacionarity musia všetky utŕžiť rovnakú výplatu. Preto, ak nejaká ľubovoľne malá, ale kladná skupinka populácie začne využívať takúto profitabilnú stratégiu i, ktorá absentuje v $\boldsymbol{x}$, potom táto mutácia jednotlivcov utŕži vyššiu výhru a teda ich populácia sa bude zväčšovať, čo bude viesť k odlúčeniu od stavu $\boldsymbol{x}$.

Veta 32. *Ak $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je Lyapunovsky stabilný v replikátorovej dynamike definovanej vzťahom* (3.14)*, tak potom $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NE}$.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.4).

□

V predchádzajúcej podkapitole sme ukázali, že aj keď trajektória nejakého vnútorného riešenia replikátorovej dynamiky nekonverguje v čase, tak dlhodobo je celkové správanie napriek tomu racionálne v zmysle, že iteratívne dominované stratégie sú vylúčené. Je možné ukázať, že ak takáto trajektória riešenia nekonverguje v čase, tak je navyše koordinovaná v zmysle Nashovho equilibria. Hypoteticky to môže nastať, ak všetci jednotlivci z populácie poznajú dlhodobé rozdelenie rýdzich stratégií v populácií a maximalizujú ich zisk voči tomutu rozdeleniu.

Ak trajektória riešenia replikátorovej dynamiky začne konvergovať k nejakému vnútornému stavu populácie, potom tento limitný stav patrí do Δ^{00} a teda aj do Δ^{NE} podľa vety 31.

Veta 33. *Ak $\boldsymbol{x}^0 \in int(\Delta)$ a $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)_{t\to\infty} \to \boldsymbol{x}$, tak potom $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NE}$.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.5).

□

Tento dôsledok môžeme interpretovať nasledovne: Stav $\boldsymbol{x} \in \Delta$ nazveme dosiahnuteľný, ak existuje nejaký vnútorný stav, z ktorého trajektória riešenia konverguje k $\boldsymbol{x}$. Podľa vety 31, ľubovoľná stratégia Nashovho equilibria $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NE}$ je dosiahnuteľná v zmysle, že položíme za počiatočný stav $\boldsymbol{x}$, a teda každý dosiahnuteľný stav populácie $\boldsymbol{x} \in \Delta$ patrí do podmnožiny Δ^{NE}.

3.5 Stratégie perfektného equilibria

Za účelom tvorby dynamických predpovedí je asymptotická stabilita spoľahlivejšia vlastnosť než Lyapunovská stabilita. Koncept Lyapunovskej stability nechráni voči nemodelovanému evolučnému driftu, to znamená, že príležitostná malá odchýlka stavu populácie môže prejsť nekontrolovane dynamikou na tento stav. Preto postupnosť takýchto šokov môže posunúť populáciu do stavu, odkiaľ ju replikátorová dynamika úplne vychýli od pôvodného trendu. Naopak, asymptotická stabilita zaručuje návrat k status quo po akejkoľvek malej odchýlke od stavu populácie. Teda pre potrebu robustnej evolučnej predpovede sa javí koncept asymptotickej stability ako vhodnejší.

Ak sa upriamime na stavy populácie, ktoré sú asymptoticky stabilné v replikátorovej dynamike (3.14), potom sú potencionálnymi kandidátmi práve stavy $\boldsymbol{x}$ z podmnožiny Δ^{NE}. Bomze (1986) ukázal, že Nashove equilibria, ktoré nie sú perfektné, nie sú asymptoticky stabilné v tejto dynamike. Inými slovami, je nevyhnutné, aby príslušný profil stratégií $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \Theta^{NE}$ bol robustný voči nejakej postupnosti malých výkyvov. Avšak to nie je postačujúce pre asymptotickú stabilitu. Asymptotická stabilita stratégie $\boldsymbol{x}$ vyžaduje, aby bola *izolovaná* v tom zmysle, že $\{\boldsymbol{x}\}$ musí byť komponentou množiny Δ^{NE}.

Veta 34. *Ak $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je asymptoticky stabilná v* (3.14)*, potom $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \Theta^{NE}$ je perfektné a $\boldsymbol{x}$ je izolovaná.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.9).

□

3.6 Evolučná a neutrálna stabilita

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať otázkou, ako súvisí stabilita v replikátorovej dynamike s kritériom evolučnej a neutrálnej stability príslušnej zmiešanej stratégií. Ukážeme, že každý stav populácie z podmnožiny Δ^{ESS} je asymptoticky stabilný v replikátorovej dynamike a každý stav populácie z Δ^{NSS} je Lyapunovsky stabilný. V tomto kontexte evolučná stabilita implikuje asymptotickú stabilitu a neutrálna stabilita implikuje Lyapunovskú stabilitu. Navyše každá ES množina (pozri definíciu 21) je asymptoticky stabilná. Avšak opačná implikácia obecne neplatí. Tieto výsledky môžu byť formálne stanovené pomocou vhodnej Lyapunovskej funkcie. K tomuto účelu použijeme funkciu, ktorá sa nazýva relatívne entropická funkcia. Súvislosť so spomínanými kritériami stability rezultuje z vety 12 a 13, ktoré stanovujú, že evolučne stabilná stratégia má lokálnu prevahu a neutrálne stabilná stratégia má lokálne slabú prevahu.

Pre akúkoľvek zmiešanú stratégiu $\boldsymbol{x} \in \Delta$ označme symbolom $Q_{\boldsymbol{x}} \in \Delta$ množinu takýchto zmiešaných stratégií $\boldsymbol{y} \in \Delta$, ktoré priradzujú kladnú pravdepodobnosť všetkým rýdzim stratégiám z nosiča stratégie $\boldsymbol{x}$:

$$Q_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \Delta : C(\boldsymbol{x}) \subset C(\boldsymbol{y})\}.$$

Je zrejmé, že $\boldsymbol{x}$ patrí do množiny $Q_{\boldsymbol{x}}$ rovnako ako všetky vnútorné body $\boldsymbol{y}$ simplexu Δ. Množina $Q_{\boldsymbol{x}}$ je zjednotením $int(\Delta)$ a subsimplexu generovaného nosičom $C(\boldsymbol{x}) \subset K$ stratégie $\boldsymbol{x}$. Preto $Q_{\boldsymbol{x}}$ predstavuje okolie $\boldsymbol{x}$ vzhľadom k Δ (formálne, $Q_{\boldsymbol{x}} = \Delta \cap M$ pre nejakú otvorenú množinu $M \subset \mathbb{R}^k$ obsahujúcu $\boldsymbol{x}$).

Uvedená funkcia pre analýzu stability je definovaná vzhľadom k zmiešanej stratégií $\boldsymbol{x} \in \Delta$, pričom okolie $Q_{\boldsymbol{x}}$ je jej definičným oborom. Zvyčajne sa nazýva ako *(Kullback-Leiblerova) relatívna entropická miera* $H_{\boldsymbol{x}} : Q_{\boldsymbol{x}} \to \mathbb{R}$ a je definovaná predpisom:

$$H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i \log\left(\frac{x_i}{y_i}\right).$$

Nepochybne $H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = 0$ a taktiež bolo preukázané, že číslo $H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$ vždy prekračuje hodnotu $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$, teda štvorec euklidovskej vzdialenosti medzi $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ (pozri Bomze (1991)). Teda, ak pre ľubovoľné pevné $\boldsymbol{x} \in \Delta$ hodnota $H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$ klesá k nule pri zmene $\boldsymbol{y} \in Q_{\boldsymbol{x}}$, tak potom sa $\boldsymbol{y}$ musí približovať k $\boldsymbol{x}$. V skutočnosti pre ľubovoľnú pevnú stratégiu $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je zodpovedajúca funkcia $H_{\boldsymbol{x}}$ konvexná. Navyše táto funkcia má takú pozoruhodnú dynamickú vlastnosť, že jej derivácia podľa času v replikátorovej dynamike v ľubovoľnom bode $\boldsymbol{y}$ z jej definičného oboru $Q_{\boldsymbol{x}}$ je rovná rozdielu výplat medzi stratégiami $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{x}$ v situácií, ak sú hrané proti $\boldsymbol{y}$. Formálne, pre ľubovoľné pevné $\boldsymbol{x} \in \Delta$, je derivácia podľa času funkcie $H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$ v nejakom bode $\boldsymbol{y} \in Q_{\boldsymbol{x}}$ definovaná ako rýchlosť zmeny $H_{\boldsymbol{x}}$ v závislosti na tom ako sa stav $\boldsymbol{y}$ mení podľa vzťahu (3.14):

$$\dot{H}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[H_{\boldsymbol{x}}(\xi(t, \boldsymbol{y}))]_{t=0} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})}{\partial y_i}\dot{y}_i. \tag{3.17}$$

Veta 35. *Nech existuje $\boldsymbol{x} \in \Delta$ a jeho okolie $U_{\boldsymbol{x}}$ tak, že:*

$$\boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{y} > \boldsymbol{y}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{y}$$

pre všetky $\boldsymbol{y} \in \Delta \cap U_{\boldsymbol{x}} \setminus \boldsymbol{x}$. Potom $\boldsymbol{x}$ je asymptoticky stabilný v replikátorovej dynamike definovanej vzťahom (3.14)*.*

Dôkaz. Okolie $U_{\boldsymbol{x}}$ je možné voliť tak, aby platilo $C(\boldsymbol{x}) = C(\boldsymbol{y})$ pre každý bod $\boldsymbol{y} \in \Delta \cap U_{\boldsymbol{x}}$. Podľa Jensenovej nerovnosti platí:

$$\sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i \log\left(\frac{x_i}{y_i}\right) = \sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i \left[-\log\left(\frac{y_i}{x_i}\right)\right] \geq -\log\left[\sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i \left(\frac{y_i}{x_i}\right)\right] =$$

$$= -\log\left(\sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} y_i\right) = -\log(1) = 0$$

a rovnosť nastáva práve vtedy, ak $\boldsymbol{y} = \theta \boldsymbol{x}$ pre nejakú konštantu θ. Keďže $\boldsymbol{x} \in \Delta$ a $\boldsymbol{y} \in \Delta$, tak musí byť $\theta = 1$. Platí teda:

$$\sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i \log(x_i) \geq \sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i \log(y_i),$$

čiže

$$\prod_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i^{x_i} \geq \prod_{i \in C(\boldsymbol{x})} y_i^{x_i}$$

pre všetky $\boldsymbol{y} \in \Delta \cap U_{\boldsymbol{x}}$, pričom rovnosť nastane pre $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Ďalej označme:

$$P(\boldsymbol{y}) = \prod_{i \in C(\boldsymbol{x})} y_i^{x_i}$$

a

$$\upsilon(\boldsymbol{y}) = P(\boldsymbol{x}) - P(\boldsymbol{y}).$$

Potom je

$$\upsilon(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \upsilon(\boldsymbol{y}) > 0 \text{ pre } \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}, \quad P(\boldsymbol{y}) > 0 \text{ pre } \boldsymbol{y} \in \Delta \cap U_{\boldsymbol{x}}.$$

Ďalej podľa predpokladu máme

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(\boldsymbol{y})}{P(\boldsymbol{y})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log\left(P(\boldsymbol{y})\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i \log(y_i) = \sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i \left(\frac{\dot{y}_i}{y_i}\right) =$$

$$= \sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i \left((e^i)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{y}\right) = \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{y} \sum_{i \in C(\boldsymbol{x})} x_i =$$

$$= \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{y} > 0$$

pre všetky $\boldsymbol{y} \in \Delta \cap U_{\boldsymbol{x}} \setminus \boldsymbol{x}$. Keďže $P(\boldsymbol{y}) > 0$ pre $\boldsymbol{y} \in \Delta \cap U_{\boldsymbol{x}} \setminus \boldsymbol{x}$, tak potom platí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(\boldsymbol{y}) > 0.$$

Preto:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \upsilon(\boldsymbol{y}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(\boldsymbol{y}) < 0.$$

To znamená, že funkcia υ je Lyapunovskou funkciou replikátorovej dynamiky (3.14) v bode $\boldsymbol{x}$ a tento bod je asymptoticky stabilný (pozri sekciu 3.1.1).

□

Lemma 36. *Predpokladajme, že* $\boldsymbol{x} \in \Delta$ *a* $\boldsymbol{y} \in Q_{\boldsymbol{x}}$. *Potom* $H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) \geq 0$ *a rovnosť nastáva práve vtedy, ak* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. *Navyše* $\dot{H}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = -u(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, lemma 3.1).

□

Táto lemma a charakterizácia evolučnej stability podľa vety 12 môžu byť použité k stanoveniu záveru, že každý ESS je asymptoticky stabilný stav v replikátorovej dynamike (pozri Taylor a Jonker (1978) alebo Hofbauer a kol. (1979)).

Veta 37. *Každá stratégia* $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$ *je asymptoticky stabilná v replikátorovej dynamike* (3.14).

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.10).

□

Poznamenajme, že ak je nejaká ESS vnútorná, potom sa jedná o ESS hry s jednoznačným riešením (pozri tvrdenie 8). Teda môžeme sa domnievať, že takáto stratégia je globálne stabilná v zmysle pritiahnutia všetkých vnútorných počiatočných stavov.

Veta 38. *Ak* $\boldsymbol{x} \in int(\Delta) \cap \Delta^{ESS}$, *tak potom* $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)_{t\to\infty} \to \boldsymbol{x}$ *pre ľubovoľný* $\boldsymbol{x}^0 \in int(\Delta)$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.11).

□

Použitím lemmy 36 spoločne s charakterizáciou evolučnej stability vo vete 12 sme dospeli k záveru, že evolučná stabilita implikuje asymptotickú stabilitu v replikátorovej dynamike (3.14). Podobne charakterizácia neutrálnej stability podľa tvrdenia 13 môžu byť použité k stanoveniu toho, že táto slabšia forma evolučnej stability implikuje slabšiu formu dynamickej stability známu ako Lyapunovská stabilita (pozri Thomas (1985)).

Veta 39. *Každá stratégia* $\boldsymbol{x} \in \Delta^{NSS}$ *je Lyapunovsky stabilná v replikátorovej dynamike* (3.14).

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.12).

□

Keďže evolučne stabilné stavy sú aj asymptoticky stabilné v replikátorovej dynamike, tak sa môžeme domnievať, že aj evolučne stabilné množiny stratégií, nazývané ES množiny (pozri podkapitolu 2.4), sú ako množiny asymptoticky stabilné. V podstate uzavretá množina $X \subset \Delta$ je evolučne stabilná (ES množina), ak každá stratégia $\boldsymbol{x}$ z tejto množiny utŕži aspoň toľko ako utŕži každá bezprostredná stratégia $\boldsymbol{y}$ proti sebe samej a striktne viac ako každá blízka stratégia $\boldsymbol{y}$, ktorá nie je prvkom množiny X. V skutočnosti vlastnosti dynamickej stability množiny stratégií nezávisia od toho, ako sa stratégie z množiny realizujú proti sebe. Tieto vlastnosti závisia od toho, ako sa stratégie z množiny správajú voči stratégiám mimo množiny. V tomto kontexte môžeme uvažovať slabšie kritérium evolučnej stability, ktoré vyžaduje, aby každá stratégia v množine bola lokálne nadradenou stratégií $\boldsymbol{y}$, ktorá nepatrí do uvažovanej množiny.

Definícia 31. *Množina $X \subset \Delta$ je evolučne stabilná* (ES* množina), ak je neprázdna, uzavretá a každé $\boldsymbol{x} \in X$ má okolie $U_{\boldsymbol{x}}$ také, že $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > u(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$ pre všetky $\boldsymbol{y} \in U_{\boldsymbol{x}} \cap X$.*

Nepochybne, každá ES množina je ES* množinou a podľa vety 12 jednoprvková množina $X = \{x\}$ je evolučne stabilná* práve vtedy, ak $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$. Teda ES* kritérium je ďalším, slabším množinovým zovšeobecnením konceptu ESS. Kompletný priestor stratégií $X = \Delta$ je nutne ES* množinou, keďže z definície neexistujú žiadne stratégie mimo množiny. Preto je zaručená existencia ES* množiny. Navyše je možné ukázať, že každá konečná a symetrická hra má minimálne jednu ES* množinu takú, že ES* neobsahuje ďalšiu ES* množinu. Keďže evolučne stabilná stratégia, z pohľadu jednoprvkovej množiny, je špeciálnym prípadom ES* množiny, tak nasledujúce tvrdenie je dôsledkom vety 37:

Tvrdenie 40. *Každá ES* množina $X \subset \Delta$ je asymptoticky stabilná v replikátorovej dynamike* (3.14).

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.13).

□

3.7 Dvojnásobne symetrické hry

V dvojnásobne symetrických hrách sa priemerný populačný fitness $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ zvyšuje pozdĺž každej nestacionárnej trajektórie riešenia replikátorovej dynamiky. To znamená, že replikátorová dynamika zvyšuje podiely rýdzich stratégií, ktorých výplata je vyššia než priemerná výplata a redukuje podiely rýdzich stratégií s nižšou výplatou než je priemerná výplata. Teda v takomto type hry indikuje evolúcia, ktorá je modelovaná pomocou replikátorovej dynamiky (3.14), trvalý rast spoločenskej zdatnosti v čase (pozri podkapitolu 2.5).

Uvažujme teda nejakú dvojnásobne symetrickú hru a nech derivácia priemernej výplaty (fitness) $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ podľa času pozdĺž trajektórie riešenia replikátorovej dynamiky (3.14) pre ľubovoľný daný stav $\boldsymbol{x} \in \Delta$ je v tvare:

$$\dot{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u\left[\xi(t,\boldsymbol{x}),\xi(t,\boldsymbol{x})\right]_{t=0}. \tag{3.18}$$

Veta 41. *Pre ľubovoľnú dvojnásobne symetrickú hru platí:*

$$\dot{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 2\sum_{i=1}^{k} x_i \left[u(e^i,\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\right]^2. \tag{3.19}$$

Dôkaz. Vyjdeme zo vzťahu (3.18), pričom symetriou výplatnej matice $\mathbf{A}$ získame:

$$\begin{aligned} \dot{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) &= \sum_{i,j\in K} \left[\dot{x}_i u(e^i,e^j)x_j + x_i u(e^i,e^j)\dot{x}_j\right] = \\ &= 2\sum_{i,j\in K} \dot{x}_i u(e^i,e^j)x_j = 2\sum_{i\in K} \dot{x}_i u(e^i,\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Substitúciou $x_i\,[u(e^i,\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})]$ za $\dot{x}_i$ (pozri (3.13)) v (3.20) máme:

$$\dot{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 2\sum_{i\in K} x_i\left[u(e^i,\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\right]u(e^i,\boldsymbol{x}). \tag{3.21}$$

Ďalej využitím vzťahu (3.12) upravíme (3.21) na nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned}\dot{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) &= 2\sum_{i\in K} x_i u^2(e^i,\boldsymbol{x}) - 2\sum_{i\in K} x_i u(e^i,\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \\ &= 2\sum_{i\in K} x_i u^2(e^i,\boldsymbol{x}) - 2u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\sum_{i\in K} x_i u(e^i,\boldsymbol{x}) = \\ &= 2\sum_{i\in K} x_i u^2(e^i,\boldsymbol{x}) - 2u^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Postupnou úpravou (3.22) a využitím vzťahu (3.12) získame:

$$\begin{aligned}\dot{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) &= 2\sum_{i\in K} x_i u^2(e^i,\boldsymbol{x}) - 2u^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \\ &= 2\sum_{i\in K} x_i u^2(e^i,\boldsymbol{x}) - 4u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\sum_{i\in K} x_i u(e^i,\boldsymbol{x}) + 2u^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\sum_{i\in K} x_i = \\ &= 2\sum_{i\in K} x_i u^2(e^i,\boldsymbol{x}) - 4\sum_{i\in K} x_i u(e^i,\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + 2\sum_{i\in K} x_i u^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \\ &= 2\sum_{i\in K} x_i\left[u^2(e^i,\boldsymbol{x}) - 2u(e^i,\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + u^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\right] = \\ &= 2\sum_{i=1}^{k} x_i\left[u(e^i,\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\right]^2,\end{aligned}$$

čo presne zodpovedá vzťahu (3.19).

□

Teda $\dot{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \geq 0$ a rovnosť nastáva vtedy a len vtedy, ak $\boldsymbol{x} \in \Delta^0$ (pozri (3.16)), kde Δ^0 predstavuje množinu stacionárnych stavov v replikátorovej dynamike definovanej vzťahom (3.14). Navyše miera $\dot{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, pri ktorej rastie priemerná výplata je dvakrát rozptyl rozdelenia výplaty v populácií. Čím viac nepravidelné je toto rozdelenie naprieč rýdzimi stratégiami, tým väčšia je miera, ktorou rastie priemerná výplata.

Poznamenajme, že aj keď priemerná výplata vždy rastie v dvojnásobne symetrických hrách, tak to neznamená, že priemerná výplata v dlhodobom horizonte nutne dosiahne svoje globálne maximum v hre. Obzvlášť, ak je počiatočný stav dostatočne blízko jedného z equilibrií, tak potom stav populácie konverguje k tomuto equilibriu nezávisle na tom, či jeho výplata je vyššia alebo nižšia než výplata iného striktného equilibria.

Dôsledok predchádzajúceho výsledku je, že evolučná stabilita v dvojnásobne symetrických hrách je ekvivalentná asymptotickej stabilite v replikátorovej dynamike (pozri Hofbauer a Sigmund (1988)). Kombináciou tohto záveru spolu s charakterizáciou evolučnej stability uvedenej v podkapitole 2.5 získame nasledujúce tvrdenie:

Tvrdenie 42. *Pre ľubovoľnú dvojnásobne symetrickú hru sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

1. $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$;
2. $\boldsymbol{x} \in \Delta$ *je lokálne striktne efektívna;*
3. $\boldsymbol{x} \in \Delta$ *je asymptotický stabilná v replikátorovej dynamike.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v práci (Weibull, 1995, tvrdenie 3.15).

$\square$

Navyše podľa vety 20 je každá lokálne efektívna množina $X \subset \Delta$ v dvojnásobne symetrickej hre ES množinou a každá ES množina je asymptoticky stabilná (pozri tvrdenie 40). Preto každá lokálne efektívna množina $X \subset \Delta$ v dvojnásobne symetrickej hre je asymptoticky stabilná v replikátorovej dynamike.

4. Numerické štúdie

V tejto kapitole aplikujeme poznatky z predošlých častí na model oligopolu. Presnejšie budeme simulovať model oligopolu dvoch najväčších firiem (duopol) zaoberajúcich sa ťažbou ropy. Cieľom našej analýzy je determinovať správanie duopolistov v dlhodobom časovom horizonte. Zdrojom poznatkov sú diela Axelrod (1985), Mankiw (2009), Samuelson a Nordhaus (2000) a Vega-Redondo (2003). Všetky výpočty uvedené v tejto kapitole boli získané pomocou softwaru Wolfram Mathematica.

4.1 Model

Oligopol je trh, na ktorom pôsobí iba malé množstvo predávajúcich (oligopolisti), ktorí ponúkajú podobnú či identickú produkciu. Pre oligopol je príznačné, že predávajúci pri svojom rozhodovaní o cenách a výstupe vzájomne zvažujú jednanie druhej strany. Keďže odvetviu dominuje iba niekoľko firiem, tak túto tržnú štruktúru radíme k forme nedokonalej konkurencie. Ekonómovia zistili, že príčinou vzniku nedokonalej konkurencie sú tieto tri hlavné faktory: *bariéry konkurencie*, *náklady* a *strategická interakcia*. Keďže na oligopolnom trhu existuje iba malý počet firiem, tak kľúčovou vlastnosťou oligopolu je rozpor medzi spoluprácou a vlastnými záujmami. Oligopolisti sa môžu rozhodnúť pre kooperatívne alebo nekooperatívne správanie. Pre skupinu oligopolistov je najvýhodnejšie spolupracovať (konať v zhode, *kolúzií*) a jednať tak ako monopol - teda vyrábať malý rozsah produkcie. Na druhej strane ale každý oligopolista dbá iba o svoj vlastný zisk a tak sú títo výrobcovia motivovaný k čo najväčšej výrobe, a preto je jej rozsah väčší než rozsah výroby v podmienkach monopolu. Dohodu medzi firmami o rozsahu výroby a cene nazývame kolúziou a účastníkov, ktorí tvoria túto skupinu označujeme ako *kartel*. Hoci by oligopolisti chceli vytvárať kartel a mať zisky ako monopol, často to nie je možné. Jedným z dôvodov sú antimonopolné zákony, ktoré zakazujú dohodu medzi oligopolistami. Naviac niekedy dohodu znemožňuje tiež fakt, že členovia kartelu sa nedokážu dohodnúť na rozdelení zisku (pozri *OPEC a svetový trh ropy* (Mankiw, 2009, strana 347)).

V predchádzajúcich kapitolách sme sa podrobne venovali evolučnej stabilite a replikátorovej dynamike v symetrickej hre dvoch hráčov. Tieto poznatky teraz aplikujeme na model duopolu, ktorý pozostáva z dvoch najväčších firiem ťažiacich ropu na základe dát o objeme produkcie z roku 2015. Budeme predpokladať, že obe firmy alokujú svoje celkové ťažobné kapacity do daného regióna, v ktorom ovládnu celý trh s ropou. Pre účely simulácií budeme uvažovať oblasť Kanady (subjektívna voľba). Cenu ropy v konkrétnej oblasti určíme v závislosti na celkovom množstve ropy, ktoré tieto dve spoločnosti vyťažia. Taktiež budeme predpokladať, že obe firmy produkujú rovnaký druh ropy. Najväčším producentom ropy na svete bola v roku 2015 saudsko arabská štátna spoločnosť Saudi Aramco, ktorá vyprodukovala priemerne 10,2 milióna bpd (barrels per day) surovej ropy (crude oil) za deň (pozri Saudi Aramco (2016)). Druhým najväčším producentom bola ruská spoločnosť Gazprom s priemernou dennou produkciou približne 9,1 milióna bpd (pozri Gazprom (2016)) surovej ropy. V kontexte trhovej moci považujeme tieto dve spoločnosti za rovnocenné a z tohto dôvodu použijeme pre simuláciu tejto tržnej situácie model Cournotovho duopolu s možnosťou kartelu. Jedná sa o model duopolu, ktorý odvodil v roku 1838 významný francúzsky matematik *Antoine Augustin Cournot* za nasledujúcich predpokladov:

- existujú práve dve rovnako veľké firmy, ktoré vyrábajú homogénny produkt,
- objem produkcie jednotlivých firiem je náhodný, konkurujú si v objeme produkcie,
- firmy prijímajú rozhodnutia o objeme výroby súčasne a každá z nich považuje výstup svojho konkurenta za fixný,
- firmy sú inteligentnými účastníkmi konfliktu s jediným cieľom maximalizovať vlastný zisk.

Prvou charakteristikou, ktorá popisuje model oligopolu, je funkcia ceny. Cena produktu je určená pomocou inverznej funkcie dopytu a závisí na celkovom množstve daného produktu na trhu. Objem výroby i-tej firmy, $i = 1, 2$, budeme značiť symbolom q_i a agregovaný objem produkcie budeme značiť $Q = \sum_{i=1}^{2} q_i$. Ďalej budeme uvažovať lineárnu funkciu ceny, ktorá je v tvare:

$$p = max\{a - b \cdot Q, 0\}, \tag{4.1}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}_+$ sú dané konštanty. Jej odhad je veľmi náročný, keďže tvorba ceny neprebieha všeobecne na úrovni statkov, ale konkrétne u daných statkov na danom mieste a v danom čase. Preto použijeme v tejto analýze jej aproximáciu odvodenú v práci (Kašpar, 2013, kapitola 9.3). Odhady parametrov funkcie ceny (4.1) sú uvedené v tabuľke 4.1.

Parameter	Odhad
a	287,31
b	$2{,}335 \cdot 10^{-7}$

Tabuľka 4.1: Odhady parametrov funkcie ceny

Druhou charakteristikou, ktorá determinuje oligopol, je nákladová funkcia, ktorá vyjadruje závislosť celkových nákladov na objeme produkcie. Predpokladajme, že celkové náklady firmy i sú v tvare:

$$c_i(q_i) = c_1 + c_2 q_i, \quad i \ = 1, 2,$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}_+$, $c_2 \in (0, a)$ sú opäť dané konštanty. Premenná c_1 predstavuje fixné náklady producenta niekedy tiež nazývané režijné náklady alebo stratené náklady. Tieto náklady nezávisia na objeme produkcie. Ich odhad je komplikovaný, keďže žiadna z firiem neuvádza ich hodnotu. Z tohto dôvodu ich budeme aproximovať hodnotou odpovedajúcej jednej tretine (subjektívna voľba) z celkovej tržby producenta v konkurenčnej variante duopolu. K určeniu konštanty c_2, ktorá vyjadruje cenu za vyťaženie jedného barela ropy (medzné náklady), použijeme odhad nákladov v uvažovanom regióne (pozri CNN Money (2015)). V tabuľke 4.2 uvádzame

Krajina	Medzné náklady (USD)
Kanada	41

Tabuľka 4.2: Náklady na ťažbu jedného barela ropy

náklady na ťažbu jedného barela ropy v oblasti Kanady.

Teraz už máme zadefinované obe charakteristiky, ktoré determinujú Cournotov model duopolu a môžeme prejsť k jeho podrobnej analýze. Prvotne uvažujme prípad, kedy si obe firmy vzájomne konkurujú. Tržnú situáciu je možné modelovať pomocou hry v normálnom tvare, kde hráčmi sú duopolisti, pričom každá firma si určuje vlastný objem produkcie. Priestory stratégií sú teda množiny:

$$S_1 = S_2 = \langle 0, \tfrac{a}{b} \rangle$$

a výplatné funkcie predstavujú zisky:

$$u_1(q_1, q_2) = pq_1 - c_1 - c_2q_1 = [a - b(q_1 + q_2) - c_2]q_1 - c_1, \tag{4.2}$$

$$u_2(q_1, q_2) = pq_2 - c_1 - c_2q_2 = [a - b(q_1 + q_2) - c_2]q_2 - c_1. \tag{4.3}$$

Poznamenajme, že v tomto prípade ide o nekonečnú hru, keďže priestory stratégií sú nekonečné množiny. Napriek tomu je možné pomerne jednoducho nájsť rovnovážny bod. Prvý duopolista hľadá funkciu, ktorá každej stratégií súpera, t.j. každému množstvu q_2, priradí také množstvo $q_1 = R_1(q_2)$, ktoré je na q_2 najlepšou odpoveďou v tom zmysle, že funkcia $u_1(q_1, q_2)$ je maximálna. Inými slovami, pre každé pevné $q_2 \in S_2$ hľadá prvý duopolista maximum funkcie $u_1(q_1, q_2)$, ktorá je teraz funkciou jednej premennej q_1. Je jednoduché overiť, že funkcia $u_1(q_1, q_2)$ je kvadratická a konkávna na celom intervale $\mathbb{R}$. A tak svoje maximum nadobúda v stacionárnom bode, t.j. v bode, kde sa prvá derivácia funkcie rovná nule:

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = a \ - 2bq_1 - bq_2 - c_2 = 0.$$

Potom

$$R_1(q_2) = q_1 = \tfrac{1}{2b}(a - bq_2 - c_2).$$

Rovnakým spôsobom hľadá druhý duopolista pre každú stratégiu q_1 najlepšiu odpoveď $q_2 = R_2(q_1)$, t.j. také množstvo, ktoré pre dané q_1 maximalizuje zisk $u_2(q_1, q_2)$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = a \ - 2bq_2 - bq_1 - c_2 = 0.$$

Teda

$$R_2(q_1) = q_2 = \tfrac{1}{2b}(a - bq_1 - c_2).$$

Funkcie $R_1(q_2)$ a $R_2(q_1)$ nazývame reakčné krivky. Dvojica (q_1^C, q_2^C) je rovnovážnym bodom práve vtedy, keď $R_1(q_2^C) = R_2(q_1^C)$. Rovnovážny bod je priesečník reakčných kriviek, v našom prípade:

$$(q_1^C, q_2^C) = \left(\tfrac{1}{3b}(a - c_2), \tfrac{1}{3b}(a - c_2)\right).$$

Vo variante kartelovej dohody duopolisti maximalizujú zisk tak, ako keby boli jediným producentom. Hľadáme teda maximum funkcie:

$$u(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2) - 2c_1 - c_2(q_1 + q_2), \tag{4.4}$$

kedy v prípade prvého duopolistu je u funkciou premennej q_1 a v prípade druhého duopolistu funkciou premennej q_2. Funkcia (4.4) je konkávna na celom intervale $\langle 0, \infty)$. A tak svoje maximum nadobúda v stacionárnom bode, t.j. v bode, kde sa prvá derivácia výplatnej funkcie rovná nule. Vyriešením rovníc:

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = a \ - 2bq_1 - 2bq_2 - c_2 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_2} = a \ - 2bq_1 - 2bq_2 - c_2 = 0,$$

získame optimálny objem produkcie oboch duopolistov v kartelovej dohode:

$$(q_1^K, q_2^K) = \left(\tfrac{1}{4b}(a - c_2), \tfrac{1}{4b}(a - c_2)\right).$$

Tento výstup je avšak nestabilný, pretože pre každého z duopolistov je výhodné sa odchýliť k svojej najlepšej odpovedi na súperovu voľbu a získať pre seba viac. Predpokladajme, že prvý duopolista sa rozhodne zradiť. Ten sa domnieva, že jeho konkurent nezmení svoj objem produkcie a chce zistiť, či môže profitovať z porušenia kartelovej dohody. Jeho cieľom je nájsť maximum funkcie $u_1(q_1, q_2)$ pre pevné $q_2 = \frac{1}{4b}(a - c_2)$. Optimalizačná úloha je v tvare:

$$\max_{q_1 \geq 0} u_1(q_1, q_2) = \max_{q_1 \geq 0} [a - b(q_1 + q_2) - c_2]q_1 - c_1.$$

Optimálne množstvo q_1^P prvého duopolistu („podvodníka") získame vyriešením rovnice:

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = a \ - 2bq_1 - b\tfrac{1}{4b}(a - c_2) - c_2 = 0.$$

Množstvo produkcie podvodníka q_1^P je:

$$q_1^P = \tfrac{3}{8b}(a - c_2).$$

V tabuľke 4.3 uvádzame optimálne objemy produkcie v jednotlivých variantách duopolu[1].

Varianta	q_1	q_2	Q
Konkurencia	$1/3b \cdot (a - c_2)$	$1/3b \cdot (a - c_2)$	$16/24b \cdot (a - c_2)$
Kartel	$1/4b \cdot (a - c_2)$	$1/4b \cdot (a - c_2)$	$12/24b \cdot (a - c_2)$
Zrada	$3/8b \cdot (a - c_2)$	$1/4b \cdot (a - c_2)$	$15/24b \cdot (a - c_2)$

Tabuľka 4.3: Objemy produkcie v Cournotovom duopole

Keďže cena produktu je nepriamo úmerná agregovanému objemu produkcie (pozri (4.1)), tak najnižšia cena produktu je v prípade, kedy si duopolisti vzájomne konkurujú a naopak najvyššia cena nastane v prípade kartelovej dohody.

[1] V prípade zrady je podvodníkom prvý duopolista

Po dosadení odpovedajúcich hodnôt q_1 a q_2 pre jednotlivé varianty duopolu do výplatných funkcií (4.2) a (4.3) je možné ukázať, že najvyšší zisk dosahuje duopolista, ktorý zradil a naopak najnižší zisk utŕži podvedený duopolista. Výplaty duopolistov v jednotlivých variantách uvádzame v tabuľke 4.4, pričom opäť predpokladáme, že v prípade zrady je podvodníkom prvý duopolista.

Varianta	$u_1(q_1, q_2)$	$u_2(q_1, q_2)$
Konkurencia	$\frac{a^2-9bc_1-2ac_2+c_2^2}{9b}$	$\frac{a^2-9bc_1-2ac_2+c_2^2}{9b}$
Kartel	$\frac{a^2-8bc_1-2ac_2+c_2^2}{8b}$	$\frac{a^2-8bc_1-2ac_2+c_2^2}{8b}$
Zrada	$\frac{9a^2-64bc_1-18ac_2+9c_2^2}{64b}$	$\frac{3a^2-32bc_1-6ac_2+3c_2^2}{32b}$

Tabuľka 4.4: Výplaty v Cournotovom duopole

Model Cournotovho duopolu, ktorý sme doposiaľ analyzovali, môžeme simulovať pomocou symetrickej hry dvoch hráčov, kde priestory stratégií sú množiny:

$$S_1 = S_2 = \{spolupráca, zrada\}.$$

Situácia, v ktorej obaja hráči volia stratégiu spolupráca zodpovedá v modele duopolu kartelovej dohode, kedy sa duopolisti dohodnú na optimálnom objeme výroby. Naopak pokiaľ si obaja duopolisti zvolia stratégiu zrada, tak v takomto prípade nastáva konkurenčný boj. Poslednou možnosťou je kombinácia stratégií spolupráca a zrada, ktorá zodpovedá zrade v kartelovej dohode. V takomto prípade hráč, ktorý si zvolil stratégiu zrada, je podvodníkom. Na základe hodnôt výplatných funkcií v jednotlivých variantách duopolu je možné ukázať, že takáto symetrická hra dvoch hráčov je typu väzňova dilema.

4.2 Väzňova dilema

Väzňova dilema je jedna zo základných hier v rámci teórie hier. Tento problém bol formulovaný v roku 1950 *Merrillom Floodom* a *Melvinom Dresherom*, pričom sa jedná o symetrickú hru dvoch hráčov. Výplatná matica prvého hráča $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$ je obecne v tvare:

		Hráč 2	
		spolupráca	zrada
Hráč 1	spolupráca	a_{11}	a_{12}
	zrada	a_{21}	a_{22}

Pričom pre prvky matice $\mathbf{A}$ platí:

$$a_{12} < a_{22} < a_{11} < a_{21}. \tag{4.5}$$

Poznámka. Keďže sa jedná o symetrickú hru dvoch hráčov, tak výplatná matica druhého hráča je transpozíciou výplatnej matice prvého hráča, t.j. $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$.

Dilema sa tejto situácii hovorí z tohto dôvodu, že všeobecne najvýhodnejšie by bolo, keby obaja hráči spolupracovali a ich zisk by bol rovný a_{11}. Problém spočíva v tom, že hráči sa nemôžu dohovoriť a aj keby sa dohovorili, tak stále existuje veľké pokušenie zradiť a utŕžiť zisk a_{21}. Evidentne druhá rýdza stratégia prvého hráča („zrada") poskytuje vyššiu výplatu než jeho prvá rýdza stratégia („spolupráca") a to bez ohľadu na to akú stratégiu zvolí oponent. Rovnako druhá rýdza stratégia hráča *2* mu vždy poskytuje vyšší zisk než jeho prvá rýdza stratégia. To znamená, že nezávisle na hráčovi druhá rýdza stratégia („zrada") striktne dominuje prvú rýdzu stratégiu („spolupráca"). Keďže sú to jediné rýdze stratégie ($K = \{1, 2\}$), tak stratégia $\boldsymbol{x}_i = e_i^2$, $i = 1, 2$, striktne dominuje každú stratégiu $\boldsymbol{y}_i \neq \boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y}_i \in \Delta_i$. Táto hra je striktne dominantne riešiteľná, keďže množina iteratívne striktne nedominovaných profilov stratégií $S^D = \{(2, 2)\}$ je jednoprvková množina.

Poznamenajme, že takisto v kontexte zmiešaných stratégií je jednoducho možné ukázať, že výplatná funkcia prvého hráča $u_1(\boldsymbol{x})$ pre akúkoľvek pevnú stratégiu $\boldsymbol{x}_2 \in \Delta_2$ druhého hráča nadobúda svoje maximum na Δ_1 v $\boldsymbol{x}_1 = e_1^2$. Dosadením do vzťahu (1.5) máme:

$$u_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^\top \mathbf{A} \boldsymbol{x}_2 = x_{11}(a_{11}x_{21} + a_{12}x_{22}) + x_{12}(a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22}).$$

Využitím identity $x_{i1} + x_{i2} = 1$ získame:

$$u_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^\top \mathbf{A} \boldsymbol{x}_2 = a_{11}x_{21} + a_{12}x_{22} + x_{12}[(a_{21} - a_{11})x_{21} + (a_{22} - a_{12})x_{22}].$$

Z vlastnosti prvkov a_{ij} matice $\mathbf{A}$ (4.5) vyplýva, že funkcia $u_1(\boldsymbol{x})$ je pre pevnú stratégiu $\boldsymbol{x}_2 \in \Delta_2$ rastúcou funkciou premennej x_{12}. Rovnakým spôsobom ukážeme, že výplatná funkcia druhého hráča $u_2(\boldsymbol{x})$ nadobúda svoje maximum na Δ_2 v $\boldsymbol{x}_2 = e_2^2$ pre ľubovoľnú pevnú stratégiu $\boldsymbol{x}_1 \in \Delta_1$. Využitím vzťahu (1.6) a identity $x_{i1} + x_{i2} = 1$ máme:

$$u_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^\top \mathbf{B} \boldsymbol{x}_2 = b_{11}x_{11} + b_{21}x_{12} + x_{22}[(b_{12} - b_{11})x_{11} + (b_{22} - b_{21})x_{12}].$$

Na základe symetrie matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ platí, že $b_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2$. Využitím tejto vlastnosti môžeme usúdiť, že funkcia $u_2(\boldsymbol{x})$ je rastúcou funkciou premennej x_{22} pre akúkoľvek pevnú stratégiu $\boldsymbol{x}_1 \in \Delta_1$.

Práve sme ukázali, že hra väzňova dilema má práve jedno Nashovo equilibrium a tým je profil rýdzich stratégií $\boldsymbol{s} = \{(2, 2)\}$. Toto equilibrium je navyše symetrické ($\Theta^{NE} = \{(e^2, e^2)\}$, $\Delta^{NE} = \{e^2\}$) a striktné. Okrem toho je stratégia $\boldsymbol{x} = e^2$ jedinečnou najlepšou odpoveďou na akúkoľvek stratégiu $\boldsymbol{y} \in \Delta$ a z tohto dôvodu je na základe tvrdenia 7 jedinou ESS tejto hry ($\Delta^{ESS} = \{e^2\}$).

V závere tejto časti uvádzame vyjadrenie replikátorovej dynamiky (3.14) v hre väzňova dilema definovanej výplatnou maticou $\mathbf{A}$:

$$\dot{x}_1 = u(e^1 - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})x_1 = (1 - x_1, -x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot x_1. \tag{4.6}$$

Vyžitím identity $x_1 + x_2 = 1$ v rovnici (4.6) dostaneme

$$\dot{x}_1 = (-1 + x_1)x_1[a_{22} + a_{12}(-1 + x_1) + (-a_{11} + a_{21})x_1 - a_{22}x_1], \tag{4.7}$$

kde $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$, keďže $\sum_i \dot{x}_i = 0$.

4.2.1 Modifikácia hry väzňova dilema

Pre účely numerickej štúdie budeme okrem klasického modelu hry väzňova dilema uvažovať aj jej modifikáciu založenú na tom, že obaja hráči majú k dispozícií okrem stratégií *spolupráca*, *zrada* navyše tretiu stratégiu *pôžička na oplátku* (anglicky *tit-for-tat*), ktorú budeme pre jednoduchosť označovať ako *pôžička*. Táto stratégia predpisuje spolupracovať v prvom kole a potom hrať rovnako, ako hral druhý hráč v predchádzajúcom kole. To znamená podvádzať, ak druhý hráč v predchádzajúcom kole podvádzal a spolupracovať, ak druhý hráč v predchádzajúcom kole tiež spolupracoval (pozri (Axelrod, 1985, kapitola 1)). V tomto kontexte môžeme definovať výplatu stratégie *pôžička* napríklad ako súčet, či priemer výplat v jednotlivých kolách hry. Z tohto dôvodu je zavedený diskontný faktor $\delta \in (0, 1)$, ktorý predstavuje mieru, akou je výplata jednotlivých kôl diskontovaná vzhľadom k predošlému kolu (pozri (Vega-Redondo, 2003, kapitola 5.2.1)). Ďalej budeme predpokladať, že jednotlivé výplaty stratégie *pôžička* zodpovedajú váženému súčtu zisku v jednotlivých kolách (pozri (Vega-Redondo, 2003, kapitola 8.2)).

4.3 Aplikácia výsledkov na model duopolu

Táto podkapitola obsahuje dve numerické štúdie, kde v prvej časti budeme simulovať model duopolu pomocou klasickej verzie hry väzňova dilema s priestormi stratégií $\{spolupr\acute{a}ca, zrada\}$ a v druhej časti použijeme modifikovanú verziu väzňovej dilemy s priestormi stratégií $\{spolupr\acute{a}ca, zrada, p\hat{o}\check{z}i\check{c}ka\}$. Cieľom týchto numerický štúdií je determinovať správanie duopolistov z hľadiska dynamického vývoja hry využitím replikátorovej dynamiky.

4.3.1 Jednoduchá väzňova dilema

Uvažujme teda model trhu s ropou, v ktorom dve najväčšie firmy ťažiace ropu (Saudi Aramco a Gazprom) alokujú svoje celkové ťažobné kapacity do oblasti Kanady a tým ovládnu celkový trh s ropou v tomto regióne. Nech cena ropy v tomto modele je definovaná vzťahom (4.1), kde odhady parametrov sú uvedené v tabuľke 4.1. Ďalej vieme, že náklady na ťažbu jedného barela ropy v tejto oblasti sú 41 USD (pozri tabuľku 4.2). Na základe týchto údajov a využitím znalosti agregovaného objemu produkcie (pozri tabuľku 4.3) dokážeme určiť jednotkovú cenu produktu, t.j. jedného barela ropy, pre jednotlivé varianty duopolu. Tieto hodnoty uvádzame v nasledujúcej tabuľke 4.5:

Varianta	Q	$p\ (USD)$
Konkurencia	$2/3b \cdot (a - c_2)$	119,9
Kartel	$1/2b \cdot (a - c_2)$	161,76
Zrada	$5/6b \cdot (a - c_2)$	130,37

Tabuľka 4.5: Cena barela ropy v oblasti Kanada

Najnižšia cena ropy je v konkurenčnom prostredí a naopak najvyššia v prípade kartelovej dohody. Tento záver je v súlade s očakávaniami, keďže cena ropy je nepriamo úmerná agregovanému objemu produkcie. Ďalšou charakteristikou oligopolu sú náklady firiem. V definícií modelu sme stanovili hodnotu fixných nákladov rovnú jednej tretine z celkovej tržby producenta:

$$c_1 = \frac{p^C \cdot q_1^C}{3} = 1{,}43 \cdot 10^{10},$$

kde symbolom p^C rozumieme cenu za jeden barel ropy v konkurenčnej variante duopolu.

Poznámka. Obaja duopolisti majú rovnaké fixné náklady, keďže $q_1^C = q_2^C$.

Dosadením odpovedajúcich hodnôt ceny ropy a objemu produkcie v jednotlivých variantách duopolu do vzťahov výplatných funkcií (4.2) a (4.3) získame výplaty duopolistov pre tieto varianty.

Varianta		Zisk
Konkurencia		$1{,}57 \cdot 10^{10}$
Kartel		$1{,}94 \cdot 10^{10}$
Zrada	Podvodník	$2{,}36 \cdot 10^{10}$
	Podvedený	$1{,}1 \cdot 10^{10}$

Tabuľka 4.6: Zisk duopolistov v oblasti Kanada

Potom je možné jednoducho ukázať, že strategická interakcia firiem Saudi Aramco a Gazprom v tomto modele je definovaná výplatnou maticou $\mathbf{A}$ v tvare:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1{,}94 \cdot 10^{10} & 1{,}1 \cdot 10^{10} \\ 2{,}36 \cdot 10^{10} & 1{,}57 \cdot 10^{10} \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

pričom je zrejmé, že prvky matice $\mathbf{A}$ spĺňajú vlastnosť (4.5) hry typu väzňova dilema. Cieľom nášho záujmu je analyzovať priebeh replikátorovej dynamiky v kontexte uvažovaného modelu. Dosadením hodnôt prvkov matice $\mathbf{A}$ do vzťahu (4.7) a úpravou získame predpis replikátorovej dynamiky modelu duopolu firiem Saudi Aramco a Gazprom ťažiacich ropu v oblasti Kanady:

$$\dot{x}_1 = -4.69 \cdot 10^8 x_1(x_1 - 1)(x_1 - 10). \tag{4.9}$$

Poznámka. Poznamenajme, že diferenciálna rovnica (4.9) je autonómna (časovo homogénna), teda nezávisí na čase t.

Začnime s identifikáciou stacionárnych bodov rovnice. Podmienka stacionarity je splnená pre každú monomorfickú populáciu, v ktorej všetci jednotlivci hrajú rovnakú rýdzu stratégiu $i \in K$ (pozri podkapitolu 3.4). Tento stav zodpovedá bodom $x_1 = 1$ a $x_1 = 0$. Ďalej nás zaujíma hodnota x_1, pre ktorú platí:

$$\dot{x}_1 = 0. \tag{4.10}$$

Okrem bodov $x_1 = 0$ a $x_1 = 1$ je zrejme ďalším riešením rovnice (4.10) bod $x_1 = 10$, ktorý ale nepatrí do simplexu Δ (v tomto prípade $\Delta = [0, 1]$) podielu populácie x_i predprogramovanej k rýdzej stratégií $i \in K$ a z tohto dôvodu je tento bod irelevantný. Iné stacionárne body rovnica (4.9) nemá. Ďalej môžeme pozorovať, že pre ľubovoľné $x_1 \in int(\Delta)$ platí:

$$\dot{x}_1 < 0. \tag{4.11}$$

Z nerovnosti (4.11) vyplýva, že pre akékoľvek $x_0 \in int(\Delta)$ riešenie $\xi(t, x_0)$ konverguje k $x_1 = 0$. Tento poznatok zároveň indikuje asymptotickú stabilitu bodu $x_1 = 0$. Podmienka asymptotickej stability vyžaduje Lyapunovskú stabilitu a lokálnu návratnosť v tom zmysle, že akákoľvek malá odchýlka od daného stavu implikuje návrat k tomuto stavu. K overeniu predpokladu asymptotickej stability uvažujme nejaké dostatočne malé $\epsilon > 0$. Potom pre každé $x_0 \in (0, 0 + \epsilon)$ zrejme platí:

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t, x^0) = 0.$$

To znamená, že bod $x_1 = 0$ je v zmysle definície 29 asymptoticky stabilný. Naopak v prípade druhého stacionárneho bodu $x_1 = 1$ je predpoklad asymptotickej stability porušený, keďže pre dostatočne malé $\epsilon > 0$ neplatí, že riešenie $\xi(t, x_0)$ pre $x_0 \in (1 - \epsilon, 1)$ konverguje k $x_1 = 1$. Na základe tejto analýzy sme dospeli k záveru, že rovnica (4.9) má jediný asymptotický stabilný bod $x_1 = 0$. Poznamenajme, že tento výsledok je v súlade s vetou 37, keďže stratégia $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) = (0, 1)$ je evolučne stabilná; $\boldsymbol{x} \in \Delta^{ESS}$.

4.3.2 Modifikovaná väzňova dilema

Predmetom druhej simulácie je rovnako ako v predošlom prípade model duopolu firiem Saudi Aramco a Gazprom ťažiacich ropu v Kanade s tým rozdielom, že okrem stratégií *spolupráca*, *zrada* môžu navyše obaja aktéri hrať stratégiu *pôžička*. Táto strategická interakcia je definovaná štvorcovou výplatnou maticou

$$\mathbf{A}^M = \begin{pmatrix} a_{11}^M & a_{12}^M & a_{13}^M \\ a_{21}^M & a_{22}^M & a_{23}^M \\ a_{31}^M & a_{32}^M & a_{33}^M \end{pmatrix},$$

pričom vzájomná interakcia stratégií *spolupráca*, *zrada* poskytuje hráčom rovnaký zisk ako v prípade jednoduchej väzňovej dilemy. To znamená, že $a_{ij}^M = a_{ij}$, $i, j = 1, 2$, kde a_{ij} sú prvky matice $\mathbf{A}$ (4.8) definovanej v predošlej simulácií. Ďalej budeme predpokladať, že zisk stratégie *pôžička* predstavuje súčasnú hodnotu budúcich výplat diskontovaných faktorom $\delta = 2/3$ a zodpovedajúci súčet je navyše zmenšený o faktor $(1 - \delta)$. Tento spôsob výpočtu je prevzatý z diela Vega-Redondo (2003), kapitola 10.5. Stratégia *pôžička* je charakterizovaná v tom zmysle, že hráč hrajúci túto stratégiu prvotne spolupracuje a v ďalších kolách replikuje správanie svojho oponenta. Predpokladajme situáciu, kedy druhý hráč hrá permanentne stratégiu *zrada*. Potom očakávaný zisk prvého hráča, ktorý volí stratégiu *pôžička* môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\begin{aligned} a_{32}^M &= (1 - \delta) \left[a_{12}^M \cdot \delta^0 + a_{22}^M \cdot \delta^1 + a_{22}^M \cdot \delta^2 + ... \right] = \\ &= (1 - \delta) \left[a_{12}^M + a_{22}^M \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \right] = (1 - \delta) \left[a_{12}^M + a_{22}^M \frac{\delta}{1 - \delta} \right]. \end{aligned}$$

Identickým spôsobom určíme zvyšné výplaty stratégie *pôžička*. Týmto získame výplatnú maticu duopolu firiem Saudi Aramco a Gazprom ťažiacich ropu v Kanade s priestormi stratégií $\{spolupráca, zrada, pôžička\}$:

$$\mathbf{A}^M = \begin{pmatrix} 1{,}94 \cdot 10^{10} & 1{,}1 \cdot 10^{10} & 1{,}94 \cdot 10^{10} \\ 2{,}36 \cdot 10^{10} & 1{,}57 \cdot 10^{10} & 1{,}83 \cdot 10^{10} \\ 1{,}94 \cdot 10^{10} & 1{,}41 \cdot 10^{10} & 1{,}94 \cdot 10^{10} \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Symetrická hra dvoch hráčov zadaná výplatnou maticou $\mathbf{A}^M$ má v rýdzich stratégiách dve Nashove equilibria, a týmy sú profily $\boldsymbol{s}_1 = \{(2,2)\}$ a $\boldsymbol{s}_2 = \{(3,3)\}$. Okrem týchto bodov má hra modifikovaná väzňova dilema v zmiešaných stratégiách množinu Nashových equilibrií:

$$X = \left\{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 \leq \tfrac{7}{34}, x_2 = 0, x_3 = 1 - x_1\right\}. \tag{4.13}$$

Poznamenajme, že všetky Nashove equilibria tejto hry sú symetrické:

$$\Delta^{NE} = \left\{e^2, e^3, X\right\}.$$

Rovnováha e^2 je striktná a z tohto dôvodu je evolučne stabilná. Druhou rovnováhou v rýdzich stratégiách je stratégia e^3. Dosadením za $\boldsymbol{y} = e^1$ do vzťahov (2.2) a (2.3) jednoducho overíme, že e^3 nespĺňa podmienky evolučnej stability, keďže $u(e^1, e^1) = u\ (e^3, e^1)$. Z tejto rovnosti zároveň vyplýva, že stratégia e^3 je neutrálne stabilná, teda $e^3 \in \Delta^{NSS}$. Rovnakým spôsobom overíme, že v prípade ľubovoľného equilibria v zmiešaných stratégiách $\boldsymbol{x} \in X$ je porušená podmienka evolučnej stability. Dosadením $\boldsymbol{y} = e^2$ do (2.2) a (2.3) získame $u(e^2, e^2) > u\ (\boldsymbol{x}, e^2)$ pre každé $\boldsymbol{x} \in X$, z čoho plynie, že stratégie $\boldsymbol{x} \in X$ nie sú evolučne stabilné. Hra modifikovaná väzňova dilema zadaná výplatnou maticou $\mathbf{A}^M$ má teda jedinú evolučne stabilnú stratégiu $\Delta^{ESS} = \{e^2\}$.

Predmetom nášho záujmu je analyzovať správanie sa replikátorovej dynamiky v kontexte daného modelu. Príslušný stavový priestor je dvojrozmerný, keďže stavy populácie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ patria do dvojrozmerného simplexu, a preto nám stačí popísať replikátorovú dynamiku pomocou dvoch frekvencií. Zvoľme si teda podiely populácie x_2 a x_3. Potom je replikátorová dynamika v nasledujúcom tvare:

$$\dot{x}_2 = -4{,}69 \cdot 10^8 x_2(x_2^2 - 9 + x_2(8 - \tfrac{14}{3}x_3) + \tfrac{34}{3}x_3), \tag{4.14}$$

$$\dot{x}_3 = 2{,}19 \cdot 10^9 x_3(x_2(x_3 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{3}{14}x_2^2). \tag{4.15}$$

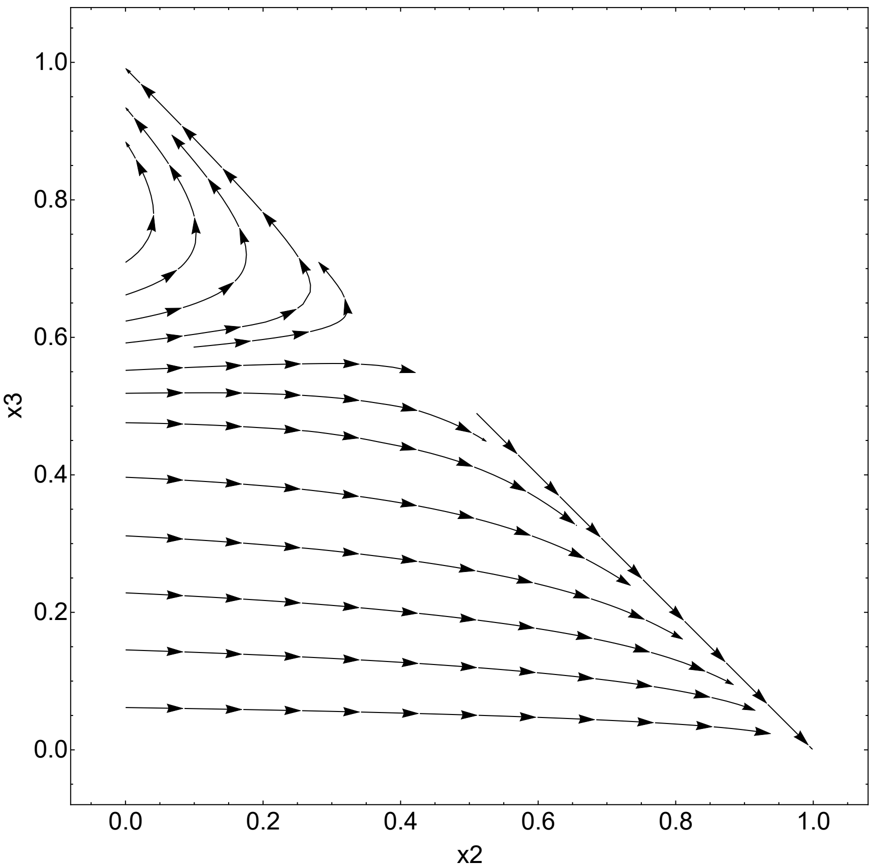
Najskôr vyšetríme stacionárne body tohto systému. Podmienku stacionarity splňujú všetky vrcholy simplexu, teda body $(1,0)$, $(0,1)$ a $(0,0)$. Ďalej hľadáme riešenie rovníc:

$$\dot{x}_2 = 0, \qquad \dot{x}_3 = 0.$$

Rovnosť $\dot{x}_3 = 0$ nastáva práve vtedy, ak $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ a $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{14}x_2$. Pre $x_2 = 0$ dostávame, že všetky stavy v množine

$$H \equiv \{(0, x_3) : 0 \leq x_3 \leq 1\}$$

sú stacionárnymi bodmi replikátorovej dynamiky. Dosadením $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{14}x_2$ do rovnice $\dot{x}_2 = 0$ získame ďalší stacionárny bod $(x_2, x_3) = \left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17}\right)$. Ďalšie stacionárne body rovnice (4.14) a (4.15) nemajú. Grafická reprezentácia vektorového poľa $\varphi(\boldsymbol{x})$ je zobrazená na obrázku 4.1.



Obr. 4.1: Replikátorová dynamika modifikovanej väzňovej dilemy

Pozrime sa teraz na stabilitu stacionárnych bodov. Stav $(x_2, x_3) = (1, 0)$ zodpovedá evolučne stabilnej stratégií e^2, preto je tento bod na základe vety 37 asymptoticky stabilný. Tento záver je zrejmý aj z grafickej reprezentácie vektorového poľa $\varphi(\boldsymbol{x})$, pozri obrázok 4.1, kde môžeme pozorovať, že existuje okolie B^* bodu $(1, 0)$ také, že pre každé $\boldsymbol{x}^0 \in B^* \cap \Delta \times \Delta$ je splnená podmienka:

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t, \boldsymbol{x}^0) = (1, 0).$$

Ďalej sa zameriame na posúdenie asymptotickej stability bodu $(x_2, x_3) = \left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17}\right)$. Z obrázka 4.1 je zrejmé, že tento bod nie je (asymptoticky) stabilný v zmysle definície 29, keďže pre každé $\boldsymbol{x}^0$ z $\left(\frac{7}{17} + \epsilon, \frac{10}{17} - \epsilon\right)$, pre dostatočne malé $\epsilon > 0$, konverguje riešenie $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)$ k bodu $(1, 0)$. Rovnako pre každé $\boldsymbol{x}^0$ z $\left(\frac{7}{17} - \epsilon, \frac{10}{17} + \epsilon\right)$, pre dostatočne malé $\epsilon > 0$, konverguje riešenie $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)$ k bodu $(0, 1)$. Teda bod $\left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17}\right)$ nesplňuje podmienky (asymptotickej ani Lyapunovskej) stability v zmysle definície 29. Nakoniec uvažujme stacionárne body z množiny H. Predtým než začneme s vyšetrovaním stability týchto bodov, rozdelíme si množinu H na nasledujúce tri podmnožiny:

$$H_1 \equiv \{(0, x_3) : 0 \le x_3 < \tfrac{10}{17}\},$$

$$H_2 \equiv \{(0, x_3) : \tfrac{10}{17} \le x_3 < \tfrac{27}{34}\},$$

$$H_3 \equiv \{(0, x_3) : \tfrac{27}{34} \le x_3 \le 1\}.$$

Pre ľubovoľný bod $(0, x_3)$ z množiny H_1 platí, že riešenie $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)$, pre počiatočný stav $\boldsymbol{x}^0 \in (0, x_3 + \epsilon)$ a pre dostatočne malé $\epsilon > 0$, konverguje k bodu $(1, 0)$ (pozri obrázok 4.1). Odtiaľto vyplýva, že akýkoľvek bod z množiny H_1 nie je stabilný v zmysle definície 29. V prípade bodov z množiny H_2 platí, že riešenie $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)$, kde $\boldsymbol{x}^0 \in (0, x_3 + \epsilon)$ a pre dostatočne malé $\epsilon > 0$, konverguje k nejakému bodu z množiny H_3 (pozri obrázok 4.1). Preto ľubovoľný bod z množiny H_2 nespĺňa podmienku stability v zmysle definície 29. Nakoniec pre každý bod $(0, x_3)$ z množiny $H_3 \setminus (0, 1)$ môžeme pozorovať, že riešenie $\xi(t, \boldsymbol{x}^0)$, kde $\boldsymbol{x}^0 \in (0, x_3 + \epsilon)$, pre dostatočne malé $\epsilon > 0$, konverguje opäť k nejakému bodu z množiny H_3 (pozri obrázok 4.1). Bod $(0, 1)$ zodpovedá neutrálne stabilnej stratégii e^3, preto je tento bod na základe vety 39 Lyapunovsky stabilný. Na základe obrázka 4.1 a vlastnosti neutrálnej stability plynie, že ľubovoľný bod $(0, x_3)$ z množiny H_3 je Lyapunovsky stabilný, ale nie asymptoticky stabilný. Poznamenajme, že tento záver je v súlade s vetami 32 a 33, keďže množina H_3 presne zodpovedá Nashovým rovnováham patriacim do množiny X danej vzťahom (4.13).

Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo popísať teóriu evolučných hier a ukázať jej aplikáciu na ekonomický model oligopolu (duopolu). V úvode sme definovali kľúčové pojmy z oblasti teórie nekooperatívnych hier, ktoré nás sprevádzali v celom texte práce. Pripomenuli sme, že na rozdiel od rýdzich stratégií má každá konečná hra so zmiešaným rozšírením aspoň jedno Nashovo equilibrium. A podobne v každej konečnej symetrickej hre dvoch hráčov so zmiešaným rozšírením existuje aspoň jedna symetrická Nashova rovnováha.

V nasledujúcej časti sme definovali pojem evolučne stabilnej stratégie. Evolučne stabilná stratégia je symetrickým Nashovým equilibriom s dodatočnými vlastnosťami evolučnej stability. Ďalej sme prostredníctvom viet ukázali, že evolučne stabilná stratégia spĺňa aj ďalšie charakteristiky, ktoré vystihujú evolučnú stabilitu - lokálnu prevahu a invazívnu bariéru. Rovnakým spôsobom sme odvodili koncept neutrálnej stability, ktorá predstavuje slabšie kritérium evolučnej stability. Ukázalo sa, že kandidátmi na neutrálne stabilnú stratégiu sú symetrické Nashove equilibria s menej striktnými vlastnosťami evolučnej stability.

V ďalšej kapitole sme odvodili systém replikátorových rovníc, ktoré predstavujú deterministický dynamický model hry. Ukázali sme, že tento systém diferenciálnych rovníc má v prípade symetrickej hry dvoch hráčov, kedy zmiešaná stratégia reprezentuje stav populácie, jednoznačné riešenie pre ľubovoľný počiatočný stav. Navyše odpovedajúci simplex zmiešaných stratégií je v tomto systéme invariantný. Množina symetrických Nashových equilibrií je podmnožinou stacionárnych bodov replikátorových rovníc a každý Lyapunovsky stabilný stav je symetrickou Nashovou rovnováhou. Navyše sme potvrdili, že každá evolučne stabilná stratégia je asymptoticky stabilná v replikátorovej dynamike a každá neutrálne stabilná stratégia je Lyapunovsky stabilná.

Vyústením tejto diplomovej práce je praktická časť, ktorá obsahuje dve numerické štúdie. V úvode tejto kapitoly sme odvodili, že model Cournotovho duopolu s možnosťou kartelu, s priestormi stratégií spolupráca a zrada, je symetrickou hrou typu väzňova dilema. Prvá numerická štúdia bola venovaná práve modelu jednoduchej väzňovej dilemy. Výsledkom tejto štúdie je, že každý vnútorný stav (oboch hráčov) konverguje v čase k stratégií zrada, čo znamená, že duopolisti si budú vzájomne konkurovať. Týmto sme zároveň potvrdili fakt, že jediná evolučne stabilná stratégia zrada je zároveň asymptoticky stabilná v tomto dynamickom modele. Druhá numerická štúdia obsahuje rozšírenie predošlého modelu o stratégiu pôžička. Na rozdiel od predošlej simulácie je v tomto prípade riešenie systému diferenciálnych rovníc závislé na počiatočnom stave. Podrobnou analýzou sme potvrdili, že evolučne stabilná stratégia zrada je asymptoticky stabilná a neutrálne stabilná stratégia pôžička je Lyapunovsky stabilná. Taktiež sme preukázali, že ostatné Lyapunovsky stabilné body sú zároveň symetrickými Nashovými rovnováhami. V obidvoch numerických štúdiách sa ukázalo, že pre ľubovoľný počiatočný stav, v ktorom sú všetky podiely populácie kladné, riešenie systému nikdy nekonverguje k stavu zodpovedajúcemu kartelovej dohode oboch duopolistov.

Spresnenie modelu Cournotovho duopolu, ktorý sme uvažovali v praktickej časti, by mohlo spočívať v použití kvadratickej, či eventuálne kubickej nákladovej funkcie. Jej odhad je avšak veľmi náročný, keďže žiadna z firiem neuvádza podrobnejšie údaje o svojich nákladoch. To isté platí aj v prípade funkcie ceny. Okrem toho sme v modele predpokladali, že obaja duopolisti majú rovnaké fixné náklady, pričom tento predpoklad zrejme v reálnej tržnej situácií neplatí. Dôvodom k zavedeniu tohto obmedzenia bolo, že teória evolučných hier vyžaduje koncept symetrickej hry dvoch hráčov. Odhliadnuc od aspektu teórie evolučných hier, systém replikátorových rovníc, ktorý sme odvodili v tejto práci, je možné použiť aj k simulácií asymetrických konfliktov.

Zoznam použitej literatúry

AXELROD, R. (1985). *The Evolution of Cooperation.* Basic Books, New York. ISBN 978-0465021215.

BALKENBORG, D. a SCHLAG, K. (1995). On the interpretation of evolutionary stable sets in symmetric and asymmetric games. Discussion paper. Bonn University Department.

BOMZE, I. (1986). Non-cooperative two-person games in biology: A classification. *Journal of Game Theory*, **15**, 31–57.

BOMZE, I. (1991). Cross entropy minimization in uninvadable states of complex populations. *Journal of Mathematical Biology*, **30**, 73–87.

BOMZE, I. a WEIBULL, J. W. (1995). Does neutral stability imply Lyapunov stability? *Games and Economic Behavior*, **11**, 173–192.

CNN MONEY (2015). What it costs to produce oil. URL `http://money.cnn.com/interactive/economy/the-cost-to-produce-a-barrel-of-oil/index.html?iid=EL/`.

FUDENBERG, D. a TIROLE, J. (1991). *Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. ISBN 978-0262061414.

GAZPROM (2016). Financial report 2015. URL `http://www.gazprom.com/investors/disclosure/reports/2015/`.

GIBBONS, R. (1992). *Game Theory for Applied Economists.* Princeton University Press, Princeton. ISBN 9780691003955.

HAIGH, J. (1975). Game theory and evolution. *Advances in Applied Probability*, **7**, 8–11.

HALE, J. (1969). *Ordinary Differential Equations.* Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida. ISBN 978-0486472119.

HOFBAUER, J. a SIGMUND, K. (1988). *The Theory of Evolution and Dynamical Systems.* Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-35838-8.

HOFBAUER, J., SCHUSTER, P. a SIGMUND, K. (1979). A note on evolutionary stable strategies and game dynamics. *Journal of Theoretical Biology*, **81**, 609–612.

KAŠPAR, M. (2013). *Analýza jádra kooperativních her.* Diplomová práce, MFF UK.

MANKIW, N. G. (2009). *Zásady ekonomie.* První vydání. Grada, Praha. ISBN 978-80-7169-891-3.

MAYNARD SMITH, J. (1974). The theory of games and the evolution of animal conflicts. *Journal of Theoretical Biology*, **47**, 209–221.

Maynard Smith, J. (1982). *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 978-0521288842.

Maynard Smith, J. a Price, G. R. (1973). The logic of animal conflict. *Nature*, **246**, 15–18.

Myerson, R. B. (1978). Refinements of the Nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory*, **7**, 73–80.

Nash, J. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, **36**, 48–49.

Samuelson, L. a Zhang, J. (1992). Evolutionary stability in asymmetric games. *Journal of Economic Theory*, **57**, 363–391.

Samuelson, P. a Nordhaus, W. (2000). *Ekonómia.* Prvé vydanie. Elita, Bratislava. ISBN 80-8044-059-X.

Saudi Aramco (2016). Saudi Aramco Facts and Figures 2015. URL `http://www.saudiaramco.com/content/saudi-aramco/en/home/news-media/publications/corporate-reports.html`.

Schlag, K. (1993). Cheap talk and evolutionary dynamics. Discussion paper B-242. University of Bonn.

Selten, R. (1975). Re-examination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, **4**, 25–55.

Swinkels, J. (1992). Evolutionary stability with equilibrium entrants. *Journal of Economic Theory*, **57**, 306–332.

Taylor, P. a Jonker, L. (1978). Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Mathematical Biosciences*, **40**, 145–156.

Thomas, B. (1985). On evolutionary stable sets. *Journal of Mathematical Biology*, **22**, 105–115.

van Damme, E. (1991). *Stability and Perfection of Nash Equilibria.* Springer Berlin Heidelberg, Berlin. ISBN 978-3-540-53800-4.

Vega-Redondo, F. (2003). *Economics and the Theory of Games.* Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 978-0521775908.

Weibull, J. W. (1995). *Evolutionary Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. ISBN 0-262-73121-5.

Zeeman, E. (1981). Dynamics of the evolution of animal conflicts. *Journal of Theoretical Biology*, **89**, 249–270.

Zoznam tabuliek