Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta
Katedra logiky

Zuzana Arazim Dolejší

Filosofický výklad a možné interpretace Gödelových vět o neúplnosti
Philosophical analysis and possible interpretations of Gödel's incompleteness theorems

Diplomová práce

Vedoucí práce: PhDr. Marta Vlasáková, PhD.

2016

Děkuji své vedoucí diplomové práce, paní doktorce Martě Vlasákové, za veškerý čas, který mi věnovala, za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích.
Dále děkuji svému manželovi Pavlu Arazimovi za podporu a za projevy lásky, které mi byly povbuzením v těžkých chvílích.
Děkuji také své mamce, paní Evě Dolejší, za její víru v mé schopnosti dokončit diplomovou práci, která rozdmýchávala poslední zbytky naděje, které ve mně doutnaly.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně, že jsem řádně citovala všechny použité prameny a literaturu a že práce nebyla využita v rámci jiného vysokoškolského studia či k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze, dne 22. května 2016

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá rozborem možných filosofických výkladů Gödelových vět o neúplnosti aritmetiky a jejich interpretacemi v různých odvětvích filosofie (fenomenologie, analytická filosofie mysli, Kantova filosofie). Část práce je také věnována přístupům k matematickým disciplínám a jejich proměnám vlivem přelomových objevů, jako jsou neeukleidovské geometrie a věty o neúplnosti. Zároveň je zhodnocen vztah mezi druhou Gödelovou větou o neúplnosti, Gentzenovým důkazem bezespornosti Peanovy aritmetiky a Hilbertovým programem.

Klíčová slova: Gödelovy věty, neúplnost aritmetiky, Hilbertův program, neeukleidovské geometrie, fenomenologie, analytická filosofie mysli, Kant

Abstract

The diploma thesis deals with possible philosophical analyses of Gödel's incompleteness theorems and their interpretations in different branches of philosophy (phenomenology, analytical philosophy of mind, Kant's philosophy). Part of the thesis is dedicated to the attitudes to mathematical disciplines and their fundamental transformations caused by revolutionary discoveries such as Non-Euclidean geometries and incompletness theorems. The relationship between the second Gödel's incompleteness theorem, Gentzen's consistency proof of Peano arithmetic and Hilbert's programme is also discussed.

Key words: Gödel's theorems, incompleteness of arithmetic, Hilbert's programme, Non-Euclidean geometries, phenomenology, analytical philosophy of mind, Kant

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá první a druhou Gödelovou větou o neúplnosti aritmetiky. Jedná se o jedny z nejdůležitějších výsledků moderní logiky, které nepřekvapivě vyvolalo mnohé ohlasy ve filosofii a v dalších disciplínách, které s logikou souvisí volněji. Svou diplomovou práci zaměřím na filosofický význam, interpretace a důsledky, které z vět přímo či nepřímo vyplývají. První Gödelova věta bývá nazývána větou o neúplnosti nebo také větou o neaxiomatizovatelnosti aritmetiky. Tato věta ve zkratce tvrdí, že každá bezesporná formální teorie, v níž může být vyjádřeno určité množství aritmetiky, je neúplná; tedy že existují tvrzení v jazyce této teorie, která v této teorii nemohou být dokázána ani vyvrácena. Podle druhé Gödelovy věty nelze dokázat bezespornost Peanovy aritmetiky ani žádné jiné dostatečně silné bezesporné a rekurzivně axiomatizovatelné teorie v sobě samé.

Gödelovy věty o neúplnosti jsou vnímány jako jeden z největších mezníků vývoje moderní logiky. Do té doby vše nasvědčovalo tomu, že pro každé odvětví matematického myšlení lze najít množinu axiomů a ke každé pravdivé formuli odpovídající důkaz z příslušné teorie. Gödel však pomocí autoreferenční formule dokázal, že ke každé rekurzivní množině aritmetických formulí, ze kterých nelze odvodit spor (tzv. formálně bezesporná množina formulí) a z níž jsou formálně dokazatelné všechny axiomy Peanovy aritmetiky, existuje pravdivá aritmetická formule, která není z této množiny axiomů formálně dokazatelná ani vyvratitelná.

První část práce bude věnována nastínění intelektuální atmosféry doby, kdy Gödel veřejně vyslovil větu o neúplnosti. Pro účely pochopení vztahu Gödelových vět s filosofií a dopadu, který věty měly, si dovolím ve stručnosti prezentovat problematiku neeukleidovských geometrií. Jedná se podle mého názoru o příhodnou ukázku odlišných přístupů k tomu, jaká je povaha matematiky, potažmo logiky. K problematice různých druhů vnímání prostoru patří i Kantova filosofie a klasifikace druhů poznání, která, jak se později ukáže, bude hrát významnou roli i v možných přístupech ke Gödelovým větám. Dále se zaměřím na Hilbertův program, jakožto jeden z nejznámějších pokusů formalizovat matematiku, jehož některé cíle byly zmařeny právě Gödelovými větami.

Práce se nebude zabývat formální stránkou vět (tj. detaily důkazu aj.), ale spíše jejich „neformálním“ obsahem. Ty už ostatně uvádí sám Gödel v úvodu svého článku. Dnes se Gödelovy věty obvykle dokazují v trochu upravené podobě, než v jaké zazněly původně od Gödela, některé dnes nejčastěji se vyskytující formulace zazní v této práci také.

Gödelovy věty, jakožto zásadní mezník ve vývoji moderní logiky, vyprovokovaly mnoho diskuzí a dodnes inspirují k různým filosofickým interpretacím. V této práci představím jedny z nejznámějších přístupů k důsledkům vět o neúplnosti. Přístup odmítající byť sebemenší filosofický dopad Gödelových vět bude zmíněn jen krátce a bude vysvětleno, proč podle mého názoru není takovýto přístup obhajitelný. Dále představím způsob, jakým interpretoval věty o neúplnosti sám Gödel, který se obrátil k fenomenologii. Asi nejproslulejší přístup ke Gödelovým větám rozšířený i mezi laiky, je ten, že jsou důkazem nezachytitelnosti a nepopsatelnosti lidského myšlení formálními systémy. Tento názor bude uveden v souvislosti s filosofií mysli a úvahami o umělé inteligenci. Každý z uvedených přístupů bude okomentován a podložen literaturou, neboť se jedná o téma široce diskutované v odborných i vědecky populárních publikacích.

Kromě těchto přístupů se pokusím ještě navrhnout vlastní stanovisko, které by nás mělo zavést hlouběji do dějin filosofie, a aplikovat Kantovy epistemologické klasifikace na Gödelovy věty. Věty o neúplnosti, jako výrazný převrat v dějinách logiky, mohou vyvolávat otázky, jak se dívat na vědy, ve kterých k podobným převratům dochází. Kant ve své době přišel s návrhem jak přistupovat k matematickým disciplínám a já vidím v Gödelových větách podnět se k jeho přístupu vrátit.

V závěru práce se pokusím (s pomocí nápadů jiných filosofů) navrhnout přístup, který by mohl upřesnit, nakolik lze Gödelovy věty (a jiná matematická / logická tvrzení) aplikovat mimo pole jejich původní působnosti a na kolik je nutné je ponechat jako interní záležitost logiky a matematiky.

1. Postoj k logice a matematice v době objevu Gödelových vět

Matematika a s ní související disciplíny bývá považována za čistě apriorní a rigorózní vědu. Skutečnost, že její teorie a výsledky nejsou ohrožovány empirickými objevy okolního světa, může pro mnohé představovat vzorový příklad dokonalého poznání. Metody dokazování matematických tvrzení, jako např. důkazy sporem či matematickou indukcí jsou pro mnohé racionalisty nezpochybnitelně jasným příkladem správného logického uvažování.

Na začátku důkazu však musí stát něco, co samo dokázáno není – posloupnost přes pravidla přípustná v daném kalkulu / formálním systému k závěru začíná axiomy. Jedná se o (obvykle) matematické intuice, o jejichž pravdivosti se nedalo pochybovat a ze kterých lze dedukcí odvodit všechny teorémy určité matematické teorie. Všechny teorémy systému, který chceme axiomatizovat, musí být tedy možné odvodit z výchozí skupiny axiomů podle odvozovacích pravidel.

Nasnadě je otázka, podle jakého kritéria se určilo, která tvrzení se stanou axiomy. Od takové otázky už není daleko k úvaze, zda existují taková tvrzení, o jejichž pravdivosti je každý člověk stoprocentně přesvědčen, ať už jeho přesvědčení pochází z empirického poznání, či z čisté matematické intuice. Jak napovídá i etymologický původ slova axióma, tedy *to, co se uznává*, jednalo se již od počátku o výroky, které jsou obecně uznávány za platné. Již od antiky směřovala snaha o co největší zpřesnění k používání axiomatických teorií, tedy stanovení nejzákladnějších pravd natolik určitě správných, že jich nebylo třeba (a ani možno) dokazovat.

První známý systém axiomů, resp. postulátů stanovil Eukleidés ve starověkém Řecku pro geometrii. Čtyři z pěti jeho postulátů (zhruba parafrázováno: *(1) existuje právě jedna přímka mezi dvěma body, (2) úsečku lze prodloužit a vznikne další úsečka, (3) lze nakreslit kružnici s libovolným středem a poloměrem, (4) všechny pravé úhly jsou si rovny*) se skutečně jeví natolik intuitivní a samozřejmé, že nevznikala potřeba je dokazovat. Pátý postulát (*Pokud přímka protíná dvě přímky tak, že s nimi tvoří dva úhly, které jsou dohromady menší než dva úhly pravé, pak se tyto dvě přímky prodloužené do nekonečna protnou na stejné straně, kde tvoří dva úhly menší než dva pravé.*) však býval už od antiky považován spíše za tvrzení, které je sice pravdivé, ale ne natolik intuitivně, aby se dalo považovat za axiom. Na první pohled sami vidíme, že tento postulát je, na rozdíl od čtyř předchozích, formulován komplikovaněji a nepopisuje ani tak fundamentální vlastnost základních geometrických objektů, spíše je netriviálním tvrzením o nich.

Až do přelomu 19. a 20. století platily Euklidovy Základy za vzor intelektuální důslednosti nejenom pro geometrii, ale pro celou matematiku, zakládaly její postavení a vysokou prestiž. Sama geometrie byla dlouho považována za vědu, jež dochází k poznatkům zcela bezpečně (resp. nejbezpečněji ze všech matematických disciplín).

Jedním z lidí, kteří v rámci snahy o formalizaci začali zpochybňovat i rigoróznost Eukleidem prováděných důkazů, byl podle Zach (2003) německý matematik David Hilbert. Ten se pokoušel o vylepšenou axiomatizaci v rámci moderní matematiky a chtěl jít dál v tendencích zpřesňování započatých Fregem v Grundgesetze a Russellem v Principia Mathematica a snažil se zdokonalovat jejich systémy. Jak uvádí Jaroslav Peregrin v Peregrin (1998a), za vzorový příklad axiomatizované teorie je od konce minulého století považováno axiomatické zachycení nejelementárnější části matematiky, aritmetiky (tj. teorie přirozených čísel a jejich sčítání a násobení) nazývané podle italského logika a matematika Peanova aritmetika. Axiomy této aritmetiky se týkají základních pravidel sčítání a násobení. Stejně jako Eukleidovy postuláty i tyto axiomy byly obecně přijaty jako rozumné a nejspíše vyčerpávající vyjádření principů aritmetiky.

Jak jsme již naznačili, ještě před Hilbertem přinesl velký posun ve snahách o větší míru exaktnosti Gottlob Frege. V druhé polovině 19. století se zabýval otázkou, jaká je hranice mezi matematikou a logikou a vytvořil mocné důkazové nástroje. Jeho systém v podstatě odstartoval moderní logiku. Jedním z jejích největších přínosů byl pokrok ve studiu vyplývání a dokazování způsobený vyjádřením studovaných teorií tak, jak si to Frege přál, totiž *„v nějakém přesně vymezeném formálním jazyce, který bude oproštěn od všeho toho, co není podstatné z hlediska odvozování“* Peregrin (1998a). Fregův systém má mnoho společného s naivní teorií množin.[1]

Bertnard Russel se pak vytvořením nového systému, tzv. teorie typů v díle nazvaném Principia Mathematica, snažil vyhnout paradoxu ve Fregově logice zapříčiněnému autoreferencí. Právě v Russelově systému (který budeme značit PM) Gödel vyslovil své věty, které, jak později uvidíme, zmařily z velké části Hilbertův plán formalizovat matematické disciplíny. Hilbert byl přesvědčen, že otázku po pravdivosti nebo platnosti v podstatě libovolného matematického tvrzení z jakékoli matematické disciplíny bude nakonec v rámci zpřesňování matematiky možné redukovat na otázku po jeho dokazatelnosti z nějaké vhodně zvolené množiny axiomů. Přitom poukázal na skutečnost, že poté, co jsme věty přirozeného jazyka přeformulovali do výroků v přesně definovaném formálním jazyce, můžeme i na teorie (tj. množiny axiomů) a teorémy *„pohlédnout jako na matematické objekty a odvozování a dokazování nahlédnout jako matematický vztah studovatelný (elementárními) matema-*

[1] Fregův logický kalkulus v Begriffschriftu byl „predikátový“ v tom původním slova smyslu; částečně množinové pojetí (přičemž Frege ale považoval množiny za rozsahy pojmů) je aplikováno v Grundgesetze der Arithmetik, tam jde ale o výstavbu aritmetiky na čistě logických pojmech (logicismus) – v systému Grundgesetze objevil Russell spor.

tickými metodami“ Peregrin (1998a). V důsledku to znamená, že se otázka dokazatelnosti (a tím pádem i pravdivosti) libovolného tvrzení převede na otázku určitého vztahu mezi matematickými objekty (axiomy a tvrzeními). Pro tyto snahy Hilberta a jeho následovníků se vžilo pojmenování Hilbertův program. Určitou dobu se zdálo, že matematika skutečně spěla k jeho naplnění.

Gödelovy věty jakožto významný milník a zvrat v tomto vývoji dnes obvykle dokazujeme v predikátové logice prvního řádu. Podoba, v jaké tuto logiku známe dnes, se do značené míry zakládá právě na Fregově i Russellově systému, ale také se od nich v mnohém liší. Je tedy potřeba mít na paměti, že Hilbertovy snahy o formalismus i Gödelovy výsledky se dnes formulují obvykle v trochu jiném rámci, totiž v prvořádové predikátové logice, než v jakém je formulovali jejich autoři – v systému Principia Mathematica.

1.1 Vztah matematiky a smyslového vnímání

Můžeme se ptát, podle jakých kritérií byla určitá tvrzení prohlášena za axiomy matematických disciplín a podle jakých kritérií byla k těmto tvrzením vybrána pravidla odvození. Jak moc byla taková pravidla ovlivněná subjektivními činiteli (přístupem, předsudky, přílišnou snahou o zobecnění) těch, kteří je stanovovali, a nakolik jsou pravidla či axiomy odrazem něčeho fixního, nezávislého na proměnlivých okolnostech.

S tím souvisí otázka, zda matematické teorie vychází čistě z našich v podstatě arbitrárních konvencí (k takovému stanovisku směřoval např. Hilbertův formalismus) nebo zda je jejich podoba nějakým hlubším způsobem nutná, ať už proto, že by matematické objekty měly svou objektivní realitu (což by byla nějaká forma platonismu), nebo proto, že odrážejí formy našeho vnímání (jak si myslel Kant a jeho následovníci). K takovéto otázce patří i úvaha nad tím, jak lidé získávají své poznání, zda existuje poznání jen jednoho druhu a pokud ne, jakým způsobem lze poznání rozdělit.

Jedno z nejznámějších dělení na druhy poznání je poznání a priori (poznání, které člověk může mít nezávisle na zkušenosti, např. některá matematická tvrzení – třeba výrok typu a+a=2a, protože vychází z pouhé reflexe) a poznání a posteriori (poznatek až na základě zkušenosti, např. výrok typu „čerstvě napadaný sníh je bílý“).

Dalším důležitým dělením je dělení na soudy syntetické a analytické. Soud syntetický je typ výroku, který vypovídá o podmětu něco nového, rozšiřuje tedy poznání (např. papír se vyrábí ze dřeva). Protikladem k tomuto soudu je soud analytický, které vyplývá z vlastnosti objektu (např. grošák je strakatý kůň).

U některých poznatků může být obtížné rozhodnout, do kterých z uvedených kategorií je zařadit (zda jsou tedy soudy, které je vyjadřují, za prvé apriorní, nebo aposteriorní a za druhé analytické nebo syntetické). Disciplína, která se zabývá druhy poznání, u nichž je méně jasné, jaký druh poznání jim přiřadit, je například geometrie. Nelze ji považovat za vědu aposteriorní, protože jinak bychom si nemohli být jejími výsledky jisti tak, jak ve skutečnosti jsme. Ani ji však nemůžeme označit za vědu analytickou, protože by nám nemohla říkat nic nového a nebyla by pak aplikovatelná na reálný prostor.[2] Immanuel Kant si uvědomoval obě tyto skutečnosti, a neřadil tím pádem geometrii ani do jedné z kategorií. Podobně se Kant díval i na aritmetiku, kterou vedle geometrie považoval za druhou základní matematickou disciplínu. Tak, jako geometrie souvisí s prostorem, souvisí podle něj aritmetika s časem a nemůže být ani aposteriorní ani analytická. Celé matematice tedy vymezil novou zvláštní sféru – syntetickou a priori.

Zaměřme se nyní na Kantovo chápání geometrie (a obecně matematiky) a následný prudký vývoj této disciplíny trochu podrobněji. Tento vývoj, jak později uvidíme, byl důležitý pro vznik Hilbertova programu a Kant pro nás bude i později důležitým autorem, do jehož myšlenkového rámce se pokusíme význam Gödelových vět zasadit. V následující sekci se budeme věnovat spíše

[2] Arazim (2013)

Kantově filosofii, geometrii a prostoru, ovšem je třeba nezapomínat, že mnohé z toho, co řekneme, platí i o aritmetice a o čase. Podorobněji se ale aritmetice budeme věnovat až později.

1.1.1 Vývoj geometrie a náhledů na ni

Podle Kanta prostor (a také čas) sice závisí na nás, ale není námi vymyšlen. Nemůžeme si jej vybrat, všechno kolem nás vidíme uspořádáno do jedné prostorové formy, která je vlastní naší lidské přirozenosti. Než se rozhlédneme kolem nás, patrně nevíme, jaké předměty uvidíme, ale víme, že je uvidíme v prostoru. Bez prostoru bychom ani žádné předměty, které ho vyplňují, nemohli vidět. A právě prostor (a čas) je naše čistá neboli apriorní forma názoru. Dá se tedy říci, že geometrie je nauka o prostoru, o této apriorní formě názoru. Tím, že prostor je pro nás jen jediný a jednoznačný, může geometrie docházet k jistým poznatkům, bez toho, aby byly její výsledky rozporovány zkušenostmi. Kant se tedy ve své době domníval, že eukleidovská geometrie včetně všech svých základů je správná. Geometrii považuje za něco, co musí zkušenosti epistemologicky předcházet, a nikoli jí být teprve potvrzováno nebo vyvraceno.

I skutečnost, že bychom našli dvě rovnoběžky, které by se, byť třeba po dlouhé dráze protnuly, nebo trojúhelník s jiným součtem vnitřních úhlů než sto osmdesát stupňů, by Kantův postoj k eukleidovské geometrii nemusela změnit. Protože např. o zmíněných rovnoběžkách lze tvrdit, že nejdou opravdu po přímce, ale jsou (sotva znatelně) zahnuté. Ať už vidíme geometrické útvary jakkoli, empirická zkušenost nemůže vyvracet geometrii, neboť geometrii nelze empiricky testovat.

Kantovo pojetí geometrie a prostoru samotného uvádím proto, že pozdější vývoj tzv. neeukleidovských geometrií jeho nahlížení značně zpochybnil. Abychom pochopili proč, vysvětleme si nejprve, co neeukleidovské geometrie jsou a z čeho vznikly.

Jak už název napovídá, neeukleidovské geometrie jsou založené na odmítnutí části Euklidových základů. Vzhledem ke zmiňované neintuitivnosti pátého postulátu a jeho komplikovanému znění není překvapivé, že to byl právě tento postulát (přezdíván postulát rovnoběžnosti), o jehož zařazení mezi axiomy (a později i o jehož správnosti) se pochybovalo. Jeho znění už známe, vyslovme si nyní jeho ekvivalentní jednodušší formulaci: k danému bodu a přímce lze sestrojit právě jednu rovnoběžku, která prochází daným bodem.

Již od antiky se matematici snažili dokázat, že tento pátý postulát je důsledkem prvních čtyř. Často však dokázali jen najít ekvivalentní tvrzení, mimo jiné i známé pravidlo, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je přesně 180°. Výrazný posun umožnil Girolamo Saccheri, který se rozhodl zkusit dokázat pátý postulát sporem. Budoval systém geometrie, ve kterém by tento postulát neplatil. V takovém systému by mělo být možné, aby se neprotnuly dvě přímky, jež spolu svírají menší úhel než dvě rovnoběžky (v eukleidovském slova smyslu). Petr Vopěnka ve svých Rozpravách s geometrií (Vopěnka (1995)) hovoří o jeho postupu jako o budování světa odsouzeného k zániku. K zániku, tedy k objevení sporu v takto konstruovaném systému, však nedošlo ani za Saccheriho ani za jeho následovníků.

Neeuklidovské geometrie byly dlouho považovány za možná bezesporné a snad i v něčem zajímavé matematické teorie, avšak za takové, které však nebylo možné chápat jakožto nauku o prostoru. I přes další výrazný rozvoj těchto teorií, který přinášeli někteří vynikající matematici jako Gauss nebo Lobačevskij, se stále nezdálo, že by podobné výzkumy popisovaly prostor, a tudíž jim nebyla mezi širší odbornou veřejností věnována opravdová pozornost (Coffa (1994)). Tato situace se začala měnit kolem poloviny devatenáctého století, kdy italský matematik Eugenio Beltrami ukázal, že neeuklidovské geometrie lze přece jenom pojmout jako disciplíny pojednávající o prostoru. Beltrami svůj objev původně zamýšlel jako obranu euklidovského systému, nakonec však způsobil, že se jeho alternativy prosadily jako uznávané matematické teorie. Ukázal, že neeuklidovské geometrie mají své modely, které doopravdy popisují něco z názorné reality. Ve skutečnosti si můžeme představit „přímky“ (nikoli v běžném slova smyslu), jež jsou „rovnoběžné“ (ve smyslu že se k sobě přibližují nejméně, jak je to možné, což by v případě eukleidovské geometrii znamenalo, že se nepřibližují vůbec), ale přesto se protnou. Jde o nejkratší vzdálenosti dvou bodů na povrchu koule, tedy o geodetické čáry jdoucí po tomto povrchu. Geometrii, jejíž plocha odpovídá povrchu koule, se říká eliptická. Každé dvě přímky v eliptické geometrii jsou konečné a protínají se dokonce dvakrát. Dále lze také ukázat, že součet vnitřních úhlů kteréhokoli trojúhelníku je větší než dva pravé. Délka přímek, stejně jako odchylka součtu vnitřních úhlů trojúhelníka od dvou pravých záleží na velikosti koule, na jejímž povrchu děláme geometrii.

Lze také uvažovat jinou alternativní geometrii, v níž k dané přímce a bodu mimo ni lze vést nekonečně mnoho různých přímek, které se s ní nikdy neprotnou. Z určitého hlediska by dávalo smysl říkat jim rovnoběžky (protože nemají žádný společný bod), ale pozorovatel neobeznámený s neeukleidovskými geometriemi by se pravděpodobně zdráhal je tak nazvat, protože vypadají, že nemají stejný směr, a tím pádem se k sobě přibližují nebo se od sebe oddalují.[3] Mluvíme o geodetických čárách na ploše zakřivené do tvaru sedla. Takto zakřivenou plochu, stejně jako přímky na ní, lze prodlužovat do nekonečna. Tuto geometrii nazýváme hyperbolickou. Každý trojúhelník v této geometrii má součet vnitřních úhlů menší než sto osmdesát stupňů a k libovolné přímce existuje nekonečné množství přímek, s nimiž se neprotíná, přímky ani nemají tím pádem společnou kolmici. Čím více je přitom plocha, o níž pojednáváme, zakřivená, o to více se její vlastnosti odchylují od euklidovské geometrie, takže součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je o to menší, a o to ostřejší úhel spolu mohou svírat dvě přímky, aniž se protnou.[4]

[3] Pojem rovnoběžnosti je tak pro nás najednou „nedourčený“ a nakonec lze říci, že právě skutečnost, že matematika dostává volnost v jeho určení, způsobuje vznik různých geometrií.

[4] Obě alternativní geometrie mají s tou euklidovskou jednu podstatnou vlastnost společnou. Totiž tu, že po dané ploše můžeme pohybovat např. trojúhelníkem, aniž by se

Beltramiho modely později vedly k určitému osamostatnění neeuklidovských geometrií a ke vzniku pluralismu. Toho času se vedly debaty mezi zastánci relativistického pojetí geometrie a pojetí více konzervativního (podle Kantova vzoru). Uveďme si pro zajímavost polemiku mezi Poincarém a Russellem. Podle Poincarého spor o to, zda je lepší euklidovská, hyperbolická nebo eliptická geometrie v podstatě nedává smysl, protože všechny mohou fungovat stejně dobře a jsou navzájem nahraditelné. Když se např. tři zmíněné geometrie neshodují v otázce po součtu vnitřních úhlů trojúhelníka, je to neshoda pouze zdánlivá, protože každá z těchto teorií označuje slovem trojúhelník něco jiného. Rozhodování se mezi různými geometriemi není tedy nic jiného než rozhodování se mezi různými pojmenováními určitých geometrických objektů. Je na naší vůli, se kterou geometrií budeme pracovat. Každá se může v určité situaci prokázat jako použitelnější, ale nikoli jako pravdivější Shapiro (1996).[5]

Russell namítal, že podle takového relativizujícího pojetí to může vypadat, že si geometrie svět vymýšlí, přitom by jej měla popisovat. Nakonec ale v podstatě Poincarému ustoupil a uznal vývoj alternativních geometrií jako legitimní, byť měl stále za to, že filosofie by měla hledat způsoby, jak situaci lépe uchopit.

Další významnější polemikou byla ta mezi Gottlobem Fregem a Davidem Hilbertem. Oba byli klíčovými postavami moderní logiky a měli mnoho společného v tom, čeho dosáhli ve výstavbě formálních axiomatických systémů. Hilbert velmi pečlivě pracoval s Euklidovými Základy a snažil se v jeho důkazech opravit nedostatky, jež na nich matematici postupně shledávali, tedy především doplňování kroků, jež Eukleidés považoval za zřejmé, ale z hle-

změnil, takže délky jeho stran i velikost jeho vnitřních úhlů zůstávají stejné

[5]Např. Poincaré si myslel, že ačkoli se nedá říct, že jedna geometrie je pravdivější, eukleidovská geometrie bude více používána, protože je jednodušší a tudíž snáze aplikovatelná ve fyzice. Tento předpoklad nazývá Susan Haack *Poincaré Fallacy* (Haack (1974)), neboť se ve 20. století ukázalo (díky Einsteinovi), že celkově bude jednodušší fyzika se složitější geometrií

diska nově se vyvíjející logiky byly nezbytné. Frege také zpevňoval základy matematiky, ale jeho přístup byl v mnohém jiný než ten Hilbertův – na rozdíl od něj byl stále (i přes dobový revoluční vývoj) přesvědčen, že matematika pojednává o konkrétních předmětech, resp. měl za to, že pojednává o určité konkrétní sféře objektů, jako jsou přirozená čísla, trojúhelníky apod. Jejich spor byl zapříčiněn především odlišným nahlížením na axiomy. Podle Hilberta axiomy definují nějaký matematický diskurs, takže samy o sobě nemohou být de facto ani pravdivé, ani nepravdivé. Přitom nějaká sada axiomů je přijatelná, pokud je bezesporná. Další podmínky nepožadoval. Frege namítá, že podle takového pojetí pak geometrie může mluvit o libovolném souboru věcí, které (resp. jejich vztahy) splňují podmínky stanovené axiomy. Axiomy tedy mohou pojednávat např. o bodu stejně dobře jako o Fregových kapesních hodinkách.

V polemice mezi Fregem a Hilbertem o geometriích šlo nakonec spíše o kladení přílišného důrazu na protikladné aspekty plurality geometrií, jak poznamenává J. Peregrin ve svém článku The Natural and The Formal (Peregrin (2000)):

> „*From this point of view, the Frege–Hilbert controversy may appear more a misunderstanding than a real disagreement. This, of course, is not to say that there are no substantial differences between the views of the two theoreticians; it is to suggest that some of the differences may be less deep than generally supposed.*“ (Peregrin (2000))

Objev neeukleidovských geometrií se zdá zpochybňovat Kantovo nahlížení na geometrii jako na popis našeho prostoru. Kantův pohled na geometrii funguje v případě existence jedné jediné správné geometrie, která by dokonale vyjadřovala naše vnímání světa. Existence více geometrií, které vyjadřují naše vidění prostoru, může být v rozporu s Kantovým názorem na geometrii a v důsledku zpochybnit i zařazení matematických disciplín mezi syntetické apriori. Neboť z toho, že si libovolně zvolíme jednu z geometrií a ptáme se, co vyplývá z jejích (námi zvolených) axiomů, se zdá, že geometrie je spíše věda analytická.

Přesto však lze už zmíněný Beltramiho objev považovat do určité míry za podporu Kantova vnímání geometrie jakožto správného nástroje pro popis prostoru. Vyplývá z něj totiž, že neeuklidovské geometrie mohou mluvit o prostoru pouze natolik, nakolik to dovede geometrie euklidovská. Každá geometrie, která si nárokuje mluvit legitimně o prostoru, musí být tímto způsobem převeditelná na euklidovskou. Přesto nelze říci, která geometrie je základnější. Prostor si můžeme stejně dobře představovat v geometrii eukleidovské i v neeukleidovské. Ve všech případech jde totiž nakonec jen o to, co nazveme rovným a co zakřiveným. To, co je v eukleidovské geometrii rovné (např. přímka), je např. v hyperbolické geometrii křivé a naopak.[6]

Podle Kanta nás čistý názor přesvědčuje o tom, že pravdivá geometrie je pouze ta euklidovská (i když konsistentních geometrií může být více). Nyní se však ukázalo, že nové – neeukleidovské – geometrie mohou popisovat prostor, ve kterém se rovnoběžky mohou protnout a součet úhlů v trojúhelníku se nerovná 180°. Zjevně si tedy nejsme jisti, zda součet úhlů v trojúhelníku je 180°, a geometrie pro nás tím pádem přestává znamenat samozřejmou a rigorózní vědu.

Máme nyní dvě možnosti, jak přistoupit k takovému problému a k povaze geometrických tvrzení – považovat je za hypotézy, které lze zkoumat také empiricky, jak o tom mluví např. Hillary Putnam (Putnam (1960)) nebo

[6] Můžeme si připomenout Kripkeho pojednání o podivné operaci připomínající sčítání ('pasčítání'), jež se se sčítáním shoduje pro všechna „malá“ čísla, ale liší se od něj pro čísla „velká“ – pasoučet dvou čísel, z nichž je alespoň jedno větší než např. sto miliónů, je o jedničku větší než standartní součet (Peregrin (2011)). Jak nyní víme, že součty, které běžně provádíme (předpokládejme, že běžně počítáme s čísly ne většími než sto milionů) jsou opravdu součty, nikoli pasoučty? Z hlediska běžného sčítání je pasčítání „posunuté“, ale z hlediska pasčítání je posunuté naopak sčítání.

Hermann van Helmhotz, nebo, po způsobu Hilberta, považovat geometrii (případně i každou jinou matematickou disciplínu) za analytickou disciplínu, která vznikne pouze tím, že na začátku správně (=bezesporně) zadáme axiomy a pravidla a tím vybudujeme celou teorii.[7] Tím de facto určíme, co je v dané matematické disciplíně pravdivé a co ne.

Podle mého názoru je dobré mít na paměti, že alternativní systémy mají pořád mnoho společného a snad právě proto lze vidět to, co mají společné, jako jejich hlubší základ (neredukovatelný na empirickou zkušenost a měření). Ten si ani nemůžeme zvolit, patří k našemu nazírání na svět. Nelze přesně stanovit, jaké systémy geometrie popisují to, jak vidíme svět. Vývoj nejen matematiky spočívá možná právě v tom, že to, co bylo dříve považováno za přirozené a nutné, se ukáže jako něco zdaleka ne tak samozřejmého. Spíše lze očekávat, že to, co považujeme za přirozené, je do určité míry ovlivněno také tím, s pomocí jakých formálních systémů poznáváme svět.

Důležitý Kantův přínos v této oblasti spočívá především v tom, že poskytl rámec, v němž můžeme rozlišovat teze a má smysl polemizovat, zda geometrie je syntetická apriori, empirická, nebo analytická. Např. Frege, který si o geometrii nemyslel, že je analytická, zkusil ve svém programu zvaném logicismus naopak prokázat analytičnost aritmetiky. Hilbert na to navázal svým pokusem prokázat analytičnost celé matematiky. Jeho formalistický program by bez Kantova rozlišení druhů poznání těžko mohl vzniknout v podobě, v jaké jej známe dnes.

1.2 Hilbertův program

Etablování neeukleidovských geometrií bylo důležitou součástí celkového vývoje matematiky, který vedl k otázkám po povaze východisek matematických teorií a obecně matematických poznatků. V důsledku pochybností o správ-

[7] O Helmhotzových názorech si můžeme více přečíst v Arazim (2013).

nosti stanovení toho, o co se při odvozování opíráme jako o první jistotu, vznikaly tendence zpřesňovat a formalizovat matematiku. Hilbert po formálním axiomatickém systému nepožaduje co nejpřesnější popis reality (jakkoli to může zvýšit užitečnost a uplatnitelnost systému), ale klade větší nároky na průkaznost bezespornosti dané sady axiomů.[8] Tento směr, formalismus, bývá také označován po jednom ze svých nejvýznamnějších prosazovatelů, Davidu Hilbertovi, jako Hilbertův program. Hilbert chápe axiomy jako nástroje pro co nejpřesnější vymezení pojmů dané matematické disciplíny. Ve svém dopise Fregovi z roku 1899[9] píše, že: *„Pojem může být logicky zachycen pouze prostřednictvím vztahu k jiným pojmům. Tyto relace, formulované v jasných výrocích, nazývám axiomy a dodávám, že axiomy jsou definice pojmů“* a že k tomu, aby k nim takto přistupoval, byl *„dotlačen požadavkem přísnosti v logickém odvozování a v logickém budování teorií.“*

Podle Hilberta sice každá věda vychází z nějakého celku faktů, které se snaží vystihovat, ale tuto vědu pojímanou už jako systém stanovených axiomů můžeme nakonec hodnotit jen na základě formalistických kritérií. Tato kritéria, nezbytná pro axiomatický systém, jsou úplnost, nezávislost a bezespornost, jak říká na své přednášce o základech geometrie z roku 1902:

> *„Every science takes its starting point from a sufficiently coherent body of facts as given. It takes form, however, only by organizing this body of facts. This organization takes place*

[8]Extrémní odklon od významu a potažmo reality, a zároveň příliš málo požadavků k vytvoření správného axiomatického systému (v podstatě jediný – konzistence) může však zapříčinit velkou libovolnost ve výběru axiomů, což vedlo k možná trochu přehnaným, ale v duchu Hilbertova programu nikoli zcela nesprávným interpretacím typu „dělejme si, co chceme, jen se nedopusťme rozporu“. Podle těchto intepretací měl Hilbertův program směřovat až k oproštění se od významu. Dodejme, že tyto interpretace jsou jen jedním druhem názoru, ve skutečnosti tomu nebylo tak, že by Hilbert význam zcela pomíjel. Postup, jak s ním zacházel, bude zmíněn později.

[9]Jedná se o volný překlad úseků z Hilbert (1899).

through the axiomatic method, i.e., one constructs a logical structure of concepts so that the relationships between the concepts correspond to relationships between the facts to be organized. There is arbitrariness in the construction of such a structure of concepts; we, however, demand of it: 1) completeness, 2) independence, 3) consistency.“ Hilbert (2004)

Úplnost pro Hilberta podle všeho znamená, že každý výrok nebo jeho negace by měl být odvoditelný konečně mnoha kroky. Nezávislostí Hilbert nejspíše myslí, že žádný axiom není nadbytečný, tudíž že žádný axiom není dokazatelný z ostatních. Větší důraz klade Hilbert na bezespornost. Její smysl je nám bezpochyby jasný (v systému nesmí být dokazatelné dva výroky, z nichž jeden je negací druhého), avšak to, co je nejasné, jsou prostředky k jejímu dokázání. Většina matematiků v té době považovala bezespornost axiomatického systému za zřejmou (pokud jsou axiomy pravdivé a odvozování zachovává pravdivost). Zatímco pro Frega pravdivost zaručovala bezespornost, pro Hilberta byla výchozí bezespornost, která teprve měla zajistit legitimitu dané teorie, a tím cosi jako její (v Hilbertově velmi omezeném smyslu) „pravdivost“. A z toho důvodu bylo podle Hilberta potřeba bezespornost nějak doložit, jak se můžeme dočíst v dopisu Hilberta Fregovi:

„Píšete: '(...) z pravdy axiomů vyplývá, že si navzájem neprotiřečí.' Velmi mě zaujalo, že ve Vašem dopise čtu právě tuto větu, neboť já sám, kdykoli o těchto věcech přemýšlím, píši a přednáším, tvrdím právě naopak: jestliže si libovolně stanovené axiomy vzájemně neprotiřečí s úhrnem svých důsledků, jsou pravdivé, předměty těmito axiomy definované existují. Toto je pro mě kritérium pravdy a existence.“[10]

[10] Hilbert Fregovi, dopis XV/4, Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel, překlad do češtiny je z Kolman (2002) str. 237

S tím souvisí pro nás asi nejdůležitější Hilbertův požadavek, kterým je přímý (absolutní) důkaz bezespornosti aritmetiky reálných čísel, tedy důkaz bezespornosti dané teorie v ní samé (tedy důkaz, který nemusí být vytvořen v rámci jiné axiomatické teorie, jejíž konzistenci pouze předpokládáme – takovým důkazům říkáme relativní). Hilbert tento problém představil na pařížské konferenci, jeho komentář k možnému řešení (který vyznívá trochu neurčitě) lze najít v Ewald (1996): *„Jsem přesvědčen, že musí být možné nalézt přímý důkaz kompatibility aritmetických axiomů pomocí pečlivého studia a přiměřenými modifikacemi známých metod usuzování v teorii iracionálních čísel.“*[11]

Krátce předtím, než Hilbert zveřejnil své (jak byl přesvědčen, pouze prozatím) relativní důkazy bezespornosti, objevil Bertrand Russel svůj známý paradox (1902), který ukazuje, že Cantorova intuitivní teorie množin (později nazývaná naivní teorií množin) je vnitřně sporná. V řeči teorie množin vypadá Russellův paradox takto: nechť množina S je množina všech množin, které nejsou svým vlastním prvkem. Takováto množina je v naivní teorii množin dobře definovaná. Pro libovolnou množinu M by tedy mělo být možné rozhodnout, zda tato množina M je, či není prvkem množiny S. Toto však nelze rozhodnout v případě samotné množiny S. Obě možnosti totiž vedou ke sporu s její definicí. (Pokud S není svým vlastním prvkem, měla by podle definice do S patřit; pokud však S je svým vlastním prvkem, pak by podle definice do S patřit neměla.)

Tento paradox neznamenal jen spor uvnitř tzv. naivní teorie množin, ale i selhání Fregova systému, jenž měl s tehdejší teorií množin mnoho společného. Frege si důsledky Russellova objevu uvědomil. Pochopil, že se otřásla jeho teze, že lze aritmetiku vybudovat na čistě logických základech. V dodatku ke druhému vydání své knihy *Základní zákony aritmetiky*[12] připsal:

[11] Volný překlad z Ewald (1996).
[12] Frege (2011)

*„Co je zpochybněno, není můj způsob budování aritmetiky,
ale to, zda je vůbec možné dát aritmetice logické základy".*

Selhání Fregova pokusu můžeme vnímat jako prokázání, že matematiku nelze snadno formalizovat. Přesto se o její formalizaci Hilbert ve svém programu pokusil. Ostatně v době tolika převratů a snah o zpřesňování není divu. Russellův a další paradoxy poslední doby utvrdily Hilberta v přesvědčení, že je třeba více rigoróznosti ve veškeré práci na stavbě základů jakékoli vědy. Kladl si za cíl formalizovat všechny matematické teorie a pomocí finitních metod dokázat bezespornost každé teorie v rámci ní samé.

Podle Raatikainen (2005) přesné body Hilbertova programu ani jeho preference nejsou zcela známé, resp. jednoznačné, avšak právě formalizace matematiky je snad nejčastěji zmiňovaná preference programu. Přepisy tvrzení matematiky do formalizovaného jazyka a nalezení odvozovacích pravidel měly zajistit, aby důkaz konkrétního tvrzení (jeho odvození z těchto axiomů) spočíval v čistě mechanické manipulaci se symboly formalizovaného jazyka. Dalšími cíli programu jsou úplnost (všechny matematické pravdy lze formálně dokázat), konzistence a rozhodnutelnost formálního systému. V rámci tendence zpřesňování matematiky se také začíná rozlišovat matematika reálná (finitní) a matematika ideální (transfinitní). Podle Hilberta by ideální matematika měla být tzv. konzervativním rozšířením matematiky finitní.[13]

Pro shrnutí hlavních bodů Hilbertova programu (z nichž mnohé obsahují více výše zmíněných cílů) se můžeme opřít o strukturu hesel vytvořenou Richardem Zachem v Zach (2003):

- konzistence

[13]Pro vysvětlení pojmu konzervativní rozšíření využiji definici z Dostálová (2010): *„Konzervativní v tom smyslu, že zjednodušuje vyjadřování o finitní (reálné) části matematiky, ale veškerá tvrzení finitní (reálné) matematiky zformulovaná či odvozená pomocí matematiky transfinitní (ideální) mohou byt zformulovaná či odvozená i bez nich, čistě finitním způsobem."*

- finitismus
- teorie důkazů

Požadavek konzistence, resp. bezespornosti, byl zmíněn již výše, když jsme představovali Hilbertův názor na to, jaké nezbytné vlastnosti by měl správný axiomatický systém mít. V případě Hilbertova programu se tím konkrétněji rozumí, že ve formálním matematickém systému není dokazatelná konjunkce dvou výroků, kde jeden je negací druhého a to se musí prokázat jen finitními prostředky.

S tím bezprostředně souvisí druhé heslo, finitismus. Bezpodmínečně finitní metody byly požadovány proto, že nerozvážné zacházení s nekonečnem bylo podle mnohých matematiků té doby příčinou proniknutí paradoxů do matematických teorií. Hilbert se nechtěl opřít o něco tak nespolehlivého, jako jsou intuice o nekonečnu.

Další bod programu se týká teorie důkazů a rovněž ho nelze od předchozích dvou oddělit. Hilbert požadoval absolutní důkaz bezespornosti určité formální teorie, který by měl probíhat tak, že se vlastními finitními prostředky ukáže, že z axiomů tohoto systému nelze odvodit spor. Dosud byly předváděny relativní důkazy bezespornosti matematiky –- je-li bezesporná jedna teorie, je bezesporné i její rozšíření (např. Hilbert převedl bezespornost eukleidovské geometrie na bezespornost aritmetiky reálných čísel). Absolutní důkaz bezespornosti byl zatím předveden jen pro aritmetiku přirozených čísel bez úplné indukce (Dostálová (2010)). Důkaz bezespornosti Peanovy aritmetiky by znamenal jeden z nejvýznamnějších počinů v rámci Hilbertova programu. *„Tímto směrem se proto ubírala většina práce při naplňování Hilbertova programu, především práce Wilhelma Ackermanna a Paula Bernayse“* (Dostálová (2010)).

Podívejme se ještě na jednodušší pojetí shrnutí Hilbertova programu uvedené v Dostálová (2010), které podtrhuje cíle, které se nejvíce týkají hlavního tématu této práce:

1. najít konečný systém axiomů, ze kterého by bylo možné (pouze finitními metodami) odvodit veškerou matematiku;
2. dokázat (opět finitními prostředky) bezespornost tohoto axiomatického systému.

To, že k naplnění programu mělo být zapotřebí důsledné formalizace matematiky a jazyka a definování pojmů tak, aby se důkaz odehrál jen mechanickou manipulací se symboly (od jejichž významu můžeme v podstatě úplně abstrahovat), nás může přivádět do zdánlivě rozporuplné pozice. Jakmile totiž začneme mluvit o použití axiomatické teorie k absolutnímu důkazu bezespornosti určité axiomatické teorie, uvažujeme už o teorii, kterou k důkazu užíváme, jako o popisu určitého předmětu – tedy axiomatické teorie. Větám jazyka teorie tedy najednou připisujeme určitý význam – chápeme je jako věty o formální dokazatelnosti, nebo uvažujeme o axiomech teorie tak, že popisují určitou strukturu izomorfní se strukturou formálních důkazů v určité axiomatické teorii. Na jednu stranu tedy chceme axiomy matematických teorii chápat čistě formálně – jako řady znaků bez významu – (viz Goldstein (2005): *„Matematika je hra, která se hraje na papíru podle jistých jednoduchých pravidel se znaky bez významu.“* – Hilbert), ale na druhé straně chceme axiomatické teorie užívat jako nástroje zkoumání matematických teorií, čímž ovšem jejich větám přisuzujeme zcela určitý význam (teorie tvrdí něco o tom, co je dokazatelné v určitých formálních systémech, ideálně v ní samé) a správnost výsledků, k nimž dospíváme vyvozováním z axiomů, je podmíněna tím, že axiomy teorie odpovídají zkoumanému předmětu.

Pokusme se Hilberta proti tomuto nařčení z rozporu v cílech jeho programu bránit. Pokud chce např. matematik vytvořit určitou matematickou teorii se systémem axiomů a odvozovacích pravidel, musí přirozeně z významů vycházet. Axiomy sestavuje tak, aby co nejlépe vystihovaly onu disciplínu, aby zastoupily pravdivá fakta ve stručnější a formálněji zapsané podobě.

Kromě toho se samozřejmě snaží dodržovat již výše popsané požadavky, jako jsou nezávislost, úplnost a bezespornost. Poté, co jsou axiomy a odvozovací pravidla vytvořena, už s nimi může pracovat jako se symboly (tedy zástupci nebo chceme-li zkratkami) bez toho, aby se při každém kroku ohlížel na to, jaký význam onen symbol původně nesl.

Domnívám se, že v tom je hlavní tendence a (jen do určité míry, jak uvidíme vzápětí) naplněný cíl Hilbertova programu – umět formalizovat teorie tak dokonale, abychom si při mechanickém zacházení se symboly / zkratkami byli jisti, že se dobíráme pravd, i když je ve formálním jazyce vidíme zapsány jen jako symboly zdánlivě bez významu. Ostatně už jsme viděli, že právě asi takto si Hilbert představoval postup tvorby užitečné a smysluplné axiomatické teorie.

V roce 1929 se už Hilbert cítil oprávněn prohlásit, že úspěšné naplnění programu je na dosah – vše nasvědčovalo tomu, že pro každé odvětví matematického myšlení lze najít množinu axiomů a ke každé pravdivé formuli odpovídající důkaz z příslušné teorie. Zanedlouho však v důsledku Gödelových vět o neúplnosti bylo jasné, že se tato očekávání nenaplní.

2. První Gödelova věta

První Gödelova věta bývá nazývána větou o neúplnosti nebo také větou o neaxiomatizovatelnosti aritmetiky. Gödel ji poprvé vyslovuje ve své publikaci *O formálně nerozhodnutelných větách v Principia mathematica a příbuzných systémech I* (Gödel (1931)). V úvodu zde popisuje vývoj matematiky ve směru narůstající přesnosti jako tendenci formalizovat její oblasti tak, aby důkazy mohly být prováděny podle několika málo mechanických pravidel. Za příklad formálních systémů budovaných s tímto cílem, systémů, jejichž důkazové metody se dají redukovat na několik málo axiomů a pravidel odvozování, označuje (toho času hojně používaný) systém Principia mathematica (dále jen PM) nebo také systém axiomů Zermelo-Fraenkelovy teorie množin, který dále rozvinul John von Neumann. Zároveň přímo avizuje, že tvrzení, která se chystá vyslovit (tedy první a druhá Gödelova věta o neúplnosti), ukážou, že se *„v obou těchto systémech vyskytují relativně jednoduché problémy teorie obyčejných čísel, které se z axiomů rozhodnout nedají“* (Gödel (1931)), tedy, že se v nich vyskytují nerozhodnutelné věty. Toto je obecně považováno za nejpřímější a zároveň nejvýznamnější důsledek obou vět o neúplnosti.

Po tomto úvodu Gödel načrtává hlavní myšlenky důkazu. Nejprve vysvětluje, že formule formálního systému (pro nás systému PM) viděné zvnějšku jsou pro nás konečné řady základních znaků a *„snadno lze precizovat, které řady základních znaků jsou smysluplnými formulemi a které nejsou“* Gödel (1931). Tedy ani důkazy nejsou z formálního hlediska nic jiného než konečné řady formulí (s pevně stanovitelnými vlastnostmi). Za základní znaky si vezmeme přirozená čísla (i když z hlediska metamatematiky není podstatné, které objekty jimi budou). Každé formuli a následně i každému důkazu přiřadíme určité číslo (tzv. Gödelovo číslo daného syntaktického, resp. metamatematického objektu) – když tedy budeme něco vypovídat o daném čísle, budeme zprostředkovaně hovořit právě o takto očíslovaném syntaktickém objektu.

Tzv. figura důkazu je pak pro nás konečná posloupnost přirozených čísel (kterou také můžeme nakonec kódovat jediným přirozeným číslem, takže nakonec každému důležitému metamatematickému objektu je jednoznačně přiřazeno jedno číslo). Metamatematické pojmy lze tedy alespoň částečně vyjádřit v symbolech systému PM prostřednictvím výrazů týkajících se přirozených číslech či jejich posloupností. Uvnitř systému PM jsou totiž pojmy jako „formule“ či „figura důkazu“ definovatelné, tj. je možné například udat formuli *F(v)* s jednou volnou proměnnou v (typu posloupnosti čísel) patřící do PM a to tak, že *F(v)* interpretovaná s ohledem na význam termínů v PM říká: formule v je dokazatelná.

Umíme tak vyjádřit třeba skutečnost, že určitá formule je dokazatelná, jako aritmetickou formuli o čísle dané formule. Formule *F(v)* s jednou volnou proměnnou v může např. říkat *v je dokazatelná (z dané teorie)*, neboli v je kódem dokazatelné formule. To nám právě umožní vytvořit nerozhodnutelnou větu v systému PM, respektive větu, která o sobě tvrdí, že je nedokazatelná.

Sám Gödel připouští podobnost svého postupu pro vytvoření takové formule s paradoxem lháře, neboť se zde, stejně jako v paradoxu lháře, využívá autoreference. Zároveň však upozorňuje, že tato podobnost se týká jen autoreference, jelikož věta tvrdící svou vlastní nedokazatelnost (na rozdíl od výroku „teď právě lžu“) není zacyklená, *„neboť tvrdí nejdříve nedokazatelnost určité formule a teprve dodatečně (a poněkud neočekávaně) vyjde najevo, že tato formule je zrovna ta, ve které to o ní bylo vyjádřeno“* Gödel (1931).

Přestože je důkaz proveden v systému PM, nerozhodnutelnou větu lze nalézt v každém formálním systému, ve kterém lze definovat pojem „dokazatelná formule", „figura důkazu" a „třídový znak" (jak Gödel říká formuli s jednou volnou proměnnou *typu přirozených čísel* – rozumějme v jazyce aritmetiky) a ve kterém je každá dokazatelná formule v zamýšlené interpretaci (tj. ve standartním modelu aritmetiky) pravdivá. Druhý předpoklad však Gödel chce nahradit předpokladem (dle vlastních slov) *„čistě formálním a mnohem slabším"* než je korektnost – a tím je předpoklad tzv. ω-bezespornosti.[1]

My se ovšem jistými prostředky překračujícími danou teorii dokážeme přesvědčit o pravdivosti oné nerozhodnutelné sentence. Skutečnost, že věta nerozhodnutelná ve formálním systému je (slovy Gödela) *„rozhodnutelná úvahami metamatematickými"*, vede podle Gödela k překvapivým důsledkům ohledně důkazu bezespornosti formálních systémů. Z těchto důsledků pronáší ve čtvrtém oddílu své publikace Gödel (1931) výrok, který je později označován jako druhá Gödelova věta o neúplnosti. Pod tímto názvem bude popsána později v samostatné kapitole.

Vraťme se ještě ke Gödelem vyřčenému důsledku jeho vlastních výsledků, který zmiňuje v Gödel (1931) ještě předtím, než precizněji rozebere důkazy vět o neúplnosti: *„V systémech podobných PM nebo Z-F teorii množin se budou vždy vyskytovat relativně jednoduché problémy teorie obyčejných čísel, které se z jejich vlastních axiomů nedají rozhodnout"*. V tomto znění se vyskytují možná ne úplně přesně vymezené pojmy jako „systémy podobné PM" nebo „relativně jednoduché problémy teorie obyčejných čísel". Abychom si tyto pojmy mohli vysvětlit, uvedu ještě jiné znění první Gödelovy věty ze zdroje Gödel (1995)[2]:

> *„Pro každý dobře definovaný systém axiomů a odvozovacích pravidel, který obsahuje nebo je schopen vyjádřit aritmetiku,*

[1] Obecně nazveme teorii T ω-bezespornou právě tehdy, když v ní není možné pro nějakou formuli o jedné volné proměnné p(x) (nebo třídový znak, jak tomu říkal Gödel) dokázat zároveň p(0), p(1), p(2), atd. pro všechna přirozená čísla a zároveň $\neg\forall$x p(x)

[2] Vol. 3, str. 304–323. v českém překladu z publikace Dostálová (2010)

vždy existují diofantické problémy, které jsou těmito axiomy a pravidly nerozhodnutelné, a to za pouhého předpokladu, že nejsou odvoditelné žádné nepravdivé výroky tohoto typu.“

Po provedení porovnání těchto dvou podobných verzí první Gödelovy věty nám bude jasné, že za *„systém podobný Principia mathematica nebo systém axiomů teorie množin Zermelo-Fraenkela“* Gödel považoval *„dobře definovaný systém axiomů a odvozovacích pravidel“*, který je schopen vyjádřit aritmetiku. V Gödel (1931) Gödel svůj důkaz vysvětluje pouze v systému Principia mathematica s příslibem, že podrobnější pojednání a převedení do jiných systémů bude následovat v pozdější publikaci[3]. V očekávaném druhém pokračování svého díla sliboval předložit podrobnější postup důkazu (který v díle I považuje jen za náčrt) a obecnější pojednání výsledků. Avšak už výsledky z prvního dílu byly dostatečně pochopeny a přijaty, takže nebylo nutné vydávat pokračování.

Druhý termín, totiž „relativně jednoduché problémy teorie obyčejných čísel“, nám zase o něco více přiblíží pojem z druhého znění věty – „diofantické problémy“. Diofantický problém je vlastně Σ_1-sentence v jazyce aritmetiky, tj. sentence obsahující na začátku existenční kvantifikátory (které se tedy vztahují na celou sentenci) a dále již žádné další (neomezené) kvantifikátory.[4]

2.1 Význam první Gödelovy věty

První Gödelova věta znamenala velký převrat v moderní logice a tak není divu, že lze dnes najít velké množství jejích verzí. Uveďme si pro příklad formulaci z jedné současné učebnice logiky.

[3] To vysvětluje očíslování názvu tohoto článku jakožto první díl.

[4] Ovšem pouze v našem kontextu; jak mě upozornila má kamarádka, vynikající matematička a logička Jana Glivická, v jiných kontextech je běžné trochu jiné užití termínu diofantický problém, kdy se myslí pouze ty Σ_1-sentence, ve kterých už není ani žádný další omezený kvantifikátor.

Věta 1. *Nechť T je rekurzívní axiomatizovatelná teorie s aritmetickým jazykem a nechť v modelu N (tj. ve struktuře přirozených čísel) platí teorie T (čímž máme na mysli, že v tomto modelu platí všechny axiomy teorie T). Pak T je neúplná.*[5]

Tato věta říká nejen, že teorie T (může jí být Peanova aritmetika ale i každé její rekurzivní bezesporné rozšíření) je neúplná, ale také, že takovou teorii nelze zúplnit přidáním jednotlivých axiomů nebo schémat platných ve struktuře přirozených čísel. Každým takovým přidáním vznikne rekurzívně axiomatizovatelná, tedy opět neúplná teorie. (Toto tvrzení lze zesílit tím, že oslabíme požadavky na teorii. Například v publikaci Švejdar (2002) je uvedeno podobné tvrzení i důkaz pro Σ-korektní teorii, což je taková teorie, která dokazuje pouze ty Σ-sentence, které platí ve struktuře přirozených čísel.)

Chceme-li přejít k filosofickému významu (ovšem filosofickými přístupy se budeme podrobněji zabývat až později) Gödelovy věty, pokusme se vyjít z jakéhosi „významového průniku" jejích nejčastěji se vyskytujících formulací, abychom se mohli začít trochu osvobozovat od matematicko-technických jednotlivostí konkrétních verzí. Tento průnik podle mého názoru dobře vystihuje Dummett ve svém článku Dummett (1963), a proto jeho výrok využiji k podtržení pro nás zásadní myšlenky první Gödelovy věty: *„Pro každý intuitivně korektní formální systém pro elementární aritmetiku existuje tvrzení, které je v rámci tohoto systému vyjádřitelné ale ne dokazatelné (ani vyvratitelné) a jehož pravdivost dokážeme zjistit."*

Toto považuji za srozumitelné vyjádření nosné myšlenky Gödelovy věty. I přes své dalekosáhlé důsledky nejen v logice a filosofii ale i ve více či méně příbuzných disciplínách je znění samotné Gödelovy věty a její důkaz proveden technicky velmi čistě a neobsahuje nic, co by se vzdalovalo formálnímu matematickému vyjadřování. Při formulaci své první věty o neúplnosti využil Gödel autoreferenci a kódování. Důvtipnost tohoto kroku umožnila

[5] Znění uvedeno podle knihy Logika – Neúplnost, složitost a nutnost, Švejdar (2002), str.318.

vyjádření hlavní myšlenky Gödelovy věty ve formálním aritmetickém jazyce. Gödel zakódoval syntaktické objekty (termy, formule, důkazy) jako čísla nebo posloupnosti čísel tak, aby bylo možné formálně reprezentovat klíčové syntaktické pojmy (ty, které se bezprostředně týkají formálního systému). Dále využil autoreferenčního výroku, tedy výroku vyjadřujícího nějakou vlastnost, kterou on sám má (či nemá – neboť vlastnost můžeme definovat i jako vlastnost „nemít jistou vlastnost“). Přestože mluvíme o dvou různých jevech, nelze je při snaze o pochopení významu Gödelovy věty od sebe oddělit. Rozhodně je nelze chápat jako na sobě nezávislé kroky. Spíše můžeme kódování označit za způsob, jak umožnit autoreferenci.

2.1.1 Kódování a autoreference

Gödelův postup při sestavování sentencí, které hovoří samy o sobě (jinak řečeno jsou autoreferenční a tvrdí např. svou vlastní dokazatelnost nebo nedokazatelnost), používá jako jeden z hlavních nástrojů již zmíněné kódování. Tendence kódovat formule, resp. přiřadit jisté formuli určitý znak, který ji svým způsobem zastoupí, nám může připomenout Hilbertovy tendence zpřesňovat matematiku a formalizovat ji. V jisté návaznosti na antický pythagoreismus a Leibnizovo heslo „Calculemus“ Hilberta napadlo, že kdybychom očíslovali věty jazyka, dala by se odvozovací pravidla převést na výpočty a tím pádem bychom mohli spočítat, zda je určitý výrok pravdivý[6]. I když se nepodařilo nalézt obecné algoritmy, jaké si asi představoval Leibniz, Hilbertova myšlenka číslování větných formulí byla užitečná pro další vývoj matematiky, neboť ji Gödel využil právě pro důkaz věty o neúplnosti.

Gödel výroky očísloval tak, aby mohl dokázat větu o autoreferenci, tedy aby ke každé formuli o jedné volné proměnné mohl existovat výrok, který sobě připisuje vlastnost vyjádřenou touto formulí. Je-li tedy například formule s vyjadřující vlastnost být sudým číslem, pak existuje výrok V, jehož číslo

[6] Peregrin (2008)

je sudé právě tehdy, když platí výrok V. Výrok tedy bude pravdivý právě tehdy, když bude jeho číslo sudé – výrok tedy sám o sobě říká *„já mám sudé číslo“*.

Stejně tak můžeme uvažovat o vlastnosti *být pravdivý*. Pokud však připustíme, že určitou početní vlastnost může mít číslo výroku právě tehdy, když je výrok, jehož je toto číslo kódem, pravdivý, musíme nutně připustit i to, že existuje vlastnost, která říká *být nepravdivý*. Pak tedy existuje výrok, který o sobě říká: mé číslo je číslem nepravdivého výroku, neboli *„já jsem nepravdivý“*.

Takový výrok by však byl sebevyvracející. Nedopouštíme se však sporu nebo paradoxu, protože nemusíme nutně předpokládat, že vlastnosti *být pravdivý* odpovídá početní vlastnost.[7]

První Gödelova věta se však zabývá predikátem dokazatelnosti, nikoli pravdivosti. Gödel dokazuje, že takový korelát dokazatelnosti už početní být musí, protože dokazování je založené na operování se syntaktickými formami výrazů, které lze převést na početní operace s čísly (což už ostatně, jak jsme výše zmínili, nahlédl před Gödelem Hilbert). Gödel ukazuje, že existuje výrok, který sám o sobě říká *„já jsem nedokazatelný“*. Takový výrok ale nemůže být dokazatelný, protože kdyby byl, bylo by dokazatelné to, co sám říká a výrok sám by musel být nedokazatelný. Dokazatelná nemůže být ani jeho negace: kdyby byla, byla by dokazatelná negace toho, co říká, totiž bylo by dokazatelné, že je tento výrok dokazatelný, a tudíž by musel být dokazatelný. Daná teorie by tedy byla sporná, což je v rozporu s předpokladem.

Dojdeme tedy k závěru, že *„pro žádný jazyk, který je natolik bohatý, aby v něm bylo možné vyjádřit elementární aritmetiku, nebude nikdy možné stanovit úplný axiomatický systém“* (Peregrin (2008)).

[7] V této chvíli je zajímavé si připomenout výrok Alfred Tarského (citovaného v Peregrin (2008)): *„Má-li být nějaký jazyk prostý sporu, nemůže být v jeho rámci korelát vlastnosti 'být pravdivý' početní.“*

Autoreferenci (nebo chceme-li *„sebereflexi na úrovni jazyka"*, jak je hezky řečeno v Zouhar (2005)) přisuzuji klíčovou roli v myšlence Gödelovy věty a dávám ji do spojitosti i s dalšími paradoxy v disciplínách, které zacházejí s přirozeným a formálním jazykem (z nichž jmenujme alespoň nejznámější Russellův paradox v naivní teorii množin a paradox lháře ve filosofii)[8] .

Zamysleme se nad tím, jaké máme možnosti k popisu celku uvnitř sebe samého, konkrétněji (resp. aplikovatelněji na případ vět o neaxiomatizovatelnosti formálních systémů), jak popsat formální systém uvnitř něho samého. Všimněme si, že v přirozeném jazyce nám odkaz na formuli, která popisuje sama sebe, zajišťují typicky např. ukazovací zájmena „toto", „tato". Nejznámější příklad autoreferenčního výroku (vedoucí mimo jiné k již zmíněnému paradoxu lháře) je věta, která o sobě tvrdí, že je nepravdivá, tedy A (říká, že): *„Věta A je nepravdivá"*. Další způsob, jak vyjádřit sebepopírající větu, je říci: *„Tato věta není pravdivá."* nebo *„Toto není pravda."*

V jazyce formálním lze tento způsob odkazu zajistit, jak jsme viděli, kódováním. A právě pomocí kódování a věty o autoreferenci Gödel umožnil (některým, pro nás podstatným) větám v jazyce aritmetiky schopnost ukazovat na sebe samé.

Autoreference vyjádřená jazykem logiky má tvar ekvivalence $\phi \Leftrightarrow \psi(\ulcorner \phi \urcorner)$, což lze číst tak, že sentence ϕ tvrdí, že ϕ má vlastnost ψ. Díky větě o autoreferenci máme zajištěno, že ke každé aritmetické formuli $\psi(\mathrm{x})$ existuje aritmetická sentence ϕ taková, že $Q \vdash \phi \Leftrightarrow \psi(\ulcorner \phi \urcorner)$.[9] V našem případě bude užitečné označit si formuli tak, aby bylo dobře vidět, že aplikujeme větu o autoreferenci na formuli vyjadřující nedokazatelnost, tedy $\neg Pr_Q(x)$. Tak je jasné, že ona vlastnost, kterou sama formule prezentuje, je negace dokazatel-

[8]Pro zajímavost dodejme, že ne všechny paradoxy v logice jsou založené na autoreferenci. V roce 1993 byl objeven paradox vycházející z myšlenky nekonečného řetězce formulí a výroku „každá další formule (resp. všechny formule nade mnou) je nepravdivá". Beringer and Schindler (2015)

[9]Q = Robinsonova aritmetika – má stejné axiomy jako Peanova aritmetika, ale nemá schéma indukce

nosti (= **Pr**ovability). Aplikací věty o autoreferenci tedy dostaneme formuli ν takovou, že $\nu \Leftrightarrow \neg Pr_Q(\ulcorner \nu \urcorner)$, tj. formuli říkající *„já jsem nedokazatelná"*.

Polský logik Alfred Tarski, Gödelův současník, který pojem pravdivosti matematicky analyzoval, dospěl na základě rozboru paradoxu lháře (a dalších podobných paradoxů) k závěru, že jazyk, nemá-li být rozporný, nemůže být schopen ve všech ohledech vyčerpávajícím způsobem pojednávat sám o sobě; konkrétně že rozporný je nutně, jak už jsme si ukázali, každý jazyk, ve kterém lze o každém jeho vlastním pravdivém výroku říci, že je pravdivý. Tarského závěrem bylo, že o pravdivosti výroků nějakého jazyka můžeme explicitně pojednávat jedině v rámci nějakého jiného, „bohatšího" jazyka (a že tedy i náš přirozený jazyk není „ve skutečnosti" jediným jazykem, ale jistou hierarchií jazyků, z nichž každý je schopen pojednávat o těch „pod" ním), viz Peregrin (1998a).

Jak poznamenává doc. Švejdar ve své knize Logika – neúplnost, složitost a nutnost (Švejdar (2002)), větu o autoreferenci není ani tak těžké dokázat, jako ji netriviálním způsobem použít, což znamená zvolit formuli $\psi(x)$ tak, aby rovnice $\vdash \phi \Leftrightarrow \psi(\ulcorner \phi \urcorner)$ neměla žádná nezajímavá řešení typu 0=0. Zajímavým příkladem využití věty o autoreferenci netriviálním způsobem může být např. již zmíněný Tarského důkaz nedefinovatelnosti pravdy (kdyby byla pravda definovatelná, mohli bychom sestavit i sentenci tvrdící *„já jsem nepravdivá"*. Doc. Švejdar tuto větu uvádí (v Švejdar (2002)) v následujícím znění:

Věta 2. *Pro žádnou bezespornou teorii T obsahující Q neexistuje aritmetická formule Tr(x) taková, že pro každou aritmetickou sentenci ϕ platí $T \vdash \phi \Leftrightarrow Tr(\ulcorner \phi \urcorner)$.*

Tuto větu (nazývanou též Tarského věta o nedefinovatelnosti pravdy) můžeme do jisté míry považovat za (logické) potvrzení jinak spíše filosofického závěru, že uniformní definice pravdy neexistuje.[10]

[10]Podle Tarského se pravda nedá definovat v systémech s prostředky k autoreferenci. Např. Frege však ve svém článku Myšlenka (Frege (2011)) říká, že pravdu nelze definovat

2.1.2 Rozpor úrovní

Vzhledem k tomu, že Gödelova sentence je z relevantní teorie formálně nedokazatelná, ale my jsme schopni nahlédnout její pravdivost a tedy ji v jistém smyslu dokázat, může se zdát, že jsme z tohoto hlediska dospěli ke sporu. Abychom prokázali, že se navzdory původnímu zdání o rozpor nejedná, musíme si nejprve uvědomit, že se jedná o dokazatelnost na jiné úrovni. Způsob, kterým se člověk dobírá pravdy, není totiž stejný jako způsob, kterým se pravdy dobírá logika, která se pevně drží daných pravidel a vyvozuje důsledky z výchozích principů. Matematický termín důkaz ve fregovsko-hilbertovském formálním smyslu zcela postihovat to, co je jako důkaz bráno intuitivně. Právě Gödelova věta je ukázkou tohoto rozdílu – zatímco matematické chápání dokazování je postaveno na pevné soustavě odvozovacích pravidel, soustava pravidel, o které se ve skutečnosti opírá náš rozum, je zásadním způsobem „otevřená“ (Dummett (1963)).

2.1.3 Diagonální argument

Gödelův teorém i důkaz je založen na celkem jednoduché myšlence, kterou však není snadné kvůli komplikovanému původnímu znění prohlédnout. I proto vznikají mnohé zjednodušené interpretace a verze, které se snaží zachovat podstatu věty. Jedním z příkladů může být i diagonální argument – metoda jak pochopit význam Gödelovy věty pomocí tabulky a jednoduchého algoritmu o pár krocích. Zároveň na tomto argumentu zřetelně uvidíme aplikaci kódování a autoreference.[11]

Jaroslav Peregrin uvádí ve svém článku Peregrin (2016) několik příkladů

vůbec. Každá případná definice by totiž musela udat nějaké (nutné a postačující) podmínky pro pravdivost. U každé věty, jejíž pravdivost zkoumáme, bychom se pak museli ptát, zda je pravda, že tyto podmínky splňuje. Jakákoli definice pravdivosti tedy musí pravdivost předpokládat a je kruhová.

[11]Vysvětlení diagonálního argumentu vychází z článku Jaroslava Peregrina Peregrin (2016), který vyjde na podzim ve sborníku Miscellanea Logica.

uplatnění diagonálního argumentu, které nám mohou usnadnit pochopení „path-breaking problems“ – důležitých tvrzení moderní logiky nebo paradoxů. Diagonální argument nám například umožní nahlédnout, že množina má více podmnožin než prvků (= Cantorova věta o tom, že potence množiny je větší, než samotná množina), nebo algoritmická neřešitelnost problému zastavení Turingova stroje.

My si velmi stručně ukážeme použití této metody na příkladech, které nás dovedou k Russellovu paradoxu a teorému o neúplnosti. Tuto metodu uvádím pouze jako zajímavou možnost, jak dospět ke Gödelovu teorému a vysvětlit, proč platí. Čtenářům, které tato metoda zaujme, doporučuji článek Peregrin (2016).

Metodu diagonálního argumentu si nejprve vysvětlíme na jednoduchém příkladu: představme si, že máme čtvercovou tabulku o n sloupcích a n řádcích, kde každé pole obsahuje 1 nebo 0.[12] Ptáme se, můžeme-li přidat sloupec $(n+1)$, který v tabulce ještě není – tedy sloupec, který obsahuje 1 a 0 ale neshoduje se s žádným předchozím sloupcem. Jednoduchý a jistý postup, jak takový sloupec vytvořit, je vypsat tzv. antidiagonálu, tedy vypsat opačné hodnoty než se nachází na diagonále z horního levého rohu do dolního pravého – do prvního pole sloupce $n + 1$ napsat opačnou hodnotu než je v poli $(1-1)$, do druhého řádku opačnou hodnotu než je v poli $(2-2)$ a tak dále až do n-tého pole sloupce $n + 1$, kde bude opačná hodnota než je v poli $n - n$. Takto máme zajištěno, že přidaný sloupec se ve všech řádcích liší od sloupců předchozích.

Touto metodou si můžeme celkem jednoduše ukázat vznik paradoxu: Začneme tím, že si všechny vlastnosti pevným způsobem očíslujeme (p_1, p_2, atd.). Nyní prvnímu sloupci přiřadíme první vlastnost, druhému sloupci druhou vlastnost atd., stejně tak i prvnímu řádku, první vlastnost, druhému řádku druhou atd. Jinak řečeno, všechny vlastnosti budou postupně vyjme-

[12] Tuto metodu nemusíme nutně aplikovat jen na binární soustavu, ovšem alespoň dvě rozdílné hodnoty musíme mít k dispozici.

novány ve zvoleném pořadí jak v řádcích, tak ve sloupcích. Buňky tabulky ohodnotíme 1 nebo 0 podle toho, zda se vlastnosti navzájem mají nebo ne,[13], takže se např. v buňce $(3-1)$ dozvíme, zda vlastnost p_3 má vlastnost p_1.

Když k takto doplněné tabulce přidáme sloupec odpovídající antidiagonále, zjistíme, že hodnoty v tomto sloupci vyjadřují vlastnost *nemít sama sebe*. Dostáváme tak paradox, protože na jednu stranu se zdá, že tato vlastnost nemůže být vlastností (protože se nevyskytuje v tabulce všech vlastností) ale na druhou stranu se zdá být vlastností. Tento paradox je v podstatě variantou již zmíněného slavného Russellova paradoxu.

Od tohoto paradoxu se ke Gödelově větě dostaneme tím, že nahradíme vlastnosti za formule z jazyka Peanovy aritmetiky s jednou volnou proměnnou, které Peregrin nazývá pseudopredikáty (a Gödel, jak jsme viděli výše, třídové znaky), a využitím Gödelova kódování: každý pseudopredikát p bude mít číslo $\ulcorner p \urcorner$, takže se například v buňce $(3-1)$ dozvíme, zda o Gödelově čísle pseudopredikátu p_1 platí pseudopredikát p_3, tedy zda je formule $p_3(\ulcorner p_1 \urcorner)$ pravdivá. Můžeme nyní k takové tabulce sestavit antidiagonálu?

Antidiagonála by reprezentovala funkci říkající o každému pseudopredikátu , zda má vlastnost „já nejsem o sobě pravdivý“. Na rozdíl od předchozího případu s vlastnostmi (nemít sama sebe) však nedojdeme k paradoxu, protože aritmetika je sestrojená tak, že v ní pravdivostní predikát neexistuje. Existence pravdivostního predikátu by totiž vedla ke sporu, protože by znamenala také existenci predikátu „nebýt pravdivý sám o sobě“, a tudíž by bylo možné antidiagonálu zkonstruovat. Proto pravdivostní predikát nemůže být mezi pseudopredikáty (což je vlastně jiné vyjádření Tarského věty, která je zmíněná v předchozí podkapitole).

Nyní od rekonstrukce Tarského věty přejděme k rekonstrukci Gödelovy věty o neúplnosti. Právě popsanou tabulku upravíme tak, že v ní bude vyjádřena dokazatelnost a ne pravdivost, např. v buňce $(3-1)$ se tedy do-

[13]Ve smyslu v jakém vlastnost *být černý* má vlastnost *být barva*, ale nemá vlastnost *být sudý*

zvíme, jestli má číslo $\ulcorner p_1 \urcorner$ dokazatelně vlastnost p_3 (pokud je tam 1) , nebo ji naopak dokazatelně nemá (pokud je tam 0, tj. formule $p_3(\ulcorner p_1 \urcorner)$ je vyvratitelná). Co by se tedy objevilo v případné antidiagonále? Z popisu tabulky plyne, že by antidiagonála vyjadřovala vlastnost pseudopredikátů „já nejsem o sobě dokazatelný“. Gödel ukázal, že dokazatelnost ovšem pseudopredikátem v aritmetickém jazyce vyjádřit lze. To znamená, že je vyjádřitelná i vlastnost odpovídající případné antidiagonále. z toho můžeme vyvodit, že abychom se antidiagonále a s ní i sporu vyhnuli, nutně nemohou být všude v tabulce hodnoty 0 a 1. Existuje tedy sentence, která nemůže být vyvratitelná ani dokazatelná, jinak řečeno nezávislá sentence. Peanova aritmetika je tedy neúplná.

Závěrem k první Gödelově větě

Hilbertův pokus převést otázku pravdivosti jakéhokoli tvrzení na otázku jeho dokazatelnosti a otázku dokazatelnosti na otázku existence určitého vztahu mezi matematickými objekty se podle Peregrin (1998a) mohl od začátku zdát odporovat zdravému rozumu. Osobně považuji důsledek Gödelovy věty za potvrzení, že v tomto smyslu je třeba dát zdravému rozumu za pravdu.

3. Druhá Gödelova věta

Druhá Gödelova věta je přímým důsledkem věty první. Gödel ji také uvádí ve stejné publikaci jako první větu o neúplnosti (Gödel (1931)) a už v úvodu tohoto spisu na ni připravuje čtenáře jako na překvapivý důsledek svého prvního teorému. Větu vyslovuje pro systém P, který popisuje jako *„systém, který obdržíme, jestliže propojíme Peanovy axiomy s logikou PM*[1] *(čísla jako individua, relace následníka jako nedefinovaný základní pojem)"*[2] a uvádí ji v tomto znění:

Věta 3. *Nechť je X libovolná rekurzivní bezesporná třída formulí, pak platí: větná formule vyjadřující, že X je bezesporné, není X-dokazatelná; zejména v P není dokazatelná bezespornost P za předpokladu, že P je bezesporné (v opačném případě je ovšem dokazatelný každý výrok).*

Tuto větu si můžeme přeříkat těmito slovy: *Je-li systém P bezesporný, nelze jeho bezespornost založit žádným metamatematickým důkazem, který by bylo možné reprezentovat uvnitř samotného systému PM.*

Filosofický význam první a druhé věty nelze úplně odlišit. Jednak proto, že, jak již bylo řečeno, druhá věta vyplývá z první, a také proto, že evidentně obsahují shodné důležité znaky a důvtipné kroky, které vůbec umožnily obě věty vyslovit. Mám na mysli autoreferenci a kódování. V Gödelem uvede-

[1] Tedy Principia mathematica

[2] Gödel (1931), str.69

ném prvním znění druhé věty můžeme myšlenku kódování rozpoznat v úseku *„větná formule vyjadřující, že X je bezesporné"*. Autoreference je dokonce ještě evidentnější, vzhledem k tomu, že autoreferenční už je samotné znění věty, nemá smysl ji uvádět zvlášť. Nebudu se tedy pouštět do rozboru toho, jak Gödel postupoval při formulaci a důkazu tohoto teorému, neboť bych tím nepřinesla nic, co by nezaznělo již v předchozí kapitole.

Hlavní význam druhé Gödelovy věty spatřuji především v tom, že se stala explicitním prohlášením neproveditelnosti části Hilbertova programu. Sám Gödel považuje tuto větu za prokázání nevyčerpatelnosti matematiky a evidenci neúplnosti matematiky (Tieszen (2011)).

4. Částečná rehabilitace Hilbertova programu?

Druhá Gödelova věta znamenala zmar snad nejdůležitějšího bodu Hilbertova programu, kterým je snaha o absolutní důkaz bezespornosti zaručující zároveň pravdivost (ovšem, jak jsme viděli, pravdivost v Hilbertově smyslu, tedy v poměrně slabém smyslu, viz kap. 1.2 – Hilbertův program) axiomů, resp. celého systému matematiky. Na tento přelom lze však také nahlížet jako na výzvu co nejvíce se přiblížit důkazu bezespornosti aritmetiky s použitím pokud možno pouze finitních metod, nebo alespoň co nejomezenějších infinitních metod. To se do značné míry podařilo Gerhardu Gentzenovi, který ve svých důkazech bezespornosti Peanovy aritmetiky z let 1936 a 1938 použil sice prostředky teorie množin, ale vystačil si využitím ordinálních čísel pouze omezené velikosti.

4.1 Myšlenka Gentzenova důkazu bezespornosti Peanovy aritmetiky

Gentzen ve svých pracích definoval kalkulus přirozené dedukce a sekventový kalkulus. Lze říci, že tak založily teorii důkazů (v konkrétnějším a současnějším slova smyslu, než v jakém jsme tento termín používali při popisu Hilbertova programu). Napsal dva důkazy bezespornosti Peanovy aritmetiky, první v roce 1936, kdy použil kalkul přirozené dedukce, druhý o dva roky později v sekventovém kalkulu. V obou případech se jedná o nesmírně rozsáhlý důkaz.

Popis průběhu a vysvětlení obou Gentzenových důkazů lze najít v Horská (2011) a podrobněji též v publikaci Horská (2014). Pro účely této práce si představíme jen hlavní myšlenku z důkazu v sekventovém kalkulu z roku 1938. Mé shrnutí pravděpodobně přiblíží průběh důkazu v mnohém nedostatečně, ale alespoň se pokusím poukázat na zmiňované omezené použití teorie množin. Oba Gentzenovy důkazy jsou založeny na stejné myšlence, totiž že v Peanově aritmetice se dají odvodit jen pravdivé sekventy (Horská (2011)).

Důkaz probíhá sporem. V Peanově aritmetice zkusíme odvodit sporný sekvent, který značíme $<\Rightarrow>$. Kdyby takový sekvent v Peanově aritmetice byl odvoditelný (dokazatelný), bylo by možné jeho odvození převést na tzv. jednoduché odvození. [1] Sporný sekvent však nemůže mít jednoduché odvození (což se dokáže pomocným lemmatem).

Odvození sporného sekvent redukujeme na jednoduché odvození. Redukce odvození se provádí pomocí pěti redukčních kroků. Každé odvození je očíslováno ordinálním číslem menším než ϵ_0 – toto je zásadní krok pro omezení[2] použití teorie množin – ordinální číslo ϵ_0 je horní hranice, maximum, co z teorie množin používáme. Každému odvození vzniklému jakýmkoli redukčním krokem z předchozího bude přiřazeno ordinální číslo ne větší než ordinální číslo předchozího odvození. Ordinální čísla se přiřazují sekventům podle určitého algoritmu (popsaného rovněž v Horská (2011), str. 84.)

Každý z pěti redukčních kroků se aplikuje, dokud je to možné a po posledním pátém kroku se může opět přejít k prvnímu a takto stále dokola. Redukcí ordinální čísla odvození postupně klesají, byť ne nutně v každém kroku. Jelikož jsou ordinální čísla dobře uspořádaná, nelze z nich vytvořit nekonečnou

[1] Což je odvození, které je bez volných proměnných, má jen tzv. matematické iniciální sekventy a strukturální pravidla a řezy aplikuje jen na atomické vstupní formule. Formálnější definici a podrobný důkaz lze najít v Horská (2011) nebo v Horská (2014)

[2] Ovšem omezení neznamená úplnou eliminaci teorie množin. Tady ještě jednou vidíme, že tento důkaz přece jenom není absolutní, neboť stále probíhá v rozšířené teorii.

klesající posloupnost. Můžeme si tedy být jistí, že nás redukční kroky dovedou k odvození, kterému bude přiřazené přirozené číslo. Odvození, jehož ordinál je přirozené číslo, odpovídá definici jednoduchého odvození. Jednoduché odvození sporu však neexistuje. Sporný sekvent tudíž nelze odvodit. Peanova aritmetika je tedy bezesporná.

5. Možné přístupy ke Gödelovým větám

Gödelovy věty inspirují mnohé myslitele k různým filosofickým interpretacím. My se zaměříme především na interpretace o nemožnosti poznání fungování lidské mysli a nezachytitelnosti lidského myšlení formálními systémy, které vyvolávají diskuze o mezích matematických nástrojů a omezenosti informačních technologií vůči lidskému myšlení. Například celkem rozšířený je výklad, že Gödelovy věty prokazují, že lidské myšlení nelze algoritmizovat. Takové závěry jsou však mnohými logiky či analytickými filosofy považovány za nepodložené a přehnané.[1]

Závěry podobného typu a další úsudky o povaze myšlení nejsou podle mého názoru zapříčiněny ani tak zněním Gödelových vět jako spíše tím, že jsme navzdory těmto větám schopni (patrně na rozdíl od počítačového programu, který musí být určen něčím podobným jako souborem axiomů a odvozovacích pravidel) prokázat pravdivost Gödelovy sentence. Můžeme tedy již nyní tušit, že v rozdílnosti přístupů ke Gödelovým větám bude hrát velkou roli rozdíl mezi pravdivostí a dokazatelností.

To, že tvrzení (původně pouze) o axiomatických teoriích dovedla některé myslitele k závěrům o povaze lidské mysli a mezích schopnosti počítačů, můžeme na jednu stranu vnímat jako nepřiměřený až absurdní přesah a argumentovat tím, že by se taková tvrzení neměla vykládat mimo svůj obor, na

[1] Jejich kritiku najdeme například v Peregrin (1998b).

druhou stranu ho můžeme vnímat jako přirozené vyústění, které nepřekvapivě přesahuje rámec disciplíny, ve které byl výrok původně pronesen.

Představme si silné a slabé stránky možných přístupů ke Gödelovým větám, které jsem pro přehlednost rozdělila podle disciplín, ze kterých vycházejí.

5.1 Přístup popírající filosofický význam Gödelových vět

Mnozí logici a analytičtí filosofové varují před unáhlenými interpretacemi a unáhlenými přesuny významu Gödelových vět do jiných disciplín, např. do filosofie mysli. Prezentovat výroky typu *„Gödelův teorém je příležitostí pro nové ocenění síly tvůrčího rozumu.“* (Nagel and Newman (1958)), *„Lidská mysl je nedostižná formalismem.“* (Nagel and Newman (1958)), nebo *„Mysl nelze vysvětlit jako stroje.“* (Raatikainen (2005)) jako důsledky vět o neúplnosti formálních systémů se opravdu může jevit jako nerelevantní výklad.

Podle některých logiků by význam Gödelových vět měl zůstat pouze u toho, co samy věty říkají – každé rozumné rekurzivní rozšíření Peanovy aritmetiky je neúplné – v systémech vycházejících z Peanovy aritmetiky nelze dokázat jejich vlastní bezespornost – a nevyvozovat z těchto tvrzení žádné důsledky o povaze lidské mysli. Na první pohled se skutečně může zdát, že Gödelovy teorémy neříkají nic jiného, než že je systém, který je přijatelným rozšířením PA, neúplný.

Avšak na druhou stranu je dobré si uvědomit, že při sestavování vět o neúplnosti Gödel vzal jednu ze schopností lidské mysli – a to schopnost usuzovat o přirozených číslech – a ukázal, že tato schopnost v něčem přesahuje schopnosti každé použitelné axiomatiky. Z tohoto pohledu už závěry o povaze matematiky a lidské mysli vyznívají přirozeněji.

Někomu by se mohlo zdát, že Gödelovy věty jsou dobrým výchozím bodem či dokonce návodem pro popis lidské mysli. (K takovému názoru může navádět skutečnost, že jejich důkaz je dostatečně konstruktivní (v intuicionistickém slova smyslu), aby obsahoval určitý návod.) V takovém případě by už bylo podle mého názoru rozhodně na místě takové nápady usměrnit a zdůraznit, že návod, který Gödelův důkaz obsahuje, je (pouze) návod jak k formálnímu systému najít výrok, jehož pravdivost tento systém neumí odhalit. A konstruktivismus důkazu je korektní chápat pouze ve smyslu intuicionistické logiky.

Avšak matematiku ani logiku nelze, jak dokládá mnoho jiných (nejen) matematických problémů[2], úplně odstřihnout od jiných disciplín. Z mého pohledu celkem racionální přístup ke Gödelovým větám, který popsal Jaroslav Peregrin v Peregrin (2008), je nahlížet na ně jako na *„odhalení zcela nečekané obranné linie jazyka, která nám nedovoluje zmocnit se pravdivosti způsobem, který by zkratkou obešel běžné mechanismy hledání pravdy.“*

Závěrem lze tedy zjednodušeně prohlásit, že Gödelovy věty sice musíme interpretovat opatrně, ale ona opatrnost by nám neměla svazovat ruce a neměla by způsobit to, že se nevymaníme z relativně úzkého oboru matematiky. Při přehnané opatrnosti bychom mohli dospět k závěru, že Gödelovy věty neříkají vůbec nic. Nenesly by tím pádem žádný význam a mohly by být vnímány jako zbytečné.

[2]Mám na mysli např. paradoxy, které vznikly na poli logiky, ale dají se celkem snadno přeříkat v přirozeném jazyce, nebo naopak – např. paradox lháře vzešel z přirozeného jazyka, ale lze ho vyjádřit ve formálním jazyce nějaké axiomatizovatelné teorie

5.2 Význam Gödelových vět ve filosofii

Umírněné i radikálnější intepretace Gödelových vět a jejich přesahy (převážně do filosofie) se zakládají na myšlence, kterou si dovolím formulovat podle Dummettova článku Dummett (1963). Autor v něm vysvětluje, že z Gödelových vět vyplývá, že vždy budeme schopni na základě svého intuitivního pojetí určitého pojmu (konkrétně pojmu přirozeného čísla) rozhodnout o pravdivosti určitých tvrzení, i když tuto pravdivost není možné odvodit ze samotného popisu užití těchto tvrzení.

Zdá se, že lidé nemají problém pochopit, že některé věty jsou ve formálním systému nerozhodnutelné. To, co je pro ně obtížnější, je pochopit, že zrovna věta, která je pravdivá a my to o ní umíme zjistit, může být nerozhodnutelná.

Jak lidská mysl dokáže nahlédnout pravdivost určitého výroku, který přitom formální systém neumí dokázat? Představme si situaci (podobná je uvedena v Zouhar (2005)), kdy počítač vypisuje pouze pravdivá tvrzení o přirozených číslech. Předpokládejme dále, že tento počítač je naprogramován pomocí formálního systému, na nějž se vztahuje Gödelův výsledek a v němž jsou dokazatelná všechna tvrzení, která kdy počítač vypíše. Tento počítač nemůže vypsat tvrzení, které není v tomto formálním systému dokazatelné. Mimo jiné tedy nebude schopen vypsat některá pravdivá tvrzení.

Znamená to snad, jak tvrdí některé vykladačské teorie, že lidská mysl je schopná něčeho, čeho není schopen žádný, byť sebedokonalejší formální systém?

Sám Gödel se do určité míry domnívá že ano. Gödelově postoji k jeho vlastním větám bude věnována následující kapitola, ale nejprve bude užitečné se zaměřit na Gödelovo chápání pojmu analytičnosti. Jeden z možných důsledků Gödelových vět je totiž ten, že matematiku nemůžeme považovat za analytickou v běžném slova smyslu, proto bude zajímavé zjistit, jak se k tomuto pojmu Gödel stavěl, o čemž můžeme získat představu z článku Martin (2005). Ten uvádí, že Gödel rozlišuje dva smysly analytičnosti:

1. *„purely formal sense that the terms occuring can be defined in such a way that the axioms and theorems become special cases of the law of identity“*

2. *„owing to the meaning of the concepts occuring in it“*

Klasická představa analytičnosti v pojetí analytické filosofie je ta, že analytičnost znamená *pravdivost pouze na základě významu*, přičemž významem někteří analytičtí filosofové rozumějí pravidla užívání výrazu.

Axiomy Peanovy aritmetiky jsou při takovémto přístupu chápány jako pravidla užití aritmetických výrazů a platí tedy rovnost *znalost axiomů a pravidel odvozování = znalost významu výrazů*, a všechny teorémy jsou tedy analytické. Jenomže z Gödelových vět se zdá, že axiomy nepopisují čísla jednoznačně, takže existují i jiné aritmetické pravdy než teorémy PA.

Podle Dummetta máme všichni pojem přirozeného čísla, ale žádný konečný popis našeho užívání aritmetických tvrzení nemůže plně vysvětlit jeho charakter; „to je vidět na příkladu faktu, že vždy budeme schopni na základě svého intuitivního pojetí tohoto pojmu rozhodnout o pravdivosti určitých tvrzení, i když tuto pravdivost není možné odvodit z popisu užití těchto tvrzení.“[3]

Námitka, že axiomy PA nemohou být považovány za určující význam, čelí protinámitce, že tu totiž předpokládáme cosi jako přirozený model (tj., že víme, jak přirozená čísla vypadají) – to právě dělá Gödel. Předpoklad takového modelu však nemusí být úplně samozřejmý.

Martin si nemyslí, že by matematické pojmy musely být instancionalizovány – že by se každému pojmu musela přiřadit jedna konkrétní věc (*„For myself, I have doubts both about the fact of instantiation and about whether it is important for mathematics.“*)[4]). Gödel se hlásí k jisté tezi o analytičnosti aritmetiky, avšak tuto analytičnost chápe v jiném slova smyslu, než bychom

[3]Filosofický význam Gödelovy věty, (Dummett (1963) , str. 335)
[4]Martin (2005), str. 220

předpokládali. Také se hlásí k přirozenému modelu v tom smyslu, že existuje cosi jako matematická „objektivní realita“, kterou nemůžeme stvořit nebo změnit, můžeme ji pouze vnímat nebo popsat[5]. Zdá se, že jeho chápání analytičnosti se postupně vyvinulo a nakonec se lišilo od „standardního“ (tak, jak ho známe z běžnějších pojetí analytické filosofie – tedy zhruba ve dvou zmíněných významech, v jakých analytičnost, jak jsme poznamenali, podle Martina někdy Gödel také chápal): *„I wish to repeat that ‚analytic‘ here does not mean ‚true owing to our definitions‘, but rather ‚true owing to the nature of the concepts occurring [therein]“*Gödel (1995). Podle něj můžeme tento význam nahlížet čistě intelektuálně, je tedy neempirický, ale není daný námi stanovenými pravidly užití, ale naopak tato pravidla užití z příslušného pojmu, který má svoji objektivní nezávislost, nějakým způsobem vyplývají (*„What is wrong, however, is that the meaning of the terms (that is, the concepts they denote) is asserted to be something man-made and consisting merely in semantical conventions.“; „. . . mathematics is based on axioms with real content, because the very existence of the concept of e.g., ‚class‘ constitutes already such an axiom“*Gödel (1995).

Gödel věřil, že máme jakousi schopnost percpece abstraktních objektů. Jeho chápání percepce nám podle Martina může připomínat Kantův čistý názor.[6] To pak podle Martina přirozeně dovedlo Gödela k Husserlovi a fenomenologii.

[5] *„We cannot create or change, but only perceive and describe.“*, (Gödel (1995))

[6] Již nyní je dobré si uvědomit, že i přes určité podobnosti s Kantovou filosofií se Gödel dívá na některé pojmy téměř opačně, např. to, co Gödel nazývá analytickým odpovídá (v jisté, byť patrně velmi omezené míře) spíše Kantovu syntetickému.

5.2.1 Gödel proti mechanismu na cestě k fenomenologii

Ti, kteří do hloubky studují Gödelovy matematické výsledky budou možná překvapeni spojením Gödela s fenomenologií. Spíše by ho spojili s Platonem. Gödel se však začal o fenomenologii zajímat pozdě, takže je velmi pravděpodobné, že neměla žádný dopad na jeho nejdůležitější logické a matematické objevy. Je známo, že Gödel byl realista a platonista a jeho filosofické stanovisko zpočátku nejvíce ovlivnili Platon a Leibniz, pak se teprve začal zabývat Husserlovou fenomenologií.

Důkazy o tom, že se Gödel díval na matematiku včetně svých vlastních výsledků fenomenologickýma očima jsou těžko dohledatelné, protože Gödel fenomenologii nevěnoval nikdy žádnou publikaci. Nicméně z jeho osobních, nikdy nevydaných zápisků, a podle mnoha současných autorů je evidentní, že k ní směřoval. Existují názory, že si netroufl psát přímo o ní z obavy, že by ho analytičtí filosofové nemuseli brát vážně. Ostatně i dnes slýcháme názory, že byl Gödel výborný matematik, ale zvláštní filosof a mnohdy ti, kteří jsou fascinováni jeho matematickými výsledky jsou poněkud zklamáni jeho filosofickými pracemi.[7]

Gödel se domníval, že jeho věty o neúplnosti jsou důkazem toho, že matematika je nevyčerpatelná. Proto se obrátil k filosofii a hledal způsob, jak se k takovému závěru postavit. Relevantní obrázek o jeho filosofickém vývoji si můžeme udělat z Filosofických esejí (Gödel (1999)).

V této publikaci najdeme mimo jiné potvrzení Gödelova platonismu[8]. Zásadnější význam však pro nás má spíše jeho negativní přístup k tehdejší

[7] Citujme např. Pavla Housera z Houser (2004): *Kurt Gödel je postavou na jedné straně velmi respektovanou, na druhé straně jeho četné výstřelky představují oblíbené zpestření populárně-vědecké literatury* nebo Jaroslava Peregrina v reakci na Jiřím Fialou napsanou recenzi Kolmanovy Knihy Filosofie čísla*„Gödel je jistě jednou z klíčových postav, jeho filosofické názory jsou ale brány spíše jako kuriozita než jako něco, co by bylo z hlediska filosofie matematiky skutečně podstatné.“*

[8] Ve smyslu kladení důrazu na věci neměnné a věčné, případně rozumové; výslovně se k němu hlásili i další filosofující vědci jako např. Whitehead

podobě matematiky. Trochu paradoxně se zastává Hilbertova formalismu, kterému, jak víme, v podstatě zmařil naděje na úspěšné dosažení některých programových cílů.

Jeden z problémů současné matematiky, na které zde Gödel upozorňuje, je mimo jiné často se vyskytující nekonstruktivnost důkazů. Je sice možné sporem dokázat, že existuje např. číslo X, které splňuje podmínku Y. Z důkazu však vůbec nevyplývá znalost tohoto čísla a dokonce ani postup, jak ho najít nebo zkonstruovat.[9]

Ze závěru jeho esejí můžeme vyrozumět, že Gödel vkládá naději do Husserlovy fenomenologie. Právě ta by mohla být tím, co vědu (nebo alespoň matematiku) odvrátí od víry, že matematiku lze zredukovat na mechanickou aplikaci pravidel, na rutinní manipulace takového typu, jaké může provádět počítač.

Z dalších Gödelových vyjádřeních (ať už na přednáškách nebo v publikacích) je patrné, že se staví proti různým formám konvencionalismu ve filosofii matematiky (Tieszen (2011)) a že věří v lidskou mysl a odmítá pohled na ni jako na nedokonalou a iracionální.[10]

Gödel napadá Poincarého konvencionalismus, k němuž ho dovedl současný vývoj matematiky – axiomatizace řady matematických disciplín a vznik neeuklidovských geometrií (resp. vědomí, že prostoru může odpovídat více různých geometrií). Poincaré se na základě toho domníval, že geometrie nemá empirický původ a nevypovídá nic o reálném světě.

Gödel konvencionalismus odmítá – podle něj možnost, že existují nerozhodnutelné matematické problémy, je ukázka toho, že matematika není jen náš výmysl. Matematické objekty očividně existují nezávisle na našich rozhodnutích.

Na druhou stranu měl Gödel také sklony existenci neřešitelných problémů

[9]Gödelovu důkazu neúplnosti se z hlediska konstruktivnosti nedá nic vytknout.
[10]Tzv. rationalistic optimism (Tieszen (2011))

popírat. Raatikainen ve svém článku Raatikainen (2005)[11] poukazuje na to, že Gödel vidí pouze dvě možnosti: buď lidská mysl nekonečně překonává konečné stroje (tzv. anti-mechanismus), nebo existují absolutně nevyřešitelné problémy:

> *„Gödel drew the following disjunctive conclusion from the incompleteness theorems: either ... the human mind (even within the realm of pure mathematics) infinitely surpasses the power of any finite machine, or else there exist absolutely unsolvable diophantine problems.“*

Schopnost lidské mysli překonat možnosti jakéhokoli konečného stroje není tedy podle Gödela důsledkem vět o neúplnosti, ale je podmíněna neexistencí nevyřešitelných problémů.

Podle Raatikainen (2005) Gödel sice připouští, že obě možnosti – jak anti-mechanistický postoj, že lidská mysl překonává schopnosti počítačů, tak alternativa, že existují pro lidský rozum zcela neřešitelné problémy (Raatikainen (2005))[12] – jsou kompatibilní s jeho větami o neúplnosti, ale staví se spíše na stranu anti-mechanistického postoje než na stranu uznání existence neřešitelných problémů a to převážně z filosofických důvodů:

> *„His fundamental reasons for disliking the latter alternative are much more philosophical. Gödel thought in a somewhat Kantian way that human reason would be fatally irrational if it would ask questions it could not answer.“*

Tieszen (Tieszen (2011)) vysvětluje přechod Gödela k fenomenologii přibližně takto: Věty o neúplnosti podle Gödela nestanovují hranice síly lidské mysli ale spíše potenciál čistého formalismu v matematice. Nemechanická

[11] V kapitole „Gödel on mechanism and Platonism“
[12] V kapitole „Gödel on mechanism and Platonism“

koncepce rozumu souvisí s Gödelovým studiem Husserla – fenomenologický pohled na lidskou mysl zůstává otevřený možnosti nalezení systematických a konečných ale nemechanických metod pro rozhodnutí významných matematických otázek na základě objasnění intuice abstraktních pojmů zahrnutých v těchto otázkách (Tieszen (2011)).

Podle Tieszena Gödela k fenomenologii přitáhly metodologické důvody. Hledal novou metodu pro přemýšlení o základech matematiky a metafyziky obecně a myslel si, že fenomenologie by mohla takovou metodu nabídnout se svou fenomenologickou redukcí neboli jejím prvním krokem, tzv. „epoché“.[13]

Gödel má podobný pohled na pojmy jako Husserl, jsou to podle něj abstraktní objekty. Existují nezávisle na našem vnímání a my je vnímáme lépe nebo hůře stejně tak, jako můžeme např. nějaké zvíře lépe nebo hůře vidět. Rozumět významu výrazu je jako vidět pojem zblízka. Stejně jako Husserl říká, že předpokládat, že nevidíme či nevnímáme pojmy intuicí, je jen předsudek naší doby. Gödel evidentně věří i v lidskou intuici, resp. v to, že lidé mají intuitivní představu o pravdivosti.

[13] Předběžné vyřazení („uzávorkování“) nekriticky či naivně přijímaných předpokladů o vnímaném předmětu. (Tieszen (2011))

5.2.2 Gödelovy věty = důkaz nemožnosti formalizovat lidské myšlení?

Gödelovy věty vyprovokovaly závěry o nemožnosti formalizovat lidské myšlení. Říkáme jim anti-mechanistické názory (ostatně výše jsme naznačili, že se i Gödel stavěl proti mechanismu). Naší základní otázkou bude, jak je možné, že tvrzení o neaxiomatizovatelnosti formálních systémů mohou přimět některé vykladače k výrokům o nedostižitelnosti lidské mysli umělou inteligencí.

Abychom si na takovou otázku mohli odpovědět, musíme si nejprve představit, jak by Turingův stroj rozhodl o Gödelově sentenci, pokud by mu byla zadána. Zjednodušeně by se dalo říci, že na rozdíl od člověka stroj nepozná pravdivou větu, která není dokazatelná. Na rozdíl od člověka totiž není schopen rozlišit dokazatelnost a pravdivost. Jenže s Gödelovými větami je najednou těžké držet rovnost mezi pravdivostí a dokazatelností.

Anti-mechanistické závěry dělají podle Raatikainen (2005) jednoduchou chybu: argument, že lidské myšlení je nepřekonatelné jakýmkoli strojem, předpokládá, že pro každý formalizovaný systém, nebo konečný stroj, existuje Gödelova sentence, která je nedokazatelná v tomto systému, ale kterou lidská mysl nahlédne jako pravdivou. Gödelova věta má však ve skutečnosti formu podmínky a prohlašovaná pravdivost Gödelovy sentence záleží na předpokladu konzistence systému. Anti-mechanistický argument také požaduje, aby lidská mysl vždy věděla, zda je formalizovaná teorie konzistentní. To je však nevěrohodné.

I McCall v McCall (1999) uznává, že standartní anti-mechanistický argument je problematický, protože rozpoznání pravdivosti Gödelovy sentence závisí na nedokázaném předpokladu, že je systém konzistentní. McCall však ještě nabízí nový argument, kterým chce ukázat, že pro lidskou mysl (a nikoli pro stroje) se pravdivost a dokazatelnost rozcházejí. Buď je totiž systém konzistentní, čili je Gödelova sentence pravdivá, ale nedokazatelná, nebo je systém nekonzistentní a Gödelova sentence je dokazatelná, ale pak je nepravdivá. Lidská mysl vidí to, že ani jedna varianta nespojuje pravdivost a dokazatelnost, kdežto Turingův stroj takový „fakt“ není schopen nahlédnout. Odpověď na otázku „Může Turingův stroj vědět, zda je Gödelova věta pravdivá?“ je tedy ve zkratce „ne“.

Je zřejmé, že pro Turingův stroj se sebebohatším axiomatickým základem platí, že bude vždy existovat věta, o které člověk pozná, že je pravdivá, ale kterou stroj jako pravdivou nerozezná. Podle McCall (1999) to znamená, že vždy budou existovat případy, kdy lidské schopnosti předčí schopnosti Turingova stroje.[14]

Můžeme (inspirováni McCall (1999)) učinit tento závěr:

Achillova pata všech Turingových strojů je, že pro žádný z nich neexistují kategorie jako „pravdivé ale ne teorémy“ a „teorémy ale ne pravdivé“. Propast, která dělí lidi (lidské myšlení) od strojů je propast, která dělí dokazatelnost od pravdy.

Souvislost s Turingovým testem

Z Gödelových vět víme, že v každé dostatečně silné logické soustavě lze formulovat tvrzení, která nemohou být v rámci soustavy dokázána ani vyvrácena, pokud sama soustava není nekonzistentní. Také se vyvozují závěry o nemožnosti formalizovat lidské myšlení nebo o nepřekonatelnosti lidské mysli umělou inteligencí. To je v dnešní době stále rychleji se vyvíjejících technologií aktuální téma. Dobrým ukazatelem rozdílnosti lidské a počítačové mysli je tzv. Turingův test. Jedná se o imitační hru, kdy na otázky v přirozené

[14]To však neznamená, že by takovýmto prohlášením autoři výroků podobného typu mysleli, že lidská mysl předčí počítače ve všech ohledech. Lidskou mysl můžeme posuzovat a porovnávat se stroji z mnoha hledisek. Viděli jsme, že v jedné schopnosti, totiž ve schopnosti rozpoznat pravdivou a zároveň nedokazatelnou formuli, lidská mysl stroje předčí. V mnoha jiných případech však za stroji daleko zaostává (každý si jistě takové případy dovede představit – rychlost a složitost výpočtu, kontrola pravopisu / překlepů v textu a mnoho dalších).

řeči odpovídá náhodně člověk nebo stroj a testující má rozpoznat, kdo na co odpověděl. Je známo, že se v průběhu času stroje a různé softwary vytvořené na stejné bázi vyvinuly natolik, že se stalo téměř nemožným odlišit odpovědi stroje od odpovědí člověka.

Proti názoru, že Turingův test je dostatečným kritériem pro rozhodnutí, zda stroje mohou myslet (resp. sám Turing ovšem prohlásil pouze: „Mohou hypoteticky existovat digitální počítače, které by si dobře vedly v imitační hře" (Turing 1950, str. 442)), se vyslovilo mnoho filosofů. Turing evidentně kritiku očekával a ve své eseji sám stanovil devět potenciálních námitek, které se snažil vyvrátit. Filip Tvrdý je ve své knize Tvrdý (2014), popisuje detailněji. Za pro nás nejdůležitější námitku považuji *matematickou námitku*. Tato námitka říká, že bez ohledu na Turingův test nelze lidské myšlení nahradit počítačovým programem a za potvrzení této námitky považuje právě Gödelovu větu o neúplnosti.

Turing z věty o neúplnosti přímo vyvozuje, že „existují určité věci, které stroj nemůže udělat"[15]: V průběhu imitační hry bude podle Turinga počítač nesprávně odpovídat (případně nebude odpovídat) především na různé druhy autoreferenčních otázek, i kdyby měl k dispozici neomezené množství času. (Obecně tedy můžeme říci, že v Turingových úvahách je autoreference, stejně jako u Gödelových vět, klíčová.)

Existují názory, že skutečnost, že si počítače nejsou schopny poradit s autoreferencí a že mysli počítačů nejsou úplné, protože v nich vždy existuje třída vět, které jsou pravdivé a nedokazatelné, znamená, že lidé vždy dovedou něco, co přesahuje schopnosti počítačů.[16] Napadá mě, že člověk si např. s paradoxem lháře může poradit tak, že větě „teď právě lžu" nepřipíše ani jednu ze dvou běžných pravdivostních hodnot. Je schopen nahlédnout na objektový jazyk pomocí metajazyka. Ostatně připomeňme si, jak se ke svému

[15] Turing, 1950, str. 444, citováno ze Tvrdý (2014), str. 42

[16] Toto tvrdí například Lucas v Lucas (1961). Lucasův argument spočíval především v tom, že opakoval, že na rozdíl od počítačů, jsou lidé schopní vystoupit z výchozího systému axiomů a pravidel.

vlastnímu paradoxu postavil Bernard Russell – vytvořil teorii typů, aby bylo možné určitý problém řešit v teorii vyššího řádu.

Tento přesun na metaúroveň nám samozřejmě nezajistí vyřešení všech problémů, protože s každou vyšší úrovní se vyrojí stejné problémy, se kterými jsme se potýkali na předchozí úrovni. To je ostatně důležitý důsledek Gödelovy věty – že vždy budou existovat nerozhodnutelné problémy – nicméně vyřešení na jedné úrovni je skutečně možné přenesením problému do úrovně vyšší. Pokud určitá věta není dokazatelná v soustavě *S1*, můžeme tuto nedokazatelnost konstatovat v nadřazené soustavě *S2* atd.

Nicméně tato schopnost 'vystoupit o úroveň výše' nemusí být vlastní pouze člověku. Vždyť člověk sestrojuje počítače a je (zřejmě) v jeho zájmu sestrojit je co nejdokonaleji. Může se tedy inspirovat vlastními schopnostmi a předat je i počítačům. Dnes už počítače obsahují hierarchii strojového kódu, vyššího programovacího jazyka a vlastního programu. Podle Tvrdého (Tvrdý (2014)) *vysvětlovat odlišnost lidských a počítačových myslí odkazem na Gödelův teorém je proto iluzorní.* To však, podle mého názoru, platí až v dnešní době, kdy počítače byly vyvinuty do té míry, že „převzaly" od člověka onu schopnost „vystoupit o úroveň výše". Krátce po objevu Gödelových vět tento názor nikomu iluzorní připadat nemusel.

Další důvod pro odmítnutí matematické námitky vidí Tvrdý ve skutečnosti, že lidská mysl je díky mnohaletému vývoji metodou pokusu a omylu nesrovnatelně složitější než počítačová. Tato složitost a nezachytitelný vývoj nám brání pohlížet na mysl stejně jako na počítač, neboť nemůžeme poznat „počítačový" program mysli. Filip Tvrdý ještě napadá další verzi matematické námitky, která se, aby zdůvodnila svůj odmítavý postoj k možnosti, že stroje mohou myslet, opírá o neporovnatelnost lidské a počítačové mysli z hlediska přístupu k rozporům:

> *„Tvrzení, že počítačové mysli jsou konzistentními systémy, zatímco lidské mysli jimi nejsou, je intuitivní (...) Ideali-*

zované počítače a ideální lidé jsou dokonale bezrozpornými mysliteli, reálný svět takovou dokonalostí nedisponuje. Počítače se sice dopouštějí menšího množství chyb než lidé, ale podstatné je, že občas chybujeme všichni.“[17]

Dovoluji si k tomuto závěru přidat ještě jeden osobní postřeh. Úvahy o podobnosti strojů a lidí a o nemožnosti dosáhnout dokonalosti ani u jednoho z nich sice už tak úplně nespadají do tématu této práce, ale přesto se pokusím vyjádřit se k právě zmíněné myšlence o „konzistentnosti“ strojů a lidí[18]. Myslím si, že žádný člověk nebude mít problém považovat lidskou mysl za nekonzistentní. Každý si snadno představí situace, kdy lidé jednají nekonzistentně (čímž mám na mysli, že jsou schopni jednat či třeba jen mluvit proti pravidlům, která si sami nastaví a dopouštět se rozporů). Za mnohem konzistentnější v myšlení většina lidí pravděpodobně považuje právě počítačové programy. Lidé se možná domnívají, že mohou snáze posoudit konzistenci jak jiných druhů či forem života, než jsou oni sami, tak „myslících“ strojů, protože právě v takovém případě mají možnost posuzovat zvnějšku, mimo systém, jehož jsou sami součástí.

Mám ovšem pochybnosti zda lidé, jakožto nekonzistentně myslící tvorové, mohou adekvátně posoudit konzistentnost byť odlišného druhu myslícího tvora / stroje. Další skutečností, která podle mého názoru brání uvěřit, že počítače jsou konzistentnější než lidé, je ta, že tyto počítače byly vymyšleny a sestrojeny lidmi – tedy nekonzistentně myslícími tvory. Ačkoli asi každý strůjce / programátor sestavuje počítač podle svého nejlepšího vědomí o (nejen) konzistentnosti, resp. sestavuje algoritmus pomocí předem jasně daných procedur, není technicky možné zajistit konzistentnost počítačů lidmi, neboť i tyto procedury jsem vymyšleny lidmi. Počítače jsou do určité míry stvořené k obrazu lidskému a výstup z lidského způsobu myšlení s jeho ne-

[17] Tvrdý (2014), str. 46, 47

[18] Výraz konzistentnost používám jako zkratku za vyjádření schopnosti jednat či odpovídat konzistentně, nedopouštět se rozporů ať už v přirozeném či formálním jazyce

konzistencemi nejspíše není ani při konstrukci strojů možný. Samozřejmě programátor nemusí počítači nutně předávat všechny schopnosti (a potenciálně tedy i rozpory) své mysli, přesto jsem obecně k naší schopni rozpoznávat konsistenci programů a strojů skeptická.

V dnešní době se množí obavy z budoucí nadvlády strojů. Těmto obavám nahrávají skutečnosti, že se již několikrát stalo, že počítačové programy porazily jedny z nejbystřejších lidských mozků ve strategických hrách, např. v šachu. Bylo by pošetilé brát neschopnost Turingova stroje rozpoznat pravdivost Gödelovy sentence (na rozdíl od člověka) jako útěchu v podobě důkazu, že se stroje lidem nikdy nebudou schopny vyrovnat. To už se raději utěšujme faktem, že my jsme, na rozdíl od strojů schopní se k autoreferenci postavit zády a říci, „na tohle já odpovídat nebudu“ i bez toho, aby nám hrozilo zacyklení.

5.2.3 Kantův čistý názor

Výše uvedené přístupy ke Gödelovým větám jsou poměrně známé a hojně diskutované. Jak přístup popírající přesah Gödelových vět do filosofie či jiných disciplín, tak fenomenologický přístup i přístupy v rámci analytické filosofie mysli vyvinuvší se až v závěry o nepřekonatelnosti lidské mysli počítači mají jistě svá úskalí. Jedním z nich je podle mě fakt, že diskuze, které se o nich vedou, většinou probíhají v duchu nařčení jednoho přístupu z extrémů a navrhování jiného přístupu jako jediné alternativy. Proto si myslím, že by bylo vhodné navrhnout ještě další, méně známý přístup, ve kterém se obrátíme hlouběji do dějin filosofie a zamyslíme se nad tím, jak by asi ke Gödelovým větám přistupoval Kant.

Immanuel Kant matematiku chápal jako výjimečnou vědu, jež by mohla být i nadějnou inspirací pro metafyziku. Byl fascinován tím, jak matematika dochází ke svým výsledkům a její soudy pro něj byly syntetické a priori, neboť se jedná o úsudky, které nezávisí na zkušenosti, ale zároveň rozšiřují poznání, resp. jdou „za“ pojmy. Již jsme se podrobněji věnovali Kantovu chápání prostoru a geometrie, nyní je pro nás důležitější, že také čas chápe Kant jako formu našeho názoru (která neexistuje nezávisle na nás, ale zároveň je její podoba nutná a ne vytvořená podle určitých arbitrárních konvencí) a aritmetiku jako disciplínu, která ji zkoumá, stejně jako geometrie zkoumá druhou formu názoru, tj. prostor. I aritmetické poznatky jsou tedy syntetické a priori – např. při zjištění výsledku součtu $5 + 7$ se ubíráme cestou za pojem pětky a sedmičky a poznatek, že výsledek činí 12 rozšiřuje naše poznání nad rámec toho, co je v pojmech obsaženo.

V úvodu této práce jsme viděli, že vlivem objevu neeukleidovských geometrií se toto zařazení projevilo pro geometrii jako problematické, protože Kantův model funguje pro jedinou správnou geometrii (za kterou on samozřejmě pokládal eukleidovskou – jako jedinou v té době existující), ale ukázalo se, že náš prostor mohou stejně dobře vystihovat i neeukleidovské geometrie.

Objev neeukleidovských geometrií sice napadl Kantův pohled na matematiku, avšak zase napomohl rozvoji programů jako Fregův logicismus a Hilbertův formalismus. Frege sice moc neuznával neeukleidovské geometrie a pravděpodobně by stejně jako Kant zařadil geometrii do kategorie disciplín syntetických a priori, avšak neviděl tak celou matematiku. Domníval se, že má smysl zkoumat, zda aritmetika nemůže být analytická.

Poté, co se ukázalo, že více geometrií může vyjádřit náš prostor a že si v podstatě jednu z geometrií, ve které chceme popisovat prostor, zvolíme, se však může zdát, že i geometrie by mohla být spíše věda analytická. Hilbert se v podstatě pokusil prokázat analytičnost celé matematiky.

Jak víme, Gödelovy věty znamenaly neúspěch Hilbertova programu a my se nyní můžeme ptát, zda není načase vrátit se zpět ke Kantovu pojetí a dát mu (na rozdíl od Hilberta) za pravdu v tom, že matematika přece jenom (v nějakém smyslu) je syntetická a priori. Tak, jak objev neeukleidovských geometrií zpochybnil Kantovo nahlížení na matematiku jako na disciplínu syntetickou a priori, tak můžeme říci, že Gödelovy věty mohly zpochybnit Fregovo nahlížení na aritmetiku (a Hilbertovo nahlížení na matematiku) jako na analytickou disciplínu.

Zajímavostí pro nás může být, že se (jak již bylo naznačeno výše) Gödel, kromě toho, že směřoval k fenomenologii, nechal ve svých filosofických přístupech k větám o neúplnosti inspirovat Kantem a jeho přístupem k matematice. Jednak je dobré si všimnout pojmu *intuition*, který má v angličtině dva významy – intuice – jak ji chápeme v přirozené řeči a „názor“, tedy po kantovsku. Gödel pravděpodobně výraz „intuition“ chápal ve smyslu „intelektuální intuice“, pomocí které pozorujeme a chápeme svět (podobně třeba v případě platonismu bychom řekli, že nahlížíme ideje určitou intelektuální intuicí – nenahlížíme je smysly, ale přímo rozumem).

Parsons[19] poznamenává, že Gödel pojem „intuition“ – názor nechápal tak, jak ho chápali běžně např. intuicionisté v kantovském slova smyslu jako

[19] Parsons (1995), str. 45

čistý názor času, případně prostoru, ale v obecnějším smyslu a v kontextu vyšší, abstraktnější matematiky.

Nicméně i tak Parsons spatřuje určitou spojitost mezi Gödelem a Kantem. Přestože Gödel Kantovi vytýká, že je příliš subjektivistický, v jeho chápání času jako čisté formy názoru vidí i možnou inspiraci:

> *„Gödel reporaches Kant for being too subjectivist. However, he interprets Kant's conception of time as a form of intuition as meaning that 'temporal properties are certain relations of the things to the perceiving subject' and he finds that there is at least a strong tendency of Kant to think that, interpreted in that way, temporal properties are perfectly objective.“*

Gödel však došel k přesvědčení, že moderní fyzika umožnuje realističtější přístup, než je ten, který zastával Kant.

> *„In his discussion of Kant, he clearly thinks that modern physics allows a more realistic attitude than Kant held.“*

Zamyslíme se, zda by nebylo vhodné dívat se na Gödelovy věty perspektivou Kantovy filosofie a zda by takový přístup ke Gödelovým větám nebyl příhodnější než např. výše uvedený přístup analytické filosofie mysli. V těchto přístupech jsme byli svědky diskuzí, zda je lidská mysl schopnější než počítačová. Osobně se domnívám, že není potřeba aby Gödelovy věty vyvolaly něco jako „soutěž“ mezi lidskou a počítačovou myslí. Důsledky Gödelových vět nám spíše mohou být dobrým poukázáním na jednu z patrně unikátních schopností lidské mysli – totiž schopnost vypořádat se s autoreferencí, schopnost rozpoznat jako pravdivou formuli, o které to počítačový systém neumí dokázat a další schopnosti, které s tím souvisí. Tuto schopnost je jistě možné filosoficky uchopit mnoha různými způsoby; já bych se teď ráda věnovala tomu, jak by na ni nejspíše pohlížel Kant. Nemíním se pouštět do žádného obsáhlého výkladu Kantovy filosofie. Připomeňme si však jeden aspekt jeho filosofie, který právě můžeme využít pro nahlížení Gödelových vět. Jedná se o již několikrát zmiňovaný čistý názor.

V Kantově době se vedly debaty o tom, zda svět poznáváme primárně rozumem nebo smysly, s čímž souvisí i otázka, zda můžeme mít nějakou vědomost ještě před smyslovou zkušeností se světem nebo jsme tzv. tabula rasa, carta bianca – nepopsaný list papíru, který nabývá znalosti až stykem se světem prostřednictvím našich smyslů (jak se domníval například známý představitel britského empirismu John Locke). Zastánci obou způsobů poznání (racionalisti i empiristi) byli natolik ukotveni ve svých názorech, že se mohlo skoro zdát, že se filosofie ocitla ve slepé uličce.

Kant empiristický a racionalistický přístup určitým způsobem zkombinoval. Ukázal, že poznání v pravém slova smyslu sice začíná až zkušeností, ale tato zkušenost musí „zapadat“ do některých apriorních forem, které jsou na ní nezávislé. Konkrétně musí být veškerá zkušenost, pokud jde o naši schopnost vůbec přijímat vjemy, lokalizována v čase a prostoru. Na druhou stranu, pokud jde o utváření skutečných (podle Kanta propozičních) zkušenostních poznatků, musí na ni být aplikovatelné jisté nejobecnější pojmy (kategorie). Z hlediska filosofie matematiky pro nás budou důležitější první zmíněné podmínky zkušenosti, tj. prostor a čas.

Můžeme dát tento zjednodušující příklad: než ráno vyjdeme ven, nevíme, jaké události zažijeme, ale nepochybně je budeme vnímat v čase a v prostoru. Čas a prostor jsou formy názoru, jsme „nastaveni“ tak, že vnímáme věci kolem nás jako jsoucí v čase a prostoru. Tuto formu názoru nezískáváme v průběhu života, maximálně nás na ni naše smyslové vjemy a zkušenosti neustále upozorňují a zpřítomňují nám ji. Můžeme ji ovšem zkoumat nezávisle na empirii díky schopnosti tzv. čistého názoru.

A právě ten můžeme použít v postoji ke Gödelovým větám. Když srovnáme dosud popsané přístupy, nahlédneme, že jsou do značné míry neurčité. Podle Dummetta z Gödelových vět vyplývá, že vždy budeme schopni na základě svého intuitivního pojetí určitého pojmu rozhodnout o pravdivosti určitých tvrzení, i když tuto pravdivost není možné odvodit ze samotného popisu užití těchto tvrzení. Turing z vět o neúplnosti vyvozuje, že lidská mysl vždy dokáže něco, co stroj ne. A abychom pochopili to „něco“, můžeme se podle mě obrátit ke Kantovi a najít odpověď v jeho epistemologii počítající s čistým názorem.

Přestože Kant nemohl být svědkem přelomu v matematice způsobeného Gödelovými větami (i když se můžeme domnívat, že by ho takový objev nepřekvapil – sám nejspíše tušil, že matematika je nevyčerpatelná), můžeme jeho pohled na ni chápat jako pohled, který poskytuje přesnější odpověď na otázku po povaze matematického poznání (a její specificky lidské, nemechanické složky) než ty, které nám předkládá mnoho modernějších autorů, kteří již Gödelovy výsledky poznat mohli.

Ve filosofii i jiných vědách se jistě nezřídka stává, že pro to, abychom mohli pokročit dopředu, musíme udělat krok zpět, podívat se do minulosti, zda v ní nenajdeme možné odpovědi na naše současné otázky. Domnívám se, že Kantův pohled na matematiku může být takovým případem a může nám být inspirací jak se dívat na Gödelovy věty. Možná je to trochu anachronické a zjednodušující, nicméně se mi zdá, že můžeme vidět dobrou paralelu mezi raně novověkým empirismem, jak ho znal Kant, a empirizujícími přístupy ke geometrii a k matematice např. již zmíněných Helmholtze a Putnama na jedné straně a na druhé straně mezi racionalismem např. Leibnizovým a Hilbertovým formalismem nebo ještě spíše Gödelovým atypickým chápáním pojmu „analytický“ a jeho vírou v cosi jako schopnost intelektuálního názoru. Odtud pramení mé přesvědčení, že jistý návrat ke Kantovi může být prospěšný pro filosofické zhodnocení povahy matematiky i ve světle novodobých objevů jako je pluralita geometrií (na první pohled Kantovo stanovisko vyvracující) nebo Gödelovy věty o neúplnosti.

5.3 Shrnutí

Intuitivní představu platného matematického důkazu nelze ztotožnit s pojmem důkazu uvnitř formálního systému – s pomocí Gödelovy věty (a z ní plynoucí vnitřní neurčitelnosti a necharakterizovatelnosti přirozených čísel) jsme naznačili, že žádný formální systém nebude moci použít všechny principy důkazu, které by lidé chtěli přijmout intuitivně. Možná cítíme, že tato poslední poznámka nahrává obdivovatelům lidské mysli a protěžovatelům lidské intuice před formálními systémy a počítači. Já sama se kloním k tomu, že bychom tyto dovednosti, jimiž lidé na počítači a formálními systémy vynikají, mohli lépe pochopit určitým návratem ke Kantovi a rozpracováním jeho pojetí čistého názoru, ale přesto jsem se v rozhodování, zda, stejně jako Nagel a Newman, skutečně vzdát hold „síle tvůrčího rozumu“ příliš neposunula. I tak si však dovolím vyslovit určitý závěr. Gödelovy věty jsou v matematice nepochybně pravdivé, ale není jisté, zda dávají smysl a jsou dokonce pravdivé při aplikaci mimomatematické. To ale ostatně platí pro všechny věty matematiky, což hezky vyjádřil Albert Einstein (citováno z Peregrin (2000)):

> *„So far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain. And so far as they are certain, they do not refer to reality.“*

Závěr

Cílem této práce bylo představit Gödelovy věty o neúplnosti se zaměřením na jejich filosofický význam a možné intepretace. Teorémy o neúplnosti aritmetiky vyvolaly již v době jejich vyslovení velký ohlas a dodnes jsou považovány za jeden z nejdůležitějších mezníků dějin moderní logiky. Do té doby se věřilo a vznikaly tendence dokázat, že pro každé odvětví matematického myšlení lze najít množinu axiomů a ke každé pravdivé formuli odpovídající důkaz z příslušné teorie. Gödel však pomocí autoreferenční formule dokázal převratné tvrzení, že ke každé rekurzivní množině aritmetických formulí, ze které nelze odvodit spor (tzv. formálně bezesporná množina formulí), která splňuje některou z dalších, relativně slabých podmínek aritmetické správnosti, jako je Σ-korektnost nebo ω-bezespornost a z níž jsou formálně dokazatelné všechny axiomy Peanovy aritmetiky, existuje pravdivá aritmetická formule, která není z této množiny axiomů formálně dokazatelná ani vyvratitelná (první Gödelova věta o neúplnosti), v důsledku čehož taková teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost (druhá Gödelova věta o neúplnosti).

Gödelovy věty také do určité míry změnily pohled na matematiku a její vztah s filosofií. Z tohoto důvodu jsem svou práci začala matematicko-historickým kontextem, který může čtenáři představit intelektuální atmosféru doby, kdy došlo k vyslovení Gödelových vět, motivaci k formalizaci matematiky a také proměny nazírání na matematiku a příbuzné disciplíny vlivem objevu neeukleidovských geometrií.

Matematickými aspekty Gödelových vět a jejich formálními důkazy jsem se věnovala spíše jen zběžně, neboť toto téma bylo mnoha autory probráno velmi důkladně a tato práce se zaměřuje především na filosofické dopady a možné přístupy k teorémům. V této práci byly představeny podle mého názoru nejznámější stanoviska – přístup popírající jakýkoli filosofický dopad Gödelových vět (který nepovažuji za obhajitelný a také vysvětluji proč) a přístupy, které interpretují Gödelovy věty prostředky a optikou různých filosofických směrů a disciplín – fenomenologie a analytické filosofie mysli. Tento přístup je velmi rozšířený mimo jiné i pro své četné souvislosti s úvahami o umělé inteligenci.

Za vlastní přínos v této práci považuji návrh přístupu ke Gödelovým větám, který není (pokud vím) příliš rozšířen a který dává do souvislosti Kantovo nahlížení na matematiku, převrat způsobený neeuklidovskými geometriemi a převrat v logice vyvolaný větami o neúplnosti. Přestože vidím v Kantově názoru na filosofii a matematiku potenciál, jak nahlížet na Gödelovy věty, v této práci nezacházím do velkých detailů, neboť mi to neumožňují mé skromné filosofické znalosti. Je ovšem zřejmé, že se matematika a logika od Kantových dob radikálně proměnily a tudíž by bylo nutné jeho filosofii matematiky nějak přizpůsobit jejich aktuální podobě. Zároveň se také v mnohém změnilo např. naše chápání času, takže je otevřené, na kolik lze vztáhnout aritmetiku k času, resp. obecně matematiku k formám našeho názoru tak, jak to činil Kant. Každopádně si myslím, že by si návrh vyjít při interpretaci Gödelových vět z Kanta zasloužil další zvážení a detailnější zpracování.

Literatura

Arazim, P. (2013). Pluralism in Geometry. *Miscellanea Logica*, *9*.

Beringer, T., & Schindler, T. (2015). Reference Graphs and Semantic Paradox. *Logica Yearbook*.

Coffa, A. (1994). Semantic tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station. *Philosophy of Science*, *61*, 142–144.

Dostálová, L. (2010). Hilbertův program: Proměna matematické praxe před a po Gödelových větách o neúplnosti. *Mathematics throughout the ages*, *VI*.

Dummett, M. (1963). Philosophical Significance of Gödel's Theorem. *Ratio*, *5*.

Ewald, W. (1996). From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics. *Oxford: Oxford University Press*, *2*, 1105–1115.

Frege, G. (2011). *Myšlenka. Logická zkoumání.: Základy aritmetiky.* Praha: OIKOYMENH.

Gödel, K. (1931). O formálně nerozhodnutelných větách v Principia mathematica a příbuzných systémech I; originál: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, *38*, 173–198.

Gödel, K. (1995). *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications* (Vol. Gibbs Lecture 1951).

Gödel, K. (1999). *Filosofické eseje.* Oikoymenh.

Goldstein, R. (2005). Neúplnost. *Argo Dokořán*.

Haack, S. (1974). *Deviant Logic*. Cambridge University Press.

Hilbert, D. (1899). Hilbert an Frege. *Korespondenz*, *XV.8*.

Hilbert, D. (2004). *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891– 1902, Ulrich Majer and Michael Hallett, editors*. Springer.

Horská, A. (2011). *Gentzenov dôkaz bezespornosti aritmetiky*. (Diplomová práce), Univerzita Karlova.

Horská, A. (2014). *Where is the Gödel-point hiding: Gentzen's Consistency Proof of 1936 and His Representation of Constructive Ordinals*. Springer.

Houser, P. (2004). Kurt Gödel a jeho Filosofické Eseje. *Science World*, *2583*.

Kolman, V. (2002). *Logika Gottloba Frega*.

Lucas, J. R. (1961). Minds, Machines and Gödel. *Philosophy*, *36*, 112–127.

Martin, D. A. (2005). Gödel conceptual realism. *The Bulletin of Symbolic Logic*, *11*.

McCall, S. (1999). Can a Turing machine know that the Gödel sentence is true? *Journal of Philosophy*, *96*.

Nagel, E., & Newman, J. (1958). *Gödel's proof*. New York University Press.

Parsons, C. (1995). Platonism and Mathematical intuition in Kurt Gödel thought. *The Bulletin of Symbolic Logic*, *1*.

Peregrin, J. (1998a). Gödelova cesta do hlubin lidského rozumu, publikováno pod názvem Práve teraz klamem. *Domino-fórum*, *3*.

Peregrin, J. (1998b). Logic and consciousness. *The Philosophers Magazine*, *2*.

Peregrin, J. (2000). The Natural and the Formal. *Journal of Philosophical Logic*, *29*.

Peregrin, J. (2008). Jazyk, Magie & Matematika. *Studia Logica*, *88*.

Peregrin, J. (2011). *Člověk a pravidla*. Dokořán.

Peregrin, J. (2016). Diagonal Arguments. *to be published in Miscellanea Logica*, *X*.

Putnam, H. (1960). Mind, Language, and Reality. *Philosophical Papers*, *2*.

Raatikainen, P. (2005). On the Philosophical Relevance of Gödel's Incompleteness Theorems. *Revue Internationale de Philosophie*, *59*.

Shapiro, S. (1996). *Space, number and structure: a tale of two debates.* http://philmat.oxfordjournals.org.

Tieszen, R. (2011). *Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic.* Oxford University Press.

Tvrdý, F. (2014). *Turingův test.* Scholia.

Švejdar, V. (2002). *Logika. Neúplnost, složitost a nutnost.* Academia.

Vopěnka, P. (1995). *Rozpravy s geometrií: otevření neeuklidovských geometrických světů. Trýznivé tajemství.* Vesmír.

Zach, R. (2003). Hilbert's programme then and now. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Zouhar, J. (2005). *Interpretace Gödelovy věty o neúplnosti.* (Diplomová práce), Univerzita Karlova.