



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. Veronika Janíková

# **Stochastický optimalizační model pro efektivní využití vodní energie**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika  
a ekonometrie

Praha 2016



Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....      Podpis autora



Název práce: Stochastický optimalizační model pro efektivní využití vodní energie

Autor: Bc. Veronika Janíková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se zabývá stochastickou optimalizační úlohou pro problém řízení soustavy vodních nádrží. Náhodná složka modelu je uvažována ve vnějších přítocích a ceně elektrické energie na trhu. Úloha je formulována jako model se sdruženým pravděpodobnostním omezením s cílem maximalizovat zisk z využití vodní energie při současné minimalizaci ceny použité vody. Náhodná složka je na základě historických dat modelována pomocí vhodných stochastických procesů a následně aproximována pomocí scénářů. Dále je prezentován sezónní deterministický model oceňování vody, pomocí kterého je na základě duálních proměnných odhadnuta cena vody v jednotlivých kategoriích nádrží soustavy. V praktické části práce je úloha řízení vodohospodářské soustavy aplikována na soustavu vodních děl na řece Vltavě. Kromě stávající situace je řešena také možnost navýšení počtu přečerpávacích stanic v soustavě.

Klíčová slova: Modelování trhů s energiemi; Volba užitkové funkce; Stochastická optimalizace.

Title: Stochastic optimization model of effective hydro energy usage

Author: Bc. Veronika Janíková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with the stochastic optimization problem of hydro reservoir management. External inflows and market electricity price are both considered as random inputs to the model, which is designed as joint chance constrained programming. The main goal of the optimization problem is to maximize the profit from hydro energy usage together with minimizing the cost of used water. The random component is modelled by suitable stochastic processes based on historical data and then approximated via scenarios. Seasonal deterministic model is another model that is presented in this thesis. This model helps appraise water stored in every each reservoir's compartment. The estimates of water values are based on dual variables. Finally, in the practical part the hydro reservoir management problem is applied to the real hydro valley located on the Vltava river. This part also deals with an option of increasing the number of pumping stations in this particular hydro valley.

Keywords: Energy market modeling; Utility function and its selection; Stochastic optimization.



Ráda bych na tomto místě poděkovala svému vedoucímu práce doc. RNDr. Petru Lachoutovi, CSc. za odborné vedení, rady a neocenitelnou pomoc poskytnutou během přípravy této práce. Děkuji také Ing. Jiřímu Šumberovi, Ph.D. ze společnosti ČEZ, a. s. a Ing. Karlu Březinovi z podniku Povodí Vltavy, s. p. za jejich čas, ochotu, přínosné konzultace a za poskytnutí podkladů, bez nichž by tato práce nemohla vzniknout. V neposlední řadě mé díky patří rodině a přátelům za podporu během celého studia.





# Obsah

Seznam použitého značení	3
Úvod	7
<b>1 Popis problému</b>	<b>9</b>
1.1 Řízení soustavy vodních nádrží . . . . .	9
1.2 Modelovací přístupy . . . . .	11
<b>2 Formulace úlohy řízení vodohospodářské soustavy</b>	<b>15</b>
2.1 Topologie . . . . .	15
2.2 Podmínky úlohy . . . . .	16
2.3 Účelová funkce . . . . .	26
2.4 Úloha řízení vodohospodářské soustavy . . . . .	27
2.5 Možná rozšíření úlohy . . . . .	28
<b>3 Alternativní modely</b>	<b>31</b>
3.1 Model se střední hodnotou . . . . .	31
3.2 Model s individuálním pravděpodobnostním omezením . . . . .	32
3.3 Penalizační model . . . . .	33
3.4 Kombinovaný model . . . . .	34
3.5 Robustní model . . . . .	34
3.6 Dynamické programování . . . . .	35
<b>4 Náhodná složka modelu a její aproximace pomocí scénářů</b>	<b>37</b>
4.1 Možnost aproximace pravděpodobnostního rozdělení . . . . .	37
4.2 Náhodná složka modelu jako stochastický proces . . . . .	39
4.3 Konstrukce scénářů . . . . .	44
4.4 Přepis úlohy stochastického programování pomocí scénářů . . . . .	47
<b>5 Sezónní deterministická úloha oceňování vody</b>	<b>55</b>
5.1 Agregace úlohy řízení vodohospodářské soustavy . . . . .	55
5.2 Ceny vody závislé na objemu . . . . .	60
<b>6 Praktická studie</b>	<b>63</b>
6.1 Vltavská kaskáda . . . . .	63
6.2 Volba kroku a optimalizačního horizontu úlohy řízení Vltavské kaskády . . . . .	64
6.3 Vstupní data . . . . .	65
6.4 Konstrukce scénářů vnějších přítoků a ceny energie na trhu . . . . .	67

6.5	Sezónní deterministická úloha oceňování vody . . . . .	76
6.6	Úloha řízení Vltavské kaskády . . . . .	86
<b>Závěr</b>		<b>99</b>
<b>Seznam použité literatury</b>		<b>101</b>
<b>Seznam obrázků</b>		<b>103</b>
<b>Seznam tabulek</b>		<b>105</b>

# Seznam použitého značení

$T$	poslední časový okamžik, resp. celkový počet časových okamžiků ... 15
$\Delta$	rozmezí jednotlivých homogenních časových okamžiků [h] ..... 15
$\mathcal{N}$	množina všech vodních nádrží soustavy ..... 15
$\mathbf{A}$	matice sousednosti orientovaného grafu představujícího soustavu spojených vodních nádrží ..... 16
$N_{\mathcal{T}}$	celkový počet turbín v soustavě ..... 16
$N_{\mathcal{P}}$	celkový počet přečerpávacích stanic v soustavě ..... 16
$\mathcal{A}(n)$	$\forall n \in \mathcal{N}$ , množina nádrží nad nádrží $n$ , je-li $n$ horní nádrž, jedná se o prázdnou množinu ..... 16
$\mathcal{F}(n)$	$\forall n \in \mathcal{N}$ , jednoprvková množina obsahující nádrž pod nádrží $n$ , je-li $n$ dolní nádrž, jedná se o prázdnou množinu ..... 16
$V^n(t)$	$\forall n \in \mathcal{N}$ , $\forall t \in \tau$ , objem vody v nádrži $n$ v časovém okamžiku $t$ [ $\text{m}^3$ ] ..... 16
$V^n(0)$	$\forall n \in \mathcal{N}$ , počáteční objem vody v nádrži $n$ [ $\text{m}^3$ ] ..... 16
$D_m$	$\forall m \in \{n \in \mathcal{N} : \mathcal{F}(n) \neq \emptyset\}$ , počet časových okamžiků, za které voda proteče přes turbíny výše položené nádrže $m$ do nádrže pod ní ..... 16
$x^i(t)$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ , $\forall t \in \tau$ , průtok turbínou $g^i$ v časovém okamžiku $t$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ..... 16
$y^i(t)$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$ , $\forall t \in \tau$ , průtok přečerpávací stanicí $p^i$ v časovém okamžiku $t$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ..... 16
$\underline{x}^i$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ , minimální hltnost turbíny $g^i$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ..... 17
$\bar{x}^i$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ , maximální hltnost turbíny $g^i$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ..... 17
$\underline{y}^i$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$ , minimální hltnost přečerpávací stanice $p^i$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ... 17
$\bar{y}^i$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$ , maximální hltnost přečerpávací stanice $p^i$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] .. 17
$u^i(t)$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ , $\forall t \in \tau$ , binární proměnná indikující, zda je turbína $g^i$ v čase $t$ v provozu ( $u^i(t) = 1$ ), či mimo provoz ( $u^i(t) = 0$ ) ..... 17
$v^i(t)$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$ , $\forall t \in \tau$ , binární proměnná indikující, zda je přečerpávací stanice $p^i$ v čase $t$ v provozu ( $v^i(t) = 1$ ), či mimo provoz ( $v^i(t) = 0$ ) ..... 17
$x_0^n(t)$	$\forall n \in \mathcal{N}$ , $\forall t \in \tau$ , celkový odtok spodními výpustmi nádrže $n$ v čase $t$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ..... 17

$\bar{x}_0^n$	$\forall n \in \mathcal{N}$ , celková průtočná kapacita spodních výpustí nádrže $n$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ].....17
$\mathcal{T}^P$	množina všech reverzních turbín soustavy.....18
$s_D^n(t)$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau$ , odběr vody z nádrže $n$ v časovém okamžiku $t$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ], je-li záporný, jedná se o vypouštění.....19
$s_R^n(t)$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau$ , odběr vody z vodního toku vytékajícího z nádrže $n$ v časovém okamžiku $t$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ], je-li záporný, jedná se o vypouštění . 19
$R_n$	$\forall n \in \mathcal{N}$ , počet časových okamžiků, za které voda proteče z nádrže $n$ do místa na toku pod nádrží, odkud probíhá odběr ..... 19
$\underline{f}^n(t)$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau$ , minimální potřebný průtok pod nádrží $n$ v časovém okamžiku $t$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ..... 18
$\bar{f}^n(t)$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau$ , maximální neškodný průtok v toku pod nádrží $n$ v čase $t$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ..... 18
$\mathcal{N}^r$	podmnožina vodních nádrží soustavy majících náhodný přítok ..... 19
$\zeta_t^n$	$\forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau$ , náhodný vnější přítok vodní nádrže $n$ v čase $t$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ].....19
$\check{\zeta}_t^n$	$\forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau$ , deterministický vnější přítok vodní nádrže $n$ v čase $t$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ..... 19
$\check{\zeta}_t$	náhodný vektor délky $ \mathcal{N}^r $ , jehož prvky jsou náhodné přítoky $\zeta^n(t), n \in \mathcal{N}^r$ [ $\text{m}^3/\text{h}$ ].....19
$V_{min}^n(t)$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau$ , minimální možný objem vody v nádrži $n$ v časovém okamžiku $t$ [ $\text{m}^3$ ] ..... 21
$V_{max}^n(t)$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau$ , maximální možný objem vody v nádrži $n$ v časovém okamžiku $t$ [ $\text{m}^3$ ] ..... 21
$\mathcal{C}$	množina všech omezení na součet objemů vybraných nádrží.....22
$\mathcal{N}(c)$	$\forall c \in \mathcal{C}$ , množina nádrží, jejichž součet objemů je nutné udržet nad danou hranicí ..... 22
$V_{min}^c(t)$	$\forall c \in \mathcal{C}, \forall t \in \tau$ , minimální možný součet objemů nádrží $n \in \mathcal{N}(c)$ v časovém okamžiku $t$ [ $\text{m}^3$ ] ..... 22
$\mathcal{C}^r$	množina omezení $c \in \mathcal{C}$ takových, že vnější přítok alespoň jedné z nádrží $n \in \mathcal{N}(c)$ je náhodný ..... 22
$W_i^n$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall i = 1, \dots, K_n$ , cena vody v nádrži $n$ v objemové kategorii $[V_{i-1}^n, V_i^n)$ [ $\text{€}/\text{m}^3$ ] ..... 23
$z_i^n$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall i = 1, \dots, K_n$ , veličina indikující objem vody nádrže $n$ v čase $t = T$ v kategorii $[V_{i-1}^n, V_i^n)$ [ $\text{m}^3$ ].....24
$z_{0,i}^n$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall i = 1, \dots, K_n$ , veličina indikující objem vody nádrže $n$ v čase $t = 0$ v kategorii $[V_{i-1}^n, V_i^n)$ [ $\text{m}^3$ ] ..... 24
$P$	regulační záloha sjednaná v rámci podpůrných služeb [MW] ..... 25
$\rho^i(t)$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau$ , efektivita turbíny $g^i$ v čase $t$ [MWh/ $\text{m}^3$ ]...25
$\varphi^i(t)$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau$ , efektivita přečerpávací stanice $p^i$ v čase $t$ [ $\text{m}^3/\text{MWh}$ ] ..... 25

$\lambda_t$	$\forall t \in \tau$ , náhodná cena elektrické energie na trhu v čase $t$ [€/MWh] .26
$S$	počet scénářů vnějších přítoků soustavy.....44
$p_s$	$\forall s = 1, \dots, S$ , pravděpodobnost scénáře $\zeta^s$ .....44
$\zeta_t^{n,s}$	$\forall t \in \tau, \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall s = 1, \dots, S$ , hodnota $s$ -tého scénáře přítoku nádrže $n$ v čase $t$ [m <sup>3</sup> /h].....44
$R$	počet scénářů ceny elektrické energie na trhu.....45
$q_r$	$\forall r = 1, \dots, R$ , pravděpodobnost scénáře $\lambda^r$ .....45
$V^{n,s}(t)$	$\forall n \in \mathcal{N}^r, \forall s = 1, \dots, S, \forall t \in \tau$ , objem vody v nádrži $n$ v čase $t$ při realizaci $s$ -tého scénáře přítoků [m <sup>3</sup> ].....48
$w^s$	$\forall s = 1, \dots, S$ , pomocná binární proměnná indikující pro daný scénář $s$ splnění podmínek ze sdruženého pravděpodobnostního omezení....48
$x^i(t,h)$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta$ , průtok turbínou $g^i$ v hodině $h$ týdne $t$ [m <sup>3</sup> /h].....56
$y^i(t,h)$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta$ , průtok přečerpávací stanicí $p^i$ v hodině $h$ týdne $t$ [m <sup>3</sup> /h].....56
$x_0^n(t,h)$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta$ , průtok spodními výpustmi nádrže $n$ v hodině $h$ týdne $t$ [m <sup>3</sup> /h].....56
$u^i(t,h)$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta$ , binární proměnná indikující, zda je turbína $g^i$ v hodině $h$ týdne $t$ v provozu ( $u^i(t,h) = 1$ ), či mimo provoz ( $u^i(t,h) = 0$ ).....56
$v^i(t,h)$	$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta$ , binární proměnná indikující, zda je přečerpávací stanice $p^i$ v hodině $h$ týdne $t$ v provozu ( $v^i(t,h) = 1$ ), či mimo provoz ( $v^i(t,h) = 0$ ).....56
$\lambda_t^h$	$t \in \tau, h = 1, \dots, \Delta$ , náhodná cena elektrické energie na trhu v hodině $h$ týdne $t$ [€/MWh].....57
$\Delta_0$	rozmezí jednotlivých homogenních časových okamžiků řízení v sezónní úloze oceňování [h].....58
$W_{0,i}^n$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall i = 1, \dots, K_n$ , cena vody v nádrži $n$ v objemové kategorii $[V_0^n, V_i^n)$ [€/m <sup>3</sup> ].....60

$\tau = \{1, \dots, T\}$	množina homogenních časových okamžiků ..15
$\mathcal{T} = \{g^i, i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}\}$	množina turbín.....16
$\mathcal{P} = \{p^i, i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}\}$	množina přečerpávacích stanic.....16
$\sigma_{\mathcal{T}} : \{1, \dots, N_{\mathcal{T}}\} \rightarrow \mathcal{N}$	zobrazení přiřazující každé turbíně její vodní nádrž.....16
$\sigma_{\mathcal{P}} : \{1, \dots, N_{\mathcal{P}}\} \rightarrow \mathcal{N}$	zobrazení přiřazující každé přečerpávací stanici její vodní nádrž.....16
$\mathcal{R} = \{i \in \{1, \dots, N_{\mathcal{T}}\} : g^i \in \mathcal{T}^{\mathcal{P}}\}$	pomocná množina indexů $i$ reverzních turbín $g^i$ .....18
$\sigma_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \{1, \dots, N_{\mathcal{P}}\}$	zobrazení přiřazující každé reverzní turbíně její označení v množině přečerpávacích stanic...18

$V_0^n, \dots, V_{K_n}^n$	$\forall n \in \mathcal{N}$ , uspořádání objemu vody v nádrži $n$ na konečně mnoho hodnot vzestupně podle úrovní vodní hladiny [ $\text{m}^3$ ].....23
$[V_{i-1}^n, V_i^n)$	$\forall n \in \mathcal{N}, \forall i = 1, \dots, K_n$ , jednotlivé kategorie objemu vody v nádrži $n$ ..... 23
$\zeta^s = \{\zeta_t^s, t \in \tau\}$	$\forall s = 1, \dots, S$ , scénář vnějších přítoků soustavy [ $\text{m}^3/\text{h}$ ].....44
$\lambda^r = \{\lambda_t^r, t \in \tau\}$	$\forall r = 1, \dots, R$ , scénář ceny elektrické energie na trhu [ $\text{€}/\text{MWh}$ ] ..... 45
$M_{min}, M_{max}, M$	dostatečně velké konstanty pro přepis sdruženého pravděpodobnostního omezení.....49
$\langle \underline{V}_T^n, \overline{V}_T^n \rangle$	$\forall n \in \mathcal{N}$ , interval, ve kterém se zpravidla pohybuje objem nádrže $n$ v týdnu $T$ [ $\text{m}^3$ ].....56

# Úvod

Obnovitelná energie akumulující se ve vodních tocích nabízí velký energetický potenciál. Význam vodních elektráren však nespočívá pouze v objemu výroby elektrické energie. Díky schopnosti rychlého najetí na velký výkon vyrovnávají vodní elektrárny okamžité energetické bilance v elektrizační přenosové soustavě. Přečerpávací vodní elektrárny plní navíc funkci akumulace elektřiny v období nízké spotřeby, čímž zvyšují efektivnost provozu elektrizační soustavy. (Skupina ČEZ, 2012)

Práce se zabývá problémem krátkodobého řízení soustavy vodních nádrží s náhodnými parametry, které představují náhodné vnější přítoky jednotlivých nádrží a náhodné ceny elektrické energie na trhu. Předpokládáme, že každá vodní nádrž má přidružený systém přečerpávacích stanic a turbín vyrábějících elektrickou energii. Naším cílem je maximalizovat zisk představující rozdíl mezi celkovou cenou energie vyrobené turbínami a celkovou cenou energie použité k přečerpávání, přičemž je dále nutné odečíst cenu použité vody. Současně požadujeme splnění všech uvažovaných účelů soustavy.

První kapitola je zaměřena na popis problému řízení vodohospodářské soustavy, stanovení hlavních cílů a možnosti modelování. Ve druhé kapitole je pak problém formulován jako stochastický model se sdruženým pravděpodobnostním omezením. Základní kroky sestavení úlohy jsou převzaty z výchozího článku van Ackooij a kol. (2014), přičemž je model dále vhodně rozšířen.

Alternativní matematické modely pro sestavenou úlohu jsou krátce představeny v třetí kapitole. Čtvrtá kapitola je zaměřena na náhodné prvky soustavy a jejich aproximaci pomocí scénářů. Vnější přítoky a cena elektřiny jsou modelovány pomocí vhodných stochastických procesů, na jejichž základě jsou pak generovány jednotlivé scénáře. V páté kapitole je zvláště představena úloha oceňování vody uskladněné v nádrži jakožto sezónní deterministický model.

Praktickou částí práce je poslední kapitola, ve které je sestavená úloha aplikována na soustavu deseti vodních nádrží na řece Vltavě – Vltavskou kaskádu. Reálná data byla poskytnuta společností ČEZ, a. s. a podnikem Povodí Vltavy, s. p. Kromě úlohy řízení Vltavské kaskády v aktuální podobě je řešena také možnost přečerpávání na vodním díle Orlík.





# Kapitola 1

## Popis problému

V této kapitole představíme uvažovanou vodohospodářskou soustavu, popíšeme její řízení a stanovíme hlavní cíle. Zaměříme se také na modelovací přístupy a náhodné prvky soustavy. Zavedeme obecnou úlohu stochastického programování a podmínku úlohy ve tvaru sdruženého pravděpodobnostního omezení.

### 1.1 Řízení soustavy vodních nádrží

#### 1.1.1 Vodohospodářská soustava

Vodohospodářskou soustavou rozumíme spojení vodních nádrží za určitým účelem. V našem případě je hlavním účelem energetické využití. Předpokládáme, že jednotlivé nádrže jsou vybudovány na vodních tocích, které se do sebe mohou vlévat a které se nijak nerozvětvují. Do každé nádrže může být přiváděna voda z více nádrží soustavy, voda z nádrže však může téci nejvýše do jedné nádrže soustavy. Nádrže, do kterých nepřitéká voda z žádné jiné nádrže soustavy, budeme nazývat horní. Nádrže, ze kterých neodtéká voda do žádné jiné nádrže soustavy, pak budeme nazývat dolní. Do každé nádrže soustavy může přitékat voda i z jiného zdroje, než je výše položená nádrž nad ní. V takovém případě budeme hovořit o vnějším přítoku dané nádrže.

Dále budeme předpokládat, že každá vodní nádrž může mít svůj přidružený systém turbín, které vyrábějí v době energetické potřeby pomocí spádu vody v potrubí elektrickou energii. Zároveň každá nádrž může mít přečerpávací stanice, díky kterým je naopak z nádrže pod ní voda tlakovým potrubím přečerpávána zpět, kde čeká na své optimální využití. Řídící proměnné pak představují průtoky turbínami a přečerpávacími stanicemi soustavy v daných časových okamžicích.

#### 1.1.2 Hlavní účely soustavy

Při operativním řízení vodohospodářské soustavy je nutné zohlednit velké množství vstupních informací a to zejména primární účely nádrže. Účel a využití každé vodní nádrže stanovuje její manipulační řád. Budeme předpokládat, že uvažovaná soustava zajišťuje svou funkci a hospodařením s vodou následující účely.

## Využití vodní energie

Za hlavní funkci vodohospodářské soustavy považujeme výrobu a uskladnění elektrické energie. Provoz každé nádrže je ovlivněn kolísáním spotřeby elektrické energie v přenosové soustavě a tedy její aktuální cenou na trhu. V době mimo energetickou špičku, kdy je elektrické energie dostatek a její cena je nízká, je voda přečerpávacími stanicemi uměle akumulována. Nashromážděná voda se pak využívá ke špičkové výrobě elektrické energie, kdy je elektrické energie nedostatek a její cena je vysoká.

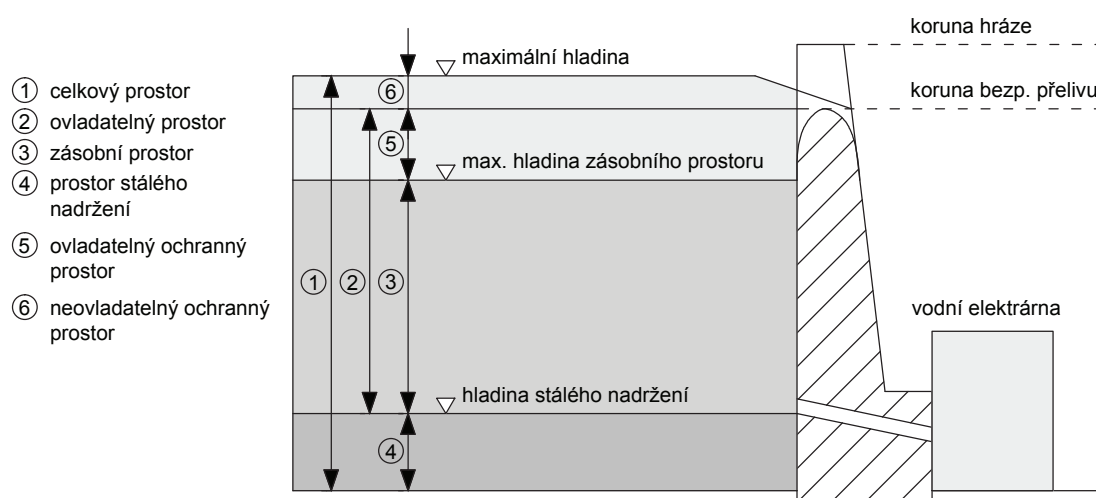
## Ochrana před povodněmi

Důležitým cílem soustavy vodních nádrží je protipovodňová ochrana. Předpokládáme, že operativní řízení soustavy je v běžném provozním režimu, kdy je hladina každé nádrže udržována v zásobním prostoru. Neuvažujeme tedy manipulaci za povodňových a mimořádných situací. Obecné schéma rozložení prostoru nádrže je uvedeno na obrázku 1.1. Jediným požadavkem ochrany před povodněmi je udržení objemu vody v každé nádrži pod stanovenou bezpečnostní hranicí, kterou je zpravidla maximální hladina zásobního prostoru. V zimním období pak za účelem transformace případných zvýšených průtoků může být bezpečnostní hladina níže než maximální hladina zásobního prostoru.

Za účelem protipovodňové ochrany pod nádrží je dále třeba udržet celkový odtok z nádrže pod stanovenou maximální hranicí. Tou je tzv. neškodný průtok v toku pod nádrží.

## Odtok vody z nádrže a nadlepšení průtoků

Odtoky z nádrže do velikosti celkové maximální hltnosti turbín se převádějí přednostně přes turbíny vyrábějící elektrickou energii. K řízenému odtoku vody většího než celková maximální hltnost turbín se pak využívají spodní výpusti. Ty se také využívají v situacích, kdy je třeba naopak odpustit množství vody menší než minimální hltnost turbín. Často je totiž důležitým účelem nádrže také



Obrázek 1.1: Rozložení prostoru nádrže

nadlepšení a dotace průtoku na vodním toku vytékajícím z nádrže, případně níže v soustavě. Pod nádrží je proto nutné udržet stanovený minimální průtok a to bez ohledu na to, zda je vodní elektrárna v provozu.

Poznamenejme, že k převedení minimálních průtoků v době, kdy je elektrárna mimo provoz, mohou sloužit i jiné vodohospodářské objekty nádrže, například šterková propust'. Všechny takové objekty budeme pro jednoduchost řadit mezi spodní výpusti.

Doplňme, že je-li nádrž plná, dochází k nekontrolovanému odtoku vody přes bezpečnostní přeliv. Jelikož uvažujeme běžnou provozní situaci, nebudeme v úloze možnost odtoku vody bezpečnostním přelivem uvažovat.

## **Rekreace, řízení životního prostředí a ochrana před suchem**

V každé nádrži je nutné udržet dané minimální množství vody a to z důvodu řízení životního prostředí, plavby v nádrži a při vhodných klimatických podmínkách také k případnému rekreačním využití. Daná minimální hladina nemusí být přímo hladina stálého nadržení znázorněná na obrázku 1.1, nicméně nesmí pod ni klesnout. Za účelem ochrany před suchem bývají kladeny také podmínky na minimální možný součet objemů ve vybraných nádržích soustavy.

## **Zásobování vodou**

Vodní nádrže slouží také jako zdroj pro přívod závlahové vody do okolí a pro odběr průmyslové vody, včetně vody pro úpravu na pitnou. Voda může být odebírána jak přímo z nádrže, tak v oblasti pod ní, kde odběr probíhá prostřednictvím vodního toku vytékajícího z nádrže. Kromě odběru může být voda do soustavy naopak průmyslově vypouštěna.

## **1.2 Modelovací přístupy**

Při převádění reálné komplexní soustavy na model je nutné stanovit, které prvky soustavy je třeba detailně zahrnout do modelu. Zbylé prvky pak mohou být nahrazeny přibližnými aproximacemi, zjednodušeny, či zanedbány. To, jak detailně je model sestaven a jak dobře vystihuje skutečný problém, nemusí být nutně měřítkem jeho kvality. Mnohem důležitější je vybrat ze všech uvažovaných záměrů a cílů soustavy ty části, které jsou nezbytné k dosažení dobrých výsledků. Je také důležité dobře popsat fyzikální vlastnosti a omezení soustavy.

Jsou dvě hlavní možnosti řešení optimalizačního problému – deterministické a stochastické programování. Deterministický model předpokládá, že každý vstupní parametr modelu je známý. Stochastický model naopak zohledňuje při řešení úlohy náhodnou složku za předpokladu, že pravděpodobnostní rozdělení náhodných parametrů je známé. Speciálně je-li rozhodnutí stanoveno jednou provždy, hovoříme o statických modelech. V případech, kdy se rozhodnutí v budoucích časových okamžicích může řídit dřívějšími pozorováními, hovoříme o dynamických modelech. Hlavním záměrem této práce jsou stochastické statické modely.

Náhodné prvky v řízení vodohospodářské soustavy vyplývají z náhodných vnějších přítoků a náhodné ceny elektrické energie na trhu. Neboť jsou rozhodnutí

dělána před samotným pozorováním realizací náhodných veličin, musí být pro začlenění náhody použity vhodné modelovací přístupy. Je nutné uvážit především povahu řešeného reálného problému, charakter vstupních dat a také softwarové a výpočetní možnosti. Častými přístupy v řízení vodohospodářské soustavy jsou programování s pravděpodobnostním omezením či robustní optimalizace. V dynamických rozhodovacích procesech je jedním z hlavních přístupů stochastické dynamické programování.

(Aasgård a Andersen, 2013; van Ackooij a kol., 2014)

### 1.2.1 Obecná úloha stochastického programování

Uvažujme obecnou maximalizační úlohu nelineárního programování ve standardním tvaru

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{c}(\mathbf{x}) \\ & \text{za podmíněk } \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall 1 \leq k \leq m, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ ,  $1 \leq k \leq m$  jsou dané reálné funkce na  $\mathbb{R}^n$ . Speciálním případem je pak úloha lineárního programování

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{za podmíněk } \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  jsou dané vektory a  $\mathbf{A}$  je daná matice typu  $m \times n$ .

Závisí-li některá z funkcí  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{g}_k$ ,  $1 \leq k \leq m$  úlohy (1.1) na náhodných parametrech, respektive má-li některý z koeficientů v úloze (1.2) náhodný charakter, hovoříme o úloze stochastického programování. Úlohu (1.1) pak zpravidla zapisujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{c}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \\ & \text{za podmíněk } \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{x} \in \mathfrak{X}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

kde  $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in \Omega \subset \mathbb{R}^l$  je náhodný vektor z pravděpodobnostního prostoru  $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{P}_\omega)$  a

$$\mathbf{c} : \mathfrak{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{g} : \mathfrak{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

jsou dané funkce měřitelné vzhledem k  $\boldsymbol{\omega}$  pro libovolné  $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ . V případě lineární úlohy (1.2) s náhodnými koeficienty pak vektor  $\boldsymbol{\omega}$  obsahuje všechny náhodné prvky matice  $\mathbf{A}$  a vektorů  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$ .

Předpokládejme, že rozhodnutí  $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$  je třeba optimálně zvolit dříve, než je známá realizace náhodného vektoru  $\boldsymbol{\omega}$ . Dále se předpokládá, že  $\mathbb{P}_\omega$  je známé rozdělení nezávislé na rozhodnutí  $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ , což však v praxi nemusí být splněno.

(Dupačová, 1986)

## 1.2.2 Volba účelové funkce

Předpokládejme, že v úloze maximalizovat  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$  na množině  $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n$  je  $\mathfrak{X}$  pevná množina přípustných řešení, zatímco hodnota účelové funkce závisí na vektoru náhodných parametrů  $\boldsymbol{\omega}$ . Jelikož se pro různé realizace  $\boldsymbol{\omega}$  a dané  $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$  funkční hodnoty  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$  navzájem liší, nelze funkci  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$  použít k uspořádání možných rozhodnutí. Nabízí se proto použít střední hodnotu funkce  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ . Obecnou úlohu stochastického nelineárního programování bychom pak zapsali jako

$$\begin{aligned} & \max \quad E \mathbf{c}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \\ & \text{za podmíněk } \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{x} \in \mathfrak{X}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

(Dupačová, 1986, sekce 3.2)

## 1.2.3 Pravděpodobnostní omezení

Vyskytuje-li se náhodný parametr také v omezení  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq \mathbf{0}$ , je základním problémem tvorby stochastického modelu volba množiny přípustných řešení. Nabízí se možnost požadovat, aby přípustná rozhodnutí  $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$  splňovala každé z omezení  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$  alespoň s předem danou pravděpodobností  $\alpha_i \in \langle 0, 1 \rangle$ . Z úlohy (1.4) tak dostáváme stochastický model s individuálním pravděpodobnostním omezením tvaru

$$\begin{aligned} & \max \quad E \mathbf{c}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \\ & \text{za podmíněk } P\{\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq 0\} \geq \alpha_i \quad \forall 1 \leq i \leq m, \\ & \mathbf{x} \in \mathfrak{X}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Individuální pravděpodobnostní omezení v sobě však nezahrnují informaci o statistické závislosti jednotlivých náhodných veličin. Formulují se proto také modely se sdruženým pravděpodobnostním omezením, ve kterých je hledané rozhodnutí přípustné vzhledem k celé soustavě omezení obsahujících náhodné parametry. Alternativní model se sdruženým pravděpodobnostním rozdělením pak zapisujeme jako

$$\begin{aligned} & \max \quad E \mathbf{c}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \\ & \text{za podmíněk } P\{\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq \mathbf{0}\} \geq \alpha, \\ & \mathbf{x} \in \mathfrak{X}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

kde  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$  je požadovaná pravděpodobnostní hladina. (Dupačová, 1986, kapitola 4)

Programování s pravděpodobnostním omezením, které bylo poprvé představeno v článku Charnes a Cooper (1959), je běžně používáno při práci s náhodnými prvky a to zejména díky jednoduché interpretaci. Časté je také jeho použití ve vodohospodářském řízení (viz Duranyildiz, Önöz a Bayazit, 1999; Loiaciga, 1988; Morgan, Eheart a Valocchi, 1993; Zorgati a van Ackooij, 2011). Kromě modelu se sdruženým pravděpodobnostním omezením, který byl zvolen jako hlavní přístup při řešení zavedeného problému, je časté také použití individuálních pravděpodobnostních omezení. Individuální pravděpodobnostní omezení však neposkytují dostatečnou robustnost. (van Ackooij a kol., 2014)



# Kapitola 2

## Formulace úlohy řízení vodohospodářské soustavy

V následující kapitole zformulujeme výslednou stochastickou optimalizační úlohu pro problém řízení soustavy vodních nádrží, kterou jsme zavedli v sekci 1.1. Budeme se zabývat postupnou volbou jednotlivých podmínek úlohy a následnou volbou účelové funkce. Pro práci s náhodnými vnějšími přítoky použijeme přístup programování se sdruženým pravděpodobnostním omezením, náhodná cena elektrické energie na trhu se promítne v účelové funkci (viz obecný model (1.6)).

Zavedené značení a základní myšlenky sestavení úlohy jsou částečně převzaty z článku van Ackooij a kol. (2014). Úloha je dále vhodně rozšířena především tak, aby splňovala hlavní účely vodohospodářské soustavy, na kterou bude model aplikován v praktické části práce.

Úloha sestavená v článku van Ackooij a kol. (2014) je doplněna o další náhodnou složku představující cenu elektrické energie na trhu. Na rozdíl od výchozího článku jsou turbíny a přečerpávací stanice omezeny kromě maximální hltnosti také hltností minimální, čímž je úloha rozšířena o celočíselné rozhodovací proměnné. Dále navíc uvažujeme možnost odtoku vody spodními výpustmi, použití reverzních turbín, omezení odtoku vody z nádrže, možnost odběru vody pro průmysl a zavlažování, omezení součtu objemů ve vybraných nádržích a poskytnutí podpůrných služeb.

### 2.1 Topologie

Předpokládejme diskrétní časový horizont a zaveďme za tímto účelem množinu homogenních časových okamžiků  $\tau = \{1, \dots, T\}$ , kde  $T$  značí poslední časový okamžik a zároveň představuje celkový počet časových okamžiků. Úlohu formulujeme jako krátkodobý optimalizační problém, časový horizont tedy předpokládáme v rozmezí několika dnů až jednoho měsíce. Označme dále  $\Delta$  jako rozmezí jednotlivých časových okamžiků v hodinách.

Uvažujme soustavu spojených vodních nádrží, jim přidružených turbín a přečerpávacích stanic zavedenou v části 1.1.1 předchozí kapitoly. Označme množinu všech vodních nádrží soustavy  $\mathcal{N}$ . Uvažovaná soustava pak může být reprezentována orientovaným grafem s množinou vrcholů  $\mathcal{N}$  a maticí sousednosti

typu  $|\mathcal{N}| \times |\mathcal{N}|$ , kterou označíme  $\mathbf{A} = (a_{m,n})$ . Pro prvek matice  $\mathbf{A}$  pak platí

$$a_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{pokud z nádrže } m \text{ teče voda přímo do nádrže } n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \forall m,n \in \mathcal{N}.$$

Definujme množinu turbín  $\mathcal{T} = \{g^i, i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}\}$  a množinu přečerpávacích stanic  $\mathcal{P} = \{p^i, i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}\}$ . V soustavě máme tedy celkem  $N_{\mathcal{T}}$  turbín a  $N_{\mathcal{P}}$  přečerpávacích stanic. Zavedme zobrazení

$$\sigma_{\mathcal{T}} : \{1, \dots, N_{\mathcal{T}}\} \rightarrow \mathcal{N}$$

přiřazující každé turbíně vodní nádrž, ke které náleží. Analogicky zobrazení

$$\sigma_{\mathcal{P}} : \{1, \dots, N_{\mathcal{P}}\} \rightarrow \mathcal{N}$$

přiřazuje každé přečerpávací stanici vodní nádrž, ke které náleží. Doplňme, že každá nádrž může mít více turbín a více přečerpávacích stanic. Přes turbíny nádrže  $n$  zřejmě odtéká voda do nádrže pod nádrží  $n$ , zatímco stanice nádrže  $n$  přečerpávají vodu z nádrže pod nádrží  $n$  zpět do  $n$ .

Označme dále množiny

$$\mathcal{A}(n) = \{m \in \mathcal{N} : a_{m,n} = 1\} \quad \text{a} \quad \mathcal{F}(n) = \{m \in \mathcal{N} : a_{n,m} = 1\},$$

kde  $a_{m,n}$  a  $a_{n,m}$  jsou prvky výše definované matice sousednosti  $\mathbf{A}$ . Množina  $\mathcal{A}(n)$  tedy zřejmě obsahuje ty nádrže, které přivádějí vodu přímo do nádrže  $n$ . Nádrž ihned pod nádrží  $n$  je pak jediným prvkem množiny  $\mathcal{F}(n)$ . Doplňme jen, že množina  $\mathcal{A}(n)$  je prázdná, je-li  $n$  horní nádrž, a množina  $\mathcal{F}(n)$  je prázdná, je-li  $n$  dolní nádrž.

Objem vody ve vodní nádrži  $n \in \mathcal{N}$  v časovém okamžiku  $t \in \tau$  označíme  $V^n(t)$ . Hodnoty  $V^n(t)$  budeme uvádět v jednotkách  $\text{m}^3$ . Počáteční objem vody v nádrži  $n \in \mathcal{N}$  pak označíme  $V^n(0)$ .

Zavedme dále veličinu  $D_m$  představující počet časových okamžiků, za které voda proteče přes turbíny výše položené nádrže  $m$  až do nádrže pod ní. Veličinu  $D_m$  tedy zavádíme pro všechny nádrže  $m \in \mathcal{N}$  kromě nádrží dolních, tj. pro všechny nádrže z množiny  $\{n \in \mathcal{N} : \mathcal{F}(n) \neq \emptyset\}$ . U čerpacích stanic oproti tomu předpokládáme, že se přečerpávaná voda dostane do výše položené nádrže téměř okamžitě.

(van Ackooij a kol., 2014, sekce 2.1.1)

## 2.2 Podmínky úlohy

### 2.2.1 Řízení soustavy

Předpokládejme, že odtok vody přes trubiny vodní elektrárny, stejně tak jako odtok vody spodními výpustmi a průtok přečerpávacími stanicemi, je v každém časovém okamžiku řízen. Za tímto účelem zavedeme veličinu  $x^i(t)$  pro každé  $t \in \tau$  a  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ , představující průtok turbínou  $g^i$  v časovém okamžiku  $t$  v  $\text{m}^3/\text{h}$ . Analogicky zavedeme pro každé  $t \in \tau$  a  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$  veličinu  $y^i(t)$  představující průtok přečerpávací stanicí  $p^i$  v časovém okamžiku  $t$  v  $\text{m}^3/\text{h}$ . Veličiny  $x^i(t) \in \mathbb{R}$



a  $y^i(t) \in \mathbb{R}$  představují rozhodovací proměnné úlohy. (van Ackooij a kol., 2014, sekce 2.1.2)

Z konstrukčních a provozních důvodů jsou průtoky turbínami a přečerpávacími stanicemi omezeny. Pro každé  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$  označme  $\underline{x}^i > 0$  minimální možný průtok neboli minimální hltlost turbíny  $g^i$ , maximální možnou hltlost turbíny  $g^i$  pak označme  $\bar{x}^i > 0$ . Analogicky pro každé  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$  označme  $\underline{y}^i > 0$  minimální možnou hltlost přečerpávací stanice  $p^i$  a  $\bar{y}^i > 0$  maximální možnou hltlost stanice  $p^i$ . Zavedme dále pomocné binární proměnné  $u^i(t)$  a  $v^i(t)$  indikující pro všechna  $t \in \tau$  provoz turbín a přečerpávacích stanic jako

$$\begin{aligned} u^i(t) &= \begin{cases} 0 & \text{je-li turbína } g^i \text{ v čase } t \text{ mimo provoz} \\ 1 & \text{je-li turbína } g^i \text{ v čase } t \text{ v provozu} \end{cases} & \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \\ v^i(t) &= \begin{cases} 0 & \text{je-li přečerpávací stanice } p^i \text{ v čase } t \text{ mimo provoz} \\ 1 & \text{je-li přečerpávací stanice } p^i \text{ v čase } t \text{ v provozu} \end{cases} & \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Dostáváme tak první podmínku úlohy tvaru

$$\begin{aligned} u^i(t) \underline{x}^i &\leq x^i(t) \leq u^i(t) \bar{x}^i & \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau, \\ v^i(t) \underline{y}^i &\leq y^i(t) \leq v^i(t) \bar{y}^i & \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau. \end{aligned} \tag{2.1}$$

K reálným rozhodovacím proměnným  $x^i(t)$  a  $y^i(t)$  nám přibyly celočíselné proměnné  $u^i(t)$  a  $v^i(t)$ . Úloha je tedy smíšeným celočíselným programováním.

Doplňme, že požadavek  $\underline{x}^i > 0$ ,  $\bar{x}^i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ , respektive  $\underline{y}^i > 0$ ,  $\bar{y}^i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$  je nutný k tomu, aby byla dodržena definice binárních proměnných  $u^i(t)$ , respektive  $v^i(t)$ . Pokud bychom například připustili možnost  $\underline{y}^{i_0} = 0$ ,  $i_0 \in \{1, \dots, N_{\mathcal{P}}\}$ , pak by i v případě, že je přečerpávací stanice  $p^{i_0}$  v čase  $t$  mimo provoz a tedy  $y^{i_0}(t) = 0$ , byla příslušná nerovnost (2.1) pro  $v^{i_0}(t) = 1$  splněna.

## Spodní výpusti

Za účelem řízeného odtoku vody do velikosti minimální hltlosti turbín, případně pro možnost odtoku větší než maximální hltlosti turbín, zavedeme pro každé  $t \in \tau$  a  $n \in \mathcal{N}$  veličinu  $x_0^n(t)$  představující celkový odtok spodními výpustmi nádrže  $n$  v čase  $t$  v  $\text{m}^3/\text{h}$ . Poznamenejme, že odtok  $x_0^n(t)$  pro jednoduchost nazýváme odtokem spodními výpustmi. V praxi se nicméně může jednat o řízený odtok libovolnými vodohospodářskými objekty v závislosti na konkrétní nádrži.

Z konstrukčních důvodů jsou průtoky spodními výpustmi shora omezeny maximální hranicí. Pro každé  $n \in \mathcal{N}$  označme  $\bar{x}_0^n$  celkovou průtočnou kapacitu spodních výpustí nádrže  $n$ . Dostáváme tak další podmínku řízení tvaru

$$0 \leq x_0^n(t) \leq \bar{x}_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau. \tag{2.2}$$

*Poznámka.* Jelikož je zřejmě součástí účelové funkce úlohy maximalizace ceny energie vyrobené turbínami, je přednostní převádění průtoků vodní elektrárnou automaticky zajištěno. Jedinou výjimkou jsou nepříliš časté situace, kdy je cena elektřiny záporná.

## Reverzní turbíny

Dosud jsme předpokládali, že turbína a přečerpávací stanice jedné nádrže jsou dva různé stroje pracující nezávisle na sobě. Může například nastat situace, kdy je levná elektrická energie na trhu a všechny přečerpávací stanice nádrže jsou v provozu. Aby byl na toku pod nádrží zajištěn minimální průtok (viz následující sekce 2.2.2), dochází zároveň k odtoku vody z nádrže jednou turbínou vodní elektrárny.

V přečerpávacích vodních elektrárnách se však často používají reverzní turbíny, které mohou pracovat jako přetlaková turbína i jako čerpadlo. Pak je nutné ošetřit, aby daná turbína nemohla být současně v turbínovém a přečerpávacím režimu. Předpokládejme, že reverzní turbína je prvkem jak množiny turbín  $\mathcal{T}$ , tak množiny přečerpávacích stanic  $\mathcal{P}$ . Označme  $\mathcal{T}^{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}$  množinu všech reverzních turbín soustavy a zaveďme pomocnou množinu indexů

$$\mathcal{R} = \{i \in \{1, \dots, N_{\mathcal{T}}\} : g^i \in \mathcal{T}^{\mathcal{P}}\}.$$

Definujme zobrazení

$$\sigma_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \{1, \dots, N_{\mathcal{P}}\}$$

přiřazující každé reverzní turbíně její označení v množině přečerpávacích stanic. Pro reverzní turbíny pak formulujeme dodatečnou podmínku řízení tvaru

$$u^i(t) + v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t) \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{R}, \forall t \in \tau. \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Podmínka na odtok vody z nádrže

Důležitým účelem nádrže je nadlepšení a dotace průtoku na vodním toku z ní vytékajícím, případně níže v systému. Pro každé  $n \in \mathcal{N}$  a  $t \in \tau$  označme  $\underline{f}^n(t)$  minimální průtok, který je potřeba zajistit v časovém okamžiku  $t$  pod nádrží  $n$ . Veličina  $\underline{f}^n(t)$  je zřejmě v jednotkách  $\text{m}^3/\text{h}$ .

Za účelem protipovodňové ochrany je dále třeba udržet celkový odtok z nádrže pod stanovenou hranicí. Pro každé  $n \in \mathcal{N}$  a  $t \in \tau$  označme  $\bar{f}^n(t)$  maximální neškodný průtok v toku pod nádrží  $n$  v čase  $t$  v jednotkách  $\text{m}^3/\text{h}$ . Dohromady pak formulujeme podmínku na odtok vody z nádrže ve tvaru

$$\underline{f}^n(t) \leq x_0^n(t) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(t) \leq \bar{f}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau. \quad (2.4)$$

Jelikož předpokládáme, že voda z nádrže odtéká pouze přes turbíny a spodní výpusti (viz sekce 1.1.2, část Odtok vody z nádrže a nadlepšení průtoků), představuje součet

$$x_0^n(t) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(t)$$

celkový odtok vody z nádrže  $n$  v čase  $t$ .

### 2.2.3 Zásobení vodou

Vodohospodářská soustava je často důležitým zdrojem povrchové a podzemní vody pro průmysl a zavlažování. Voda je odebírána jak přímo ze samotných

nádrží, tak z oblastí pod nimi, kde zásobování probíhá přes vodní tok vytékající z nádrže. Za tímto účelem zavedeme proměnnou  $s_D^n(t)$  představující odběr vody přímo z nádrže  $n \in \mathcal{N}$  v časovém okamžiku  $t \in \tau$  za účelem zavlažování a průmyslového využití. Analogicky zavedeme proměnnou  $s_R^n(t)$  představující odběr vody z vodního toku vytékajícího z nádrže  $n \in \mathcal{N}$  v časovém okamžiku  $t \in \tau$  za účelem zavlažování a průmyslového využití. Veličiny  $s_D^n(t)$  a  $s_R^n(t)$  uvažujeme v jednotkách  $\text{m}^3/\text{h}$ .

Voda může být do soustavy také průmyslově vypouštěna. V takovém případě budeme pro jednoduchost hovořit o záporném odběru. Proměnnou  $s_D^n(t)$  tedy chápeme jako rozdíl vody odebrané z nádrže  $n$  v časovém okamžiku  $t$  a vody vypuštěné do nádrže  $n \in \mathcal{N}$  v časovém okamžiku  $t \in \tau$ . Analogicky pak chápeme veličinu  $s_R^n(t)$ .

Pro jednoduchost dále předpokládejme, že k odběru (případně vypouštění) vody z vodního toku vytékajícího z nádrže  $n$  dochází v jediném místě. Zavedme proto pro každé  $n \in \mathcal{N}$  veličinu  $R_n$  představující počet časových okamžiků, za které voda proteče z nádrže  $n$  do místa na toku pod nádrží, odkud probíhá odběr vody. Jelikož není podmínkou, aby po tomto odběrném místě následovala další nádrž soustavy, zavádíme veličinu  $R_n$  pro všechny nádrže, včetně nádrží dolních. Zřejmě musí platit

$$\begin{aligned} 0 \leq R_m < D_m & \quad \forall m \in \{n \in \mathcal{N} : \mathcal{F}(n) \neq \emptyset\}, \\ 0 \leq R_m & \quad \forall m \in \{n \in \mathcal{N} : \mathcal{F}(n) = \emptyset\}, \end{aligned}$$

přičemž pro dolní nádrže není horní hranice explicitně stanovena. Rovnost  $R_m = 0$  nastává v případě, kdy je voda odebírána ihned pod turbínami nádrže  $m$ . Na rozdíl od odběru přímo z nádrže se tedy tato voda ještě podílí na výrobě energie. Rovnost  $R_m = D_m$  naopak nemůže nastat, neboť v takovém případě je již odběr zahrnut v odběru z nádrže pod nádrží  $m$ .

## 2.2.4 Náhodný přítok

Do každé nádrže soustavy může přitékat voda z jiného zdroje, než je výše položená nádrž nad ní. Za tímto účelem zavedeme pro každé  $n \in \mathcal{N}$  a  $t \in \tau$  náhodnou veličinu  $\zeta_t^n$  představující vnější přítok vodní nádrže  $n$  v čase  $t$  v jednotkách  $\text{m}^3/\text{h}$ . Vnější přítoky vlévající se do vodního toku spojujícího dvě nádrže soustavy považujeme pro jednoduchost za vnější přítok níže položené nádrže.

Doplňme, že ne všechny nádrže mají stochastický vnější přítok. Přítoky některých nádrží můžeme považovat za čistě deterministické veličiny. Speciálně nemá-li nádrž vnější přítok, pokládáme  $\zeta_t^n$  konstantně rovno nule.

Nechť  $\mathcal{N}^r \subseteq \mathcal{N}$  značí množinu vodních nádrží soustavy majících náhodný přítok. Označme  $\zeta_t$  jako náhodný vektor délky  $|\mathcal{N}^r|$ , jehož prvky jsou náhodné přítoky  $\zeta_t^n(t)$ ,  $n \in \mathcal{N}^r$ . Budeme předpokládat, že distribuční funkce náhodného vektoru  $\zeta_t$  je prvkem nějaké parametrické rodiny rozdělení.

## 2.2.5 Podmínka rovnováhy

Je zřejmé, že objem vody v nádrži v časovém okamžiku  $t$  musí být roven součtu objemu vody v nádrži v předchozím časovém okamžiku a objemu vody přitéčené

a přičerpané do nádrže za časový interval  $\Delta$ , přičemž je nutné odečíst objem vody odteklé, odčerpané a odebrané z nádrže za časový interval  $\Delta$ . Podrobně rozebereme tuto podmínku rovnováhy jako

$$\begin{aligned}
V^n(t) = & V^n(t-1) - s_D^n(t)\Delta + \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \left( x_0^m(t-D_m) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[m]} x^i(t-D_m) \right. \\
& \left. - s_R^m(t-D_m+R_m) \right) \Delta - \left( x_0^n(t) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(t) \right) \Delta + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[n]} y^i(t)\Delta \\
& - \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[m]} y^i(t)\Delta + \zeta_t^n \Delta \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \mathcal{T}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Připomeňme, že  $V^n(t)$ , respektive  $V^n(t-1)$  představuje objem vody v nádrži  $n$  v časovém okamžiku  $t$ , respektive  $t-1$ . Součin  $s_D^n(t)\Delta$  představuje objem vody odebrané za časový interval  $\Delta$  z nádrže  $n$  do jejího okolí za účelem zavlažování a průmyslového využití. Výraz

$$\sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \left( x_0^m(t-D_m) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[m]} x^i(t-D_m) - s_R^m(t-D_m+R_m) \right) \Delta$$

značí objem vody, která přiteče přes turbíny a spodní výpusti výše položených nádrží  $m \in \mathcal{A}(n)$  do nádrže  $n$  za časový interval  $\Delta$ . Voda se z výše položené nádrže  $m$  dostane do nádrže  $n$  za  $D_m$  časových okamžiků, je tedy nutné posunout veličiny  $x_0^m(t)$  a  $x^i(t)$  do času  $t-D_m$ . Před  $D_m-R_m$  časovými okamžiky byla z toku vytékajícího z nádrže  $m$  odebrána voda za účelem zavlažování a průmyslového využití. To je vyjádřeno odběrem  $s_R^m(t-D_m+R_m)$ . Výraz

$$\left( x_0^n(t) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(t) \right) \Delta$$

představuje objem vody, která za časový interval  $\Delta$  odteče přes turbíny a spodní výpusti nádrže  $n$  do nádrže pod ní. Objem vody, která je za časový interval  $\Delta$  přičerpána zpět do nádrže  $n$  z nádrže pod ní, je vyjádřen součtem

$$\sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[n]} y^i(t)\Delta.$$

Připomeňme, že předpokládáme, že k čerpání dochází téměř okamžitě, a proto nedochází k časovému posunu veličiny  $y^i(t)$ . Součet

$$\sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[m]} y^i(t)\Delta$$

představuje objem vody, která je za časový interval  $\Delta$  odčerpana z nádrže  $n$  zpět do nádrží  $m \in \mathcal{A}(n)$  nad ní. Poslední člen pravé strany rovnice (2.5)  $\zeta_t^n \Delta$  představuje vnější přítok nádrže  $n$  za časový interval  $\Delta$ .

Podmínku rovnováhy (2.5) můžeme dále rekurzivně přepsat, čímž dostáváme ekvivalentní vyjádření

$$\begin{aligned}
V^n(t) = & V^n(0) - \sum_{u=1}^t s_D^n(u)\Delta + \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \left( x_0^m(u - D_m) + \sum_{i \in \sigma_{\tau}^{-1}[m]} x^i(u - D_m) \right. \\
& \left. - s_R^m(u - D_m + R_m) \right) \Delta - \sum_{u=1}^t \left( x_0^n(u) + \sum_{i \in \sigma_{\tau}^{-1}[n]} x^i(u) \right) \Delta \\
& + \sum_{u=1}^t \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[n]} y^i(u)\Delta - \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[m]} y^i(u)\Delta + \sum_{u=1}^t \zeta_u^n \Delta \\
& \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

### 2.2.6 Omezení objemu vody v nádrži

Hodnota objemu vody  $V^n(t)$  je pro každou nádrž omezena minimální a maximální hranicí. Za účelem řízení životního prostředí a případné rekreace omezíme pro každé  $n \in \mathcal{N}$  a každé  $t \in \tau$  veličinu  $V^n(t)$  dolní hranicí  $V_{min}^n(t)$ . Naopak zavedením horní hranice  $V_{max}^n(t)$  veličiny  $V^n(t)$  zajistíme ochranu před povodněmi.

Pro nádrže  $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r$  je rovnice (2.6) zcela deterministická a podmínku omezení objemu v nádrži  $n$  formulujeme jednoduše jako

$$V_{min}^n(t) \leq V^n(t) \leq V_{max}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau. \tag{2.7}$$

V případě nádrží  $n \in \mathcal{N}^r$ , pro které je  $\zeta_t^n$  a tedy i  $V^n(t)$  z rovnice (2.6) náhodná veličina, stanovíme podmínku omezení objemu nádrže pomocí sdruženého pravděpodobnostního omezení ve tvaru

$$\mathbf{P} \{ V_{min}^n(t) \leq V^n(t) \leq V_{max}^n(t) \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau \} \geq \alpha, \tag{2.8}$$

kde  $\mathbf{P}$  je pravděpodobnostní míra a  $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$  je požadovaná pravděpodobnostní hladina. Vztah (2.8) interpretujeme následovně: pravděpodobnost, že objem vody  $V^n(t)$  ve všech nádržích  $n \in \mathcal{N}^r$  a ve všech časových okamžicích  $t \in \tau$  neklesne pod dolní mez  $V_{min}^n(t)$  a zároveň nepřekročí horní mez  $V_{max}^n(t)$ , je alespoň  $\alpha \cdot 100\%$ . Požadujeme tedy, aby všechny jednotlivé nerovnosti byly splněny alespoň s danou pravděpodobností  $\alpha$ . Alternativně bychom mohli podmínku (2.8) formulovat pomocí individuálních pravděpodobnostních omezení, kdy je požadováno splnění každé z nerovností zvlášť s danou individuální pravděpodobností (viz sekce 3.2).

(van Ackooij a kol., 2014, sekce 2.1.4)

### Omezení součtu objemů vybraných nádrží

Kromě podmínek (2.7) a (2.8) na omezení objemu vody v každé nádrži soustavy je v praxi častý také požadavek udržení součtu objemů vody ve vybraných nádržích v každém časovém okamžiku nad stanovenou hranicí. Tyto podmínky

se zpravidla zavádějí za účelem ochrany před suchem. Snížili-li se součet akumulovaných objemů vybraných nádrží pod stanovenou hranici, přihlíží se obvykle pouze k těm účelům soustavy, které jsou v daném okamžiku klíčové a zbylá omezení již nemusí být splněna.

Nechť  $\mathcal{C}$  značí množinu všech omezení na součet objemů vody ve vybraných nádržích soustavy. Pro každé  $c \in \mathcal{C}$  označme  $\mathcal{N}(c) \subseteq \mathcal{N}$  množinu nádrží, jejichž součet objemů je nutné v každém časovém okamžiku  $t \in \tau$  udržet nad danou hranicí  $V_{min}^c(t)$ . Zavedme dále podmnožinu omezení  $\mathcal{C}^r \subseteq \mathcal{C}$  definovanou jako

$$\mathcal{C}^r = \{c \in \mathcal{C} : \mathcal{N}(c) \cap \mathcal{N}^r \neq \emptyset\}.$$

Množina  $\mathcal{C}^r$  tedy obsahuje taková omezení  $c \in \mathcal{C}$ , že vnější přítok alespoň jedné z nádrží  $n \in \mathcal{N}(c)$  je náhodný.

Pro nádrže  $n \in \mathcal{N}(c)$ ,  $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^r$  jsou tedy  $V^n(t)$  deterministické veličiny a podmínku na omezení součtu jejich objemů formulujeme jednoduše jako

$$\sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \geq V_{min}^c(t) \quad \forall c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^r, \forall t \in \tau. \quad (2.9)$$

Pro omezení  $c \in \mathcal{C}^r$  je alespoň jeden sčítanec součtu  $\sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t)$  náhodnou veličinou. Podmínku na omezení součtu objemů v tomto případě přidáme přímo do sdruženého pravděpodobnostního omezení (2.8). Dostáváme tak společnou podmínku

$$\mathbb{P} \left\{ \begin{array}{l} V_{min}^n(t) \leq V^n(t) \leq V_{max}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \\ \sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \geq V_{min}^c(t) \quad \forall c \in \mathcal{C}^r, \forall t \in \tau \end{array} \right\} \geq \alpha. \quad (2.10)$$

## 2.2.7 Ocenění vody uskladněné v nádrži

Ve výsledné úloze budeme zřejmě chtít maximalizovat celkový zisk představující rozdíl ceny energie vyrobené turbínami a ceny energie použité k přečerpávání. Taková formulace účelové funkce by však při krátkodobém optimalizačním problému, kdy se časový horizont pohybuje od několika dní až po měsíc, vedla k maximálnímu využití vody. Tato voda by mohla být potřebná v budoucnu, kdy je například nutné pokrýt špičkovou spotřebu elektrické energie, či naopak snížit provoz tepelných a jaderných elektráren. Proto je třeba stanovit cenu vody uskladněné v nádrži a současně s maximalizací celkového zisku pak minimalizovat cenu použité vody.

Cena vody obecně závisí na čase, vnějších přítocích, aktuální ceně elektrické energie na trhu, aktuální úrovni vodní hladiny jednotlivých nádrží soustavy a na dalších veličinách, které můžeme považovat za prostředky zásoby či obchodování. Časová závislost je nejčastěji uvažována týdenní, denní, případně v rámci dne. Kvůli klimatickým vlivům jsou některé konkrétní týdny mnohem nákladnější než týdny jiné. V takových týdnech dosahuje zatížení elektrické sítě vrcholu a je velmi vysoké riziko výpadku dodávky elektriny, což se také promítne do cen vody. (van Ackooij a kol., 2014, sekce 2.1.5)

Při zahrnutí cen vody do krátkodobého optimalizačního problému můžeme časovou závislost zanedbat, nebo vzít v úvahu. Pokud bychom ji zanedbali, mohli bychom hodnotit rozdíl mezi konečným a počátečním objemem vody v nádrži podle stejné ceny vody pro celý časový horizont. Tím bychom však jakékoli dva skladovací postupy vedoucí ke stejnému koncovému objemu považovali za stejné. Pohybuje-li se například časový horizont kolem jednoho měsíce a dosahuje-li v nějakém týdnu tohoto měsíce zatížení elektrické sítě vrcholu, nemusejí být z pohledu řízení dva skladovací postupy vedoucí ke stejnému koncovému objemu nutně ekvivalentní. Aby byla odražena tato vlastnost, bylo by nutné uvažovat časovou závislost cen vody. Poskytnutý model by navíc lépe odpovídal stávající praxi a poskytoval by možnost kontroly nad postupem skladování. (van Ackooij a kol., 2014, sekce 2.1.5)

Časově závislé ceny vody jsou získávány pomocí sezónního dynamického či stochastického programování s časovým horizontem pohybujícím se zpravidla od tří do osmnácti měsíců. Jelikož se primárně soustředíme na stochastický model s pravděpodobnostním omezením pro řízení vodohospodářské soustavy, použijeme k odhadu těchto cen vody jednoduchý sezónní deterministický model představený v kapitole 5. Neboť má sezónní model oceňování delší časový horizont, je nutná jistá agregace. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že rozmezí jednotlivých homogenních časových okamžiků sezónního modelu oceňování je větší než optimalizační horizont krátkodobého modelu řízení. To nám umožní odhadnout cenu vody v závislosti na čase. Její začlenění do úlohy řízení vodohospodářské soustavy pak již formulujeme bez uvažování časové závislosti.

## Ceny vody závislé na objemu

Naším cílem je ocenit očekávaný objem vody v nádrži na konci optimalizačního časového horizontu  $E(V^n(T))$ . Zaveďme následující diskretizaci výšky hladiny vody v nádrži. Označme

$$V_0^n, \dots, V_{K_n}^n \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

uspořádání objemu vody v nádrži  $n$  na konečně mnoho hodnot vzestupně podle výšky vodní hladiny. Objem vody v nádrži  $n \in \mathcal{N}$  je tedy rozdělen do kategorií  $[V_{i-1}^n, V_i^n)$ ,  $i = 1, \dots, K_n$ . Každé kategorii  $[V_{i-1}^n, V_i^n)$  přiřadíme cenu vody  $W_i^n$  v jednotkách  $\text{€}/\text{m}^3$ . Jelikož je zřejmě objemová kategorie s nižší výškou vodní úrovně více ceněná, budeme požadovat

$$W_{i-1}^n > W_i^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall i = 2, \dots, K_n. \quad (2.11)$$

Ocenění očekávaného konečného objemu  $E(V^n(T))$  vodní nádrže  $n$  je pak jednoduše souhrnná hodnota vody vyjádřená jako

$$\sum_{i \leq i^*} W_i^n (V_i^n - V_{i-1}^n) + W_{i^*}^n (E(V^n(T)) - V_{i^*}^n), \quad (2.12)$$

$$i^* := \max\{i \mid E(V^n(T)) \geq V_i^n\}.$$

Poznamenejme, že tato hodnota je rostoucí funkcí očekávaného konečného objemu  $E(V^n(T))$  i přesto, že ceny vody jsou z nerovnice (2.11) striktně klesající při rostoucí výšce vodní úrovně  $i$ .

Pro zjednodušení výrazu (2.12) zavedeme pro každé  $n \in \mathcal{N}$  a  $i = 1, \dots, K_n$  pomocnou veličinu  $z_i^n$  indikující objem vody nádrže  $n$  v čase  $t = T$  v kategorii  $[V_{i-1}^n, V_i^n)$ . Jelikož jsou v nádrži  $n$  naplněny vodou všechny kategorie až do úrovně  $i^*$ , bude zřejmě

$$z_i^n = \begin{cases} V_i^n - V_{i-1}^n & i = 1, \dots, i^* \\ \mathbf{E}(V^n(T)) - V_{i^*}^n & i = i^* + 1 \\ 0 & i = i^* + 2, \dots, K_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathcal{N}. \quad (2.13)$$

Cena očekávaného konečného objemu  $\mathbf{E}(V^n(T))$  vodní nádrže  $n$  je pak rovna

$$\sum_{i=1}^{K_n} W_i^n z_i^n \quad \forall n \in \mathcal{N}. \quad (2.14)$$

Vztah (2.13) definující veličinu  $z_i^n$  můžeme dále s ohledem na účelovou funkci nahradit pomocí podmínek pro kategorizování objemu tvaru

$$\sum_{i=1}^{K_n} z_i^n = \mathbf{E}(V^n(T)) - V_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad (2.15)$$

$$0 \leq z_i^n \leq V_i^n - V_{i-1}^n \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall i = 1, \dots, K_n, \quad (2.16)$$

ve kterých již není použit stěžejní prvek  $i^*$ . Ekvivalenci vztahu (2.13) a podmínek (2.15) a (2.16) argumentujeme následovně. Součástí výsledné účelové funkce je maximalizace ceny očekávaného konečného objemu vyjádřené v (2.14) (viz následující sekce 2.3). Vzhledem ke striktně klesajícím cenám (2.11) (při rostoucí výšce vodní úrovně  $i$ ) je pak z rovnice (2.15) zřejmé, že v pravé nerovnosti (2.16) bude platit rovnost tak dlouho, jak jen to bude možné, a že ostrá nerovnost může nastat až v případě nejvyšší objemové kategorie. Toto je samozřejmě ekvivalentní s definicí  $z_i^n$  v (2.13).

Pro nádrže, jejichž přítok je deterministická veličina, je zřejmě  $\mathbf{E}(V^n(T)) = V^n(T)$ . Podmínku (2.15) můžeme proto rozdělit na

$$\sum_{i=1}^{K_n} z_i^n = V^n(T) - V_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r, \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^{K_n} z_i^n = \mathbf{E}(V^n(T)) - V_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N}^r. \quad (2.18)$$

Jelikož je počáteční objem  $V^n(0)$  předem známý, můžeme podobně jako  $z_i^n$  zavést pro každé  $n \in \mathcal{N}$  a  $i = 1, \dots, K_n$  veličinu  $z_{0,i}^n$ , která indikuje objem vody nádrže  $n$  v čase  $t = 0$  v kategorii  $[V_{i-1}^n, V_i^n)$ . Počáteční objem  $V^n(0)$  tedy pomocí  $z_{0,i}^n$  rozdělíme do stanovených kategorií, z čehož pak plyne vyjádření

$$\sum_{i=1}^{K_n} W_i^n (z_{0,i}^n - z_i^n) \quad (2.19)$$

představující očekávanou cenu použité vody nádrže  $n \in \mathcal{N}$ . Tuto cenu budeme chtít minimalizovat a zahrneme ji do účelové funkce úlohy.



*Poznámka.* Hodnota  $\sum_{i=1}^{K_n} W_i^n z_{0,i}^n$  ze součtu (2.19) je zřejmě konstanta, která může být z účelové funkce jednoduše vynechána. Ekvivalentně bychom tak ihned maximalizovali cenu konečného očekávaného objemu (2.14) bez nutnosti zavedení veličiny  $z_{0,i}^n$ . V praxi by to však mohlo způsobit určité numerické problémy, zvláště když dostáváme vysoké hodnoty objemu a turbínová, respektive přečerpávací kapacita je v porovnání s tímto objemem malá. V takovém případě mohou být relativní změny v ohodnocení vyvolané řízením snadno zanedbány.

(van Ackooij a kol., 2014, sekce 2.1.5)

## 2.2.8 Podpůrné služby

Základním předpokladem provozu přenosové soustavy je udržení rovnováhy mezi výrobou a spotřebou. Provozovatel přenosové soustavy musí mít proto k dispozici určitý pohotovostní regulační výkon, který si rezervuje u jednotlivých výrobců elektrické energie. Hovoříme pak o takzvaných podpůrných službách.

V rámci podpůrných služeb budeme při vodohospodářském řízení uvažovat takzvanou kladnou minutovou zálohu. Jedná se o službu poskytnout do několika minut (zpravidla pět, či patnáct) předem sjednaný výkon, takzvanou regulační zálohu. Označme  $P$  sjednanou regulační zálohu v MW.

Označme dále  $\rho^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ ,  $t \in \tau$  efektivitu turbíny  $g^i$  v čase  $t$  udávající, kolik megawatthodin elektrické energie je vyrobeno průtokem jednoho metru krychlového vody turbínou  $g^i$ . Analogicky označme  $\varphi^j(t)$ ,  $j = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$ ,  $t \in \tau$  efektivitu přečerpávací stanice  $p^j$  v čase  $t$  udávající, kolik metrů krychlových vody je přečerpáno stanicí  $p^j$  při spotřebě jedné megawatthodiny elektrické energie. Veličina  $\rho^i(t)$  je tedy v jednotkách MWh/m<sup>3</sup>, zatímco veličinu  $\varphi^j(t)$  uvažujeme v jednotkách m<sup>3</sup>/MWh.

Sjednaný regulační výkon  $P$  je v každém časovém okamžiku řízení rezervován pro případ poskytnutí zálohy v rámci podpůrných služeb. Výkon soustavy musí být proto v každém časovém okamžiku menší nebo roven celkovému součtu dosažitelného výkonu sníženého o regulační zálohu. To formulujeme jako podmínku podpůrných služeb tvaru

$$\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t) - \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^j(t)} y^j(t) \leq \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) \bar{x}^i - \sum_{i \in \mathcal{R}} v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t) \rho^i(t) \bar{x}^i - P \quad \forall t \in \tau. \quad (2.20)$$

Součet

$$\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t)$$

představuje celkový výkon v čase  $t$  všech turbín soustavy, které jsou v tomto čase v provozu. Výraz

$$\sum_{j=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^j(t)} y^j(t)$$

představuje výkon potřebný k přečerpávání v soustavě v čase  $t$ . Levá strana

nerovnice tedy vyjadřuje celkový výkon soustavy v čase  $t$ . Výraz

$$\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) \bar{x}^i - \sum_{i \in \mathcal{R}} v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t) \rho^i(t) \bar{x}^i$$

představuje maximální možný dosažitelný výkon soustavy v čase  $t$ . Reverzní turbíny, které jsou v čase  $t$  v čerpadlovém režimu, nejsou v tomto čase součástí výrobní kapacity a proto je nutné jejich výkon od celkového dosažitelného výkonu všech turbín odečíst.

## 2.3 Účelová funkce

Cílem úlohy je maximalizovat zisk představující rozdíl celkové očekávané ceny energie vyrobené turbínami a celkové očekávané ceny energie použité k přečerpávání, přičemž je dále nutné odečíst cenu použité vody.

Cena elektřiny na trhu představuje další náhodnou složku modelu. Zavedme pro každé  $t \in \tau$  náhodnou veličinu  $\lambda_t$  představující cenu jedné megawatthodiny energie v čase  $t$ . Veličinu  $\lambda_t$  uvažujeme v jednotkách €/MWh. Budeme předpokládat, že distribuční funkce náhodné veličiny  $\lambda_t$  je prvkem nějaké parametrické rodiny rozdělání. Náhodnou cenu elektřiny dále zahrneme do účelové funkce modelu pomocí střední hodnoty (viz sekce 1.2.2).

Společně s minimalizací ceny použité vody (2.19) pak vyjádříme výslednou maximalizační účelovou funkci jako

$$\sum_{t \in \tau} \mathbb{E}(\lambda_t) \Delta \left( \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t) - \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^i(t)} y^i(t) \right) - \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{K_n} W_i^n (z_{0,i}^n - z_i^n), \quad (2.21)$$

kde veličina  $z_i^n$  je dána vztahy (2.16), (2.17) a (2.18) a  $\mathbb{E}(\lambda_t)$  představuje očekávanou cenu elektřiny na trhu v čase  $t$ . Součet

$$\sum_{t \in \tau} \mathbb{E}(\lambda_t) \Delta \left( \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t) \right)$$

vyjadřuje celkovou očekávanou cenu energie vyrobené všemi turbínami soustavy za uvažovaný časový horizont, zatímco

$$\sum_{t \in \tau} \mathbb{E}(\lambda_t) \Delta \left( \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^i(t)} y^i(t) \right)$$

vyjadřuje celkovou očekávanou cenu energie použité k přečerpávání ve všech stanicích soustavy za uvažovaný časový horizont. Součet

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{K_n} W_i^n (z_{0,i}^n - z_i^n)$$

představuje celkovou cenu použité vody všech nádrží soustavy za uvažovaný časový horizont.

## 2.4 Úloha řízení vodohospodářské soustavy

Výslednou optimalizační úlohu formulujeme jako smíšený celočíselný model se sdruženým pravděpodobnostním omezením tvaru

$$\max \sum_{t \in \tau} \mathbb{E}(\lambda_t) \Delta \left( \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t) - \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^i(t)} y^i(t) \right) - \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{K_n} W_i^n (z_{0,i}^n - z_i^n) \quad (2.22)$$

za podmínek  $u^i(t) \underline{x}^i \leq x^i(t) \leq u^i(t) \bar{x}^i \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau,$

$v^i(t) \underline{y}^i \leq y^i(t) \leq v^i(t) \bar{y}^i \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau,$

$0 \leq x_0^n(t) \leq \bar{x}_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau,$

$u^i(t) + v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t) \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{R}, \forall t \in \tau,$

$\underline{f}^n(t) \leq x_0^n(t) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(t) \leq \bar{f}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau,$

$$\begin{aligned} V^n(t) = & V^n(0) - \sum_{u=1}^t s_D^n(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \left( x_0^m(u - D_m) \right. \\ & \left. + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[m]} x^i(u - D_m) - s_R^m(u - D_m + R_m) \right) \Delta \\ & - \sum_{u=1}^t \left( x_0^n(u) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(u) \right) \Delta + \sum_{u=1}^t \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[n]} y^i(u) \Delta \\ & - \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[m]} y^i(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \zeta_u^n \Delta \\ & \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau, \end{aligned}$$

$V_{\min}^n(t) \leq V^n(t) \leq V_{\max}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau,$

$\sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \geq V_{\min}^c(t) \quad \forall c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^r, \forall t \in \tau,$

$$\mathbb{P} \left\{ \begin{aligned} & V_{\min}^n(t) \leq V^n(t) \leq V_{\max}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \\ & \sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \geq V_{\min}^c(t) \quad \forall c \in \mathcal{C}^r, \forall t \in \tau \end{aligned} \right\} \geq \alpha,$$

$0 \leq z_i^n \leq V_i^n - V_{i-1}^n \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall i = 1, \dots, K_n,$

$\sum_{i=1}^{K_n} z_i^n = V^n(T) - V_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r,$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{K_n} z_i^n &= E(V^n(T)) - V_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \\
\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t) - \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^j(t)} y^j(t) &\leq \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) \bar{x}^i - \sum_{i \in \mathcal{R}} v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t) \cdot \\
&\quad \cdot \rho^i(t) \bar{x}^i - P \quad \forall t \in \tau, \\
x^i(t) &\geq 0, u^i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau, \\
y^i(t) &\geq 0, v^i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau.
\end{aligned}$$

Jednotlivá omezení úlohy (2.22) jsou dle pořadí: podmínky (2.1), (2.2) a (2.3) na řízení soustavy, podmínka (2.4) na odtok vody z nádrže, podmínka rovnováhy (2.6), podmínky (2.7), (2.9) a (2.10) na omezení objemu vody v nádržích, kategorizování objemu vody v nádrži (2.16), (2.17) a (2.18) a podmínka podpůrné služby (2.20).

## 2.5 Možná rozšíření úlohy

Při aplikaci úlohy na reálný problém je třeba zohlednit individuální potřeby konkrétní soustavy. Výsledná úloha (2.22) byla sestavena tak, aby vyhovovala zejména základním požadavkům Vltavské kaskády, na kterou je model aplikován v praktické části práce (viz kapitola 6). Sestavenou úlohu lze dále zpřesňovat zavedením nových veličin a omezení.

### Vodohospodářské odtokové objekty

Voda může být z nádrže odváděna také jinými způsoby než přes turbíny či spodní výpusti. Speciálně může mít vodní nádrž například bezpečnostní boční přeliv, aerační výpusti, či již zmíněnou šterkovou propust' a bezpečnostní přeliv hráze.

Další odtokový objekt lze v sestavené úloze (2.22) jednoduše uvažovat jako součást zavedených spodních výpustí. Stačí pak pouze navýšit průtočnou kapacitu  $\bar{x}_0^n(t)$  o maximální možný průtok daným vodohospodářským objektem. Pokud by bylo třeba uvažovat v sestavené úloze odtokový objekt zvlášť, například jsou-li na něj kladeny další speciální podmínky, lze tento objekt pro jednoduchost beze změn zavést jako novou turbínu, jejíž efektivita je rovna nule. Maximální hltnost turbíny pak bude představovat maximální možný odtok z nádrže daným objektem.

### Srážky a vypařování

V zavedené úloze (2.22) zanedbáváme srážky na plochu nádrže i ztrátu vody, která je způsobena především vypařováním z hladiny nádrže. Pro jednoduchost můžeme předpokládat, že průměrný roční úhrn srážek na plochu nádrže je přibližně roven předpokládanému ročnímu výparu z hladiny nádrže. Na základě klimatických podmínek, ve kterých se reálná vodohospodářská soustava nachází, lze pak tyto veličiny v podmínce rovnováhy (2.6) zohlednit.

## Spouštěcí ceny

Ztráty spojené se spouštěním a vypínáním turbín lze do modelu zahrnout prostřednictvím spouštěcích cen. Časté spouštění a vypínání je zřejmě nežádoucí, neboť způsobuje opotřebování turbín a vyžaduje pozornost řídicího střediska. Minimalizaci celkových spouštěcích cen všech turbín lze zahrnout do účelové funkce (2.21) úlohy (2.22) odečtením výrazu

$$\sum_{t \in \tau} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \Lambda^i \delta^i(t),$$

kde  $\Lambda^i$  je stanovená spouštěcí cena turbíny  $g^i$  a  $\delta^i(t)$  je pomocná binární proměnná definovaná jako

$$\delta^i(t) = \begin{cases} 1 & \text{byla-li turbína } g^i \text{ spuštěna v čase } t \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau.$$

Proměnná  $\delta^i(t)$  pak zřejmě musí splňovat podmínky úlohy tvaru

$$\begin{aligned} \delta^i(t) &\geq u^i(t) - u^i(t-1) \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t = 1, \dots, T, \\ \delta^i(t) &\in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau, \end{aligned}$$

kde  $u^i(0)$  je daná počáteční hodnota. Analogicky lze do modelu zahrnout spouštěcí ceny přečerpávacích stanic.

(Aasgård a Andersen, 2013, sekce 5.3.4)

## Další individuální omezení

Dodatečná omezení úlohy mohou být dále formulována na základě nařízení daných manipulačními řády konkrétních nádrží. Mohou být také kladeny další podmínky na ochranu životního prostředí či podmínky plynoucí z provozu přenosové soustavy.



# Kapitola 3

## Alternativní modely

V následující části práce je poskytnuto několik dalších alternativních přístupů k hlavnímu modelu, kterým je programování se sdruženým pravděpodobnostním omezením formulované v předchozí kapitole. Sestavená úloha (2.22) je přeformulována na model se střední hodnotou, model s individuálním pravděpodobnostním omezením a na penalizační model. Další možnost modelování představuje také robustní úloha, či dynamické programování.

### 3.1 Model se střední hodnotou

Při řízení vodohospodářské soustavy lze v krátkodobé optimalizaci předpokládat absenci náhodných veličin, případně jejich dostatečnou charakterizaci pomocí předpovědí. To představuje možnost nahrazení náhodných veličin  $\zeta_t^n$  pro každé  $n \in \mathcal{N}$  a  $t \in \tau$  jejich středními hodnotami. Podmínka rovnováhy (2.6) se zjednoduší do deterministického tvaru

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} V^n(t) = & V^n(0) - \sum_{u=1}^t s_D^n(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \left( x_0^m(u - D_m) + \sum_{i \in \sigma_{\tau}^{-1}[m]} x^i(u - D_m) \right. \\
 & \left. - s_R^m(u - D_m + R_m) \right) \Delta - \sum_{u=1}^t \left( x_0^n(u) + \sum_{i \in \sigma_{\tau}^{-1}[n]} x^i(u) \right) \Delta \\
 & + \sum_{u=1}^t \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[n]} y^i(u) \Delta - \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[m]} y^i(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \mathbb{E} (\zeta_u^n) \Delta \\
 & \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Z podmínek (2.7), (2.9) a (2.10) dostáváme deterministické podmínky na omezení objemu vody v nádrži tvaru

$$\begin{aligned}
 V_{min}^n(t) \leq \mathbb{E} V^n(t) \leq V_{max}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau, \\
 \sum_{n \in \mathcal{N}(c)} \mathbb{E} V^n(t) \geq V_{min}^c(t) \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall t \in \tau.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Model se střední hodnotou pro řízení vodohospodářské soustavy pak formulujeme jako úlohu smíšeného celočíselného lineárního programování tvaru

$$\max \sum_{t \in \tau} \mathbb{E}(\lambda_t) \Delta \left( \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t) - \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^i(t)} y^i(t) \right) - \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{K_n} W_i^n (z_{0,i}^n - z_i^n) \quad (3.3)$$

za podmínek (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (3.1), (3.2), (2.16), (2.17), (2.18), (2.20),

$$x^i(t) \geq 0, u^i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau,$$

$$y^i(t) \geq 0, v^i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau.$$

Výchozí model se sdruženým pravděpodobnostním omezením může být chápán jako rozšíření modelu se střední hodnotou, neboť se bere v úvahu dostupná stochastická informace o rozdělení náhodné veličiny, zatímco model (3.3) používá pouze parametr. Speciálně má-li náhodný vektor přítoků  $\zeta_t$  symetrické rozdělení, lze ukázat, že množina přípustných řešení úlohy (2.22) je podmnožinou množiny přípustných řešení úlohy (3.3). Jako důsledek je pak optimální hodnota úlohy (3.3) větší než optimální hodnota úlohy (2.22). Pro plné znění věty a její důkaz odkážme na článek van Ackooij a kol. (2014, Lemma 1).

Jak již bylo zmíněno, model se střední hodnotou je smíšeným celočíselným lineárním programováním. Je proto mnohem jednodušší jej vyřešit. Navzdory tomu a také skutečnosti, že dostáváme řešení s většími optimálními hodnotami, však tato řešení nejsou dobrá, neboť skoro jistě porušují daná omezení. To je ukázáno například v článku van Ackooij a kol. (2014). (van Ackooij a kol., 2014, sekce 3.2)

## 3.2 Model s individuálním pravděpodobnostním omezením

Uvažujme transformaci každé stochastické nerovnice podmínky (2.10) modelu se sdruženým pravděpodobnostním omezením na individuální pravděpodobnostní omezení typu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{V_{min}^n(t) \leq V^n(t)\} &\geq \alpha_t^n \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \\ \mathbb{P}\{V^n(t) \leq V_{max}^n(t)\} &\geq \beta_t^n \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \\ \mathbb{P}\left\{ \sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \geq V_{min}^c(t) \right\} &\geq \gamma_t^c \quad \forall c \in \mathcal{C}^r, \forall t \in \tau, \end{aligned} \quad (3.4)$$

kde  $\alpha_t^n, \beta_t^n, n \in \mathcal{N}^r, t \in \tau$  a  $\gamma_t^c, c \in \mathcal{C}^r, t \in \tau$  jsou dané požadované pravděpodobnostní hladiny. Úlohu (2.22) můžeme pak alternativně formulovat jako model s individuálním pravděpodobnostním omezením tvaru

$$\max \sum_{t \in \tau} \mathbb{E}(\lambda_t) \Delta \left( \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t) - \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^i(t)} y^i(t) \right) - \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{K_n} W_i^n (z_{0,i}^n - z_i^n) \quad (3.5)$$



za podmínek (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7), (2.9), (3.4), (2.16), (2.17), (2.18), (2.20),

$$x^i(t) \geq 0, u^i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau,$$

$$y^i(t) \geq 0, v^i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau.$$

Ve skutečnosti může být model s individuálním pravděpodobnostním omezením (3.5) převeden na jednoduchou úlohu smíšeného celočíselného lineárního programování, neboť inverzní funkci od distribuční funkce náhodné veličiny  $\zeta_t^n$  (případně jejich součtu) lze jednoduše vyjádřit. Model přináší také zlepšení robustnosti v porovnání s modelem se střední hodnotou, který robustní není. Nicméně zde nemůžeme zaručit dodržení předepsaných pravděpodobnostních hladin pro všechny stochastické nerovnosti, a proto je model mnohem méně robustní než model se sdruženým pravděpodobnostním omezením. (van Ackooij a kol., 2014, sekce 3.4)

### 3.3 Penalizační model

Alternativně můžeme formulovat model založený na ohodnocení a minimalizaci celkových očekávaných ztrát spojených s nesplněním podmínek uvnitř sdruženého pravděpodobnostního omezení (2.10). Předpokládejme penalizační funkce tvaru

$$\Gamma(z) \begin{cases} = 0 & \text{pokud } z \leq 0 \\ \geq 0 \text{ a neklesající} & \text{pokud } z > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

(Dupačová a kol., 1991, sekce 3.2). Speciálně pak pro každé  $n \in \mathcal{N}^r$  a  $t \in \tau$  označme  $\Gamma_{min}^{n,t}$ , respektive  $\Gamma_{max}^{n,t}$  funkci penalizující nesplnění podmínky  $V_{min}^n(t) \leq V^n(t)$ , respektive  $V^n(t) \leq V_{max}^n(t)$  pro nádrž  $n$  v čase  $t$ . Analogicky označme pro každé  $c \in \mathcal{C}^r$  a  $t \in \tau$  funkci  $\Gamma^{c,t}$  penalizující nesplnění podmínky

$$\sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \geq V_{min}^c(t)$$

pro množinu nádrží  $\mathcal{N}(c)$  v čase  $t$ . Očekávané ztráty spojené s nesplněním požadavků

$$V_{min}^n(t) \leq V^n(t) \leq V_{max}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau,$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \geq V_{min}^c(t) \quad \forall c \in \mathcal{C}^r, \forall t \in \tau$$

lze pak zapsat jako

$$\begin{aligned} \mathbb{E} & \left( \sum_{n \in \mathcal{N}^r} \sum_{t \in \tau} \Gamma_{min}^{n,t} (V_{min}^n(t) - V^n(t)) + \sum_{n \in \mathcal{N}^r} \sum_{t \in \tau} \Gamma_{max}^{n,t} (V^n(t) - V_{max}^n(t)) \right. \\ & \left. + \sum_{c \in \mathcal{C}^r} \sum_{t \in \tau} \Gamma^{c,t} \left( V_{min}^c(t) - \sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Zahrnutím minimalizace očekávaných ztrát (3.7) do účelové funkce úlohy řízení vodohospodářské soustavy pak formulujeme úlohu s penalizací ztrát tvaru

$$\begin{aligned}
\max \sum_{t \in \tau} \mathbb{E}(\lambda_t) \Delta & \left( \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t) - \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^i(t)} y^i(t) \right) - \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{K_n} W_i^n (z_{0,i}^n - z_i^n) \\
& - \mathbb{E} \left( \sum_{n \in \mathcal{N}^r} \sum_{t \in \tau} \Gamma_{min}^{n,t} (V_{min}^n(t) - V^n(t)) + \sum_{n \in \mathcal{N}^r} \sum_{t \in \tau} \Gamma_{max}^{n,t} (V^n(t) - V_{max}^n(t)) \right. \\
& \left. + \sum_{c \in \mathcal{C}^r} \sum_{t \in \tau} \Gamma^{c,t} \left( V_{min}^c(t) - \sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

za podmínek (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7), (2.9), (2.16), (2.17), (2.18), (2.20),

$$x^i(t) \geq 0, u^i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau,$$

$$y^i(t) \geq 0, v^i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau.$$

### Volba penalizační funkce

Penalizační funkce (3.6) je často založena na ekonomické analýze uvažovaného problému. Jednoduchou volbou funkce je například tvar

$$\Gamma(z) = qz^+,$$

kde  $z^+ := \max(0, z)$  značí kladnou část  $z$  a  $q \geq 0$  je penalizační koeficient daný například zadavatelem. V takovém případě bychom o úloze (3.8) hovořili jako o jednoduchém modelu s kompenzací. (Dupačová a kol., 1991, sekce 3.2)

## 3.4 Kombinovaný model

Výše zmíněné modely lze vzájemně různě kombinovat v závislosti na konkrétním problému. V jedné úloze můžeme formulovat více sdružených i individuálních pravděpodobnostních omezení, přičemž můžeme požadovat splnění každého omezení s různými pravděpodobnostmi. Libovolné pravděpodobnostní omezení pak lze nahradit penalizačním členem v účelové funkci.

## 3.5 Robustní model

V robustní verzi úlohy (2.22) bychom chtěli najít pro náhodný vektor vnějších přítoků  $\zeta_t \in \mathbb{R}^k$ ,  $k = |\mathcal{N}^r|$  množinu náhodných vektorů  $\mathcal{E}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^k$  tak, aby pravděpodobnost, že  $\zeta_t$  padne do množiny  $\mathcal{E}_\alpha$ , byla přibližně  $\alpha$ . Pak budeme požadovat, aby podmínky uvnitř sdruženého pravděpodobnostního omezení (2.10) byly splněny pro všechna  $\zeta_t$  z této množiny, namísto aby byly splněny v pravděpodobnosti.

Robustní verze úlohy řízení vodohospodářské soustavy je obecně formulována jako úloha lineárního programování v článku van Ackooij a kol. (2014, sekce 3.5). K určení množiny  $\mathcal{E}_\alpha$  je zde využít Choleského rozklad kovarianční matice a Fellerova-Lindebergova centrální limitní věta.

## 3.6 Dynamické programování

Ve všech dosud zmíněných modelech je rozhodnutí stanoveno jednou provždy, aniž by byl brán v úvahu dočasný charakter náhodné složky. To je zohledněno v dynamickém rozhodovacím procesu, během kterého je díky postupným realizacím náhodných veličin použito stále větší množství informací. Díky tomu lze očekávat lepší řešení než při statických modelech.

Navržením dynamického modelu se sdruženým pravděpodobnostním omezením a jeho aplikací na problém řízení vodních nádrží se zabývá například článek Andrieu, Henrion a Römisch (2010). Jelikož se však tyto modely primárně soustředí na dynamické aspekty, je jejich struktura poměrně jednoduchá. Samotný model je uvažován co nejjednodušší – bez spojení vodních nádrží, bez časového zpoždění mezi nádržemi, bez podmínek na oceňování vody a s malými dimenzemi.



# Kapitola 4

## Náhodná složka modelu a její aproximace pomocí scénářů

Kvalita řešení stochastické úlohy závisí na tom, jak dobře je náhoda v reálném komplexním problému modelována. V této kapitole představíme možnost aproximace pravděpodobnostního rozdělení náhodné složky modelu pomocí diskrétního rozdělení nabývajícího konečného počtu hodnot, takzvaných scénářů.

Náhodné přítoky a náhodnou cenu elektrické energie na trhu budeme nejprve modelovat jako časovou řadu pomocí vhodných stochastických procesů. Konkrétně použijeme v případě vnějších přítoků model vektorové autoregrese. Cenu elektřiny pak budeme modelovat pomocí multiplikativního sezónního procesu. Na základě zkonstruovaných modelů a jejich předpovědí vygenerujeme scénářový strom, který bude ve výsledné úloze reprezentovat náhodnou složku.

### 4.1 Možnost aproximace pravděpodobnostního rozdělení

Připomeňme si obecný stochastický model se sdruženým pravděpodobnostním omezením (1.6), který jsme formulovali v části 1.2.3 první kapitoly jako úlohu

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}} E \mathbf{c}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \\ & \text{za podmínky } P\{\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq \mathbf{0}\} \geq \alpha, \\ & \mathbf{x} \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Typicky zároveň formulujeme v praxi nepříliš reálný předpoklad, že pravděpodobnostní rozdělení  $P_{\boldsymbol{\omega}}$  náhodného vektoru  $\boldsymbol{\omega}$  je známé a nezávislé na rozhodnutí  $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ . Je-li pravděpodobnostní rozdělení  $P_{\boldsymbol{\omega}}$  spojité, pak stěžejním problémem při algoritickém řešení úlohy (1.6) je nutnost opakovaného výpočtu přinejmenším mnohorozměrného integrálu z náhodné účelové funkce  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$  a mnohorozměrného integrálu představujícího pravděpodobnost  $P\{\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq \mathbf{0}\}$ . Taková úloha je zřejmě numericky řešitelná pouze v případě velmi malých dimenzí, či pro speciální typy pravděpodobnostních rozdělení.

Bylo navrženo mnoho spojitých i diskrétních přístupů řešících problém (1.6). Co se týče náhodné složky v účelové funkci, lze tuto funkci například nahradit za jednodušší, či vhodně aproximovat předpokládané pravděpodobnostní

rozdělení  $P_\omega$ . Metody řešení úlohy se sdruženým pravděpodobnostním omezením jsou za konkrétních předpokladů například metoda transformačních funkcí, metoda přípustných směrů, metoda opěrné nadroviny, algoritmy založené na stochastických kvazigradičních metodách, či předpoklad diskrétního rozdělení pravděpodobnosti (viz Dupačová (1986, sekce 4.5.)).

Převládajícím přístupem je stále častěji aproximace pravděpodobnostního rozdělení pomocí diskrétního rozdělení. Cílem je získat numericky jednoduše řešitelnou optimalizační úlohu, jejíž řešení bude dostatečně aproximovat skutečné řešení původní úlohy. Předpokládané pravděpodobnostní rozdělení  $P_\omega$  je nahrazeno diskrétním rozdělením  $\hat{P}_\omega$  nabývajícím konečného počtu hodnot

$$\omega^1, \dots, \omega^S$$

s pravděpodobnostmi  $p_s > 0 \forall s = 1, \dots, S$ ,  $\sum_{s=1}^S p_s = 1$ . Hodnoty  $\omega^s$  pravděpodobnostního rozdělení  $\hat{P}_\omega$  pak nazýváme scénáře.

(Dupačová, 2013)

### 4.1.1 Generování scénářů

Konstrukce scénářů je založena jak na charakteru samotného problému, tak na množství dostupných informací o původním pravděpodobnostním rozdělení. Hlavním cílem je získat reprezentativní množinu scénářů, které poskytují rozumná rozhodnutí. Ke konstrukci scénářů se často využívají historická data, jsou-li k dispozici, spolu s vhodným modelem a také názory odborníků, zkušenosti či heuristiky. Z těchto důvodů nemůže být generování scénářů založeno na pouhé budoucí predikci.

Je-li pravděpodobnostní rozdělení  $P_\omega$  zcela známo, mohou být scénáře získány náhodným generováním realizací nebo pomocí diskrétního či simulačního schématu. Předpokládané známé pravděpodobnostní rozdělení může plynout z teoretického modelu, z historických dat i ze zkušeností odborníků.

Někdy může být dostupná jen informace o parametrické rodině pravděpodobnostního rozdělení založené na teoretickém modelu. Předpokládáme, že  $P_\omega$  náleží do parametrické rodiny  $\mathcal{P} = \{P_\psi, \psi \in \Psi\}$  a je určeno neznámou hodnotou parametru  $\psi$ . Nedostatečná informace o pravděpodobnostním rozdělení je kompenzována odhadnutím parametru  $\psi$  na základě dostupných dat. Volba parametrického tvaru pravděpodobnostního rozdělení či stochastického procesu odpovídá volbě modelu, odhadu jeho parametrů a následující konstrukci scénářů. Dostupnost informace o parametrické rodině rozdělení je v praxi v úlohách stochastického programování častá. V mnohých oblastech jsou k dispozici dobře vyvinuté stochastické modely spolu s historickými daty ve formě časových řad. V praxi je běžné, že náhodný prvek  $\omega$  je ve skutečnosti stochastický proces.

Máme-li k dispozici jen částečnou informaci o pravděpodobnostním rozdělení  $P_\omega$ , využijeme obvykle empirickou distribuční funkci založenou na pozorovaných datech. Je zde však nutný předpoklad většího množství dostupných dat, která jsou dostatečně homogenní, nezávislá a stejně rozdělená.

Pokud nemáme k dispozici žádná data, jsou scénáře a jejich pravděpodobnosti většinou založeny na předpovědích odborníků.

(Dupačová, 2013; Dupačová, Hurt a Štěpán, 2002, část II.5)

## 4.2 Náhodná složka modelu jako stochastický proces

V úloze řízení vodohospodářské soustavy sestavené v kapitole 2 představují náhodnou složku  $\omega$  vnější přítoky soustavy a cena elektrické energie na trhu. Náhodné přítoky soustavy v čase  $t \in \tau$  jsme zavedli jako náhodný vektor  $\zeta_t$ , náhodnou cenu elektřiny na trhu v čase  $t \in \tau$  představuje náhodná veličina  $\lambda_t$ .

Budeme předpokládat, že jsou vnější přítoky na ceně elektřiny nezávislé. Můžeme proto zvlášť aproximovat pomocí scénářů marginální pravděpodobnostní rozdělení přítoků a marginální pravděpodobnostní rozdělení ceny elektrické energie. Sdružené pravděpodobnostní rozdělení  $P_\omega$  náhodné složky modelu je pak jejich součinem.

Na náhodné přítoky lze také nahlížet jako na stochastický proces  $\{\zeta_t, t \in \tau\}$  v diskrétním čase. Náhodná cena elektrické energie může být chápána jako diskrétní stochastický proces  $\{\lambda_t, t \in \tau\}$ . Konstruované scénáře jsou pak trajektoriemi náhodného procesu.

### 4.2.1 Vektorový autoregresní proces vnějších přítoků soustavy

Na základě hodinových historických pozorování časové řady  $\zeta_t$ , která máme k dispozici pro praktickou část práce, se jeví vhodné modelovat přítoky jako vektorový autoregresní proces řádu  $p$  označovaný  $\text{VAR}(p)$ . Označme rozměr časové řady  $\zeta_t$ , tj. počet prvků množiny  $\mathcal{N}^r$ , jako  $k$ .

Důležitým předpokladem pro konstrukci autoregresního procesu je (slabá) stacionarita dané časové řady, kterou budeme dále označovat pouze jako stacionarita. Stacionaritou časové řady  $\zeta_t$  rozumíme, že příslušný proces je invariantní vůči posunům v čase v rámci momentů do druhého řádu, tj. pro každé  $s$  a  $t$  platí

$$\begin{aligned} E(\zeta_t) &= \mu, \\ \text{cov}(\zeta_s, \zeta_t) &= \text{cov}(\zeta_{s+h}, \zeta_{t+h}), \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde  $\mu$  je konstanta a  $h$  je libovolné. Vektorový autoregresní proces řádu  $p$  pro  $k$ -rozměrnou časovou řadu  $\zeta_t$  má pak tvar

$$\zeta_t = \Phi_0 + \Phi_1 \zeta_{t-1} + \dots + \Phi_p \zeta_{t-p} + \varepsilon_t, \tag{4.2}$$

kde  $\Phi_0$  je konstantní vektor délky  $k$ ,  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  je matice parametrů typu  $k \times k$ ,  $\Phi_p \neq \mathbf{0}$  a  $\varepsilon_t$  je  $k$ -rozměrný bílý šum představující residuální složku modelu. Vícerozměrným bílým šumem rozumíme posloupnost v různých časech navzájem nekorelovaných náhodných vektorů s nulovou střední hodnotou a konstantní pozitivně definitní varianční maticí  $\Sigma$ , tj.

$$E(\varepsilon_t) = \mathbf{0}, \quad E(\varepsilon_s \varepsilon_t^\top) = \delta_{st} \Sigma,$$

kde  $\delta_{st}$  je Kroneckerovo delta definované jako  $\delta_{st} = 1$  pro  $s = t$  a  $\delta_{st} = 0$  pro  $s \neq t$ . (Cipra, 2008, sekce 12.1., 12.2.)

## Identifikace řádu modelu VAR

V praxi se pro identifikaci řádu  $p$  modelu (4.2) používají zpravidla procedury založené na statistických testech nebo na informačních kritériích. Identifikace modelu VAR( $p$ ) pomocí informačních kritérií je úloha odhadu parametru  $p$  jako

$$\hat{p} = \underset{u=0,\dots,U}{\operatorname{argmin}} A(u),$$

kde  $A(u)$  je vhodně zvolené kritérium zkonstruované na základě odhadu modelu VAR( $u$ ), přičemž minimalizaci provádíme přes předem zvolenou síť hodnot  $u = 0, \dots, U$ . Nejvíce využívanými informačními kritérii jsou  $k$ -rozměrná verze Akaikeho informačního kritéria

$$\operatorname{AIC}(h) = \ln |\hat{\Sigma}| + \frac{2h}{T}$$

a  $k$ -rozměrná verze Bayesova informačního kritéria

$$\operatorname{BIC}(h) = \ln |\hat{\Sigma}| + \frac{h \ln T}{T},$$

kde v obou případech značí  $\hat{\Sigma}$  odhadnutou varianční matici odhadnuté residuální složky modelu VAR( $u$ ),  $T$  je počet pozorování dané časové řady, na jejichž základě je model odhadován, a  $h = k(uk + 1)$  je počet parametrů, které je nutné v  $k$ -rozměrném modelu odhadnout. (Cipra, 2008, sekce 10.3.1., 12.2.)

## Odhad modelu VAR

Vektorový autoregresní model (4.2) může být odhadován metodou nejmenších čtverců, metodou maximální věrohodnosti nebo Bayesovou metodou. Jednotlivé metody odhadů jsou uvedeny například v sekci 2.5 knihy Tsay (2014). Je ukázáno, že za předpokladu mnohorozměrného normálního rozdělení residuální složky modelu jsou odhady metodou maximální věrohodnosti a metodou nejmenších čtverců asymptoticky ekvivalentní a mají asymptoticky normální rozdělení.

## Verifikace modelu VAR

Ověření adekvátnosti zkonstruovaného modelu spočívá především v kontrole stacionarity. Postačující podmínkou stacionarity procesu VAR( $p$ ) je, že všechny převrácené hodnoty kořenů odhadnutého (maticového) autoregresního polynomu

$$\Phi(z) = \mathbf{I} - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p \quad (4.3)$$

leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině. (Cipra, 2008, sekce 12.2.)

Dále se zaměříme na diagnostiku časové nekorelovanosti v odhadnuté residuální složce, konkrétně pomocí Bartlettovy aproximace a  $k$ -rozměrné verze Q-testu (viz Cipra (2008, sekce 10.3.3, část 4.)), či pomocí LM-testu (viz Cipra (2008, sekce 5.4., část (3))). Jarque-Bera testem (viz Cipra (2008, sekce 3.6.2.)) pak můžeme testovat mnohorozměrnou normalitu odhadnuté residuální složky. Mezi často používané testy mnohorozměrného normálního rozdělení patří také Mardiuův (Mardia, 1970), Henzeův-Zirklerův (Henze a Zirkler, 1990) či Roystonův test (Royston, 1982). Verifikace modelu vektorové autoregrese je podrobně rozebrána také v sekci 2.7 knihy Tsay (2014).



## Počáteční transformace časové řady

Abychom dostali některé požadované vlastnosti, dochází v praxi často před samotným modelováním k transformaci analyzované časové řady. Využívá se například transformace spočívající ve vhodném diferencování časové řady, která z ní odstraní některé dekompoziční složky.

Častá je také Boxova-Coxova transformace, která homogenizuje rozptyl dané časové řady, transformuje její případné sešikmené rozdělení a model linearizuje. Boxova-Coxova transformace vícerozměrné časové řady  $\zeta_t$  spočívá v transformaci každé z jejích  $k$  složek  $\zeta_t^n$  do tvaru

$$\zeta_t^{n(v_n)} = \begin{cases} \frac{(\zeta_t^n + c_n)^{v_n} - 1}{v_n} & \text{pro } v_n \neq 0, \\ \ln(\zeta_t^n + c_n) & \text{pro } v_n = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

kde úrovněvý parametr  $c_n > 0$  volíme tak, aby  $\zeta_t^n + c_n > 0$ . K odhadu  $k$ -rozměrného vektoru typových parametrů  $v_n$  se využívá metoda maximální věrohodnosti (viz Box a Cox (1964)).

(Cipra, 2008, sekce 9.6.)

## Další možnosti modelování

K modelování vícerozměrné časové řady přítoků bychom alternativně mohli použít například vektorový autoregresní proces klouzavých součtů označovaný jako VARMA, který kromě autoregresních členů obsahuje navíc zpožděné hodnoty bílého šumu  $\varepsilon_t$  (viz Tsay (2014, sekce 3.5)).

Další možností je použití vektorového autoregresního modelu s vícerozměrnou exogenní proměnnou, tzv. VARX modely (viz Tsay (2014, sekce 6.3.1)). Exogenní proměnná by mohla například představovat úhrn srážek ve vybraných povodích vodohospodářské soustavy.

### 4.2.2 Cena elektrické energie na trhu jako multiplikativní sezónní proces

Jednorozměrnou časovou řadu  $\lambda_t$  představující hodinovou cenu elektrické energie na trhu budeme na základě historických dat, která máme k dispozici pro praktickou část práce, modelovat multiplikativním sezónním procesem řádu  $(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$  označovaným jako SARIMA. Konstrukce modelu SARIMA vychází z integrovaného smíšeného procesu ARIMA (viz Cipra (2008, sekce 10.4.2.)) modelujícího stochastický trend. Kromě stochastického modelování trendu lze však navíc stochasticky modelovat i sezónnost. Budeme uvažovat sezónnost v rámci dne, tj.  $s = 24$ .

Proces SARIMA řádu  $(p,d,q) \times (P,D,Q)_{24}$  modelující cenu elektřiny  $\lambda_t$  zapisujeme obecně jako

$$\phi(B)\Phi(B^{24})\Delta^d\Delta_{24}^D\lambda_t = \mu + \theta(B)\Theta(B^{24})\xi_t, \quad (4.5)$$

kde  $\mu$  značí absolutní člen,  $B$  je operátor časového posunu definovaný jako  $B\lambda_t = \lambda_{t-1}$ ,  $\Delta^d = (1 - B)^d$  značí  $d$ -tou diferenci a  $\Delta_{24} = 1 - B^{24}$  je sezónní diferencování

operátor, kdy speciálně  $\Delta_{24}^D = (1 - B^{24})^D$ . Diferencí  $\Delta^d$  eliminujeme z časové řady vliv lineárního trendu a sezónní diferencí  $\Delta_{24}^D$  eliminujeme sezónnost. Dále

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

je autoregresní operátor řádu  $p$ ,

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$$

je operátor klouzavých součtů řádu  $q$ ,

$$\Phi(B^{24}) = 1 - \Phi_1 B^{24} - \Phi_2 B^{24} - \dots - \Phi_P B^{24P}$$

je sezónní autoregresní operátor řádu  $P$  a

$$\Theta(B^{24}) = 1 + \Theta_1 B^{24} + \Theta_2 B^{24} + \dots + \Theta_Q B^{24Q}$$

je sezónní operátor klouzavých součtů řádu  $Q$ . Konečně  $\xi_t$  je residuální složka modelu ve formě bílého šumu, tj. jedná se o posloupnost nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním konečným rozptylem  $\sigma^2 > 0$ .

Model SARIMA je určen pro nestacionární časové řady  $\lambda_t$ , tj. řady nespĺňující předpoklad časové invariance pro střední hodnotu, rozptyl a autokorelační strukturu (viz (4.1)), které lze stacionarizovat diferencováním. Proces  $\Delta^d \Delta_{24}^D \lambda_t$  je stacionární, jestliže všechny převrácené hodnoty kořenů autoregresního polynomu

$$\phi(z)\Phi(z^{24}) = (1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p)(1 - \Phi_1 z^{24} - \Phi_2 z^{24} - \dots - \Phi_P z^{24P}) \quad (4.6)$$

leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině.

Další předpokládanou vlastností procesu je invertibilita. Existují-li parametry  $\pi_0, \pi_1, \pi_2 \dots$  takové, že proces (4.5) můžeme zapsat jako

$$\Delta^d \Delta_{24}^D \lambda_t = \pi_0 + \xi_t + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \Delta^d \Delta_{24}^D \lambda_{t-j},$$

pak říkáme, že je proces invertibilní. Postačující podmínkou invertibility procesu (4.5) je, že všechny převrácené hodnoty kořenů polynomu klouzavých součtů

$$\theta(z)\Theta(z^{24}) = (1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q)(1 + \Theta_1 z^{24} + \Theta_2 z^{24} + \dots + \Theta_Q z^{24Q}) \quad (4.7)$$

leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině. Vyjádření procesu v invertovatelném tvaru je užitečné zejména při konstrukci předpovědí.

*Poznámka.* Proces VAR( $p$ ) z předchozí sekce 4.2.1 je zřejmě invertibilní vždy, neboť (4.2) je již přímo zápis tohoto modelu v invertovaném tvaru.

(Cipra, 2008, sekce 10.5.)

## Stacionarizace diferencováním

Časovou řadu ceny elektrické energie na trhu stacionarizujeme vhodnou volbou diferencních operátorů  $\Delta^d \Delta_{24}^D$ . Možnost stacionarizace pomocí diferencování svědčí o přítomnosti (téměř) jednotkového kořenu, či vícenásobného jednotkového kořenu v autoregresním polynomu (4.6).

Pro pevně zvolený řád sezónní diference  $D$  můžeme příslušný řád diferencování  $d$  odhadnout například pomocí testů na jednotkový kořen. Častým testem na jednotkový kořen je rozšířený Dickeyův-Fullerův test, zkráceně ADF-test, testující nulovou hypotézu nestacionarity vůči alternativní hypotéze stacionarity (viz Cipra (2008, sekce 10.4.1., část 2.)). Pro testování opačných hypotéz, tedy nulové hypotézy stacionarity vůči alternativní hypotéze nestacionarity, byl navržen takzvaný KPSS-test (viz Cipra (2008, sekce 10.4.1., část 4.)). Doporučuje se pak provádět ADF-test a KPSS-test současně a za směrodatné brát zamítnutí nulové hypotézy ADF-testem při současném nezamítnutí nulové hypotézy KPSS-testem, či nezamítnutí nulové hypotézy ADF-testem při současném zamítnutí nulové hypotézy KPSS-testem. V prvním případě je potvrzena stacionarita, v druhém případě naopak nestacionarita. Zbylé dvě kombinace se považují za neprůkazné.

Doplňme, že přítomnost jednotkového kořene může také indikovat velmi pomalý pokles odhadnutého korelogramu od jednotkové hodnoty k nule.

(Cipra, 2008, sekce 10.4.1.)

### Identifikace řádu modelu SARIMA

Identifikace zbylých parametrů  $p$ ,  $q$ ,  $P$ ,  $Q$  modelu (4.5) na základě informačních kritérií probíhá analogicky jako v případě modelu VAR( $p$ ) z předchozí sekce 4.2.1. Odhad parametrů je založen na úloze

$$(\hat{p}, \hat{q}, \hat{P}, \hat{Q}) = \underset{\substack{u=0, \dots, U, v=0, \dots, V, \\ w=0, \dots, W, z=0, \dots, Z}}{\operatorname{argmin}} A(u, v, w, z),$$

kde  $A(u, v, w, z)$  je vhodně zvolené kritérium zkonstruované na základě odhadu modelu SARIMA( $u, d, v$ )  $\times$  ( $w, D, z$ )<sub>24</sub>, přičemž minimalizaci provádíme přes předem zvolenou síť hodnot  $u = 0, \dots, U$ ,  $v = 0, \dots, V$ ,  $w = 0, \dots, W$  a  $z = 0, \dots, Z$ . Za kritérium  $A(u, v, w, z)$  volíme nejčastěji Akaikeho informační kritérium

$$\operatorname{AIC}(h) = \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{2h}{T},$$

případně Bayesovo informační kritérium

$$\operatorname{BIC}(h) = \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{h \ln T}{T},$$

kde v obou případech značí  $\hat{\sigma}^2$  odhadnutý rozptyl residuální složky modelu SARIMA( $u, d, v$ )  $\times$  ( $w, D, z$ )<sub>24</sub>,  $T$  je počet pozorování dané časové řady, na jejichž základě je model odhadován, a  $h = u + v + w + z + 1$  je počet parametrů modelu, které je nutné odhadnout.

(Cipra, 2008, sekce 10.3.1.)

### Diagnostika modelu SARIMA

Při ověření adekvátnosti modelu (4.5) se opět zaměřujeme především na stacionaritu procesu. Podmínku stacionarity procesu jsme formulovali při zavedení autoregresního polynomu (4.6). Další možností kontroly stacionarity modelu je

analýza toho, jakou odezvu má v odhadnutém modelu standardizovaný impuls ve výši jednonásobku či vícenásobku odhadnuté směrodatné odchylky bílého šumu. Podmínku invertibility ověříme pomocí podmínky formulované při zavedení polynomu klouzavých součtů (4.7).

Dále kontrolujeme shodu korelační struktury odhadnuté z dat s korelační strukturou vypočtenou z odhadnutého modelu. Pro vypočtený bílý šum očekáváme nulovou střední hodnotu, homoskedasticitu neboli konstantní rozptyl, nekorelovanost a normalitu. Za předpokladu normality testujeme nekorelovanost vypočteného bílého šumu pomocí testu založeného na Bartlettově aproximaci. Další možností jsou Q-testy (viz Cipra (2008, sekce 10.3.3., část 4.)).

(Cipra, 2008, sekce 10.3.3.)

## Počáteční transformace časové řady

Stejně jako v předchozí části 4.2.1 můžeme před samotným modelováním časovou řadu  $\zeta_t$  nejprve transformovat. Boxovu-Coxovu transformaci konstruuje analogicky jako ve vícerozměrném případě podle vztahu (4.4).

## Další možnosti modelování

Multiplikativní sezónní model ceny elektrické energie na trhu bychom se mohli dále pokusit zlepšit přidáním exogenní vysvětlující proměnné. Hovoříme pak o takzvaných SARIMAX procesech. Vhodnou vysvětlující proměnnou by mohla být například teplota.

Pokud se model jeví jako nelineární a nelze jej linearizovat jednoduchou transformací, přistupujeme zpravidla k nelineárním modelům časových řad. Speciálně lineární modely nejsou často schopny zohlednit některé typické vlastnosti časových řad. Zmíňme například autoregresní model podmíněné heteroskedasticity označovaný jako ARCH (viz Cipra (2008, sekce 11.2.4.)), či jeho zobecnění na model GARCH (viz Cipra (2008, sekce 11.2.5.)).

## 4.3 Konstrukce scénářů

Scénáře vnějších přítoků a ceny elektřiny konstruuje pro optimalizační horizont  $t \in \tau$ ,  $\tau = \{1, \dots, T\}$  krátkodobé úlohy řízení vodohospodářské soustavy. Budeme předpokládat, že máme k dispozici historická data až do času  $t = 0$ , na jejichž základě odhadneme vektorový autoregresní model přítoků (4.2), respektive multiplikativní sezónní model ceny elektřiny (4.5).

Budeme chtít zkonstruovat celkem  $S$  scénářů vnějších přítoků soustavy, které označíme jako

$$\zeta^s = \{\zeta_t^s, t \in \tau\}, s = 1, \dots, S.$$

Jednotlivým scénářům  $\zeta^s$  pak přiřadíme pravděpodobnosti  $p_s > 0$ ,  $s = 1, \dots, S$ ,  $\sum_{s=1}^S p_s = 1$ . Hodnotu  $s$ -tého scénáře v čase  $t$  pro nádrž  $n \in \mathcal{N}^r$ , tj. prvek vektoru  $\zeta_t^s$ , budeme značit  $\zeta_t^{n,s}$ . Analogicky označíme

$$\lambda^r = \{\lambda_t^r, t \in \tau\}, r = 1, \dots, R$$

celkem  $R$  scénářů ceny elektrické energie na trhu, každý s pravděpodobností  $q_r > 0$ ,  $r = 1, \dots, R$ ,  $\sum_{r=1}^R q_r = 1$ .

Zavedme dále symbol  $\hat{y}_t(t-1)$ , kterým budeme značit předpověď hodnoty  $y_t$  konstruovanou v čase  $t-1$ , tj. jedná se o předpověď z času  $t-1$  o jeden krok dopředu.

### 4.3.1 Scénáře vnějších přítoků soustavy

Ke konstrukci scénáře vnějších přítoků  $\zeta^s = \{\zeta_t^s, t \in \tau\}$  pro pevné  $s$  využijeme vektorový autoregresní proces (4.2) časové řady  $\zeta_t$ , jehož řád jsme odhadli jako  $\hat{p}$ . Budeme předpokládat, že residuální složka modelu  $\varepsilon_t$  má mnohorozměrné normální rozdělení  $\mathbf{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ .

Vyjdeme ze vztahu pro predikci modelu VAR( $\hat{p}$ ) o jeden krok dopředu. Na základě modelu (4.2) můžeme vzhledem k linearitě předpovědi psát

$$\hat{\zeta}_t(t-1) = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 \hat{\zeta}_{t-1}(t-1) + \dots + \hat{\Phi}_{\hat{p}} \hat{\zeta}_{t-\hat{p}}(t-1) + \hat{\varepsilon}_t(t-1),$$

kde parametry  $\hat{\Phi}_0, \hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_{\hat{p}}$  jsme odhadli z historických dat. Zřejmě platí

$$\hat{\varepsilon}_t(t-1) = 0,$$

$$\hat{\zeta}_{t-j}(t-1) = \zeta_{t-j} \text{ pro } j \geq 1.$$

Základní vztah pro výpočet předpovědi hodnoty  $\zeta_t$  v čase  $t-1$  je tedy

$$\hat{\zeta}_t(t-1) = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 \zeta_{t-1} + \dots + \hat{\Phi}_{\hat{p}} \zeta_{t-\hat{p}}. \quad (4.8)$$

Scénář  $\zeta^s$  pak generujeme postupně, přičemž v čase  $t-1$  zkonstruujeme  $\zeta_t^s$  jako

$$\zeta_t^s = \hat{\zeta}_t(t-1) + \hat{\varepsilon}_t^s,$$

kde  $\hat{\varepsilon}_t^s$  je náhodně vygenerovaná realizace z mnohorozměrného normálního rozdělení  $\mathbf{N}(\mathbf{0}, \hat{\Sigma})$ , přičemž  $\hat{\Sigma}$  je odhad varianční matice residuální složky modelu (4.2). V dalším kroku, tj. v čase  $t$ , za realizaci  $\zeta_t$  považujeme prvek scénáře  $\zeta_t^s$ .

Celý postup konstrukce scénáře  $\zeta^s$  můžeme shrnout do vzorce

$$\zeta_t^s = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 \zeta_{t-1}^s + \dots + \hat{\Phi}_{\hat{p}} \zeta_{t-\hat{p}}^s + \hat{\varepsilon}_t^s \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.9)$$

přičemž počáteční hodnoty  $\zeta_{1-\hat{p}}^s, \dots, \zeta_0^s$  položíme rovny posledním  $\hat{p}$  známým historickým hodnotám  $\zeta_{1-\hat{p}}, \dots, \zeta_0$ .

*Poznámka.* Byla-li před samotným modelováním původní časová řada transformována, je na závěr nutné provést příslušnou inverzní transformaci zkonstruovaných scénářů.

### 4.3.2 Scénáře ceny elektrické energie na trhu

Ke konstrukci scénáře ceny elektřiny  $\lambda^r = \{\lambda_t^r, t \in \tau\}$  pro pevné  $r$  využijeme multiplikativní sezónní proces (4.5) časové řady  $\lambda_t$ , jehož řád odhadneme jako  $(\hat{p}, \hat{d}, \hat{q}) \times (\hat{P}, \hat{D}, \hat{Q})_{24}$ . Budeme předpokládat, že residuální složka modelu  $\xi_t$  má normální rozdělení  $N(0, \sigma^2)$ .

Vyjdeme opět ze vztahu pro predikci o jeden krok dopředu, tentokrát procesu SARIMA( $\widehat{p}, \widehat{d}, \widehat{q}$ )  $\times$  ( $\widehat{P}, \widehat{D}, \widehat{Q}$ )<sub>24</sub>. Na základě modelu (4.5) můžeme vzhledem k linearitě předpovědi psát

$$\widehat{\phi}(B)\widehat{\Phi}(B^{24})\Delta^{\widehat{d}}\Delta_{24}^{\widehat{D}}\widehat{\lambda}_t(t-1) = \widehat{\mu} + \widehat{\theta}(B)\widehat{\Theta}(B^{24})\widehat{\xi}_t(t-1), \quad (4.10)$$

kde nyní operátor časového posunu  $B$  chápeme jako  $B\widehat{y}_t(t-1) = \widehat{y}_{t-1}(t-1)$  a dále

$$\widehat{\phi}(B) = 1 - \widehat{\phi}_1 B - \dots - \widehat{\phi}_{\widehat{p}} B^{\widehat{p}},$$

$$\widehat{\theta}(B) = 1 + \widehat{\theta}_1 B + \dots + \widehat{\theta}_{\widehat{q}} B^{\widehat{q}},$$

$$\widehat{\Phi}(B^{24}) = 1 - \widehat{\Phi}_1 B^{24} - \widehat{\Phi}_2 B^{24} - \dots - \widehat{\Phi}_{\widehat{P}} B^{24\widehat{P}},$$

$$\widehat{\Theta}(B^{24}) = 1 + \widehat{\Theta}_1 B^{24} + \widehat{\Theta}_2 B^{24} + \dots + \widehat{\Theta}_{\widehat{Q}} B^{24\widehat{Q}}.$$

Parametry  $\widehat{\mu}, \widehat{\phi}_1, \dots, \widehat{\phi}_{\widehat{p}}, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_{\widehat{q}}, \widehat{\Phi}_1, \dots, \widehat{\Phi}_{\widehat{P}}, \widehat{\Theta}_1, \dots, \widehat{\Theta}_{\widehat{Q}}$  jsme odhadli z historických dat. Jelikož platí

$$\widehat{\lambda}_{t-j}(t-1) = \lambda_{t-j} \text{ pro } j \geq 1,$$

$$\widehat{\xi}_{t-j}(t-1) = \begin{cases} 0 & \text{pro } j = 0, \\ \xi_{t-j} = \Delta^{\widehat{d}}\Delta_{24}^{\widehat{D}}\lambda_{t-j} - \Delta^{\widehat{d}}\Delta_{24}^{\widehat{D}}\widehat{\lambda}_{t-j}(t-j-1) & \text{pro } j \geq 1, \end{cases}$$

je (4.10) základním vztahem pro výpočet předpovědi hodnoty  $\lambda_t$  v čase  $t-1$ . (Cípra, 2008, sekce 10.6.)

Scénář  $\lambda^r$  pak generujeme postupně, přičemž v čase  $t-1$  zkonstruujeme  $\lambda_t^r$  jako

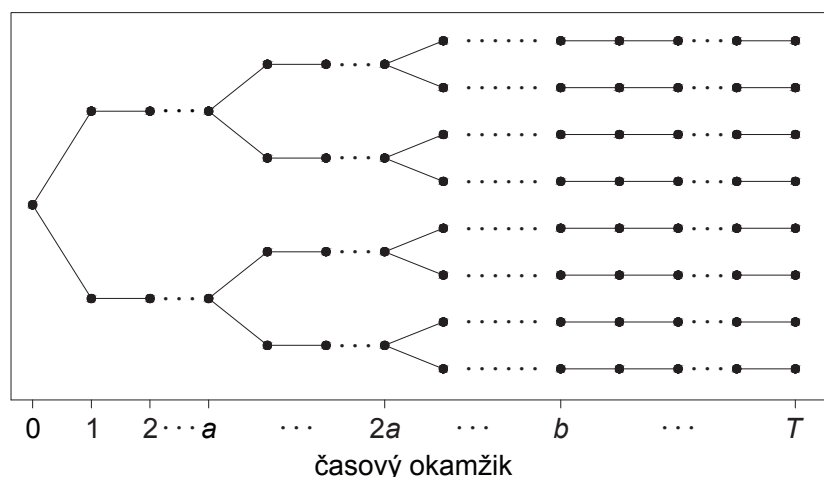
$$\lambda_t^r = \widehat{\lambda}_t(t-1) + \widehat{\xi}_t^r, \quad (4.11)$$

kde  $\widehat{\xi}_t^r$  je náhodně vygenerovaná realizace z normálního rozdělení  $N(0, \widehat{\sigma}^2)$ , přičemž  $\widehat{\sigma}^2$  je odhad rozptylu residuální složky modelu (4.5). V dalším kroku, tj. v čase  $t$ , pak za realizaci  $\lambda_t$  považujeme prvek scénáře  $\lambda_t^r$ . Počáteční hodnoty ceny elektřiny pro predikci položíme rovny potřebnému počtu posledních známých historických hodnot. Počáteční hodnoty residuální složky klademe obvykle rovny nule.

*Poznámka.* Byla-li před samotným modelováním původní časová řada transformována, je na závěr nutné provést příslušnou inverzní transformaci zkonstruovaných scénářů.

### 4.3.3 Scénářový strom

V předchozích částech 4.3.1 a 4.3.2 jsme pro pevné  $s$ , respektive  $r$  zkonstruovali scénář přítoků  $\zeta^s = \{\zeta_t^s, t \in \tau\}$  a scénář ceny elektřiny na trhu  $\lambda^r = \{\lambda_t^r, t \in \tau\}$ . V každém kroku konstrukce (4.9), respektive (4.11) můžeme zřejmě náhodně vygenerovat více realizací  $\widehat{\varepsilon}_t^s$ , respektive  $\widehat{\xi}_t^r$  a dosud konstruovaný scénář tak rozvést na více scénářů. Postupným větvením dostáváme požadovaný počet scénářů vnějších přítoků  $\zeta^1, \dots, \zeta^S$ , respektive scénářů ceny elektřiny  $\lambda^1, \dots, \lambda^R$ .



Obrázek 4.1: Scénářový strom pro konstrukci scénářů pítoků a ceny elektrické energie na trhu

Množina všech scénářů spolu s příslušnými pravděpodobnostmi pak tvoří takzvaný scénářový strom.

Scénářový strom může být reprezentován orientovaným grafem začínajícím v jediném uzlu v úrovni 0, který se větví do uzlů úrovně 1. Větvení pak pokračuje až do úrovně  $T$ , přičemž uzly úrovně  $t$ ,  $t = 1, \dots, T$  představují možné realizace příslušného náhodného vektoru, či náhodné veličiny v čase  $t$ . Volba struktury scénářového stromu závisí často na konkrétním reálném problému, povaze dat i softwarových možnostech.

Pro účely práce zvolíme pro konstrukci scénářů pítoků a ceny elektřiny stejný vícestupňový vyvážený binární strom, jehož schéma je zobrazeno na obrázku 4.1. Předpokládáme, že jednotlivé větve scénářového stromu jsou stejně pravděpodobné. Uzel v úrovni 0 představuje poslední známou realizaci  $\zeta_0$  z historických dat, uzly v úrovni  $t$ ,  $t = 1, \dots, T$  představují všechny vygenerované realizace náhodného vektoru  $\zeta_t$  v čase  $t$ . Analogicky bychom interpretovali scénářový strom ceny elektřiny  $\lambda_t$ .

Z obrázku 4.1 je patrné, že v každém  $a$ -tém okamžiku probíhá větvení jednoho scénáře na dvě různé větve a to až do okamžiku  $b$ . Dále již k větvení nedochází. V čase  $t \leq b$ , máme tedy zkonstruovaných  $2^{\lceil t/a \rceil}$  scénářů, kde  $\lceil t/a \rceil$  značí horní celou část. V časech  $t = b + 1, \dots, T$  máme pak již konečný počet  $2^{\lceil b/a \rceil}$  scénářů.

## 4.4 Přepis úlohy stochastického programování pomocí scénářů

### 4.4.1 Aproximace pravděpodobnostního rozdělení ceny elektrické energie

Vraťme se nyní k sestavené úloze řízení vodohospodářské soustavy (2.22) formulované v sekci 2.4 druhé kapitoly. Připomeňme, že předpokládáme, že jsou vnější pítoky na ceně elektřiny nezávislé. Pravděpodobnostní rozdělení náhodné

ceny elektřiny  $\lambda_t$  aproximujeme konečným počtem scénářů  $\lambda_t^r$ ,  $r = 1, \dots, R$  s pravděpodobnostmi  $q_r$ ,  $r = 1, \dots, R$ ,  $\sum_{r=1}^R q_r = 1$ . Střední hodnotu náhodné veličiny  $\lambda_t$  vyskytující se pouze v účelové funkci úlohy (2.22) pak můžeme dle definice psát jako

$$\mathbb{E}(\lambda_t) = \sum_{r=1}^R q_r \lambda_t^r \quad \forall t \in \tau. \quad (4.12)$$

#### 4.4.2 Aproximace pravděpodobnostního rozdělení vnějších přítoků

Pravděpodobnostní rozdělení  $|\mathcal{N}^r|$ -rozměrného náhodného vektoru přítoků  $\zeta_t$  aproximujeme konečným počtem scénářů  $\zeta_t^s$ ,  $s = 1, \dots, S$  s pravděpodobnostmi  $p_s$ ,  $s = 1, \dots, S$ ,  $\sum_{s=1}^S p_s = 1$ . Připomeňme, že prvek vektoru  $\zeta_t^s$  značíme  $\zeta_t^{n,s}$ .

Náhodné přítoky se v úloze (2.22) nachází v podmínce rovnováhy (2.6), ve sdruženém pravděpodobnostním omezení (2.10) a v kategorizování očekávaného konečného objemu vody v nádrži (2.18). Podmínku rovnováhy (2.6) v závislosti na scénářích přítoků přeformulujeme pro všechna  $n \in \mathcal{N}^r$  do tvaru

$$\begin{aligned} V^{n,s}(t) = & V^n(0) - \sum_{u=1}^t s_D^n(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \left( x_0^m(u - D_m) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[m]} x^i(u - D_m) \right. \\ & \left. - s_R^m(u - D_m + R_m) \right) \Delta - \sum_{u=1}^t \left( x_0^n(u) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(u) \right) \Delta \\ & + \sum_{u=1}^t \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[n]} y^i(u) \Delta - \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[m]} y^i(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \zeta_u^{n,s} \Delta \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S,$$

kde  $V^{n,s}(t)$  značí objem vody v nádrži  $n \in \mathcal{N}^r$  v čase  $t \in \tau$  při realizaci  $s$ -tého scénáře přítoků.

Podmínky uvnitř sdruženého pravděpodobnostního omezení (2.10) můžeme v závislosti na scénářích přítoků formulovat jako

$$V_{min}^n(t) \leq V^{n,s}(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S, \quad (4.14)$$

$$V^{n,s}(t) \leq V_{max}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S, \quad (4.15)$$

$$V_{min}^c(t) \leq \sum_{n \in \mathcal{N}(c) \cap \mathcal{N}^r} V^{n,s}(t) + \sum_{n \in \mathcal{N}(c) \cap (\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r)} V^n(t) \quad (4.16)$$

$$\forall c \in \mathcal{C}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S.$$

Programování se sdruženým pravděpodobnostním omezením převedeme na smíšený celočíselný problém pomocí takzvané „big M“ formulace, kterou lze najít například v článku Reich (2013). Zavedme pro každé  $s = 1, \dots, S$  pomocnou binární proměnnou  $w^s$ , kterou definujeme jako



$$w^s = \begin{cases} 1 & \text{jsou-li pro pevný scénář } s \text{ splněny podmínky (4.14),(4.15) a (4.16),} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Sdružené pravděpodobnostní omezení (2.10) pak zapíšeme jako smíšené celočíselné omezení tvaru

$$\begin{aligned} V_{min}^n(t) &\leq V^{n,s}(t) + M_{min}(1 - w^s) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S, \\ V^{n,s}(t) &\leq V_{max}^n(t) + M_{max}(1 - w^s) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S, \\ V_{min}^c(t) &\leq \sum_{n \in \mathcal{N}(c) \cap \mathcal{N}^r} V^{n,s}(t) + \sum_{n \in \mathcal{N}(c) \cap (\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r)} V^n(t) + M(1 - w^s) \\ &\quad \forall c \in \mathcal{C}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S, \\ \sum_{s=1}^S p_s w^s &\geq \alpha, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$w^s \in \{0,1\} \quad \forall s = 1, \dots, S,$$

kde  $M_{min}$ ,  $M_{max}$  a  $M$  jsou dané dostatečně velké konstanty (odtud název formulace „big M“). Z vyjádření (4.17) a interpretace binární proměnné  $w^s$  je patrné, že konstanta  $M_{min}$ , respektive  $M_{max}$ , respektive  $M$  by měla být zvolena tak, abychom v případě, že  $w^s$  je nulové, nepřišli o žádné přípustné řešení. Předpokládáme tedy

$$\begin{aligned} M_{min} &\geq \max_{\substack{s=1, \dots, S, \\ n \in \mathcal{N}^r, t \in \tau}} \sup_{\substack{x^i(t) \geq 0, \\ x_0^n(t) \geq 0, \\ y^i(t) \geq 0}} \{V_{min}^n(t) - V^{n,s}(t)\}, \\ M_{max} &\geq \max_{\substack{s=1, \dots, S, \\ n \in \mathcal{N}^r, t \in \tau}} \sup_{\substack{x^i(t) \geq 0, \\ x_0^n(t) \geq 0, \\ y^i(t) \geq 0}} \{V^{n,s}(t) - V_{max}^n(t)\}, \\ M &\geq \max_{\substack{s=1, \dots, S, \\ c \in \mathcal{C}^r, t \in \tau}} \sup_{\substack{x^i(t) \geq 0, \\ x_0^n(t) \geq 0, \\ y^i(t) \geq 0}} \left\{ V_{min}^c(t) - \sum_{n \in \mathcal{N}(c) \cap \mathcal{N}^r} V^{n,s}(t) - \sum_{n \in \mathcal{N}(c) \cap (\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r)} V^n(t) \right\}. \end{aligned}$$

Podmínky uvnitř pravděpodobnostního omezení (2.10) máme nyní splněny s pravděpodobností  $\sum_{s=1}^S p_s w^s$ . Požadavek v rovnici (4.17) na nerovnost

$$\sum_{s=1}^S p_s w^s \geq \alpha$$

nám tedy zaručí, že jsou tyto podmínky skutečně splněny s pravděpodobností alespoň  $\alpha$ .

Pro přepis kategorizování očekávaného konečného objemu vody v nádrži (2.18) je nejprve nutné vyjádřit střední hodnotu náhodné veličiny  $V^n(T)$ ,  $n \in \mathcal{N}^r$ , tj.

střední hodnotu náhodné veličiny  $\sum_{u=1}^T \zeta_u^n$  představující celkový vnější přítok nádrže  $n$  za uvažované optimalizační období. Zřejmě by mohla nastat situace, kdy se jednotlivé realizace dvou různých scénářů přítoků nádrže nasčítají přes optimalizační horizont na stejnou hodnotu. Označme za tímto účelem pro každé  $n \in \mathcal{N}^r$  počet všech navzájem různých realizací náhodné veličiny  $\sum_{u=1}^T \zeta_u^n$  jako  $S^n \leq S$ . V případě, že pro  $n \in \mathcal{N}^r$  platí  $\sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s_1} \neq \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s_2}$  pro všechna  $s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\}$ ,  $s_1 \neq s_2$ , je zřejmě  $S^n = S$ . Přeuspořádáme-li scénáře  $s = 1, \dots, S$  tak, že prvních  $S^n$  scénářů obsahuje všechny navzájem různé realizace náhodné veličiny  $\sum_{u=1}^T \zeta_u^n$ , můžeme podle definice střední hodnoty psát

$$\mathbb{E} \left( \sum_{u=1}^T \zeta_u^n \right) = \sum_{s=1}^{S^n} p_T^{n,s} \left( \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s} \right) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \quad (4.18)$$

kde  $p_T^{n,s} > 0$ ,  $n \in \mathcal{N}^r$ ,  $s = 1, \dots, S^n$ ,  $\sum_{s=1}^{S^n} p_T^{n,s} = 1$  značí marginální pravděpodobnost náhodné veličiny  $\sum_{u=1}^T \zeta_u^n$ , kterou spočteme z definice jako

$$\begin{aligned} p_T^{n,s} &= \mathbb{P} \left\{ \sum_{u=1}^T \zeta_u^n = \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s} \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^{S^{\mathcal{N}}} \mathbb{P} \left\{ \sum_{u=1}^T \zeta_u^n = \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s}, \sum_{u=1}^T \zeta_u^m = \sum_{u=1}^T \zeta_u^{m,j} \quad \forall m \in \mathcal{N}^r \setminus \{n\} \right\}. \end{aligned}$$

Hodnota  $S^{\mathcal{N}}$  z definice marginální pravděpodobnosti  $p_T^{n,s}$  značí počet všech navzájem různých realizací náhodného vektoru veličin  $\sum_{u=1}^T \zeta_u^n$ ,  $n \in \mathcal{N}^r$ .

Zvolme nyní pevný scénář  $s \in \{1, \dots, S\}$  a pevnou nádrž  $n \in \mathcal{N}^r$ . Všimněme si, že platí následující. Je-li  $\sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s} \neq \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s_1}$  pro každé  $s_1 \in \{1, \dots, S\} \setminus \{s\}$ , pak

$$p_T^{n,s} = p_s. \quad (4.19)$$

Existují-li však navzájem různé scénáře  $s_1, \dots, s_k \in \{1, \dots, S\} \setminus \{s\}$  takové, že  $\sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s} = \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s_1} = \dots = \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s_k}$  a  $\sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s} \neq \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s_l}$  pro každé  $s_l \in \{1, \dots, S\} \setminus \{s, s_1, \dots, s_k\}$ , pak

$$p_T^{n,s} = p_s + p_{s_1} + p_{s_2} + \dots + p_{s_k}. \quad (4.20)$$

Vztah (4.18) můžeme proto dále psát jako

$$\mathbb{E} \left( \sum_{u=1}^T \zeta_u^n \right) = \sum_{s=1}^{S^n} p_T^{n,s} \left( \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s} \right) = \sum_{s=1}^S p_s \left( \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s} \right) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r,$$

přičemž v poslední rovnosti využíváme vztahů (4.19) a (4.20).

Pro střední hodnotu náhodné veličiny  $V^n(T)$ ,  $n \in \mathcal{N}^r$  pak platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E} V^n(T) &= V^n(0) - \sum_{u=1}^T s_D^n(u) \Delta + \sum_{u=1}^T \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \left( x_0^m(u - D_m) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in \sigma_{\tau}^{-1}[m]} x^i(u - D_m) - s_R^m(u - D_m + R_m) \right) \Delta - \sum_{u=1}^T \left( x_0^n(u) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(u) \Big) \Delta + \sum_{u=1}^T \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[n]} y^i(u) \Delta - \sum_{u=1}^T \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[m]} y^i(u) \Delta \\
& + \sum_{s=1}^S p_s \left( \sum_{u=1}^T \zeta_u^{n,s} \right) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Jelikož je  $\sum_{s=1}^S p_s = 1$  můžeme s využitím vztahu (4.13) zapsat rovnost (4.21) v jednoduchém tvaru

$$E(V^n(T)) = \sum_{s=1}^S p_s V^{n,s}(T) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r.$$

Podmínku (2.18) na kategorizování objemu vody v nádrži pak formulujeme jednoduše jako

$$\sum_{i=1}^{K_n} z_i^n = \sum_{s=1}^S p_s V^{n,s}(T) - V_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N}^r. \tag{4.22}$$

### 4.4.3 Úloha řízení vodohospodářské soustavy s aproximační náhodné složky pomocí scénářů

Stochastickou úlohu se sdruženým pravděpodobnostním omezením (2.22) formulovanou v sekci 2.4 převedeme pomocí podmínek (4.12), (4.13), (4.17) a (4.22) na deterministickou úlohu smíšeného celočíselného lineárního programování tvaru

$$\max \sum_{t \in \tau} \Delta \left( \sum_{r=1}^R q_r \lambda_t^r \right) \left( \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t) - \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^i(t)} y^i(t) \right) - \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{K_n} W_i^n (z_{0,i}^n - z_i^n) \tag{4.23}$$

za podmínek  $u^i(t) \underline{x}^i \leq x^i(t) \leq u^i(t) \bar{x}^i \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau,$

$$v^i(t) \underline{y}^i \leq y^i(t) \leq v^i(t) \bar{y}^i \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau,$$

$$0 \leq x_0^n(t) \leq \bar{x}_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau,$$

$$u^i(t) + v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t) \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{R}, \forall t \in \tau,$$

$$\underline{f}^n(t) \leq x_0^n(t) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(t) \leq \bar{f}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau,$$

$$\begin{aligned}
V^n(t) = & V^n(0) - \sum_{u=1}^t s_D^n(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \left( x_0^m(u - D_m) \right. \\
& \left. + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[m]} x^i(u - D_m) - s_R^m(u - D_m + R_m) \right) \Delta \\
& - \sum_{u=1}^t \left( x_0^n(u) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(u) \right) \Delta + \sum_{u=1}^t \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[n]} y^i(u) \Delta
\end{aligned}$$

$$- \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[m]} y^i(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \zeta_u^n \Delta$$

$$\forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau,$$

$$\begin{aligned} V^{n,s}(t) = & V^n(0) - \sum_{u=1}^t s_D^n(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \left( x_0^m(u - D_m) \right. \\ & \left. + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[m]} x^i(u - D_m) - s_R^m(u - D_m + R_m) \right) \Delta \\ & - \sum_{u=1}^t \left( x_0^n(u) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(u) \right) \Delta + \sum_{u=1}^t \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[n]} y^i(u) \Delta \\ & - \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[m]} y^i(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \zeta_u^{n,s} \Delta \\ & \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S, \end{aligned}$$

$$V_{\min}^n(t) \leq V^n(t) \leq V_{\max}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau,$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \geq V_{\min}^c(t) \quad \forall c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^r, \forall t \in \tau,$$

$$V_{\min}^n(t) \leq V^{n,s}(t) + M_{\min} (1 - w^s) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S,$$

$$V^{n,s}(t) \leq V_{\max}^n(t) + M_{\max} (1 - w^s) \quad \forall n \in \mathcal{N}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S,$$

$$\begin{aligned} V_{\min}^c(t) \leq & \sum_{n \in \mathcal{N}(c) \cap \mathcal{N}^r} V^{n,s}(t) + \sum_{n \in \mathcal{N}(c) \cap (\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r)} V^n(t) + M (1 - w^s) \\ & \forall c \in \mathcal{C}^r, \forall t \in \tau, \forall s = 1, \dots, S, \end{aligned}$$

$$\sum_{s=1}^S p_s w^s \geq \alpha,$$

$$0 \leq z_i^n \leq V_i^n - V_{i-1}^n \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall i = 1, \dots, K_n,$$

$$\sum_{i=1}^{K_n} z_i^n = V^n(T) - V_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^r,$$

$$\sum_{i=1}^{K_n} z_i^n = \sum_{s=1}^S p_s V^{n,s}(T) - V_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N}^r,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t) - \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^j(t)} y^j(t) \leq & \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) \bar{x}^i - \sum_{i \in \mathcal{R}} v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t) \cdot \\ & \cdot \rho^i(t) \bar{x}^i - P \quad \forall t \in \tau, \end{aligned}$$

$$x^i(t) \geq 0, u^i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau,$$

$$y^i(t) \geq 0, v^i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_P, \forall t \in \tau,$$

$$w^s \in \{0,1\} \quad \forall s = 1, \dots, S.$$

Jednotlivá omezení úlohy (4.23) jsou dle pořadí: podmínky (2.1),(2.2) a (2.3) na řízení soustavy, podmínka (2.4) na odtok vody z nádrže, podmínka rovnováhy (2.6) pro nádrže s deterministickým přítokem, podmínka rovnováhy (4.13) v závislosti na scénářích pro nádrže s náhodným přítokem, podmínky (2.7) a (2.9) na omezení objemu vody v nádržích s deterministickým přítokem, přepis (4.17) sdruženého pravděpodobnostního omezení, společné podmínky na kategorie (2.16), kategorizování objemu vody v nádrži s deterministickým přítokem (2.17), přepis kategorizování objemu vody v nádrži s náhodným přítokem (4.22) a podmínky podpůrné služby (2.20).



# Kapitola 5

## Sezónní deterministická úloha oceňování vody

V následující kapitole zformulujeme jednoduchý sezónní deterministický model pro ocenění vody uskladněné v jednotlivých nádržích. Vyjdeme z úlohy řízení vodohospodářské soustavy (2.22), kterou vhodně agregujeme. Ceny vody v nádržích soustavy pak odhadneme jako duální proměnné k rovnicím rovnováhy.

### 5.1 Agregace úlohy řízení vodohospodářské soustavy

#### 5.1.1 Volba kroku a optimalizačního horizontu

Navážme na problém oceňování vody uskladněné v nádrži z části 2.2.7 druhé kapitoly. Připomeňme, že pro jednoduchost předpokládáme, že rozmezí jednotlivých homogenních časových okamžiků sezónního modelu oceňování je větší než optimalizační horizont krátkodobého modelu řízení. To nám umožní odhadnout cenu vody v závislosti na čase, přičemž její začlenění do úlohy řízení vodohospodářské soustavy (2.22) již formulujeme bez uvažování časové závislosti.

Krátkodobou úlohu řízení vodohospodářské soustavy budeme v praktické části práce uvažovat s optimalizačním horizontem dvou dnů a s hodinovým krokem. Krátkodobé řízení pak budeme řešit v rámci jednoho týdne. Sezónní model proto zformulujeme s týdenním krokem  $t \in \tau$ , tj. položíme  $\Delta = 168$  hodin. Uvažujeme tedy týdenní ceny vody uskladněné v jednotlivých nádržích. Poslední optimalizační týden  $T$  je pak obdobím, ve kterém se zabýváme krátkodobou úlohou řízení vodohospodářské soustavy.

Časová zpoždění  $D_m$ , respektive  $R_n$  představující počet časových okamžiků, za které voda proteče přes turbíny výše položené nádrže  $m$  do nádrže pod ní, respektive do místa na toku pod nádrží  $n$ , kde probíhá odběr, zřejmě nemá smysl při týdenním kroku uvažovat.

#### Hydrologický režim odtoku vodohospodářské soustavy

Optimalizační časový horizont sezónního modelu se pohybuje zpravidla od tří do osmnácti měsíců. Budeme předpokládat, že časový horizont je roven délce hydrologického cyklu vodohospodářské soustavy. Počáteční objem vody v každé

nádrži je pak přibližně roven objemu vody v této nádrži v posledním optimačním týdnu. Za tímto účelem zavedeme pro každé  $n \in \mathcal{N}$  interval  $\langle \underline{V}_T^n, \overline{V}_T^n \rangle$ , ve kterém se zpravidla pohybuje objem nádrže  $n$  v týdnu  $T$  hydrologického cyklu soustavy. Předpokládáme pak, že počáteční a koncový objem vody v každé nádrži leží v zavedeném intervalu, což formulujeme jako podmínku

$$\begin{aligned} \underline{V}_T^n &\leq V^n(0) \leq \overline{V}_T^n \quad \forall n \in \mathcal{N}, \\ \underline{V}_T^n &\leq V^n(T) \leq \overline{V}_T^n \quad \forall n \in \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Počáteční objem vody  $V^n(0)$  tedy nyní na rozdíl od úlohy řízení neuvažujeme jako předem danou konstantu, ale jako proměnnou. Zřejmě očekáváme, že

$$\langle \underline{V}_T^n, \overline{V}_T^n \rangle \subseteq \langle V_{min}^n(T), V_{max}^n(T) \rangle. \quad (5.2)$$

Jelikož budeme za účelem ocenění jednotlivých kategorií vody v nádrži řešit sezónní model pro různé volby  $V_{max}^n(t)$ ,  $t \in \tau$  a  $V_{min}^n(t)$ ,  $t \in \tau$ , přidáme omezení (5.2) přímo do podmínky (5.1). Dostáváme tak podmínku sezónní rovnováhy tvaru

$$\begin{aligned} \max \{ \underline{V}_T^n, V_{min}^n(T) \} &\leq V^n(0) \leq \min \{ \overline{V}_T^n, V_{max}^n(T) \} \quad \forall n \in \mathcal{N}, \\ \underline{V}_T^n &\leq V^n(T) \leq \overline{V}_T^n \quad \forall n \in \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Omezení  $V_{min}^n(T) \leq V^n(T) \leq V_{max}^n(T)$  není nutné do sezónní rovnováhy (5.3) zahrnovat, neboť je již součástí podmínky (2.7), která zde platí  $\forall n \in \mathcal{N}$  (viz sekce 5.1.3 dále).

### 5.1.2 Řízení turbín a přečerpávacích stanic

Z hlediska nutnosti agregace úlohy řízení vodohospodářské soustavy je zřejmě volba týdenního kroku vhodná. Některé podmínky úlohy (2.22) však v týdenní formulaci postrádají smysl. Konkrétně se jedná o podmínky řízení (2.1), (2.2), (2.3) a podmínku podpurných služeb (2.20). Pokud bychom totiž uvažovali řízení turbín, respektive přečerpávacích stanic v týdenním kroku, každá turbína, respektive stanice by byla buď celý týden v provozu, nebo mimo provoz, což není v praxi reálné.

I přes týdenní agregaci modelu budeme proto uvažovat řízení turbín, spodních výpustí a přečerpávacích stanic v hodinovém kroku, tedy v kroku krátkodobé úlohy řízení. Za tímto účelem zavedeme pro každé  $t \in \tau$  a  $h = 1, \dots, \Delta$  veličiny  $x^i(t, h)$ ,  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ , respektive  $y^i(t, h)$ ,  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$ , respektive  $x_0^n(t, h)$ ,  $n \in \mathcal{N}$  představující průtok turbínou  $g^i$ , respektive stanicí  $p^i$ , respektive spodními výpustmi nádrže  $n$  v hodině  $h$  týdne  $t$ . Analogicky pak pro každé  $t \in \tau$  a  $h = 1, \dots, \Delta$  zobecníme binární proměnnou  $u^i(t, h)$ ,  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ , respektive  $v^i(t, h)$ ,  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$  indikující provoz turbíny  $g^i$ , respektive stanice  $p^i$  v hodině  $h$  týdne  $t$ . Podmínky řízení pak formulujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} u^i(t, h) \underline{x}^i &\leq x^i(t, h) \leq u^i(t, h) \overline{x}^i \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta, \\ v^i(t, h) \underline{y}^i &\leq y^i(t, h) \leq v^i(t, h) \overline{y}^i \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta, \\ 0 &\leq x_0^n(t, h) \leq \overline{x}_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta, \\ u^i(t, h) + v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t, h) &\leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{R}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta. \end{aligned} \quad (5.4)$$



V hodinovém kroku budeme uvažovat i podmínku podpůrné služby (2.20), kterou přepíšeme do tvaru

$$\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t, h) - \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^j(t)} y^j(t, h) \leq \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) \bar{x}^i - \sum_{i \in \mathcal{R}} v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t, h) \rho^i(t) \bar{x}^i - P$$

$$\forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta.$$
(5.5)

Zbylé podmínky úlohy (2.4), (2.6), (2.7) a (2.9) uvažujeme v týdenním kroku. Veličiny  $x^i(t)$ ,  $y^i(t)$  a  $x_0^n(t)$  v nich figurují již jako týdenní průměry, tj. položíme

$$x^i(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^{\Delta} x^i(t, h) \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau,$$

$$y^i(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^{\Delta} y^i(t, h) \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau,$$

$$x_0^n(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^{\Delta} x_0^n(t, h) \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau.$$
(5.6)

### 5.1.3 Náhodná složka modelu

Při krátkodobé úloze řízení vodohospodářské soustavy se nacházíme v týdnu  $T$ . Pro týdny  $t = 1, \dots, T-1$  tedy již známe realizace náhodných vnějších přítoků soustavy a náhodné ceny elektřiny na trhu. Veličiny  $\zeta_t^n$ ,  $t = 1, \dots, T-1$ ,  $n \in \mathcal{N}$  položíme jednoduše rovny průměrnému vnějšímu přítoku nádrže  $n$  v týdnu  $t$ . Veličiny  $\zeta_T^n$ ,  $n \in \mathcal{N}$  pak položíme rovny průměrnému vnějšímu přítoku nádrže  $n$  v týdnu  $T$  předchozích hydrologických cyklů soustavy.

Cenu elektřiny na trhu budeme uvažovat stejně jako řízení v hodinovém kroku. Za tímto účelem zavedeme pro každé  $t \in \tau$  a  $h = 1, \dots, \Delta$  veličinu  $\lambda_t^h$  představující náhodnou cenu elektrické energie na trhu v hodině  $h$  týdne  $t$ . Realizace náhodné ceny elektřiny  $\lambda_t^h$ ,  $t = 1, \dots, T-1$ ,  $h = 1, \dots, \Delta$  známe. Veličiny  $\lambda_T^h$ ,  $h = 1, \dots, \Delta$  pak položíme rovny průměrným hodinovým cenám elektřiny na trhu v týdnu  $T$  předchozích hydrologických cyklů soustavy.

Za předpokladu dostupnosti příslušných historických dat tedy můžeme považovat sezónní model oceňování vody za deterministický. Pro střední hodnotu ceny elektřiny pak zřejmě platí  $E(\lambda_t^h) = \lambda_t^h$  pro všechna  $t \in \tau$  a  $h = 1, \dots, \Delta$ .

### 5.1.4 Účelová funkce

Podmínka sezónní rovnováhy (5.3) zaručí, že nedojde k maximálnímu využití vody, která by mohla být potřebná v budoucnu. Účelovou funkci (2.21) proto pro sezónní úlohu formulujeme bez zahrnutí ceny vody, tedy jako maximalizaci očekávaného zisku. V sezónní úloze oceňování tudíž neformulujeme ani podmínky na kategorizování objemu vody v nádrži (2.16), (2.17) a (2.18).

Účelovou funkci formulujeme v rámci hodinového řízení, aby byl vytižen špičkový provoz elektráren. Vztah (2.21) přepíšeme s pomocí hodinových deterministických cen elektrické energie a hodinových průtoků turbínami a přečerpávacími stanicemi do tvaru

$$\sum_{t \in \tau} \sum_{h=1}^{\Delta} \lambda_t^h \Delta_0 \left( \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t, h) - \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^i(t)} y^i(t, h) \right), \quad (5.7)$$

kde  $\Delta_0$  značí rozmezí jednotlivých homogenních časových okamžiků řízení v sezónní úloze oceňování v hodinách. V uvažovaném případě týdenní agregace úlohy s hodinovým řízením je zřejmě  $\Delta_0 = 1$  h.

### 5.1.5 Sezónní deterministická úloha oceňování vody

Sezónní deterministický model oceňování vody pak formulujeme jako smíšenou úlohu celočíselného lineárního programování tvaru

$$\max \sum_{t \in \tau} \sum_{h=1}^{\Delta} \lambda_t^h \Delta_0 \left( \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t, h) - \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^i(t)} y^i(t, h) \right) \quad (5.8)$$

za podmínek  $u^i(t, h) \underline{x}^i \leq x^i(t, h) \leq u^i(t, h) \bar{x}^i$

$$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta,$$

$$v^i(t, h) \underline{y}^i \leq y^i(t, h) \leq v^i(t, h) \bar{y}^i$$

$$\forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta,$$

$$0 \leq x_0^n(t, h) \leq \bar{x}_0^n \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta,$$

$$u^i(t, h) + v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t, h) \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{R}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta,$$

$$x^i(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^{\Delta} x^i(t, h) \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau,$$

$$y^i(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^{\Delta} y^i(t, h) \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau,$$

$$x_0^n(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^{\Delta} x_0^n(t, h) \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau,$$

$$\underline{f}^n(t) \leq x_0^n(t) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(t) \leq \bar{f}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau,$$

$$\max \{ \underline{V}_T^n, V_{\min}^n(T) \} \leq V^n(0) \leq \min \{ \bar{V}_T^n, V_{\max}^n(T) \} \quad \forall n \in \mathcal{N},$$

$$\underline{V}_T^n \leq V^n(T) \leq \bar{V}_T^n \quad \forall n \in \mathcal{N},$$

$$\begin{aligned} V^n(t) = & V^n(0) - \sum_{u=1}^t s_D^n(u) \Delta + \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \left( x_0^m(u) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[m]} x^i(u) \right. \\ & \left. - s_R^m(u) \right) \Delta - \sum_{u=1}^t \left( x_0^n(u) + \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{T}}^{-1}[n]} x^i(u) \right) \Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{u=1}^t \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[n]} y^i(u) \Delta - \sum_{u=1}^t \sum_{m \in \mathcal{A}(n)} \sum_{i \in \sigma_{\mathcal{P}}^{-1}[m]} y^i(u) \Delta \\
& + \sum_{u=1}^t \zeta_u^n \Delta \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau,
\end{aligned}$$

$$V_{min}^n(t) \leq V^n(t) \leq V_{max}^n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall t \in \tau,$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}(c)} V^n(t) \geq V_{min}^c(t) \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall t \in \tau,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) x^i(t, h) - \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi^j(t)} y^j(t, h) & \leq \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{T}}} \rho^i(t) \bar{x}^i - \sum_{i \in \mathcal{R}} v^{\sigma_{\mathcal{R}}[i]}(t, h) \cdot \\
& \cdot \rho^i(t) \bar{x}^i - P \quad \forall t \in \tau,
\end{aligned}$$

$$x^i(t, h) \geq 0, u^i(t, h) \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta,$$

$$y^i(t, h) \geq 0, v^i(t, h) \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta,$$

$$x^i(t) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \forall t \in \tau,$$

$$y^i(t) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \forall t \in \tau.$$

Jednotlivá omezení úlohy (5.8) jsou dle pořadí: podmínky (5.4) na hodinové řízení soustavy, rovnosti (5.6) zavádějící průměrné týdenní veličiny řízení, podmínka (2.4) na průměrný týdenní odtok vody z nádrže, sezónní rovnováha (5.3), podmínka týdenní rovnováhy (2.6), podmínky (2.7) a (2.9) na omezení průměrného týdenního objemu vody v nádržích a podmínky podpůrné služby (5.5).

*Poznámka.* Při konstrukci úlohy (5.8) jsme uvažovali týdenní krok v rámci hodinového řízení. Sestavený model lze však obecně aplikovat na úlohu oceňování s libovolným krokem  $\Delta$  a řízením v rámci časových okamžiků  $\Delta_0 \leq \Delta$ .

### 5.1.6 Stínové ceny vody

Celkový zisk z využití vodní energie je v úloze (5.8) omezen podmínkami týdenní rovnováhy (2.6). Duální proměnné k těmto podmínkám představují takzvané stínové ceny vody, tj. zisk z toho, že bychom měli v příslušném čase a příslušné nádrži k dispozici o jednu jednotku vody více. Duální proměnná k rovnici rovnováhy v týdnu  $T$  a nádrži  $n \in \mathcal{N}$  tedy představuje cenu za to, že v týdnu  $T$  použijeme o jeden  $\text{m}^3$  vody více místo toho, abychom si jej ušetřili do budoucna. Cenu za jeden  $\text{m}^3$  vody v každé nádrži  $n \in \mathcal{N}$  v týdnu  $T$  tedy jednoduše odhadneme jako duální proměnnou k podmínce rovnováhy (2.6) pro nádrž  $n$  v týdnu  $T$  úlohy (5.8). (Aasgård a Andersen, 2013)

Zpřesněním odhadu cen vody uskladněné v nádržích pomocí duálních proměnných se zabývá například práce Aasgård a Andersen (2013). Na základě několika modelových situací řízení vodohospodářské soustavy jsou pomocí duálních proměnných konstruovány řezy, kterými jsou pak shora omezeny ceny vody uskladněné ve vodohospodářské soustavě. My se dále zaměříme na odhady cen vody pomocí duálních proměnných v jednotlivých objemových kategoriích nádrží soustavy.

## 5.2 Ceny vody závislé na objemu

Duální proměnná k podmínce rovnováhy (2.6) pro nádrž  $n \in \mathcal{N}$  v týdnu  $t = T$  úlohy (5.8) zřejmě představuje odhad ceny vody v  $\text{€/m}^3$  v nádrži  $n$  v objemové kategorii, ve které se můžeme v rámci řízení pohybovat, tedy v kategorii  $[V_{min}^n(t), V_{max}^n(t)]$ , která zde závisí na čase  $t \in \tau$ .

Uvažujme po zbytek sekce 5.2 pevnou nádrž  $n \in \mathcal{N}$ . Ceny vody v nádrži  $n$  můžeme dále kategorizovat ve smyslu diskretizace

$$V_0^n, \dots, V_{K_n}^n$$

zavedené v sekci 2.2.7 druhé kapitoly. Připomeňme, že vzniklým intervalům  $[V_{i-1}^n, V_i^n)$  přiřazujeme konstantní cenu vody  $W_i^n$ ,  $i = 1, \dots, K_n$  v jednotkách  $\text{€/m}^3$ ,  $i = 1, \dots, K_n$  a zároveň požadujeme

$$W_{i-1}^n > W_i^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad \forall i = 2, \dots, K_n. \quad (5.9)$$

Zavedme dále veličinu  $W_{0,i}^n$ ,  $i = 1, \dots, K_n$  představující cenu vody v  $\text{€/m}^3$  v kategorii  $[V_0^n, V_i^n)$ , přičemž opět požadujeme

$$W_{0,i-1}^n > W_{0,i}^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad \forall i = 2, \dots, K_n.$$

Položme nyní  $V_{min}^n(t) := V_0^n$  pro všechna  $t \in \tau$ . Vyřešíme-li pak úlohu (5.8) s položením  $V_{max}^n(t) := V_{K_n}^n$  pro všechna  $t \in \tau$ , bude duální proměnná k podmínce rovnováhy (2.6) pro nádrž  $n$  a týden  $T$  představovat odhad ceny vody  $W_{0,K_n}^n$  kategorie  $[V_0^n, V_{K_n}^n)$ . Ponecháním  $V_{min}^n(t) := V_0^n$  a položením  $V_{max}^n(t) := V_{K_n-1}^n$  pro všechna  $t \in \tau$  pak stejným postupem získáme odhad ceny vody  $W_{0,K_n-1}^n$  kategorie  $[V_0^n, V_{K_n-1}^n)$ . Pro odhad ceny vody  $W_{K_n}^n$  kategorie  $[V_{K_n-1}^n, V_{K_n}^n)$  pak platí

$$(V_{K_n}^n - V_0^n)W_{0,K_n}^n = (V_{K_n}^n - V_{K_n-1}^n)W_{K_n}^n + (V_{K_n-1}^n - V_0^n)W_{0,K_n-1}^n.$$

Analogicky pokračujeme v oceňování nižších kategorií postupným snižováním parametru  $V_{max}^n(t)$ . Obecně pro  $i \in \{2, \dots, K_n\}$  odhadneme cenu vody  $W_i^n$  v kategorii  $[V_{i-1}^n, V_i^n)$  ze vztahu

$$(V_i^n - V_0^n)W_{0,i}^n = (V_i^n - V_{i-1}^n)W_i^n + (V_{i-1}^n - V_0^n)W_{0,i-1}^n. \quad (5.10)$$

V posledním kroku pak pro  $i = 2$  dostáváme spolu s cenou  $W_2^n$  přímo cenu nejnižší objemové kategorie  $W_1^n = W_{0,1}^n$ . Rovnici (5.10) můžeme rekurzivně přepsat jako

$$(V_{K_n}^n - V_0^n)W_{0,K_n}^n = \sum_{i=i}^{K_n} (V_i^n - V_{i-1}^n)W_i^n + (V_{i-1}^n - V_0^n)W_{0,i-1}^n,$$

kde  $W_{0,i-1}^n$  je duální proměnná k podmínce rovnováhy (2.6) pro nádrž  $n$  a týden  $T$  v úloze (5.8) při volbě  $V_{min}^n(t) := V_0^n$  a  $V_{max}^n(t) := V_{i-1}^n$  pro všechna  $t \in \tau$ , přičemž ceny  $W_{0,K_n}^n$ ,  $W_i^n$ ,  $i = i+1, \dots, K_n$  jsme již odhadli v předchozích krocích.

Prezentovaný postup kategorizování lze různě modifikovat. Např. můžeme fixovat hodnotu  $V_{max}^n(t)$  a naopak zvyšovat hodnotu  $V_{min}^n(t)$ , či fixovat tyto hodnoty v jiných než krajních hodnotách diskretizace.

*Poznámka.* Při postupném oceňování objemových kategorií shora řešíme úlohu (5.8), ve které snižujeme maximální hranici  $V_{max}^n(t)$ . Může se stát, že se dostaneme na takovou hodnotu  $V_{max}^n(t)$ , pro kterou již přípustné řešení úlohy neexistuje. V takovém případě by bylo v praxi nutné upustit od některých podmínek úlohy. Pokud bychom uměli ocenit ztráty spojené s nesplněním těchto podmínek, můžeme je přičíst k dosud nejvyšší odhadnuté ceně vody a tím například ocenit zbylé nižší kategorii vody. V jednoduchém případě přiřadíme zbylým kategoriím dosud nejvyšší odhadnutou cenu vody. Speciálně nebude přípustné řešení existovat v situaci, dostaneme-li se snižováním hodnoty  $V_{max}^n(t)$  na dolní hranici intervalu  $\langle \underline{V}_T^n, \overline{V}_T^n \rangle$ . Jelikož se jedná o interval, ve kterém očekáváme, že se budou hladiny pohybovat v optimalizačním týdnu řízení, není pro nás odhad cen vody v případných nižších kategoriích klíčový.

### 5.2.1 Volba objemových kategorií

Volba diskretizace  $V_0^n, \dots, V_{K_n}^n$  může záviset na konkrétním reálném problému či může vycházet ze stávající praxe. V následující části je prezentován jednoduchý postup stanovení hladin diskretizace. Uvažujme opět pevné  $n \in \mathcal{N}$ .

#### Volba počátečních a koncových objemů diskretizace

Pro nádrže mající deterministický přítok zřejmě postačí zvolit  $V_0^n$  jako minimum z objemů  $V_{min}^n(t)$  přes všechna  $t$  z optimalizačního období krátkodobé úlohy řízení, neboť pod tuto hranici se díky podmínce (2.7) při řízení nedostaneme. Analogicky pak stačí volit  $V_{K_n}^n$  jako maximum z objemů  $V_{max}^n(t)$  přes všechna  $t$  z optimalizačního období krátkodobé úlohy řízení.

Pro nádrže mající náhodný přítok požadujeme při krátkodobé úloze řízení neklesnutí pod hranici  $V_{min}^n(t)$  pouze s danou pravděpodobností (viz sdružené pravděpodobnostní omezení (2.10)). Je proto vhodné volit objem  $V_0^n$  pro pevné  $n \in \mathcal{N}^r$  dostatečně menší než  $V_{min}^n(t)$  přes všechna  $t$  z optimalizačního období krátkodobé úlohy řízení. V opačném případě bychom uvažovali cenu kategorií pod minimum z  $V_{min}^n(t)$  nulovou. Tyto kategorie však mají největší cenu.

Analogická situace pro nádrže mající náhodný přítok nastává u horní hranice diskretizace  $V_{K_n}^n$ . Zde je nutné volit  $V_{K_n}^n$  dostatečně větší než  $V_{max}^n(t)$  pro všechna  $t$  z optimalizačního období krátkodobé úlohy řízení. A to i přesto, že pro nás voda v nejvyšších kategoriích má malou cenu. V případě volby  $V_{K_n}^n = V_{max}^n(t)$  by totiž mohla nastat situace, kdy by byl v časovém okamžiku  $t$  pro nádrž  $n \in \mathcal{N}^r$  očekávaný konečný objem vody v nádrži E ( $V^n(T)$ ) (ostře) větší než  $V_{max}^n(t)$ . V takovém případě bychom nebyli schopni nasčítat objemy jednotlivých kategorií na očekávaný konečný objem E ( $V^n(T)$ ) a podmínka (2.18) úlohy by byla porušena.

#### Ostatní objemové kategorie

Pro určení zbývajících objemových kategorií lze například vyjít ze stanoveného počátečního objemu  $V_i^n$ ,  $V_0^n < V_i^n < V_{K_n}^n$  a jednotlivé diskretizace určit za pomoci

odhadu ceny  $W_{0,i}^n$  kategorie  $[V_0^n, V_i^n)$ .

Posuneme-li se na objem  $V_{i+c}^n$  pro vhodně zvolenou konstantu  $c > 0$  a bude-li cena  $W_{0,i+c}^n = W_{0,i}^n$ , jsme zřejmě stále ve stejné objemové kategorii a zvětšíme proto dosud známou horní hranici této kategorie položením  $V_i^n := V_{i+c}^n$ . Pokud však cena klesne, jsme již ve vyšší objemové kategorii. Pak můžeme vhodně zvolit novou hladinu diskretizace z intervalu  $(V_i^n, V_{i+c}^n)$ , například zprůměrováním objemů. Případně můžeme vytvořit novou objemovou kategorii  $[V_i^n, V_{i+c}^n)$  a přiřadit jí průměr z cen okolních dvou kategorií, či přistoupit k jemnějšímu dělení. Vypočtené ceny se tak snažíme proložit po částech konstantní funkcí.

Analogicky posuneme-li se na objem  $V_{i-c}^n$  a bude-li cena  $W_{0,i-c}^n = W_{0,i}^n$ , jsme zřejmě stále ve stejné objemové kategorii a nezavádíme tedy  $V_{i+c}^n$  jako novou hladinu diskretizace. Pokud však cena vzroste, jsme již v nižší objemové kategorii a je třeba opět vhodně zvolit novou hladinu diskretizace či vytvořit novou kategorii. Může se také stát, že úloha již nebude mít přípustné řešení (viz poznámka výše). Takto postupujeme až ke krajním hranicím diskretizace.

Jelikož jednotlivé kategorie mohou mít různě velký objem, nezaručuje popsaný postup volby objemových kategorií splnění předpokladu (5.9) striktně rostoucích cen vody (s klesající úrovní vodní hladiny). Případné kategorie porušující podmínku (5.9) je proto na závěr nutné vhodně sjednotit se sousedními.

# Kapitola 6

## Praktická studie

V praktické části práce je sestavená úloha řízení vodohospodářské soustavy (2.22) aplikována na soustavu vodních nádrží na řece Vltavě – Vltavskou kaskádu. Náhodná složka modelu je aproximována pomocí scénářů, jejichž konstrukci jsme popsali v kapitole 4. Odhady ceny vody uskladněné v nádržích jsou získány pomocí sezónní úlohy oceňování vody (5.8). Kromě úlohy řízení Vltavské kaskády v aktuální podobě je v praktické studii řešena také možnost přečerpávání na vodním díle Orlick.

Reálná data byla poskytnuta společností ČEZ, a. s. a podnikem Povodí Vltavy, s. p. Cena elektrické energie na trhu byla získána z volně dostupných dat společnosti OTE, a. s. Ke konstrukci scénářů byl využit program R (R Core Team, 2016). Sezónní úloha oceňování vody a krátkodobá úloha řízení vodohospodářské soustavy byly řešeny v programu GAMS (GAMS Development Corporation, 2013).

### 6.1 Vltavská kaskáda

Vltavskou kaskádu tvoří soustava vodních děl na řece Vltavě v úseku dlouhém přibližně 260 km. První vodní díla Vltavské kaskády byla postavena za účelem výroby elektrické energie, později byla upřednostňována akumulární funkce nádrží, zejména nadlepení průtoků na řece Vltavě a na dolním Labi. Kromě energetického a akumulárního významu slouží vodní nádrže ke stabilizaci hladiny pro odběr průmyslové vody, k regulaci teploty vody v řece a v neposlední řadě k ochraně před povodněmi. Většina nádrží Vltavské kaskády je také významnými rekreačními oblastmi. (Povodí Vltavy, státní podnik, 2013)

Jedná se celkem o devět přehrad na řece Vltavě a jednu uměle vytvořenou vodní nádrž Štěchovice 2. Přehled jednotlivých nádrží je uveden v tabulce 6.1. Na obrázku 6.1 je pak zobrazeno zjednodušené schéma Vltavské kaskády. Přečerpávací stanici má ve stávající podobě kaskády pouze nádrž Štěchovice 2 a je zastoupena reverzní turbínou. Důležitým účelem soustavy je odběr povrchové vody pro chladicí okruh Jaderné elektrárny Temelín, který je zajišťován z nádrže Hněvkovice. Voda se pak zpětně vypouští v prostoru nádrže Kořensko.

Nádrže Lipno 1 a Lipno 2 jsou spojeny potrubím vedeným ze špičkové elektrárny se dvěma turbínami o dosažitelném výkonu 60 MW. Část vody pak do Lipna 1 odtéká starým korytem Vltavy, ve kterém je nutné v každém časovém okamžiku udržet minimální průtok. Za tímto účelem byla vybudována malá vodní

Tabulka 6.1: Přehled vodních nádrží Vltavské kaskády (zdroj: ČEZ, a. s., Povodí Vltavy, s. p.)

říční km	vodní nádrž	celkový prostor [mil. m <sup>3</sup> ]	turbíny nádrže		přečerpávací stanice	
			počet	dosažitelný výkon [MW]	počet	dosažitelný výkon [MW]
329.540	Lipno 1	309.502	3	2 × 60 + 1 × 0.3	–	
319.120	Lipno 2	1.664	1	1 × 1.5	–	
210.390	Hněvkovice	21.095	2	2 × 4.72	–	
200.405	Kořensko	2.800	2	2 × 1.9	–	
144.700	Orlík	716.500	4	4 × 90	–	
134.730	Kamýk	12.976	4	4 × 10	–	
91.694	Slapy	269.300	3	3 × 44	–	
84.440	Štěchovice 1	10.444	2	2 × 11.25	–	
–	Štěchovice 2	0.500	1	1 × 45	1	1 × 51
71.325	Vrané	11.101	2	2 × 6	–	

elektrárna Lipno 1 sestávající z průtočné turbíny o dosažitelném výkonu 0.3 MW, jejíž minimální hltnost je rovna minimálnímu potřebnému průtoku starým korytem Vltavy. Místo podmínky na minimální odtok z nádrže Lipno 1, která by v případě provozu pouze špičkové elektrárny ve skutečnosti nebyla splněna, proto položíme

$$u^3(t) = 1 \quad \forall t \in \tau. \quad (6.1)$$

Malá vodní elektrárna je tedy provozována nepřetržitě k regulaci průtoku starým korytem Vltavy. Doplňme, že elektrina vyrobená soustrojím malé vodní elektrárny se nepodílí na výsledném zisku, uvažujeme proto její efektivitu nulovou.

### 6.1.1 Možnost přečerpávání na Orlíku

Obrázek 6.1 a tabulka 6.1 odpovídají stávající podobě Vltavské kaskády. V současnosti je nicméně aktuální také otázka přečerpávání na vodní nádrži Orlík. Projekt by spočíval v nahrazení dvou turbín vodní nádrže Orlík dvěma reverzními turbínami stejných parametrů jako ve stávající podobě. V přečerpávacím režimu by pak při stávajícím výkonu 2 × 90 MW byla dosažena 77% účinnost přečerpávání. Tato možnost je v praktické studii řešena jako druhá varianta ke stávající podobě Vltavské kaskády.

## 6.2 Volba kroku a optimalizačního horizontu úlohy řízení Vltavské kaskády

Úlohu řízení Vltavské kaskády budeme uvažovat v hodinovém kroku, tj.  $\Delta = 1$  h. Výsledky řízení budeme prezentovat v rámci jednoho týdne, který zvolíme zároveň jako poslední časový okamžik sezónní úlohy oceňování vody (5.8) s týdenním krokem. Pro vybraný týden tedy uvažujeme konstantní cenu vody



v jednotlivých kategoriích nádrží, kterou odhadneme ze sezónní úlohy. Konkrétně byl na základě dostupných dat zvolen týden od 12. do 18. 10. 2015.

Samotné řízení budeme uvažovat v rámci jednoho dne. Na konci dne pak na základě pozorovaných realizací náhodné složky modelu a vypočtených řídicích proměnných úlohy přepočítáme skutečné hodnoty objemů v jednotlivých nádržích. Pomocí nově napozorovaných realizací zkonstruujeme scénáře náhodné složky modelu a vyřešíme novou úlohu řízení pro další den zvoleného týdne.

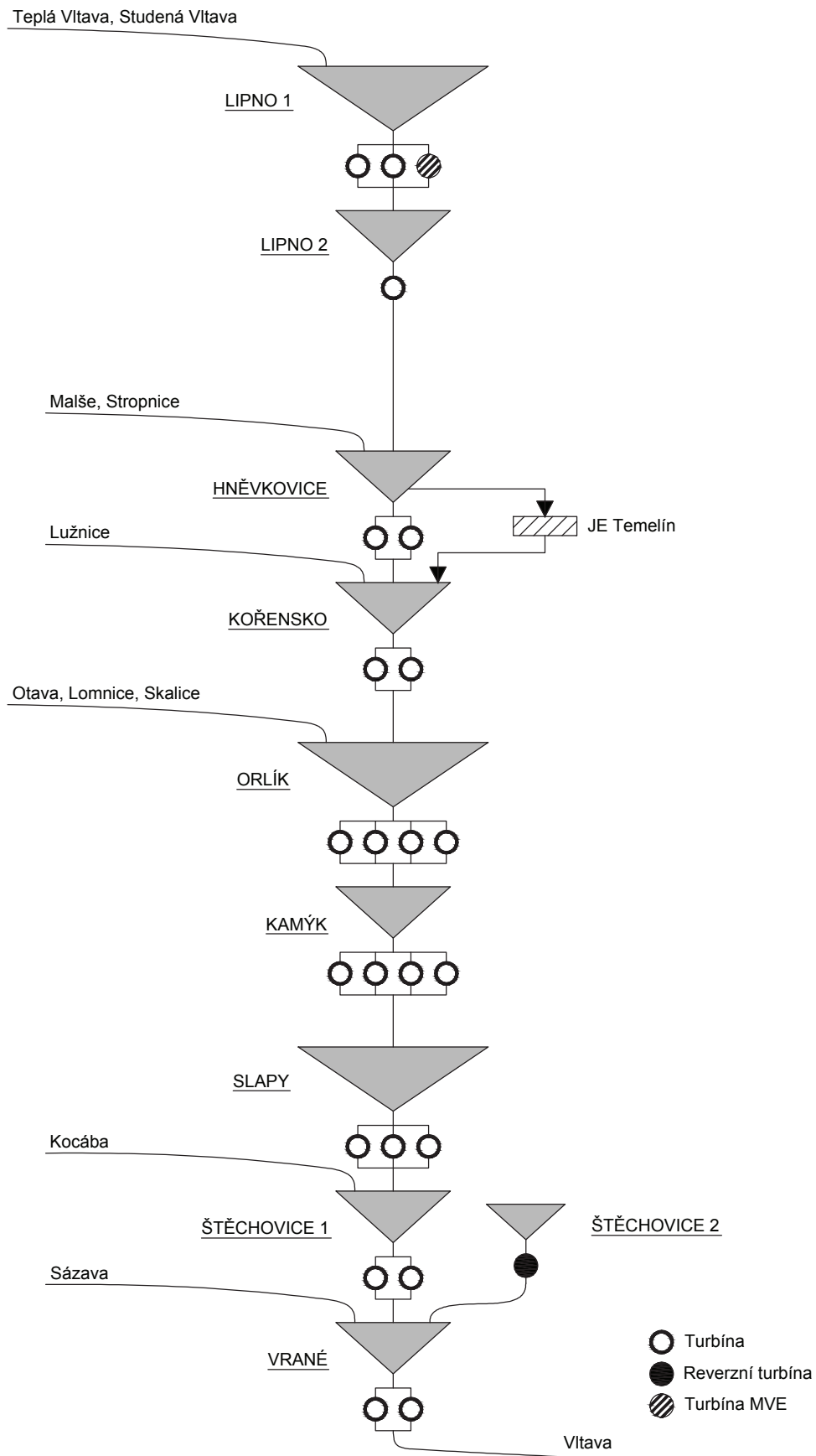
Stačilo by tedy stanovit optimalizační horizont úlohy řízení na jeden den. V takovém případě by však model našel optimální řešení splňující dané podmínky na příslušný den bez ohledu na to, že tyto podmínky bude nutné splnit i následující den. Na začátku následujícího dne bychom se tak mohli dostat do situace, kdy je nutné i přes nízkou cenu elektřiny v prvních hodinách upustit větší množství vody, abychom zajistili splnění všech podmínek. Optimalizační horizont úlohy řízení proto stanovíme na dva dny, tj.  $\tau = \{1, 2, \dots, 48\}$ . Výsledky úlohy však budeme brát pouze za prvních 24 hodin. V čase  $t = 24$  přepočítáme skutečné hodnoty, zkonstruujeme scénáře náhodné složky modelu na následující dva dny a vyřešíme novou úlohu řízení. Jelikož bychom zvoleným postupem potřebovali pro řízení na 18. 10. 2015 znát odhady ceny vody na další týden, budeme prezentovat výsledky pouze ze dnů 12. až 17. 10. 2015. Doplňme, že při úloze řízení na neděli až pondělí by bylo nutné zavést do úlohy ceny vody v závislosti na dnu.

Časový posun  $D_m$  představující počet časových okamžiků, za které voda oteče přes turbíny výše položené nádrže  $m$  do nádrže pod ní, budeme pro jednoduchost uvažovat pouze mezi nádržemi Lipno 2 a Hněvkovice, kde je tento posun značný. Konkrétně položíme  $D_{\text{Lipno 2}} = 22$  hodin. Odběr vody pro průmysl na toku pod nádrží uvažujeme pouze pod Lipnem 1. Jelikož jsou nádrže Lipno 1 a Lipno 2 velmi blízko, časový posun  $R_n$  v úloze řízení vodohospodářské soustavy neuvažujeme.

## 6.3 Vstupní data

Parametry vodních elektráren, tedy především minimální a maximální hltnosti a dosažitelné výkony turbín a přečerpávacích stanic, byly poskytnuty společností ČEZ, a. s. Cena elektrické energie na trhu byla převzata z volně dostupných dat společnosti OTE, a. s., která společnost zveřejňuje v roční zprávě na svých internetových stránkách (viz OTE, a. s. (2010)). Konkrétně se jedná o hodinové marginální ceny elektrické energie na trhu v České republice [€/MWh] zveřejňované v rámci výsledků denního trhu.

Hodinové vnější přítoky soustavy a stavy hladin vodních nádrží k vybraným datům byly poskytnuty podnikem Povodí Vltavy, s. p. Jedná se o společná data Povodí Vltavy, s. p. a Českého hydrometeorologického ústavu, p. o. Zbylé vstupní veličiny úlohy, tj. především informace o rozdělení prostoru nádrže, směrodatných průtocích, vodohospodářských odtokových objektech, povolených odběrech a vypouštění a o manipulaci v zásobním prostoru, byly vyčteny z manipulačních řádů jednotlivých nádrží poskytnutých podnikem Povodí Vltavy, s. p. Data poskytnutá podnikem Povodí Vltavy, s. p. nejsou veřejná a nenachází se proto na přiloženém disku.



Obrázek 6.1: Zjednodušené schéma Vltavské kaskády

## 6.4 Konstrukce scénářů vnějších přítoků a ceny energie na trhu

Scénáře jsou generovány postupem popsaným v kapitole 4 na základě hodinových historických dat z období 1. 1. 2011 až do začátku příslušného dne v týdnu od 12. do 18. 10. 2015. Připomeňme, že předpokládáme, že jsou vnější přítoky na ceně elektriny nezávislé.

K modelování náhodné složky a následné konstrukci scénářů byl použit program R (R Core Team, 2016). Příslušné kódy spolu s výstupy z programu lze najít na přiloženém disku. Ze vstupních dat se na disku nachází pouze ceny elektrické energie na trhu, zbylá data nejsou veřejná.

### 6.4.1 Modelování scénářů vnějších přítoků

Jak je zobrazeno na obrázku 6.1, vodní nádrže Lipno 2, Kamýk, Slapy a Štěchovice 2 nemají vnější přítoky. Pro ostatní nádrže pak uvažujeme náhodné hodinové vnější přítoky. Základní popisné statistiky vnějších přítoků soustavy za období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015 jsou uvedeny v tabulce 6.2. Na obrázku 6.2 jsou vykresleny jednotlivé vnější přítoky v období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015.

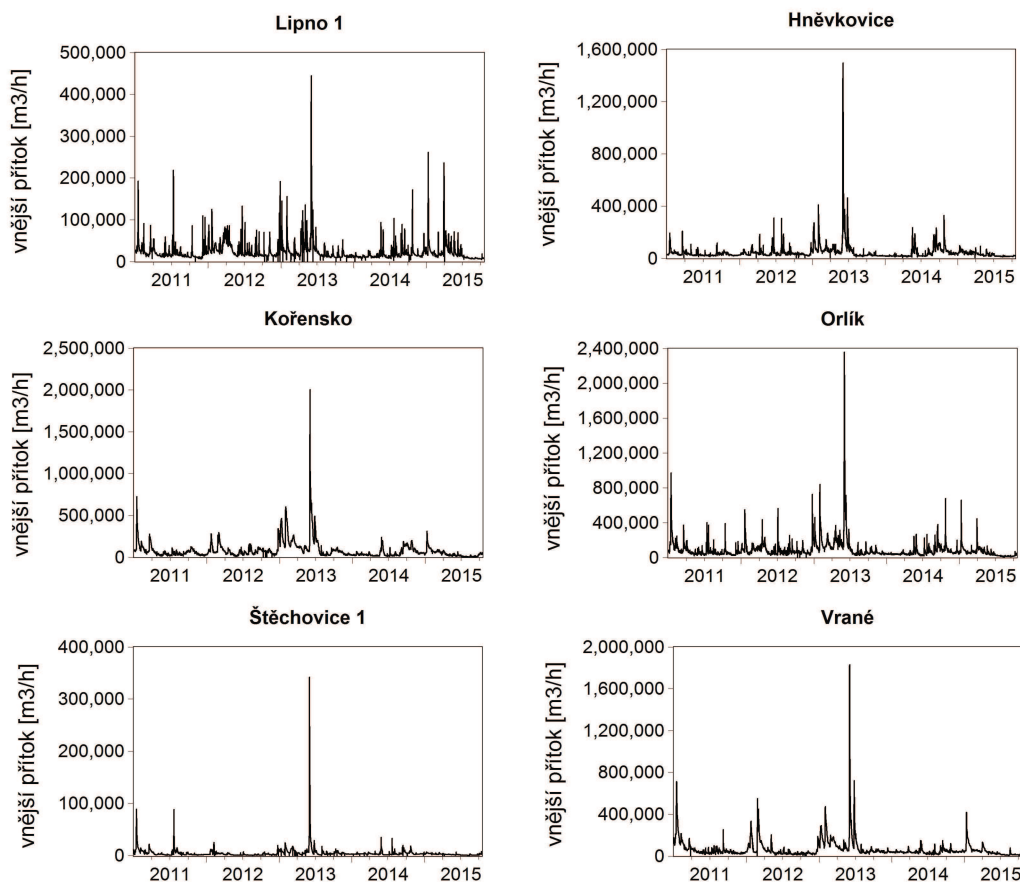
Vnější přítoky modelujeme jako vektorový autoregresní proces (4.2) postupem popsaným v části 4.2.1 čtvrté kapitoly. Máme k dispozici vektorovou časovou řadu hodinových přítoků z období 1. 1. 2011 až 11. 10. 2015, celkem 41874 pozorování (prvních 6 pozorování kvůli zpoždění vnějšího přítoku Hněvkovic neznáme). Řadu vnějších přítoků nejprve transformujeme pomocí vektorové Boxovy-Coxovy transformace (4.4). Vektor typových parametrů odhadneme jako  $(0.19, -0.48, 0.19, 0.10, 0.17, 0.07)^T$ , kde pořadí složek odpovídá pořadí nádrží v tabulce 6.2. Úrovňový parametr zvolíme 0.1.

### Identifikace řádu modelu VAR

Na základě minimalizace Bayesova informačního kritéria zvolíme pro modelování transformované časové řady vektorový autoregresní proces řádu 9. Na obrázku 6.3 jsou spolu se skutečnými hodnotami vykresleny vyrovnané hodnoty a residua modelu VAR(9) pro jednotlivé nádrže. Připomeňme, že modelujeme již transformovanou vektorovou časovou řadu přítoků. Přestože nejsou

Tabulka 6.2: Základní popisné statistiky hodinových vnějších přítoků Vltavské kaskády za období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015 [ $\text{m}^3/\text{h}$ ]

vodní nádrž	minimum	medián	průměr	maximum
Lipno 1	0	16683	23465	444840
Hněvkovice	7025	33122	46083	1494687
Kořensko	0	54000	79904	2004000
Orlík	0	60224	87710	2357580
Štěchovice 1	0	2648	4485	341916
Vrané	0	40305	65117	1828580



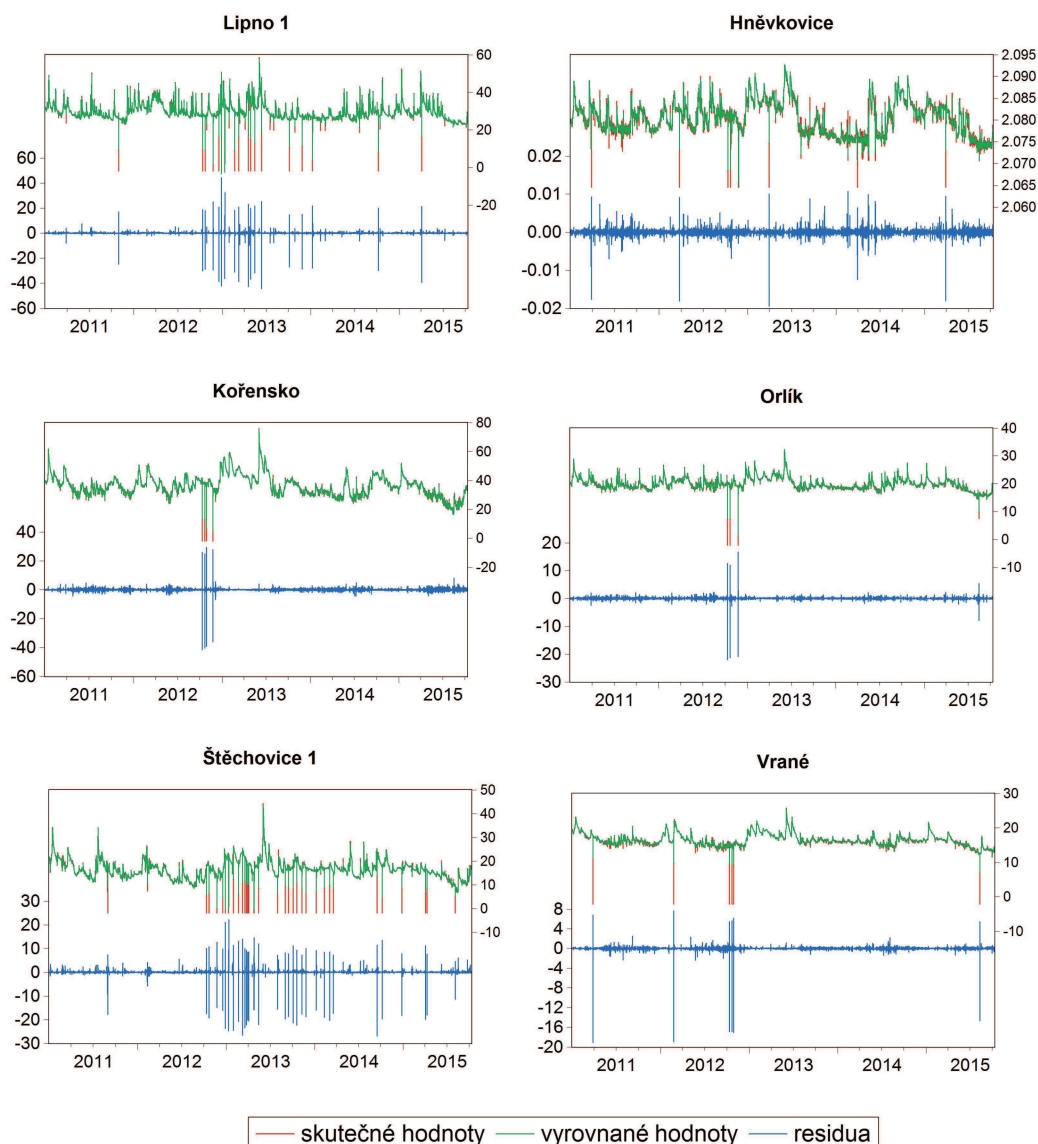
Obrázek 6.2: Vnější přítoky Vltavské kaskády v období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015 [m<sup>3</sup>/h]

často vystižena odlehlá lokální minima, pokrývají vyrovnané hodnoty skutečné hodnoty časové řady dostatečně.

## Verifikace modelu

Převrácené hodnoty všech kořenů odhadnutého (maticového) autoregresního polynomu (4.3) leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině. Odhadnutý model VAR(9) tedy splňuje podmínku stacionarity. Mardiův i Henzeův-Zirklerův test zamítá nulovou hypotézu normality residuální složky. Pomocí vícerozměrné verze Q-testu zamítáme nekorelovanost odhadnutých residuí. Všechny zmíněné statistické testy provádíme na hladině významnosti 5 %.

I přes problémy s předpokladem normality a nekorelovanosti residuální složky modelu budeme scénáře konstruovat na základě vektorového autoregresního procesu VAR(9) a to hlavně díky jeho jednoduché formulaci a dobré předpovědní schopnosti pro optimalizační období, tzv. předpověď mimo vzorek. Odhad složitějších modelů, jako je například smíšený vektorový proces VARMA, statistickým softwarem je často výpočetně a časově velmi náročný, stejně tak i případná konstrukce scénářů založená na tomto modelu.

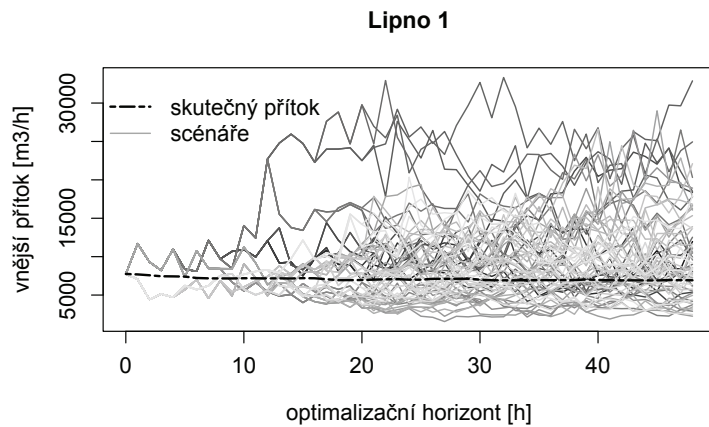


Obrázek 6.3: Skutečné hodnoty, vyrovnané hodnoty a residua modelu VAR(9)

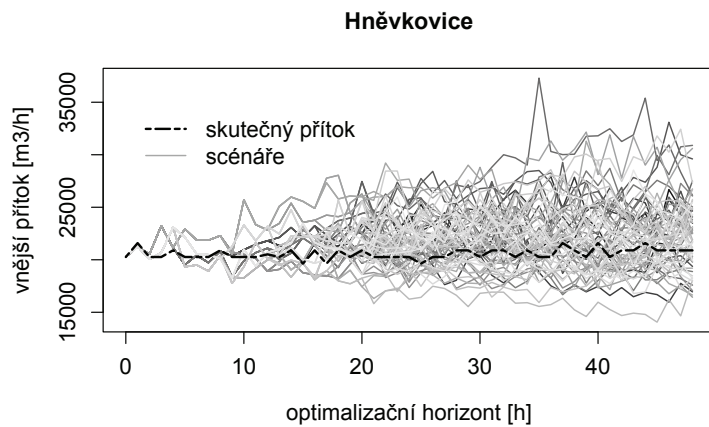
## 6.4.2 Konstrukce scénářů vnějších přítoků

Scénáře konstruujeme pro optimalizační horizont krátkodobé úlohy řízení, tedy na 48 hodin. Konstrukce scénářů probíhá postupem popsáním v části 4.3.1 na základě scénářového stromu zavedeného v části 4.3.3 a vztahu (4.9) pro predikci modelem VAR(9). Budeme uvažovat větvení scénářového stromu z obrázku 4.1 v každé čtvrté hodině, tj.  $a = 4$ , a to až do 24. hodiny. Dále již k větvení nedochází, tj.  $b = 24$ . Celkem tedy zkonstruujeme  $2^{\lceil 24/4 \rceil} = 64$  scénářů, přičemž každému přiřadíme stejnou pravděpodobnost, tj.  $p_s = \frac{1}{64}$ .

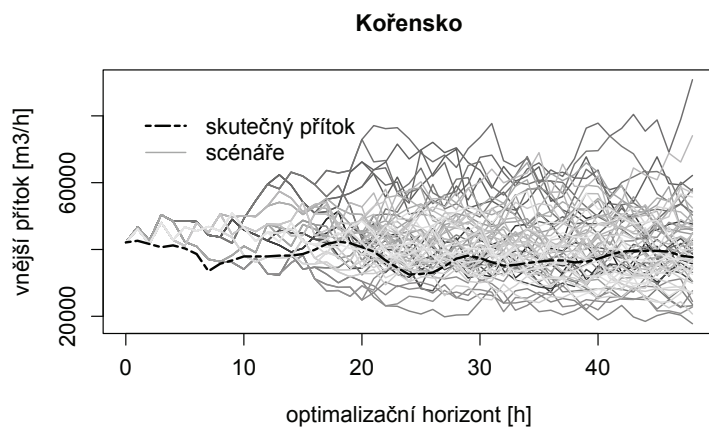
Pro generování realizací z mnohorozměrného normálního rozdělení použijeme v programu R funkci *mvrnorm* z balíčku MASS. Zkonstruované scénáře hodinových vnějších přítoků příslušných nádrží pro optimalizační horizont 12.-13. 10. 2015 jsou spolu se skutečnými hodnotami zobrazeny na obrázcích 6.4-6.9.



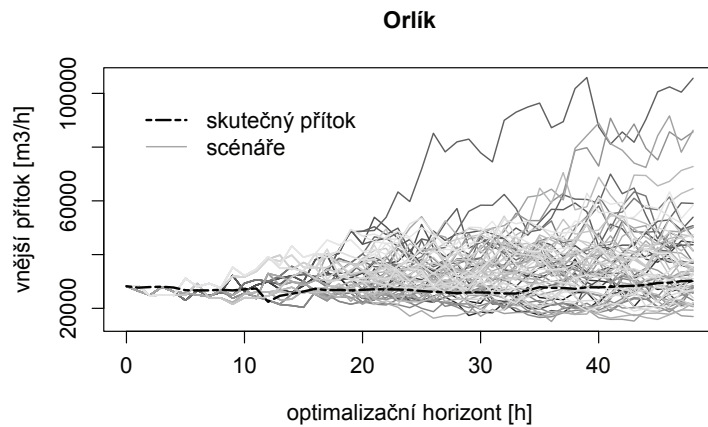
Obrázek 6.4: Scénáře vnějšího přítoku nádrže Lipno 1 spolu se skutečnými hodnotami [m<sup>3</sup>/h] pro období 12.-13. 10. 2015



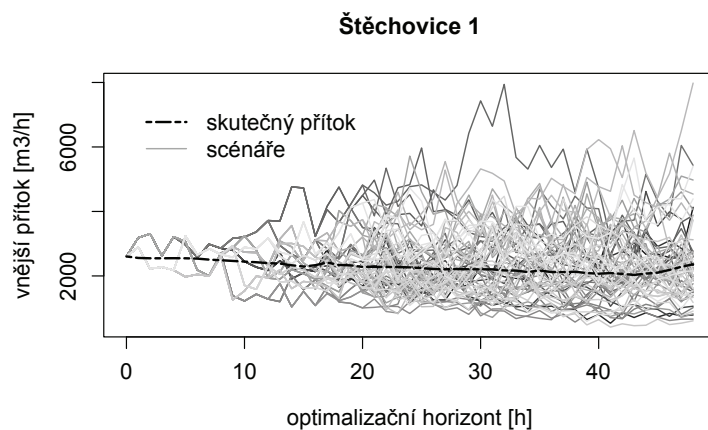
Obrázek 6.5: Scénáře vnějšího přítoku nádrže Hněvkovice spolu se skutečnými hodnotami [m<sup>3</sup>/h] pro období 12.-13. 10. 2015



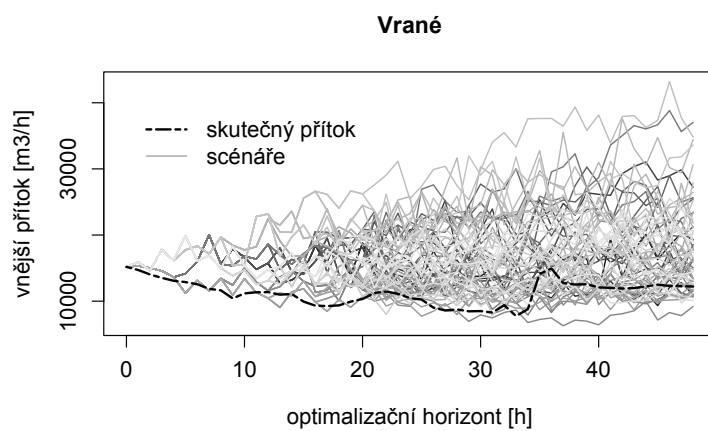
Obrázek 6.6: Scénáře vnějšího přítoku nádrže Kořensko spolu se skutečnými hodnotami [m<sup>3</sup>/h] pro období 12.-13. 10. 2015



Obrázek 6.7: Scénáře vnějšího přítoku nádrže Orlík spolu se skutečnými hodnotami [m<sup>3</sup>/h] pro období 12.-13. 10. 2015



Obrázek 6.8: Scénáře vnějšího přítoku nádrže Štěchovice 1 spolu se skutečnými hodnotami [m<sup>3</sup>/h] pro období 12.-13. 10. 2015



Obrázek 6.9: Scénáře vnějšího přítoku nádrže Vrané spolu se skutečnými hodnotami [m<sup>3</sup>/h] pro období 12.-13. 10. 2015

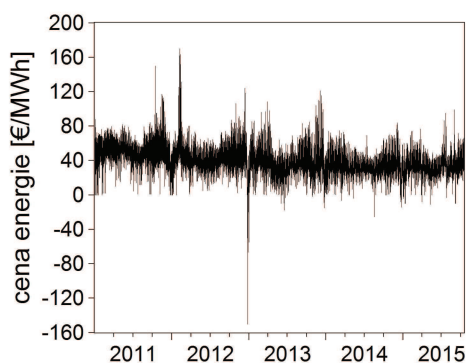
### 6.4.3 Modelování ceny elektrické energie na trhu

Pro modelování a konstrukci scénářů ceny elektrické energie na trhu využijeme hodinová data z období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015, jejichž základní popisné statistiky jsou uvedeny v prvním řádku tabulky 6.3. V tabulce jsou dále uvedeny základní popisné statistiky ceny elektrické energie kategorizované na pracovní týdny a víkendy. Na obrázku 6.10 je vykreslena cena elektrické energie v období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015. Obrázek 6.11 znázorňuje cenu elektrické energie v týdnu od 12. do 18. 10. 2015.

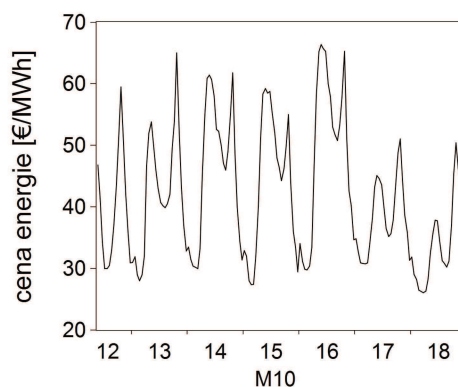
Z obrázku 6.10 můžeme pozorovat mírně klesající trend. Z obrázku 6.11 je patrná sezóna v rámci dne, přičemž pozorujeme odlišný denní průběh ceny elektrické energie v pracovním týdnu (12.-16. 10. 2015) a o víkendu (17.-18. 10. 2015). Na obrázcích 6.12 a 6.13 jsou vykresleny trojrozměrné grafy závislosti ceny elektrické energie (barevná škála) na hodině (vodorovná osa) v jednotlivých pracovních dnech, respektive víkendech let 2011 až 2015 (svislá osa). V průběhu pracovního dne cena elektrické energie nejprve roste až do zhruba 9. hodiny, poté klesá a následně roste, až kolem 20. hodiny nastává opět pokles. Podobný denní průběh ceny elektřiny pozorujeme i o víkendových dnech, nicméně cena zde nabývá menší hodnoty. Jak je patrné z tabulky 6.3, průměrná cena elektrické energie v pracovním týdnu je o 11.77 €/MWh větší, hodnota mediánu je o 11.1 €/MWh větší. Časovou řadu ceny elektřiny proto kategorizujeme na pracovní dny a víkendy. Každou kategorii pak modelujeme zvlášť.

Tabulka 6.3: Základní popisné statistiky hodinové ceny elektrické energie na trhu za období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015 [€/MWh]

kategorie	minimum	medián	průměr	maximum
všechny dny	-150.00	38.15	39.23	170.00
pracovní dny	-150.00	41.80	42.60	170.00
víkendy	-25.60	30.70	30.83	89.34

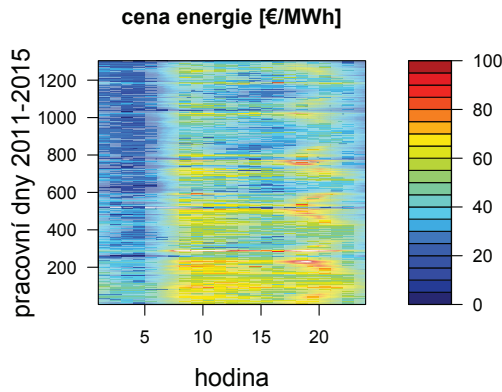


Obrázek 6.10: Cena elektrické energie na trhu v období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015 [€/MWh]

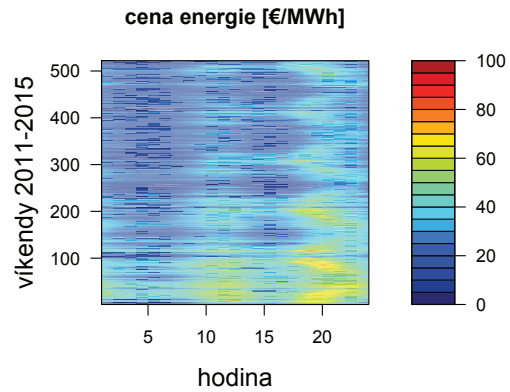


Obrázek 6.11: Cena elektrické energie na trhu v týdnu od 12. do 18. 10. 2015 [€/MWh]





Obrázek 6.12: Závislost ceny elektrické energie na hodině v průběhu pracovních dnů z let 2011 až 2015 [€/MWh]



Obrázek 6.13: Závislost ceny elektrické energie na hodině v průběhu víkendů z let 2011 až 2015 [€/MWh]

### Modelování ceny elektřiny v pracovní dny

Cenu elektrické energie na trhu v pracovní den budeme modelovat jako multiplikační sezónní proces (4.5) postupem popsaným v části 4.2.2 čtvrté kapitoly, přičemž model odhadneme na základě dat z pracovních týdnů. Máme k dispozici časovou řadu ceny elektrické energie na trhu  $\lambda_t$  v pracovních dnech období 1. 1. 2011 až 11. 10. 2015, tj. celkem 29880 pozorování. Řadu nejprve transformujeme pomocí jednorozměrné verze Boxovy-Coxovy transformace (4.4). Typový parametr odhadneme jako 1.13, úrovnový parametr zvolíme 150.1. Označme takto transformovanou časovou řadu  $\lambda_t^*$ .

### Stacionarizace diferencováním a identifikace zbylých parametrů

Uvažujeme sezónu v rámci dne, tj.  $s = 24$ . Transformovanou časovou řadu se nejprve pokusíme stacionarizovat diferencováním. Položme řád sezónní difference  $D = 0$ , tj. budeme pracovat s řadou  $\Delta_{24}^0 \lambda_t^* = \lambda_t^*$ . Řád difference  $d$  multiplikačního sezónního procesu (4.5) pak určíme pomocí testů na jednotkový kořen. Na základě ADF-testu nezamítáme na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu nestacionarity řady  $\lambda_t^*$ . Současně však KPSS-testem nezamítáme na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu stacionarity. Výsledek testů je tedy neprůkazný. Pokusíme se proto najít vhodný model pro volbu  $d = 0$  a dále pokračovat volbou  $d = 1$ . Při volbě  $d = 0$  zvolíme na základě minimalizace Bayesova informačního kritéria jako nejlepší model  $\text{SARIMA}(5,0,4) \times (1,0,0)_{24}$ . Převrácené hodnoty kořenů autoregresního polynomu (4.6) leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině a tedy model je stacionární.

Při volbě  $D = 0$ ,  $d = 1$  pracujeme s řadou prvních diferencí  $\Delta^1 \lambda_t^* = \lambda_t^* - \lambda_{t-1}^*$ . Zde již na základě ADF-testu zamítáme na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu nestacionarity řady  $\Delta^1 \lambda_t^*$  a současně KPSS-testem nezamítáme na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu stacionarity. Stacionaritě řady  $\Delta^1 \lambda_t^*$  můžeme tedy považovat za potvrzenou. Vyšší řády difference  $d$  již není nutné uvažovat. Na základě minimalizace Bayesova informačního kritéria pak zvolíme jako nejlepší model  $\text{SARIMA}(1,1,5) \times (1,0,0)_{24}$ , pro který je splněna podmínka stacionarity.

Položme nyní řád sezónní difference  $D = 1$ , tj. budeme pracovat s řadou

$\Delta_{24}^1 \lambda_t^* = \lambda_t^* - \lambda_{t-24}^*$ . Na základě ADF-testu zamítáme na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu nestacionarity řady  $\Delta_{24}^1 \lambda_t^*$  a současně KPSS-testem nezamítáme na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu stacionarity. Stacionaritě řady  $\Delta_{24}^1 \lambda_t^*$  můžeme tedy považovat za potvrzenou, tj. volíme  $d = 0$ . Vyšší řády diference  $d$  již není nutné uvažovat. Na základě minimalizace Bayesova informačního kritéria pak zvolíme jako nejlepší model  $\text{SARIMA}(5,0,1) \times (1,1,2)_{24}$ , pro který je splněna podmínka stacionarity.

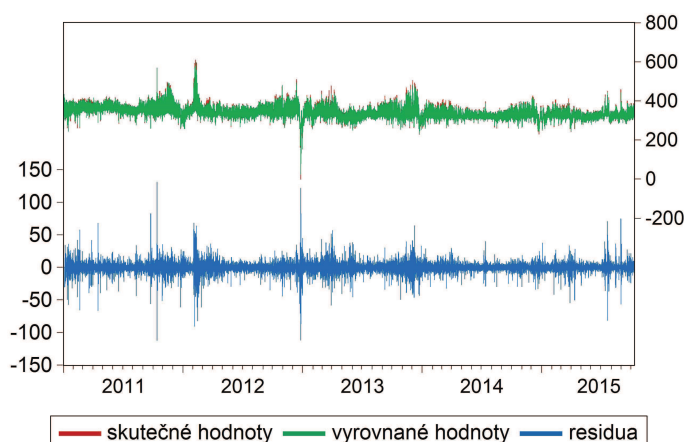
## Výběr výsledného modelu

Výsledný model vybereme z modelů  $\text{SARIMA}(5,0,4) \times (1,0,0)_{24}$ ,  $\text{SARIMA}(1,1,5) \times (1,0,0)_{24}$  a  $\text{SARIMA}(5,0,1) \times (1,1,2)_{24}$ , přičemž se zaměříme především na předpovědní schopnosti modelů. Na základě grafického zhodnocení předpovědi pro optimalizační období (tzv. předpověď mimo vzorek) i při porovnání hodnot predikčních kritérií předpovědi ve vzorku se jeví jako jednoznačně nejlepší model  $\text{SARIMA}(5,0,1) \times (1,1,2)_{24}$ . Při předpovědi ve vzorku chceme konkrétně minimalizovat odmocninovou střední čtvercovou chybu RMSE, střední absolutní chybu MAE a střední absolutní procentní chybu MAPE (viz Cipra (2008, sekce 8.2.3., část 7.)).

Dále tedy pracujeme s modelem  $\text{SARIMA}(5,0,1) \times (1,1,2)_{24}$ . Na obrázku 6.14 jsou spolu se skutečnými hodnotami vykresleny vyrovnané hodnoty a residua modelu. Připomeňme, že modelujeme již transformovanou časovou řadu ceny elektrické energie. Z obrázku je patrné, že vyrovnané hodnoty dobře pokrývají skutečné hodnoty časové řady.

## Verifikace modelu

Jak již bylo řečeno, model splňuje podmínku stacionarity, neboť převrácené hodnoty všech kořenů odhadnutého autoregresního polynomu (4.6) leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině. Převrácené hodnoty kořenů polynomu klouzavých součtů (4.7) pak leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině a tedy model je invertibilní.



Obrázek 6.14: Skutečné hodnoty, vyrovnané hodnoty a residua modelu  $\text{SARIMA}(5,0,1) \times (1,1,2)_{24}$

Dosaženou shodu korelační struktury odhadnuté z dat s korelační strukturou vypočtenou z odhadnutého modelu lze na základě grafické kontroly považovat za dostatečnou pro potvrzení adekvátnosti modelu. Pomocí jednovýběrového t-testu nezamítáme hypotézu nulové střední hodnoty residuů. Na základě Q-testu nezamítáme předpoklad nekorelovanosti residuální složky.

Jarque-Bera test zamítá nulovou hypotézu normality residuální složky. Na obrázku 6.15 je zobrazen takzvaný Q-Q graf residuů. Platí zde, že v ideálním případě (tj. při normálním rozdělení) by se měly body grafu nacházet na vykreslené ose, což je do jisté míry splněno. Nicméně je z grafu patrný tvar křivky do písmene „S“, což může značit jinou špičatost oproti normálnímu rozdělení.

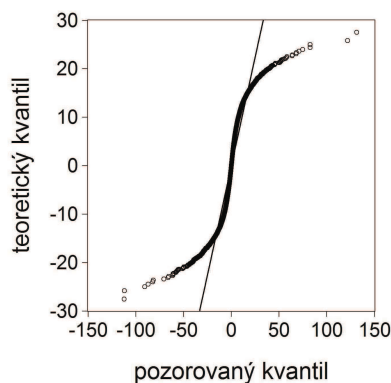
Pomocí ARCH testu zamítáme nulovou hypotézu homoskedasticity residuální složky. Předpoklad homoskedasticity lze také diskutovat z obrázku 6.16, na kterém jsou vykreslena vypočtená residua proti vyrovnaným hodnotám. Zde je patrné rozložení residuů v rovnoměrném páse kolem nulové hodnoty, což nenažnačuje problémy s homoskedasticitou.

Všechny zmíněné statistické testy provádíme na hladině významnosti 5 %.

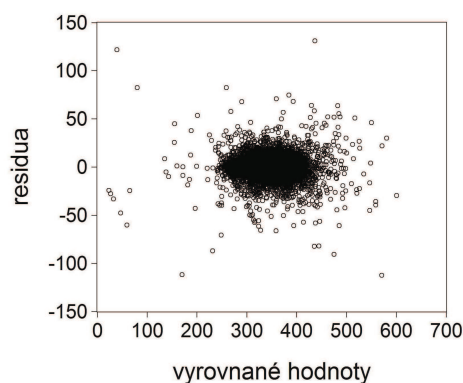
## Modelování ceny elektřiny o víkendech

Analogicky modelujeme cenu elektrické energie o víkendu, zde však model odhadujeme na základě dat z víkendových dnů za období 1. 1. 2011 až 11. 10. 2015, tj. celkem 12000 pozorování. Transformovanou časovou řadu ceny se opět snažíme stacionarizovat diferencováním, přičemž postupně dospějeme k modelům SARIMA(3,0,2) × (0,0,2)<sub>24</sub>, SARIMA(2,1,3) × (0,0,2)<sub>24</sub> a SARIMA(1,0,3) × (1,1,1)<sub>24</sub>.

Na základě lepších předpovědních schopností vybereme jako výsledný model SARIMA(1,0,3) × (1,1,1)<sub>24</sub>. Model splňuje podmínku stacionarity a invertibility a dosaženou shodu korelační struktury lze považovat za dostatečnou pro potvrzení adekvátnosti modelu. Na základě našich dat nezamítáme nulovou hypotézu nekorelovanosti residuální složky, ani hypotézu nulové střední hodnoty residuů. Jarque-Bera test však opět zamítá nulovou hypotézu normality residuální složky, stejně tak ARCH test zamítá nulovou hypotézu homoskedasticity residuální složky.



Obrázek 6.15: Q-Q graf residuů



Obrázek 6.16: Vypočtená residua vs. vyrovnané hodnoty

## 6.4.4 Konstrukce scénářů ceny elektrické energie na trhu

Scénáře konstruuje pro optimalizační horizont krátkodobé úlohy řízení, tedy na 48 hodin. Konstrukce scénářů probíhá postupem popsáním v části 4.3.2 na základě scénářového stromu zavedeného v části 4.3.3, vztahu (4.10) pro predikci modelem  $SARIMA(5,0,1) \times (1,1,2)_{24}$ , respektive  $SARIMA(1,0,3) \times (1,1,1)_{24}$  a vztahu (4.11) pro konstrukci scénářů. Analogicky jako v případě přítoků uvažujeme větvení scénářového stromu z obrázku 4.1 v každé čtvrté hodině, tj.  $a = 4$ , a to až do 24. hodiny, tj.  $b = 24$ . Celkem tedy opět zkonstruuje  $2^{\lceil 24/4 \rceil} = 64$  scénářů, přičemž každému přiřadíme stejnou pravděpodobnost, tj.  $q_r = \frac{1}{64}$ . Pro generování realizací z normálního rozdělení v programu R použijeme funkci *rnorm*.

Jelikož máme kategorizovaná data na pracovní dny a víkendy, nastává otázka, jak postupovat při generování scénářů na pátek až sobotu, respektive na neděli až pondělí. Pokud bychom začali generovat scénáře na neděli, po 24. hodině bychom již zřejmě generovali scénáře na další sobotu. Toho jednoduše využijeme při generování scénářů na pátek až sobotu, kdy nagerujeme pouze prvních 24 pátečních hodin, na které následně napojíme již zkonstruované scénáře na sobotu. Analogicky bychom napojovali scénáře při přechodu z víkendu na pracovní den.

Zkonstruované scénáře hodinových cen elektřiny jsou pro optimalizační horizonty 12.-13. 10. 2015, 16.-17. 10. 2015 a 17.-18. 10. 2015 zobrazeny na obrázcích 6.17-6.19. Na obrázku 6.18 jsou zobrazeny scénáře vygenerované na prvních 24 pátečních hodin, na které je napojena druhá půlka scénářů generovaných od neděle 11. 10. 2015.

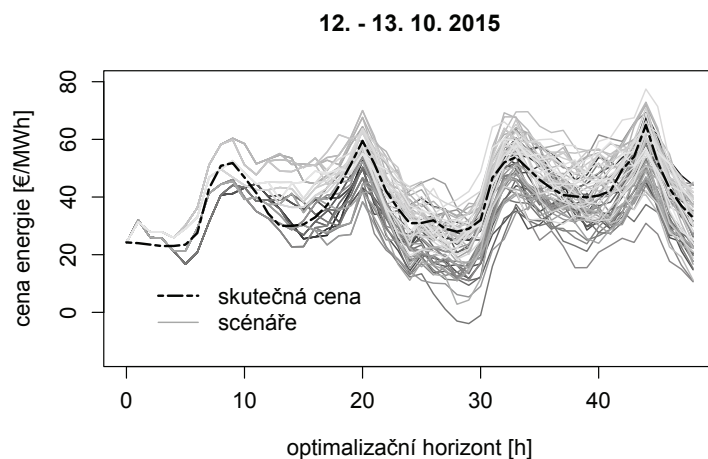
## 6.5 Sezónní deterministická úloha oceňování vody

Ceny vody uskladněné v jednotlivých nádržích odhadneme postupem popsáním v páté kapitole. Uvažujeme sezónní úlohu (5.8) s týdenním krokem, tj.  $\Delta = 168$  h, přičemž poslední týden  $T$  je zvolené období od 12. do 18. 10. 2015. Připomeňme, že i přes týdenní agregaci uvažujeme hodinové řízení turbín, přečerpávacích stanic a spodních výpustí, tj.  $\Delta_0 = 1$  h. Budeme předpokládat přibližně roční hydrologický cyklus odtoku Vltavské kaskády. Jelikož měl rok 2014 celkem 52 týdnů, budeme uvažovat optimalizační horizont  $\tau = \{1, \dots, 52\}$ . Vstupní data, která nám byla poskytnuta v hodinovém kroku, nahradíme pro úlohu oceňování týdenními průměry.

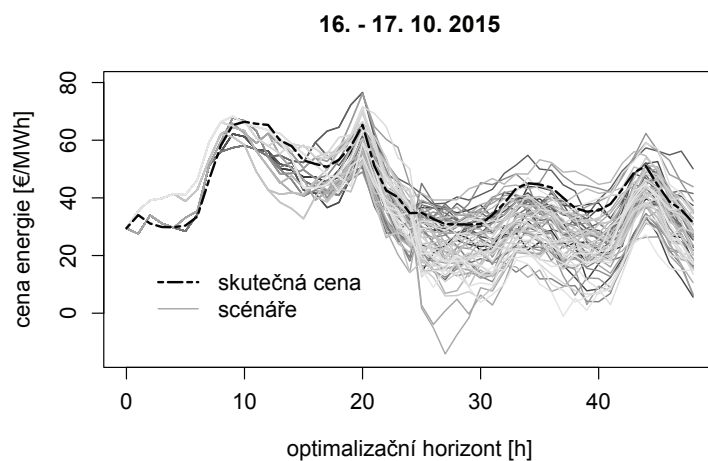
Sestavenou úlohu (5.8) dále rozšíříme o podmínky plynoucí z reálné situace na Vltavské kaskádě. Konkrétně se jedná o již zmíněnou podmínku (6.1) nepřetržitého provozu malé vodní elektrárny Lipno 1, kterou nyní formulujeme jako

$$u^3(t, h) = 1 \quad \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta. \quad (6.2)$$

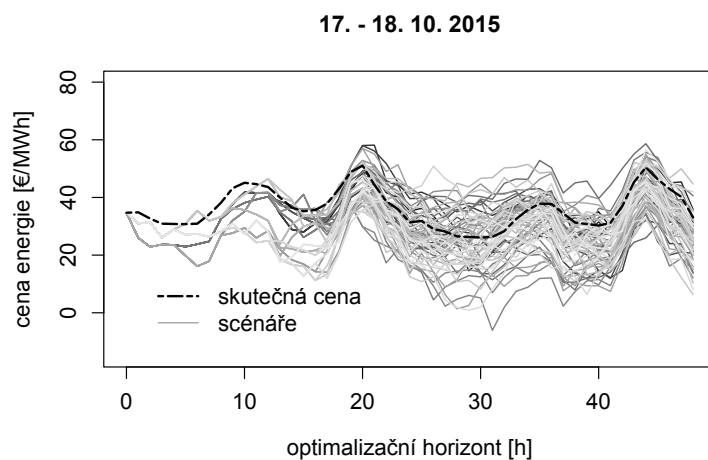
Jelikož je v reálné situaci podmínka udržet odtok z Vltavské kaskády, tedy z nádrže Vrané, nad stanovenou minimální hranicí jednou z nejdůležitějších, budeme ji speciálně uvažovat v hodinovém kroku. Pro vodní nádrž Vrané tedy neuvažujeme podmínku (2.4) na minimální průměrný týdenní odtok vody z nádrže,



Obrázek 6.17: Scénáře ceny elektrické energie na trhu spolu se skutečnými hodnotami [€/MWh] pro období 12.-13. 10. 2015



Obrázek 6.18: Scénáře ceny elektrické energie na trhu spolu se skutečnými hodnotami [€/MWh] pro období 16.-17. 10. 2015



Obrázek 6.19: Scénáře ceny elektrické energie na trhu spolu se skutečnými hodnotami [€/MWh] pro období 17.-18. 10. 2015

ale formulujeme ji jako

$$\underline{f}^{\text{Vrané}}(t) \leq x_0^{\text{Vrané}}(t, h) + \sum_{i \in \sigma_{\tau}^{-1}[\text{Vrané}]} x^i(t, h) \quad \forall t \in \tau, \forall h = 1, \dots, \Delta. \quad (6.3)$$

Horní omezení na odtok z nádrže Vrané ponecháváme v týdenním kroku.

Cenu vody uskladněné v nádrži  $n \in \mathcal{N}$  odhadneme jako duální proměnnou k podmínkám rovnováhy (2.6) pro nádrž  $n$  v týdnu  $T = 52$  sezónní deterministické úlohy (5.8) s dodatečnými podmínkami (6.2) a (6.3).

Úlohu řešíme v programu GAMS (GAMS Development Corporation, 2013) pomocí řešitele Cplex (viz GAMS Development Corporation (2002)), který používá pro řešení smíšeného celočíselného programování metodu větvení a řezů, tzv. „Branch and cut method“ (viz například Caccetta (2000)). Příslušný kód spolu s výstupy z programu lze najít na přiloženém disku. Vstupní data nejsou veřejná a nenachází se proto na přiloženém disku.

### 6.5.1 Výsledky úlohy

Výsledné ceny roční úlohy oceňování vody ve Vltavské kaskádě pro poslední optimalizační týden jsou pro obě varianty (viz sekce 6.1.1) uvedeny v tabulce 6.4, přičemž jsou zatím při řízení použity skutečné hodnoty minimálních a maximálních možných objemů vody v nádržích. Cenu vody v nádrži tedy zatím nijak nekategorizujeme, respektive se jedná o odhady cen vody v kategorii nádrže, ve které se během ročního řízení můžeme pohybovat.

Z tabulky 6.4 je patrný růst ceny vody od dolní nádrže k nádrži horní. Připomeňme, že za horní nádrže kaskády považujeme Lipno 1 a také Štěchovice 2. Ve výše položené nádrži zřejmě očekáváme vyšší cenu vody, neboť se tato voda podílí na výrobě i níže v soustavě. Z tabulky si dále můžeme všimnout, že cena vody v nádržích v případě první varianty je vyšší než v případě varianty druhé a to pro všechny nádrže kromě dvou nejnižše položených – Štěchovice 1 a Vrané.

Tabulka 6.4: Odhady ceny vody roční úlohy oceňování Vltavské kaskády pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]

nádrž	odhad ceny vody v nádrži [€/m <sup>3</sup> ]	
	varianta 1	varianta 2
Lipno 1	0.042195	0.038624
Lipno 2	0.022920	0.021583
Hněvkovice	0.021894	0.020264
Kořensko	0.019643	0.018209
Orlík	0.019091	0.017590
Kamýk	0.010224	0.009751
Slapy	0.008657	0.008299
Štěchovice 1	0.002435	0.002551
Štěchovice 2	0.023894	0.022646
Vrané	0.000851	0.000871

Cílem sezónní deterministické úlohy je odhadnout cenu vody v jednotlivých nádržích, která je důležitým vstupem pro úlohu samotného řízení Vltavské kaskády. Ze všech výstupů úlohy uvedeme proto dále jen ty hlavní. V tabulce 6.5 jsou prezentovány vybrané souhrnné výsledky ročního řízení, především optimální hodnota účelové funkce, tj. celkový zisk z využití vodní energie. Poznamenejme, že celkový roční zisk je vyšší v případě druhé varianty konkrétně o zhruba 7.7 mil. €. Na základě výsledků úlohy oceňování je tedy možnost přečerpávání na Orlicku výhodná. Na obrázcích 6.20-6.22 jsou pak uvedeny objemy vody v jednotlivých nádržích v průběhu optimalizačního období sezónní úlohy oceňování.

## 6.5.2 Ceny vody závislé na objemu

Objem vody v každé nádrži soustavy dále kategorizujeme postupem popsáním v sekci 5.2.1 páté kapitoly. Uvažujme pevné  $n \in \mathcal{N}$ . Počáteční hodnotu  $V_0^n$  zavedené diskretizace

$$V_0^n, \dots, V_{K_n}^n$$

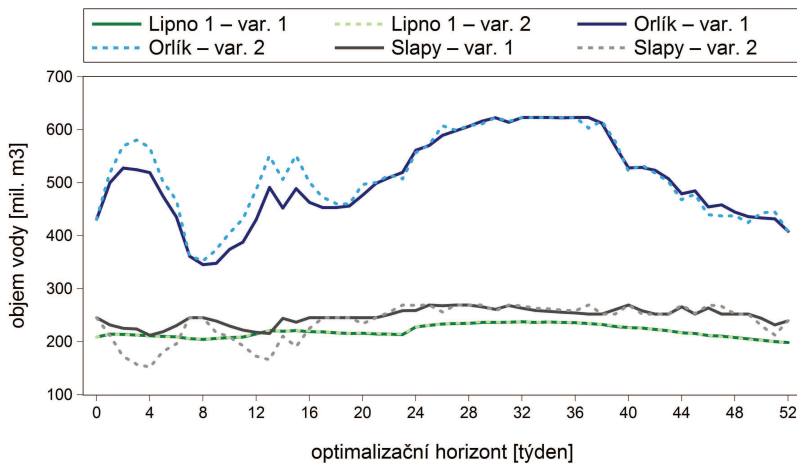
položíme rovnu minimu z  $V_{min}^n(t)$  přes  $t$  z týdne od 12. do 18. 10. 2015, ve kterém probíhá krátkodobé řízení. A to prozatím i v případě, že má nádrž náhodný přítok. Za koncovou hodnotu  $V_{K_n}^n$  vezmeme prozatím celkový prostor nádrže, což je v případě nádrží s deterministickým přítokem zároveň maximum z  $V_{min}^n(t)$  přes  $t$  z týdne od 12. do 18. 10. 2015.

### Kategorizování odhadnutých cen

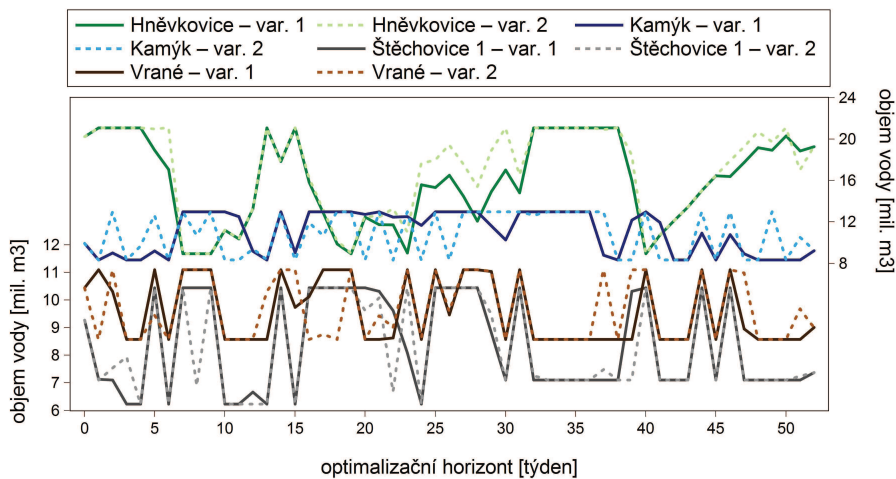
Pro určení hodnot diskretizace  $V_1^n, \dots, V_{K_n-1}^n$  budeme postupně řešit roční úlohu oceňování s položením  $V_{min}^n(t) := V_0^n$ ,  $V_{max}^n(t) := V_i^n$  pro všechna  $t \in \tau$  a pevné  $n \in \mathcal{N}$ , přičemž objem  $V_i^n$  vhodně volíme z intervalu  $(V_0^n, V_{K_n}^n]$ . Postupně tak odhadneme ceny vody  $W_{0,i}^n$  v kategorii  $[V_0^n, V_i^n)$ , které jsou pro každou nádrž a každou z variant zobrazeny na obrázcích 6.23-6.32 (pozorování označená čtverečkem a spojena přerušovanou čarou). Odhadnuté ceny vody jsou dále aproximovány po částech konstantní zprava spojitou funkcí (plná čára), čímž dochází k vytvoření diskretizace  $V_0^n, \dots, V_{K_n}^n$  a příslušných kategorií. Vodní nádrž Štěchovice 2 kvůli malé kapacitě není nutné kategorizovat.

Tabulka 6.5: Výsledky roční úlohy oceňování Vltavské kaskády [€/m<sup>3</sup>]

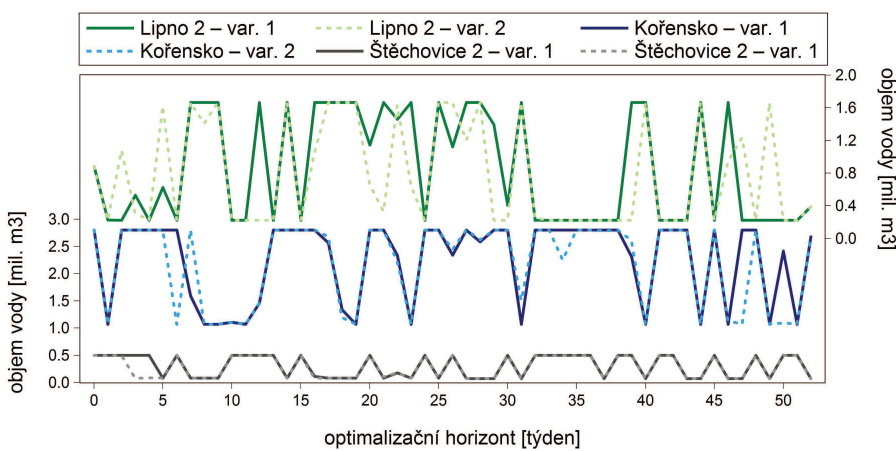
	varianta 1	varianta 2
celková cena vyrobené energie [€]:	39151096.5	62654300.1
celková cena energie využité k přečerpávání [€]:	3129152.2	18896372.7
celkový zisk z využití vodní energie [€]:	36021944.3	43757927.4
celkový odtok [m <sup>3</sup> ]:	1893003484.6	1893003484.6
celkový vnější přítok [m <sup>3</sup> ]:	1900300325.8	
celkový odběr vody [m <sup>3</sup> ]:	52330474.6	



Obrázek 6.20: Objem vody v nádržích Lipno 1, Orlík a Slapy v průběhu optimalizačního období sezónní úlohy oceňování [mil. m<sup>3</sup>]

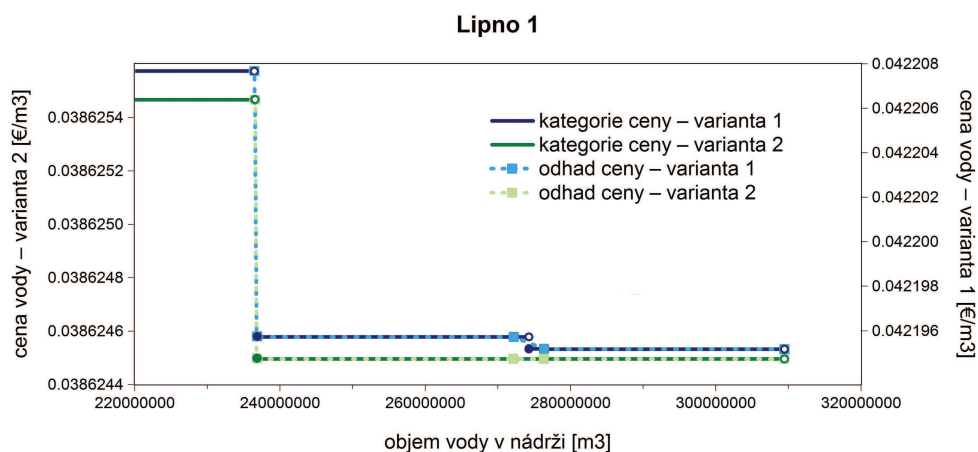


Obrázek 6.21: Objem vody v nádržích Hněvkovice, Kamýk, Štěchovice 1 a Vrané v průběhu optimalizačního období sezónní úlohy oceňování [mil. m<sup>3</sup>]

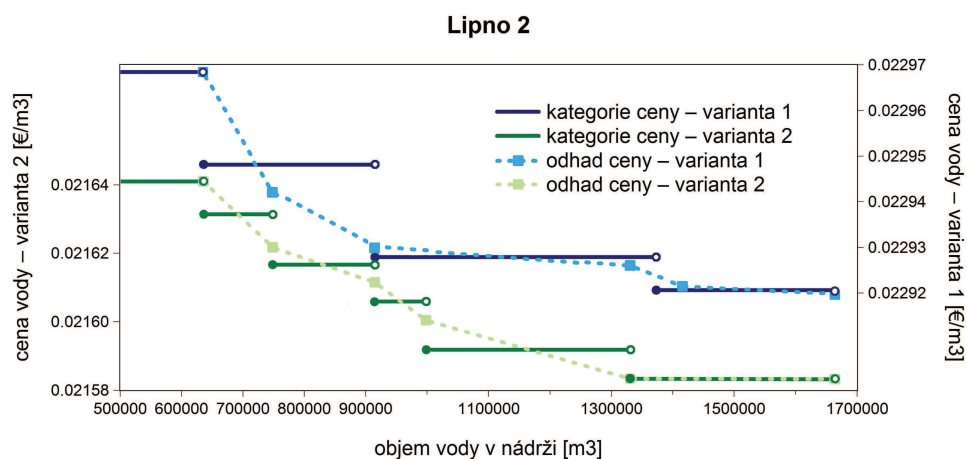


Obrázek 6.22: Objem vody v nádržích Lipno 2, Kořensko a Štěchovice 2 v průběhu optimalizačního období sezónní úlohy oceňování [mil. m<sup>3</sup>]

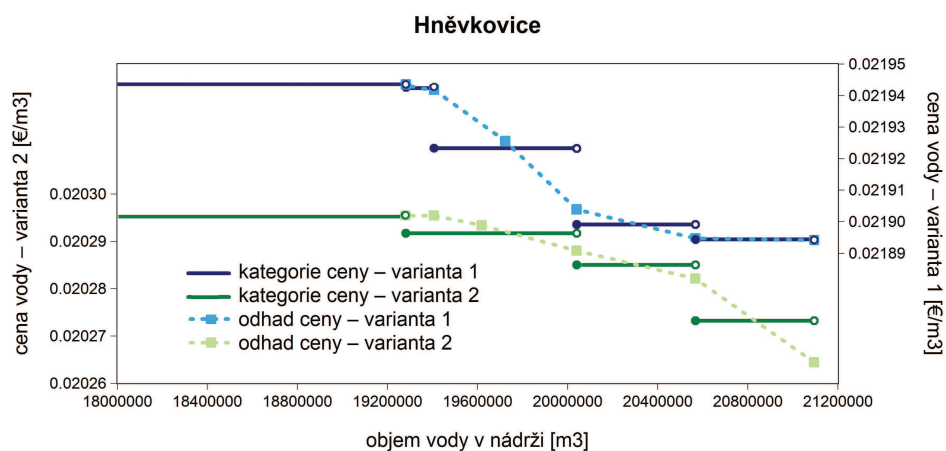




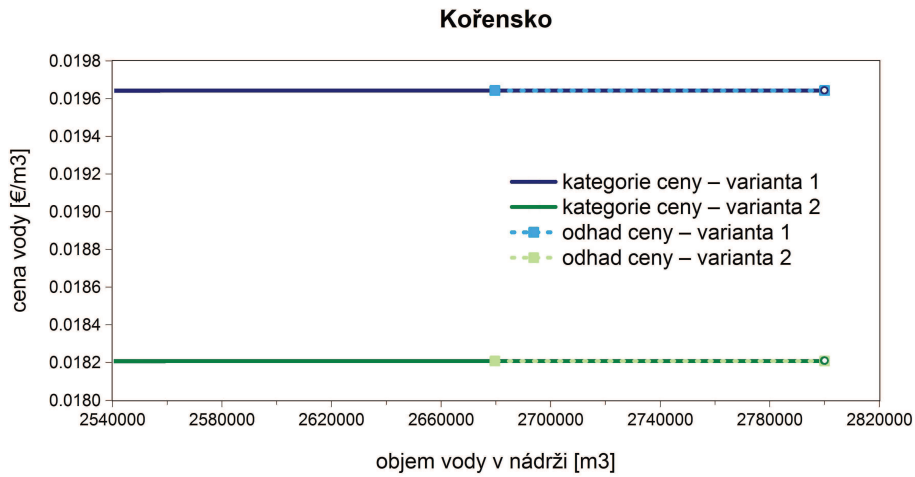
Obrázek 6.23: Kategorizování ceny vody v nádrži Lipno 1 pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]



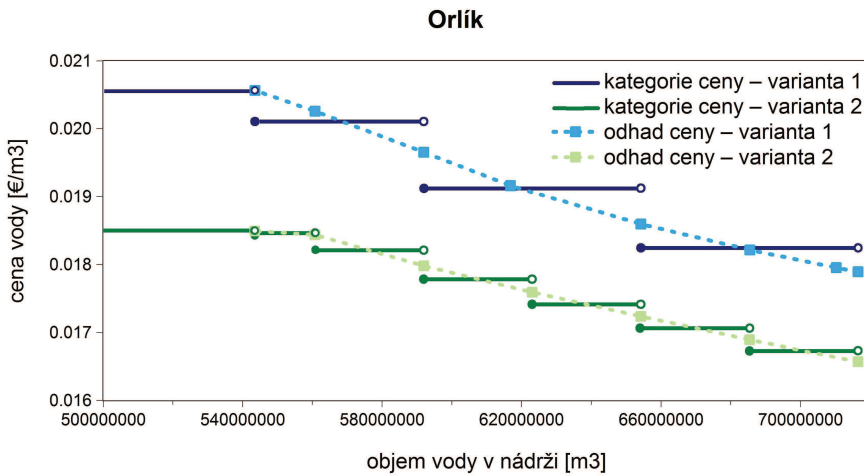
Obrázek 6.24: Kategorizování ceny vody v nádrži Lipno 2 pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]



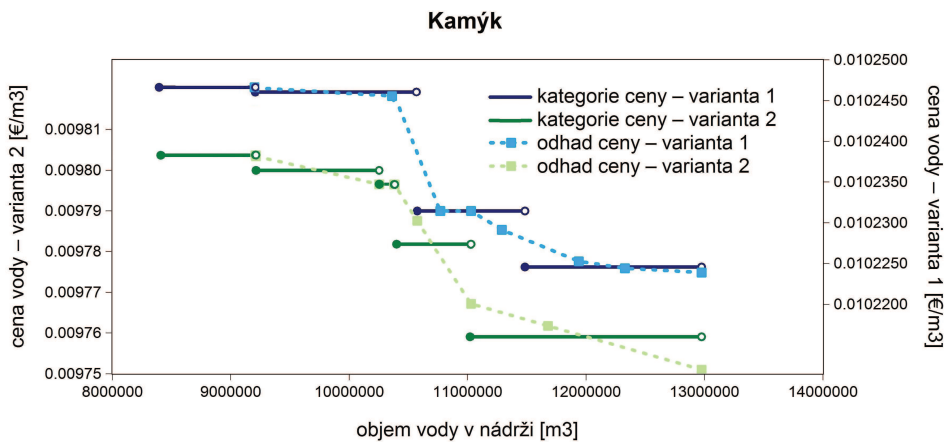
Obrázek 6.25: Kategorizování ceny vody v nádrži Hněvkovice pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]



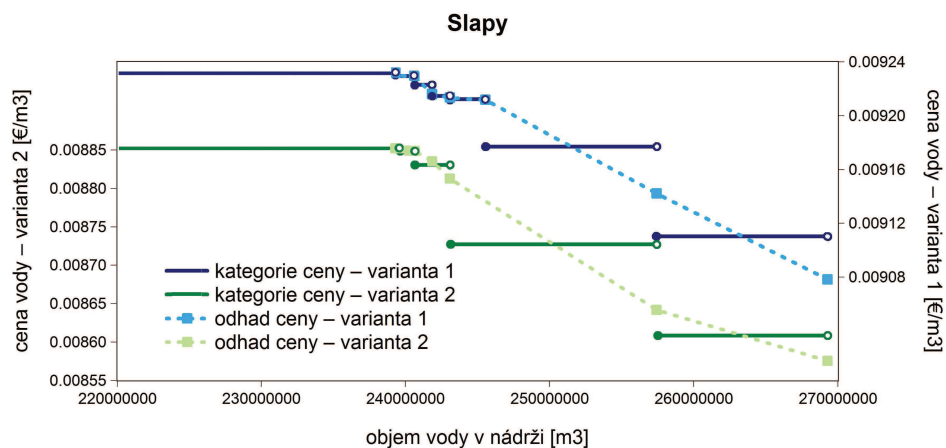
Obrázek 6.26: Kategorizování ceny vody v nádrži Kořensko pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]



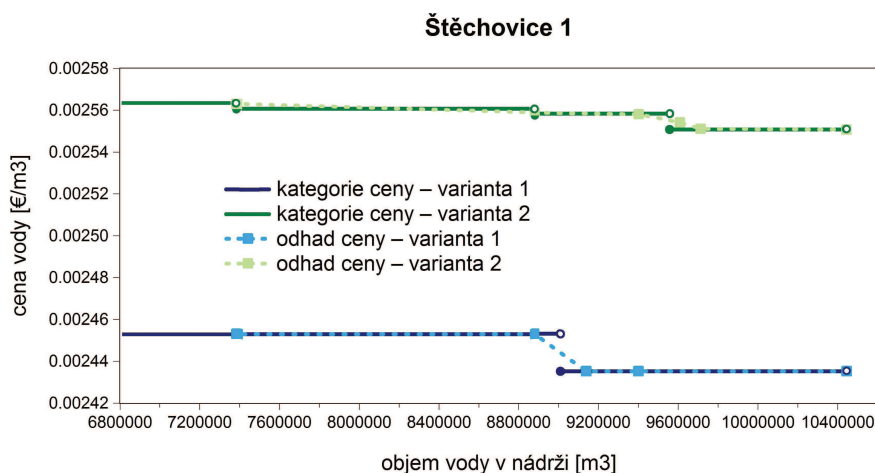
Obrázek 6.27: Kategorizování ceny vody v nádrži Orlík pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]



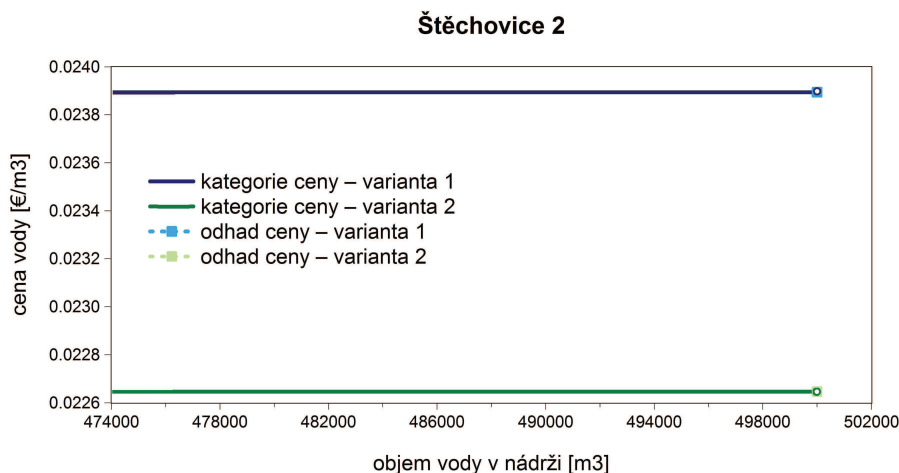
Obrázek 6.28: Kategorizování ceny vody v nádrži Kamýk pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]



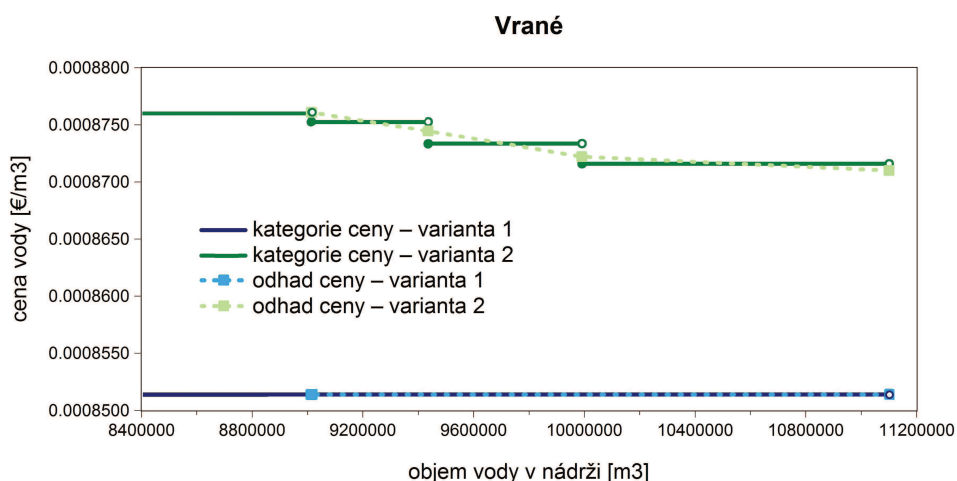
Obrázek 6.29: Kategorizování ceny vody v nádrži Slapy pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]



Obrázek 6.30: Kategorizování ceny vody v nádrži Štěchovice 1 pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]



Obrázek 6.31: Kategorizování ceny vody v nádrži Štěchovice 2 pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]



Obrázek 6.32: Kategorizování ceny vody v nádrži Vrané pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m<sup>3</sup>]

### Výsledné ceny vody v jednotlivých kategoriích

Aproximací tak dostáváme jednotlivé kategorie a příslušné ceny vody. Zdůrazněme, že se však vždy jedná o cenu vody  $W_{0,i}^n$ ,  $i = 1, \dots, K_n$ , tedy cenu v celé kategorii  $[V_0^n, V_i^n)$ . Výsledné ceny  $W_i^n$ , tedy již ceny vody v jednotlivých kategoriích  $[V_{i-1}^n, V_i^n)$  dopočítáme podle vzorce (5.10). Jelikož mají vzniklé kategorie různý objem, není zaručeno, že budou výsledné ceny  $W_i^n$  (striktně) rostoucí s klesající úrovní vodní kladiny. V takovém případě je nutné vhodně sjednotit některé sousední kategorie.

Pro nádrže Lipno 2, Kamýk, Slapy a Štěchovice 2 mající deterministický přítok máme zajištěno, že se jejich objem bude při řízení pohybovat v zavedených kategoriích. Pro nádrže s náhodným přítokem budeme uvažovat cenu vody v nádrži pod hranicí  $V_0^n$  stejnou, jako v nejnižší oceněné objemové kategorii  $[V_0^n, V_1^n)$ . Jednoduše tedy pouze položíme  $V_0^n := 0 \text{ m}^3 \forall n \in \mathcal{N}^r$ , přičemž cena  $W_1^n$  se nezmění.

Nádrže Lipno 1 a Orlík mají sice náhodný přítok, nicméně mají ochranný prostor, který je také kategorizován. Zbylé nádrže Hněvkovice, Kořensko, Štěchovice 1 a Vrané ochranný prostor nemají a jejich objem by se tedy teoreticky mohl při řízení dostat nad celkovou kapacitu nádrže. Pro tyto nádrže proto zavedeme další objemovou kategorii  $[V_{K_n}^n, V_{K_n}^n \cdot 1.1)$ . Jelikož kategorii zavádíme pouze za účelem, aby nemohlo dojít k nesplnění podmínky (2.18), přiřadíme jí cenu  $0 \text{ €/m}^3$ .

Výsledné ceny vody  $W_i^n$  v kategoriích  $[V_{i-1}^n, V_i^n)$  jsou pro jednotlivé nádrže Vltavské kaskády a pro obě varianty uvedeny v tabulce 6.6. Bylo-li nutné některé kategorie sloučit, jsou v závorce uvedeny odpovídající původní kategorie znázorněné na obrázcích 6.23-6.32. Z tabulky je patrné, že cena vody v každé nádrži roste se snižující se objemovou kategorií  $i$ . Ve většině případů je také více ceněná voda ve výše položené nádrži. Výjimkou je Orlík, v jehož nejspodnější kategorii má v obou variantách voda větší cenu než ve výše položené nádrži Kořensko.

Tabulka 6.6: Výsledné kategorie a ceny vody pro týden od 12. do 18. 10. 2015

nádrž	varianta 1			varianta 2		
	kategorie	diskretizace	cena vody v kategorii	kategorie	diskretizace	cena vody v kategorii
$n$	$i$	$V_i^n$ [m <sup>3</sup> ]	$W_i^n$ [€/m <sup>3</sup> ]	$i$	$V_i^n$ [m <sup>3</sup> ]	$W_i^n$ [€/m <sup>3</sup> ]
Lipno 1	2 (2+3)	309502000	0.042159	2	309502000	0.038622
	1 (1)	236551320	0.042208	1	236606589	0.038625
		0			0	
Lipno 2	4	1664000	0.022892	4 (4+5+6)	1664000	0.021552
	3	1372800	0.022897	3 (3)	915200	0.021570
	2	915200	0.022918	2 (2)	748800	0.021596
	1	635648	0.022969	1 (1)	635648	0.021641
		222000			222000	
Hněvkovice	5 (-)	23204500	0	5	23204500	0
	4 (4+5)	21095000	0.021591	4	21095000	0.020013
	3 (3)	20040250	0.021602	3	20567625	0.020144
	2 (2)	19407400	0.021871	2	20040250	0.020241
	1 (1)	19280830	0.021944	1	19280830	0.020295
	0			0		
Kožensko	2	3080000	0	2	3080000	0
	1	2800000	0.019643	1	2800000	0.018209
		0			0	
Orlík				7	716500000	0.012369
				6	685385800	0.012878
				5	654231900	0.013310
	4	716500000	0.012954	4	623078000	0.013541
	3	654231900	0.014197	3	591924100	0.015904
	2	591924100	0.017630	2	560770200	0.018044
	1	543510939	0.020564	1	543510939	0.018493
		0			0	
Kamýk				5	12976000	0.009727
				4	11029600	0.009735
	3 (3+4)	12976000	0.010204	3	10380800	0.009745
	2 (2)	10575440	0.010246	2	10251040	0.009797
	1 (1)	9212960	0.010247	1	9212960	0.009803
		8324000			8324000	
Slapy				5	269300000	0.006726
	4 (7)	269300000	0.008049	4	257422350	0.007469
	3 (4+5+6)	257422350	0.008668	3	243089253	0.007564
	2 (2+3)	241861530	0.008693	2	240633806	0.008256
	1 (1)	239307865	0.009231	1	239663904	0.008852
		68800000			68800000	
Štěchovice 1				5	11488400	0
				4	10444000	0.002530
	3	11488400	0	3	9556260	0.002553
	2	10444000	0.002411	2	8877400	0.002560
	1	9007950	0.002453	1	7383908	0.002563
		0			0	
Štěchovice 2	1	500000	0.023894	1	500000	0.022646
		70000			70000	
Vrané				5	12211100	0
				4	11101000	0.000869
				3	9990900	0.000870
	2	12211100	0	2	9435850	0.000874
	1	11101000	0.000851	1	9014012	0.000876
		0			0	

## 6.6 Úloha řízení Vltavské kaskády

Nyní již přistoupíme k samotné úloze řízení Vltavské kaskády. Úlohu formulujeme jako smíšený celočíselný model se sdruženým pravděpodobnostním omezením (2.22), který doplníme o podmínku (6.1) nepřetržitého provozu malé vodní elektrárny Lipno 1, čímž je zajištěn také požadovaný minimální průtok pod nádrží. Stanovený minimální průtok je dále nutné udržet pod nádržemi Lipno 2, Hněvkovice a Vrané. Podmínku na minimální součet objemů vody ve vybraných nádržích klademe pro nádrže Lipno 1 a Lipno 2, dále pro Orlický, Kamýk, Slapy, Štěchovice 1 a Vrané. Poslední skupinou je Orlický a Slapy, kde hovoříme o takzvaném dispečerském grafu.

Budeme požadovat, aby pravděpodobnost, že budou splněny podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení byla alespoň  $\frac{63}{64} \doteq 0.984$ , tj.  $\alpha = \frac{63}{64}$ . Připomeňme, že máme 64 scénářů vnějších přítoků. Podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení mohou být tedy porušeny pro nejvýše jeden scénář přítoků. Úlohu (2.22) spolu s dodatečnou deterministickou podmínkou (6.1) pak převedeme postupem popsáním v sekci 4.4 čtvrté kapitoly na deterministickou úlohu smíšeného celočíselného lineárního programování (4.23).

Úlohu řešíme v programu GAMS (GAMS Development Corporation, 2013) pomocí řešitele Cplex (viz GAMS Development Corporation (2002)), který používá pro řešení smíšeného celočíselného programování metodu větvení a řezů, tzv. „Branch and cut method“ (viz například Caccetta (2000)). Příslušný kód spolu s výstupy z programu lze najít na přiloženém disku. Vstupní data nejsou veřejná a nenachází se proto na přiloženém disku.

Úlohu řízení řešíme pro optimalizační horizont 48 hodin, konkrétně řešíme pro každou variantu šest úloh s horizontem 12.-13. 10. 2015, 13.-14. 10. 2015, 14.-15. 10. 2015, 15.-16. 10. 2015, 16.-17. 10. 2015 a 17.-18. 10. 2015 (viz sekce 6.2). Z každé úlohy nás přitom zajímají výsledky pouze za prvních 24 hodin. Připomeňme, že kromě stávající podoby Vltavské kaskády – varianta 1 uvažujeme také možnost přečerpávání na vodní nádrži Orlický – varianta 2 (viz sekce 6.1.1).

### 6.6.1 Výsledky a diskuse

Výsledky úlohy řízení Vltavské kaskády pro obě varianty jsou pro jednotlivé dny od 12. do 17. 10. 2015 uvedeny v tabulkách 6.7 a 6.8. Pro každou variantu jsou uvedeny ceny vyrobené energie, ceny energie využitá k přečerpávání, zisk z využití vodní energie a odhad ceny použité vody (vše za prvních 24 hodin řízení). Připomeňme, že použitou vodou rozumíme rozdíl mezi počátečním a konečným objemem vody v nádrži. Dále je uvedena optimální hodnota účelové funkce za prvních 24 hodin dvoudenní úlohy řízení. Pro daný den je také uveden celkový vnější přítok a odtok ze soustavy a odtok a výroba, případně čerpání a náklady pro nádrž Orlický. Očekávané výsledky úlohy jsou pak zpětně přepočítány na hodnoty skutečné na základě napozorovaných hodnot vnějších přítoků a ceny energie. Souhrnné výsledky řízení za celé období 12.-17. 10. 2015 jsou uvedeny v tabulce 6.9.

Tabulka 6.7: Výsledky úlohy řízení Vltavské kaskády pro jednotlivé dny od 12. do 14. 10. 2015

12. 10. 2015	varianta 1		varianta 2	
	výsledky úlohy	skutečné hodnoty	výsledky úlohy	skutečné hodnoty
cena vyrobené energie [€]:	58048.52	60470.74	103197.84	107678.33
cena energie využité k přečerpávání [€]:	6417.86	6148.71	19744.80	19751.42
<b>zisk z využití vodní energie [€]:</b>	<b>51630.66</b>	<b>54322.03</b>	<b>83453.03</b>	<b>87926.92</b>
odhad ceny použité vody [€]:	-7259.57	-1325.18	29180.46	34637.17
<b>(optimální) hodnota účelové funkce [€]:</b>	<b>58890.23</b>	<b>55647.21</b>	<b>54272.57</b>	<b>53289.74</b>
celkový vnější přítok [m <sup>3</sup> ]:	2928292.67	2564037.80	2928292.67	2564037.80
celkový vnější odtok [m <sup>3</sup> ]:	3521612.59		3456000.00	
<b>celkové výsledky – Orlík:</b>				
odtok turbínami a spodními výpustmi [m <sup>3</sup> ]:	0.00		5192000.00	
objem přičerpané vody [m <sup>3</sup> ]:	0.00		2429300.00	
cena vyrobené energie [€]:	0.00		43943.64	
cena energie využité k přečerpávání [€]:	0.00		13602.71	

13. 10. 2015	varianta 1		varianta 2	
	výsledky úlohy	skutečné hodnoty	výsledky úlohy	skutečné hodnoty
cena vyrobené energie [€]:	54879.74	64446.55	93829.00	109361.48
cena energie využité k přečerpávání [€]:	7000.17	8352.15	30768.63	36803.15
<b>zisk z využití vodní energie [€]:</b>	<b>47879.57</b>	<b>56094.40</b>	<b>63060.37</b>	<b>72558.33</b>
odhad ceny použité vody [€]:	-5903.33	-2442.58	-7462.16	-4332.80
<b>(optimální) hodnota účelové funkce [€]:</b>	<b>53782.90</b>	<b>58536.98</b>	<b>70522.53</b>	<b>76891.13</b>
celkový vnější přítok [m <sup>3</sup> ]:	2710603.77	2526236.81	2710603.77	2526236.81
celkový vnější odtok [m <sup>3</sup> ]:	3456000.00		3456000.00	
<b>celkové výsledky – Orlík:</b>				
odtok turbínami a spodními výpustmi [m <sup>3</sup> ]:	0.00		4652000.00	
objem přičerpané vody [m <sup>3</sup> ]:	0.00		4314400.00	
cena vyrobené energie [€]:	0.00		45648.00	
cena energie využité k přečerpávání [€]:	0.00		28451.00	

14. 10. 2015	varianta 1		varianta 2	
	výsledky úlohy	skutečné hodnoty	výsledky úlohy	skutečné hodnoty
cena vyrobené energie [€]:	85343.43	92250.71	165772.97	178731.66
cena energie využité k přečerpávání [€]:	5969.52	7923.87	27038.40	35890.47
<b>zisk z využití vodní energie [€]:</b>	<b>79373.91</b>	<b>84326.84</b>	<b>138734.57</b>	<b>142841.19</b>
odhad ceny použité vody [€]:	37156.84	35800.12	95604.39	94357.23
<b>(optimální) hodnota účelové funkce [€]:</b>	<b>42217.07</b>	<b>48526.72</b>	<b>43130.18</b>	<b>48483.95</b>
celkový vnější přítok [m <sup>3</sup> ]:	2720297.93	2945207.83	2720297.93	2945207.83
celkový vnější odtok [m <sup>3</sup> ]:	3712171.32		4867441.77	
<b>celkové výsledky – Orlík:</b>				
odtok turbínami a spodními výpustmi [m <sup>3</sup> ]:	987536.52		6920000.00	
objem přičerpané vody [m <sup>3</sup> ]:	0.00		4158000.00	
cena vyrobené energie [€]:	10168.33		64968.56	
cena energie využité k přečerpávání [€]:	0.00		27966.60	

Tabulka 6.8: Výsledky úlohy řízení Vltavské kaskády pro jednotlivé dny od 15. do 17. 10. 2015

15. 10. 2015	varianta 1		varianta 2	
	výsledky úlohy	skutečné hodnoty	výsledky úlohy	skutečné hodnoty
cena vyrobené energie [€]:	163734.41	156432.02	264345.54	257185.63
cena energie využité k přečerpávání [€]:	11076.41	9763.09	42403.87	37841.86
<b>zisk z využití vodní energie [€]:</b>	<b>152658.01</b>	<b>146668.93</b>	<b>221941.67</b>	<b>219343.78</b>
odhad ceny použité vody [€]:	107765.91	96813.35	165468.49	155439.06
<b>(optimální) hodnota účelové funkce [€]:</b>	<b>44892.10</b>	<b>49855.58</b>	<b>56473.18</b>	<b>63904.71</b>
celkový vnější přítok [m <sup>3</sup> ]:	2867606.60	3455244.23	2867606.60	3455244.23
celkový vnější odtok [m <sup>3</sup> ]:	6722592.20		8123319.27	
<b>celkové výsledky – Orlík:</b>				
odtok turbínami a spodními výpustmi [m <sup>3</sup> ]:	3000000.00		10618048.55	
objem přečerpáné vody [m <sup>3</sup> ]:	0.00		5146000.00	
cena vyrobené energie [€]:	27428.60		96220.50	
cena energie využité k přečerpávání [€]:	0.00		33498.17	

16. 10. 2015	varianta 1		varianta 2	
	výsledky úlohy	skutečné hodnoty	výsledky úlohy	skutečné hodnoty
cena vyrobené energie [€]:	221920.58	233207.55	350341.38	371248.17
cena energie využité k přečerpávání [€]:	8894.26	7917.24	32996.23	29679.24
<b>zisk z využití vodní energie [€]:</b>	<b>213026.32</b>	<b>225290.31</b>	<b>317345.15</b>	<b>341568.93</b>
odhad ceny použité vody [€]:	101999.55	109652.91	165043.65	172035.08
<b>(optimální) hodnota účelové funkce [€]:</b>	<b>111026.77</b>	<b>115637.40</b>	<b>152301.50</b>	<b>169533.86</b>
celkový vnější přítok [m <sup>3</sup> ]:	4117489.50	3755215.52	4117489.50	3755215.52
celkový vnější odtok [m <sup>3</sup> ]:	7657635.67		8717628.22	
<b>celkové výsledky – Orlík:</b>				
odtok turbínami a spodními výpustmi [m <sup>3</sup> ]:	5179734.38		17885679.47	
objem přečerpáné vody [m <sup>3</sup> ]:	0.00		4158000.00	
cena vyrobené energie [€]:	55353.00		178067.97	
cena energie využité k přečerpávání [€]:	0.00		27943.20	

17. 10. 2015	varianta 1		varianta 2	
	výsledky úlohy	skutečné hodnoty	výsledky úlohy	skutečné hodnoty
cena vyrobené energie [€]:	27909.49	31763.20	70634.21	80648.45
cena energie využité k přečerpávání [€]:	4961.72	6234.53	43342.71	55091.50
<b>zisk z využití vodní energie [€]:</b>	<b>22947.77</b>	<b>25528.67</b>	<b>27291.49</b>	<b>25556.95</b>
odhad ceny použité vody [€]:	-49750.23	-46196.09	-48581.84	-45325.79
<b>(optimální) hodnota účelové funkce [€]:</b>	<b>72698.00</b>	<b>71724.76</b>	<b>75873.33</b>	<b>70882.74</b>
celkový vnější přítok [m <sup>3</sup> ]:	3823471.28	3780552.85	3823471.28	3780552.85
celkový vnější odtok [m <sup>3</sup> ]:	3456000.00		3456000.00	
<b>celkové výsledky – Orlík:</b>				
odtok turbínami a spodními výpustmi [m <sup>3</sup> ]:	0.00		6812000.00	
objem přečerpáné vody [m <sup>3</sup> ]:	0.00		6812000.00	
cena vyrobené energie [€]:	0.00		52761.87	
cena energie využité k přečerpávání [€]:	0.00		48856.97	



Tabulka 6.9: Celkové výsledky řízení Vltavské kaskády za období 12.-17. 10. 2015

	varianta 1		varianta 2	
	výsledky řízení	skutečné hodnoty	výsledky řízení	skutečné hodnoty
cena vyrobené energie [€]:	611836.17	638570.77	1048120.93	1104853.73
cena energie využité k přečerpávání [€]:	44319.92	46339.59	196294.64	215057.64
<b>zisk z využití vodní energie [€]:</b>	<b>567516.25</b>	<b>592231.18</b>	<b>851826.29</b>	<b>889796.09</b>
odhad ceny použité vody [€]:	184009.18	192302.53	399253.00	406809.96
<b>(optimální) hodnota účelové funkce [€]:</b>	<b>383507.07</b>	<b>399928.65</b>	<b>452573.29</b>	<b>482986.14</b>
celkový vnější přítok [m <sup>3</sup> ]:	19167761.75	19026495.03	19167761.75	19026495.03
celkový vnější odtok [m <sup>3</sup> ]:	28526011.79		32076389.26	
<b>celkové výsledky – Orlík:</b>				
odtok turbínami a spodními výpustmi [m <sup>3</sup> ]:	9167270.89		52079728.03	
objem přičerpané vody [m <sup>3</sup> ]:	0.00		27017700.00	
cena vyrobené energie [€]:	92949.93		481610.53	
cena energie využité k přečerpávání [€]:	0.00		180318.65	

Z tabulek 6.7-6.9 je zřejmé, že zisk z použití vodní energie, tj. rozdíl mezi cenou vyrobené energie a energie využité k přečerpávání, je ve všech šesti uvažovaných dnech vyšší v případě varianty 2 a to jak očekávaný tak skutečný. Celkově je za období 12.-17. 10. 2015 očekávaný zisk z využití vodní energie v případě 2. varianty o 284310.04 € větší než v případě 1. varianty. Skutečný zisk je pak větší o 297564.91 €.

Při obou variantách zřejmě během týdne využijeme různý objem vody. Vodu uskladněnou v jednotlivých nádržích máme navíc v každé variantě jinak oceněnou (viz tabulka 6.6). To je zohledněno v optimální hodnotě účelové funkce počítané pouze pro prvních 24 hodin úlohy řízení, kde od zisku z využití vodní energie odečítáme cenu použité vody. Optimální hodnota účelové funkce za prvních 24 hodin je v období 13.-17. 10. 2015 vyšší v případě varianty 2 a to opět jak očekávaná tak skutečná hodnota. Výjimku tvoří první optimalizační den 12. 10. 2015, kdy je tato hodnota vyšší v případě 1. varianty. To by mohlo být způsobeno skutečností, že počáteční objemy úlohy řízení pro 12. 10. 2015 vychází pro obě varianty z řízení kaskády ve stávající podobě. Při uvažování řízení podle varianty 2 již před optimalizačním týdnem by bylo nejspíš počáteční rozložení objemů vody v kaskádě jiné.

Celkově je za období 12.-17. 10. 2015 očekávaná optimální hodnota účelové funkce za prvních 24 hodin v případě 2. varianty o 69066.22 € větší než v případě 1. varianty. Skutečná hodnota je pak větší o 83057.48 €. V průběhu období 12.-17. 10. 2015 se tedy možnost přečerpávání na Orlíku v porovnání se stávající podobou Vltavské kaskády jeví jako ziskovější. A to jak v případě zisku čistě z využití vodní energie, tak i při odečtení ceny použité vody.

Obecně největší zisky pozorujeme v pátek 16. 10. 2015. Vrátime-li se k obrázku 6.18, na kterém jsou vykresleny scénáře cen na 16.-17. 10. 2015, je zřejmé, že na sobotu očekáváme pokles denní křivky ceny elektřiny. Díky tomu, že řešíme úlohu řízení s dvoudenním časovým horizontem, model počítá s poklesem cen od 24. hodiny. V prvních 24 hodinách proto při vyšších cenách vyrábí více.

Z tabulek 6.7-6.9 si dále můžeme všimnout, že skutečné hodnoty veličin představujících obecně cenu jsou větší než jejich očekávané hodnoty. Lze se proto

domnívat, že zkonstruované scénáře ceny elektřiny skutečnou cenu podhodnocují.

Skutečný vnější přítok je větší než očekávaný ve dnech 14. a 15. 10. 2015, ve zbylých dnech je tomu naopak. Celkově je za období 12.-17. 10. 2015 očekávaný vnější přítok o 141266.72 m<sup>3</sup> větší než přítok skutečný. Odtok z kaskády, tj. celkový odtok z nádrže Vrané, je pro 2. variantu o 3550377.48 m<sup>3</sup> větší než pro 1. variantu. V případě 1. varianty je tedy voda v nádrži více zadržována.

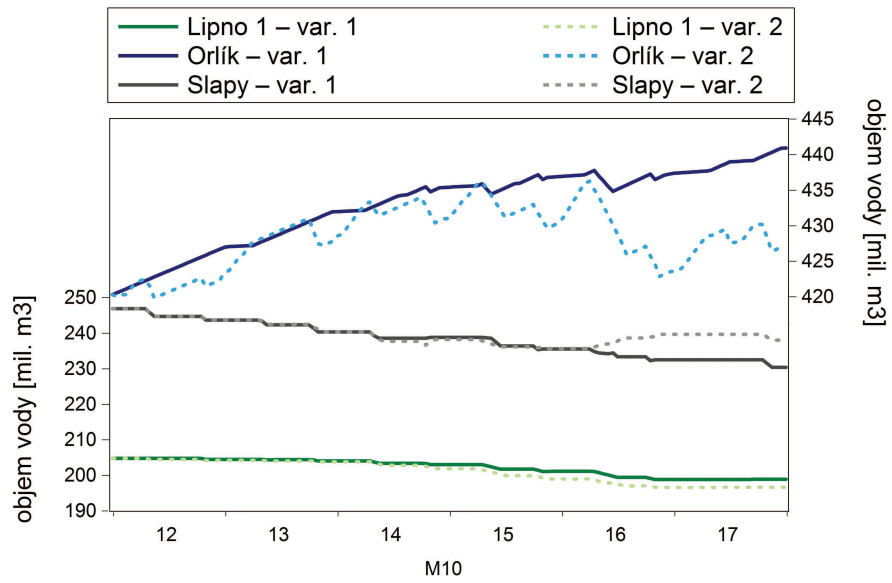
## Průběh objemů vody v jednotlivých nádržích kaskády

V tabulce 6.10 je uvedeno počáteční a koncové rozložení vody ve Vltavské kaskádě za období 12.-17. 10. 2015 pro obě varianty. Připomeňme, že mezi Lipnem 2 a Hněvkovicemi uvažujeme zpoždění 22 hodin. Na třetím řádku tabulky je proto u symbolu ↓ uveden objem vody, který již odtekl z Lipna 2, ale ještě nepřítekl do Hněvkovic. Přičteme-li k počátečnímu objemu vody v kaskádě celkový vnější přítok a odečteme-li celkový odtok a odběr vody pro průmysl a zavlažování, dostaneme koncový objem vody v kaskádě.

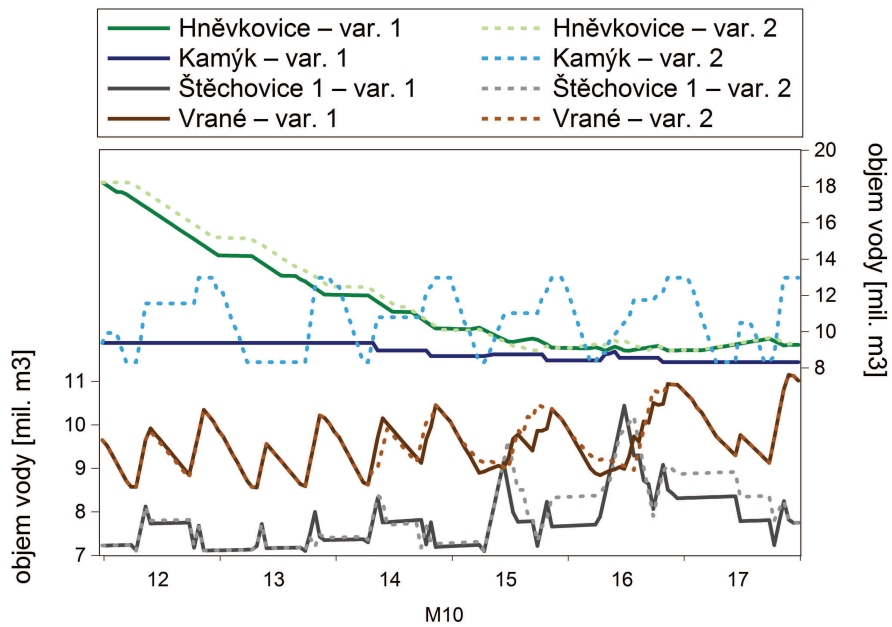
Na obrázcích 6.33-6.35 jsou uvedeny průběhy objemů vody v jednotlivých nádržích za období 12.-17. 10. 2015 pro obě varianty. Rozdíl v průběhu objemů vody v jednotlivých variantách pozorujeme nejvíce u nádrží Orlík a Kamýk, mezi kterými probíhá při variantě 2 přečerpávání. Díky přečerpávání je při variantě 2 v nádrži Orlík v druhé polovině uvažovaného období zadržováno méně vody. Odlišný průběh objemů vody ve variantě 1 a 2 pozorujeme také u nádrže Kořensko. Ve zbylých nádržích kaskády se při porovnání uvažovaných variant průběhy objemů vody v jednotlivých nádržích příliš neliší.

Tabulka 6.10: Počáteční a koncové rozložení vody v kaskádě za období 12.-17. 10. 2015

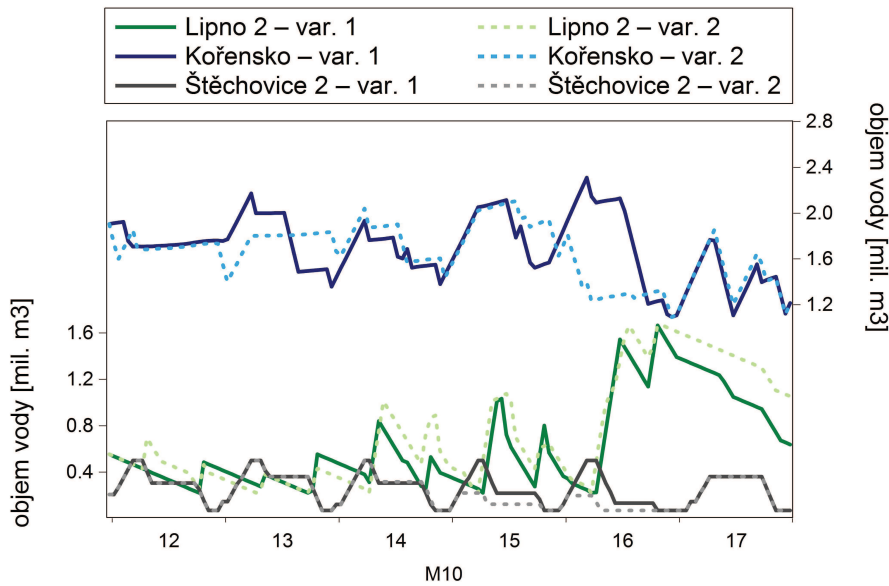
nádrž	varianta 1		varianta 2	
	počáteční objem vody [m <sup>3</sup> ]	koncový objem vody [m <sup>3</sup> ]	počáteční objem vody [m <sup>3</sup> ]	koncový objem vody [m <sup>3</sup> ]
Lipno 1	204796902.70	198907692.83	204796902.70	196681749.51
Lipno 2	553840.00	638880.00	553840.00	1052528.00
↓	527868.00	812360.00	527868.00	617682.00
Hněvkovice	18231949.76	9269153.34	18231949.76	9322715.78
Kořensko	1904814.55	1214195.84	1904814.55	1207003.92
Orlík	420299887.80	440950557.52	420299887.80	427016403.18
Kamýk	9381700.00	8324000.00	9381700.00	12976000.00
Slapy	246909000.00	230375435.14	246909000.00	238067814.80
Štěchovice 1	7226635.42	7753063.09	7226635.42	7753063.09
Štěchovice 2	208400.00	70000.00	208400.00	70000.00
Vrané	9652811.18	11016364.67	9652811.18	11016364.67
<b>Σ</b>	<b>919693809.43</b>	<b>909331702.44</b>	<b>919693809.43</b>	<b>905781324.96</b>
+ celkový vnější přítok [m <sup>3</sup> ]	+19026495.03		+19026495.03	
- celkový odtok [m <sup>3</sup> ]	-28526011.79		-32076389.26	
- celkový odběr vody [m <sup>3</sup> ]	-862590.24		-862590.24	
<b>Σ</b>	<b>909331702.44</b>		<b>905781324.96</b>	



Obrázek 6.33: Objem vody v nádržích Lipno 1, Orlík a Slapy za období 12.-17. 10. 2015 [mil. m<sup>3</sup>]



Obrázek 6.34: Objem vody v nádržích Hněvkovice, Kamýk, Štěchovice 1 a Vrané za období 12.-17. 10. 2015 [mil. m<sup>3</sup>]



Obrázek 6.35: Objem vody v nádržích Lipno 2, Kořensko a Štěchovice 2 za období 12.-17. 10. 2015 [mil. m<sup>3</sup>]

### Porušené podmínky sdruženého pravděpodobnostního omezení

Pravděpodobnost splnění podmínek ze sdruženého pravděpodobnostního omezení (2.10) požadujeme alespoň  $\frac{63}{64}$ . Podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení mohou být tedy porušeny pro nejvýše jeden scénář přítoků. V tabulce 6.11 jsou uvedeny porušené podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení v šesti uvažovaných úlohách řízení.

Z tabulky 6.11 je patrné, že ve všech úlohách byla porušena podmínka na udržení objemu vody v nádrži nad minimální stanovenou hranicí. Jednalo se vždy o nádrž Kořensko, v případě úlohy řízení na 17.-18. 10. 2015 také o nádrž Štěchovice 2. Všimněme si dále, že podmínky byly nejčastěji porušeny v druhé polovině optimalizačního horizontu. Tedy v období, ze kterého prezentujeme výsledky řízení, byly všechny podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení splněny. Výjimkou je úloha řízení na 16.-17. 10. 2015, kdy k porušení došlo již ve 23. a 24. hodině.

Dále si můžeme všimnout, že pro obě varianty úlohy došlo k porušení vždy pro stejný scénář. Ve všech šesti úlohách navíc platí, že množina časových okamžiků, ve kterých byly porušeny podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení při 2. variantě, je podmnožinou množiny časových okamžiků, ve kterých byly porušeny podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení při 1. variantě. Z hlediska splnění podmínek ze sdruženého pravděpodobnostního omezení se v uvažovaném období jeví lépe varianta 2.

Tabulka 6.11: Porušené podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení (2.10) pro řešené úlohy řízení Vltavské kaskády

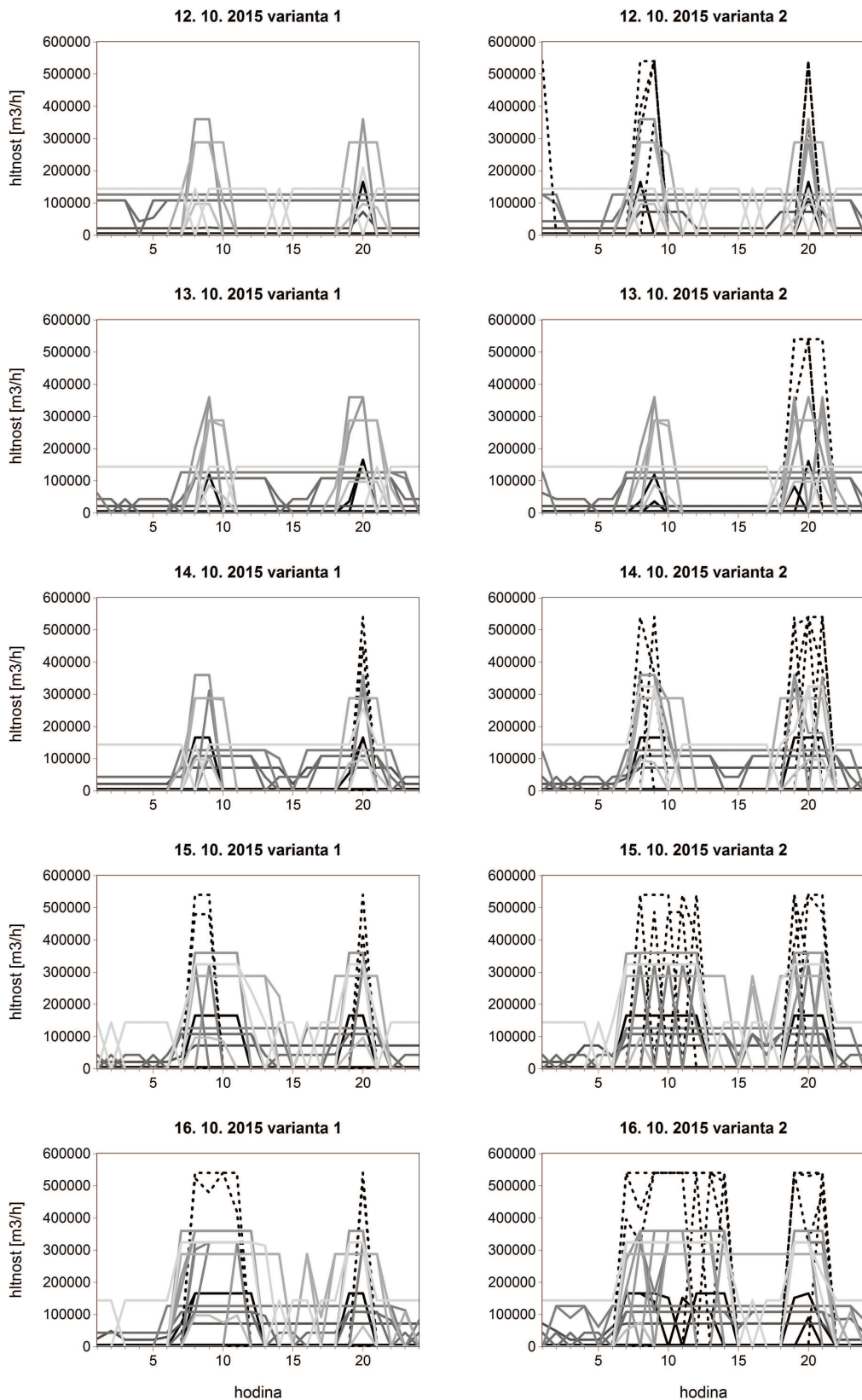
optimalizační horizont	varianta 1	varianta 2
12.-13. 10. 2015	$V_{min}^{Kořensko}(t) \leq V^{Kořensko,19}(t)$ $\forall t = 45, \dots, 48$	$V_{min}^{Kořensko}(48) \leq V^{Kořensko,19}(48)$
13.-14. 10. 2015	$V_{min}^{Kořensko}(t) \leq V^{Kořensko,43}(t)$ $\forall t = 47, 48$	$V_{min}^{Kořensko}(48) \leq V^{Kořensko,43}(48)$
14.-15. 10. 2015	$V_{min}^{Kořensko}(t) \leq V^{Kořensko,2}(t)$ $\forall t = 45, \dots, 48$	$V_{min}^{Kořensko}(t) \leq V^{Kořensko,2}(t)$ $\forall t = 47, 48$
15.-16. 10. 2015	$V_{min}^{Kořensko}(t) \leq V^{Kořensko,38}(t)$ $\forall t = 42, \dots, 48$	$V_{min}^{Kořensko}(t) \leq V^{Kořensko,38}(t)$ $\forall t = 47, 48$
16.-17. 10. 2015	$V_{min}^{Kořensko}(t) \leq V^{Kořensko,47}(t)$ $\forall t = 23, 24, 36, 37, 47, 48$	$V_{min}^{Kořensko}(t) \leq V^{Kořensko,47}(t)$ $\forall t = 23, 24, 36, 47, 48$
17.-18. 10. 2015	$V_{min}^{Kořensko}(t) \leq V^{Kořensko,63}(t)$ $\forall t = 36, 46, 47, 48,$ $V_{min}^{Štěchovice\ 2}(t) \leq V^{Štěchovice\ 2,63}(t)$ $\forall t = 43, 45, \dots, 48$	$V_{min}^{Kořensko}(t) \leq V^{Kořensko,63}(t)$ $\forall t = 36, 46, 47, 48,$ $V_{min}^{Štěchovice\ 2}(t) \leq V^{Štěchovice\ 2,63}(t)$ $\forall t = 43, 45, \dots, 48$

### Optimální hltnosti turbín

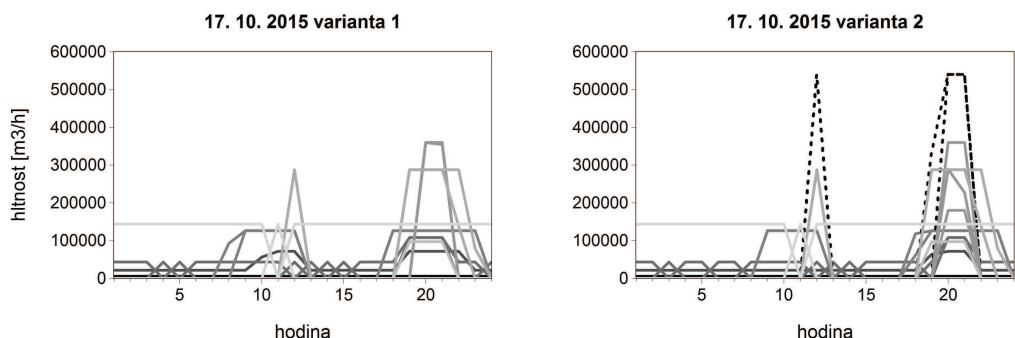
Na obrázcích 6.36 a 6.37 jsou pro obě varianty vykresleny optimální hltnosti jednotlivých turbín Vltavské kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015. Přerušovaně jsou vyznačeny hltnosti turbín příslušících k nádrži Orlík. Z obrázků je na první pohled patrné, že vodní elektrárny takzvaně špičkovují, jak je běžné v praxi. Tedy že jsou hltnosti turbín a tedy i výroba elektrické energie vysoké v období špičky (období kolem 9. a 20. hodiny), kdy je vysoká cena elektřiny na trhu, respektive vysoká poptávka po elektřině.

Vyšší hltnosti turbín můžeme obecně pozorovat ke konci pracovního týdne, nižší hltnosti pak v sobotu 17. 10. 2015. V rámci uvažovaných variant úlohy pozorujeme vyšší hltnosti turbín v období špičky ve 2. variantě, konkrétně jsou patrné vyšší hltnosti turbín nádrže Orlík. V období mimo špičku větší rozdíly mezi variantami nepozorujeme. Dochází zde převážně k odtoku vody turbínami za účelem udržení minimálního průtoku pod příslušnou nádrží – vodorovné čáry v grafech.

Všimněme si vysoké hltnosti jedné z turbín nádrže Orlík 12. 10. 2015 při 2. variantě v první hodině řízení. Zde určitě není cena elektřiny tak vysoká a bylo by proto výhodnější upustit vodu v pozdějších hodinách, kdy je cena energie vyšší. Možným vysvětlením by na první pohled mohlo být, že je nutné vodu upustit za účelem splnění některých podmínek úlohy. To bychom však stejné upouštění pozorovali i v případě první varianty.



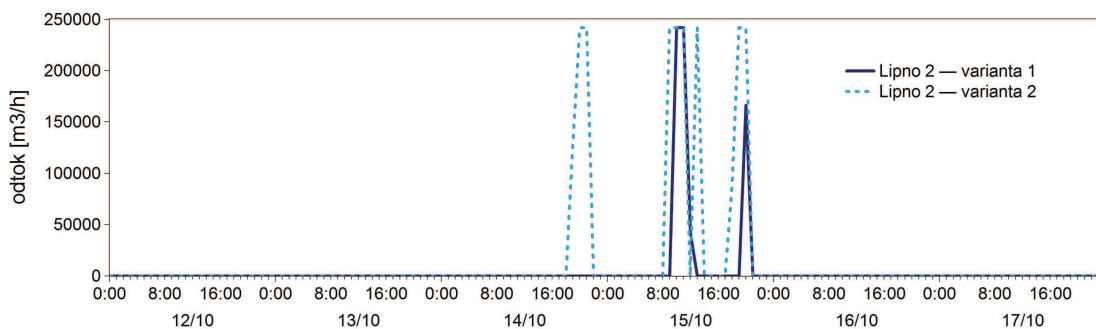
Obrázek 6.36: Optimální hltnosti turbín nádrže Orlík (přerušovaně) a zbylých nádrží kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015 – první část [m<sup>3</sup>/h]



Obrázek 6.37: Optimální hltnosti turbín nádrže Orlík (přerušovaně) a zbylých nádrží kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015 – druhá část [ $\text{m}^3/\text{h}$ ]

Připomeňme opět skutečnost, že počáteční objemy úlohy řízení pro 12. 10. 2015 vychází pro obě varianty z řízení kaskády ve stávající podobě. Tedy při řízení v předchozích dnech úloha nepočítala s možností přečerpávání na Orlíku. Jak bude patrné z optimálních hltností přečerpávacích stanic, které prezentujeme níže, dochází od 3. do 6. hodiny v nádrži Orlík k přečerpávání. Je tedy pravděpodobné, že si model potřebuje odpustit vodu, aby mohl ve 3. hodině začít s čerpáním, které se jeví jako výhodné. Jelikož očekávaná cena elektřiny ve 2. hodině je nižší než cena elektřiny v 1. hodině, dochází k odpuštění celého potřebného množství vody právě v 1. hodině.

Výsledné hltnosti turbín doplníme dále o optimální hodnoty odtoků spodními výpustmi jednotlivých nádrží kaskády, které jsou vykresleny na obrázku 6.38. Ze spodních výpustí všech nádrží dochází k jejich využití pouze v případě nádrže Lipno 2 a to konkrétně 14. 10. 2015 – varianta 2, a 15. 10. 2015 – varianta 1 a 2. Předně doplníme, že k odtoku vody nedochází v době, kdy je očekávána cena elektřiny záporná. V hodiny, ve které jsou spodní výpusti v provozu, a také v okolních hodinách je hltnost jediné turbíny nádrže Lipna 2 rovna své maximální hodnotě. K odtoku spodními výpustmi tedy zřejmě dochází za účelem splnění některých podmínek úlohy.

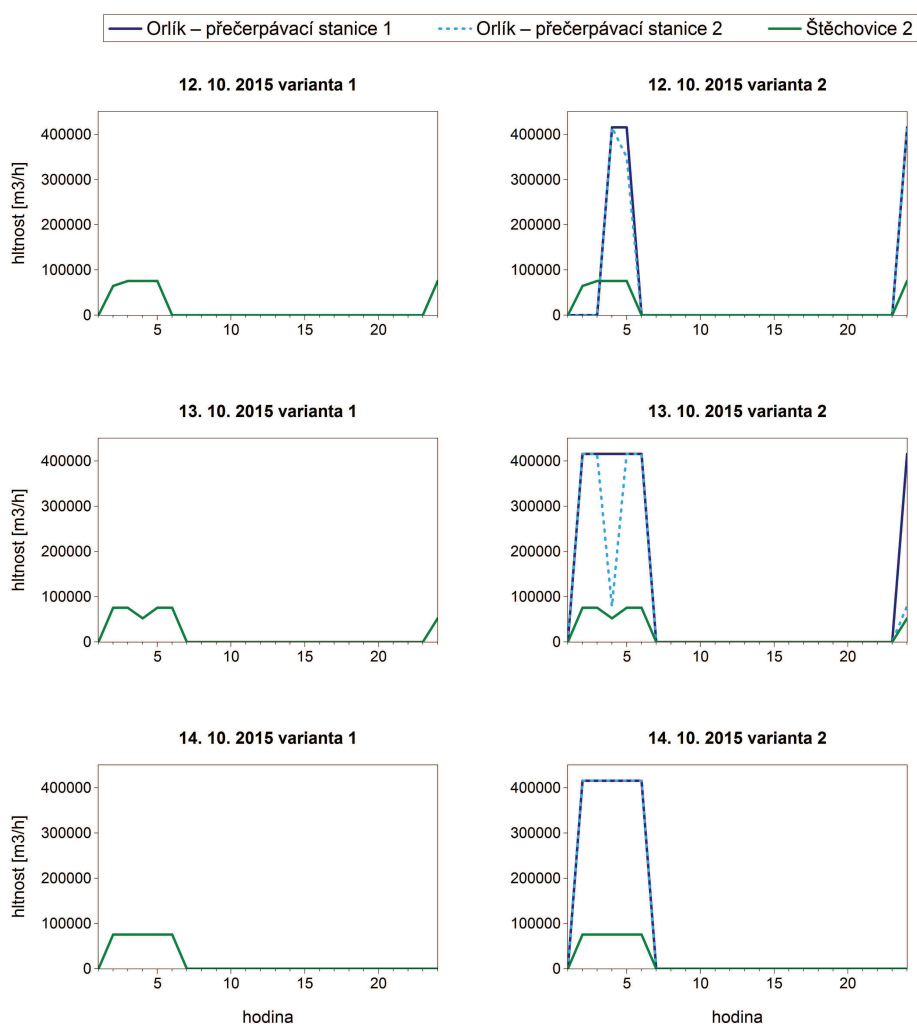


Obrázek 6.38: Optimální odtoky spodními výpustmi jednotlivých nádrží Vltavské kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015 [ $\text{m}^3/\text{h}$ ]

## Optimální hltnosti přečerpávacích stanic

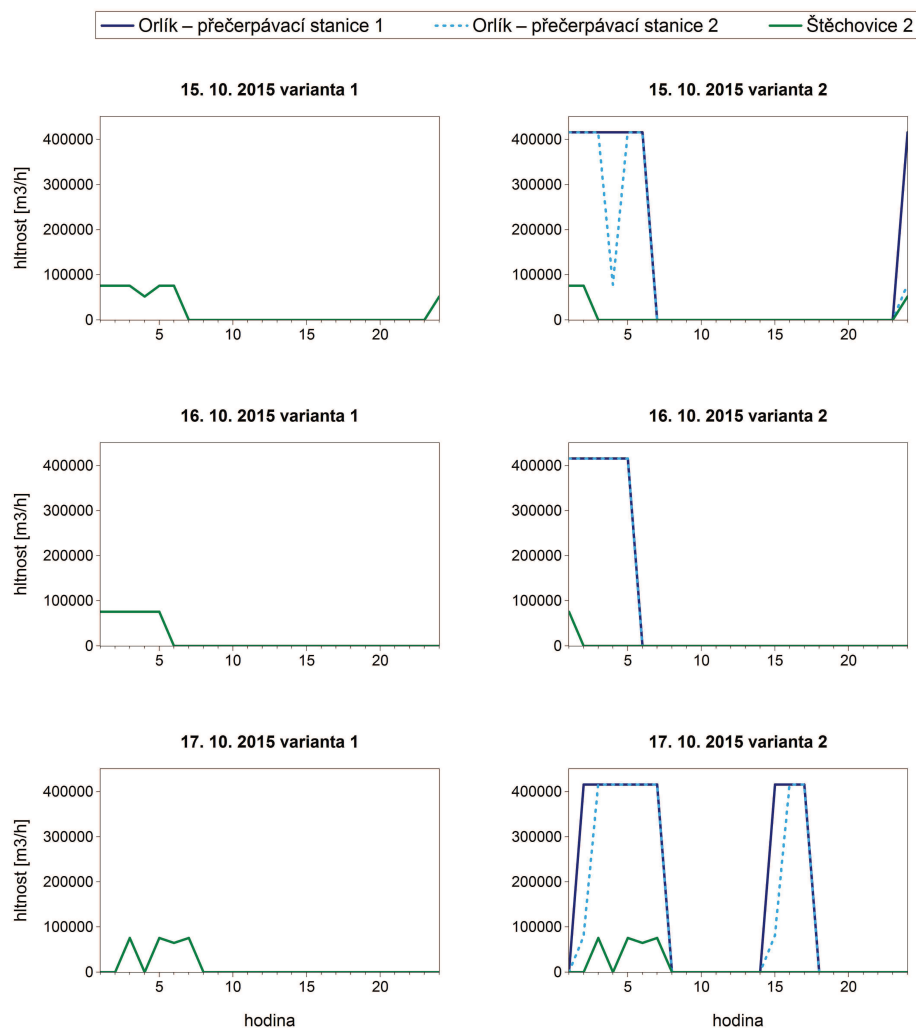
Na obrázcích 6.39 a 6.40 jsou uvedeny optimální hltnosti přečerpávacích stanic kaskády za období 12.-17. 10. 2015 pro obě varianty. Z obrázků je patrné, že k čerpání dochází v období mezi 23. a 6. hodinou, tj. v období nízké ceny elektřiny. V sobotu 17. 10. 2015, kdy je obecně očekávána nižší cena elektřiny než v pracovní den, dochází navíc při 2. variantě k přečerpávání na Orlíku mezi 14. a 18. hodinou, tedy v období mezi dopolední a večerní špičkou.

Všimněme si, že hltnosti přečerpávacích stanic na Orlíku se pohybují nad hodnotou 400000 m<sup>3</sup>/h. Konkrétně se jedná o hodnotu 415800 m<sup>3</sup>/h představující zároveň maximální hltnost přečerpávacích stanic Orlíku. Obě přečerpávací stanice na Orlíku jsou tedy v případě 2. varianty plně využívány. Přečerpávání na Štěchovicích 2 je pak při 2. variantě využíváno o něco méně než při variantě 1.



Obrázek 6.39: Optimální hltnosti přečerpávacích stanic kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015 – první část [m<sup>3</sup>/h]





Obrázek 6.40: Optimální hlnosti přečerpávacích stanic kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015 – druhá část [ $\text{m}^3/\text{h}$ ]

## Shrnutí výsledků

Shrneme-li výsledky řízení Vltavské kaskády za období 12.-17. 10. 2015, jeví se možnost přečerpávání na Orlíku v porovnání se stávající podobou Vltavské kaskády jako ziskovější. A to jak v případě zisku z využití vodní energie, tak i při odečtení ceny použité vody. Rozdíl v průběhu objemů vody v jednotlivých variantách pozorujeme nejvíce u nádrží Orlík a Kamýk, mezi kterými probíhá při variantě 2 přečerpávání. Díky přečerpávání je při variantě 2 v nádrži Orlík v druhé polovině uvažovaného období zadržováno méně vody.

Z hlediska splnění podmínek ze sdruženého pravděpodobnostního omezení se jeví za uvažované období lepší varianta 2. Konkrétně je množina časových okamžiků, ve kterých byly porušeny podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení při 2. variantě, podmnožinou množiny časových okamžiků, ve kterých byly porušeny podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení při 1. variantě.

V rámci uvažovaných variant úlohy pozorujeme vyšší hlnosti turbín v období špičky ve 2. variantě, konkrétně jsou patrné vyšší hlnosti turbín nádrže Orlík.

V období mimo špičku větší rozdíly v hltnosti turbín mezi variantami nepozorujeme. K odtoku vody spodními výpustmi nádrží, konkrétně se jedná pouze o Lipno 2, dochází při řízení jen minimálně. V případě 2. varianty jsou přečerpávací stanice na Orlíku plně využívány, přičemž přečerpávání na Štěchovicích 2 je využíváno o něco méně než při 1. variantě.

Na základě výsledků řízení Vltavské kaskády za období 12.-17. 10. 2015 se jeví možnost přečerpávání na Orlíku jako vhodná. Pro celkové posouzení výhodnosti projektu by však bylo potřeba zpracovat studii založenou na dlouhodobějších výsledcích úlohy řízení.

# Závěr

V práci jsme se zabývali krátkodobou stochastickou optimalizační úlohou pro problém řízení soustavy vodních nádrží. Náhodnou složku modelu jsme předpokládali v ceně elektrické energie na trhu a ve vnějších přítocích soustavy. Úlohu jsme formulovali jako smíšený celočíselný model se sdruženým pravděpodobnostním omezením.

Cílem sestavené úlohy řízení bylo maximalizovat zisk představující rozdíl celkové očekávané ceny energie vyrobené turbínami a celkové očekávané ceny energie použité k přečerpávání, přičemž jsme dále odečítali cenu použité vody. Podmínky úlohy byly stanoveny tak, aby splňovaly hlavní účely vodohospodářské soustavy z praktické části práce. Postupně jsme formulovali podmínky na řízení soustavy včetně dodatečné podmínky reverzních turbín, podmínku na odtok vody z nádrže, podmínku rovnováhy, podmínky na omezení objemu vody v nádržích, podmínky pro kategorizování objemu vody v nádržích a podmínku podpůrné služby. K sestavené úloze jsme formulovali také několik alternativních modelů.

Dále jsme představili možnost aproximace pravděpodobnostního rozdělení náhodné složky modelu pomocí diskrétního rozdělení nabývajícího konečného počtu hodnot, takzvaných scénářů. Náhodné vnější přítoky jsme modelovali jako vektorovou časovou řadu pomocí modelu vektorové autoregrese. K modelování náhodné ceny elektřiny na trhu jsme použili multiplikativní sezónní proces. Na základě zkonstruovaných modelů a jejich předpovědí jsme vygenerovali scénářový strom. Pomocí scénářů jsme poté sestavenou úlohu se sdruženým pravděpodobnostním omezením převedli na deterministickou úlohu smíšeného celočíselného lineárního programování.

Abychom při krátkodobém řízení zamezili maximálnímu využití vody, která by mohla být potřebná v budoucnu, zabývali jsme se dále oceněním vody v jednotlivých nádržích. Byl zformulován jednoduchý sezónní deterministický model pro ocenění vody uskladněné v jednotlivých nádržích, který vycházel z vhodně agregované úlohy krátkodobého řízení. Ceny vody v nádržích soustavy jsme pak odhadli jako duální proměnné k rovnicím rovnováhy. Byl také prezentován postup odhadu cen vody kategorizovaných v závislosti na objemu vody v nádrži.

V praktické části práce byla sestavená úloha řízení vodohospodářské soustavy aplikována na soustavu vodních nádrží na řece Vltavě – Vltavskou kaskádu. Kromě úlohy řízení Vltavské kaskády ve stávající podobě je v praktické části řešena také možnost přečerpávání na vodním díle Orlík. Reálná data byla poskytnuta společností ČEZ, a. s. a podnikem Povodí Vltavy, s. p. Optimalizační horizont úlohy řízení s hodinovým krokem jsme stanovili na dva dny, přičemž jsme brali výsledky pouze za prvních 24 hodin. Po 24 hodinách jsme na základě nových pozorování přepočítali skutečné hodnoty a začali s novou úlohou řízení.

Ke konstrukci scénářů byl využit program R (R Core Team, 2016). Celkem

jsme na každé optimalizační období zkonstruovali 64 scénářů ceny elektrické energie a stejný počet scénářů vnějších přítoků. Jak se později ukázalo ve výsledcích úlohy řízení, zkonstruované scénáře ceny elektřiny skutečnou cenu spíše podhodnocují.

Sezónní úlohu oceňování vody uskladněné v nádržích Vltavské kaskády jsme řešili v programu GAMS (GAMS Development Corporation, 2013). Pomocí duálních proměnných jsme odhadli ceny vody ve stanovených kategoriích pro každou z nádrží Vltavské kaskády.

V programu GAMS byla řešena také krátkodobá úloha řízení Vltavské kaskády. Výsledky jsme prezentovali za období 12.-17. 10. 2015. Možnost přečerpávání na Orlíku se v porovnání se stávající podobou Vltavské kaskády jeví jako ziskovější. Přečerpávání na Orlíku se zdá být lepší také z hlediska splnění podmínek ze sdruženého pravděpodobnostního omezení. Při této variantě pozorujeme vyšší hltnosti turbín v období špičky, v období přečerpávání jsou přečerpávací stanice na Orlíku plně využívány. Na základě výsledků řízení Vltavské kaskády za období 12.-17. 10. 2015 se jeví možnost přečerpávání na Orlíku jako vhodná.

# Seznam použité literatury

- AASGÅRD, E. K. a ANDERSEN, G. S. (2013). Day-ahead electricity market bidding for a cascaded reservoir system: A stochastic programming approach. Master's thesis, Norwegian University of Science and Technology, Department of Industrial Economics and Technology Management.
- ANDRIEU, L., HENRION, R. a RÖMISCH, W. (2010). A model for dynamic chance constraints in hydro power reservoir management. *European Journal of Operational Research* 207, pages 579–589.
- BOX, G. E. P. a COX, D. R. (1964). An Analysis of Transformations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Volume 26, Issue 2, pages 211–252.
- CACCETTA, L. (2000). *Branch and Cut Methods for Mixed Integer Linear Programming Problems*, pages 21–44. Springer US. ISBN 978-1-4613-0301-5.
- CHARNES, A. a COOPER, W. W. (1959). Chance-Constrained Programming. *Management Science*, Vol. 6, No.1, pages 73–79.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. 1. vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-86929-43-9.
- DUPAČOVÁ, J. (1986). *Stochastické programování*. První vydání. Ministerstvo školství ČSR, Praha.
- DUPAČOVÁ, J. (2013). Ways and means with scenarios. *Bulletin of the Czech Econometric Society*, Volume 20.
- DUPAČOVÁ, J., GAIVORONSKI, A., KOS, Z. a SZÁNTAI, T. (1991). Stochastic programming in water management: A case study and a comparison of solution techniques. *European Journal of Operational Research* 52, pages 28–44.
- DUPAČOVÁ, J., HURT, J. a ŠTĚPÁN, J. (2002). *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Preprint. To be published by Kluwer Academic Publishers. ISBN 1-4020-0840-6.
- DURANYILDIZ, I., ÖNÖZ, B. a BAYAZIT, M. (1999). A chance-constrained lp model for short term reservoir operation optimization. *Turkish Journal of Engineering and Environmental Science* 23, pages 181–186.
- GAMS DEVELOPMENT CORPORATION (2002). *GAMS Documentation 24.7: Solvers: CPLEX 12*. [online]. [cit. květen 2016]. Dostupné z: <http://www.gams.com/help/index.jsp?topic=%2Fgams.doc%2Fsolvers%2Findex.html>.

- GAMS DEVELOPMENT CORPORATION (2013). *General Algebraic Modeling System (GAMS)*. Washington, DC, USA. URL <https://www.gams.com/>.
- HENZE, N. a ZIRKLER, B. (1990). A class of invariant consistent tests for multivariate normality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, pages 3595–3617.
- LOIACIGA, H. A. (1988). On the use of chance constraints in reservoir design and operation modeling. *Water Resources Research* 24, pages 1969–1975.
- MARDIA, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, pages 519–530.
- MORGAN, D. R., EHEART, J. W. a VALOCCHI, A. J. (1993). Aquifer remediation design under uncertainty using a new chance constraint programming technique. *Water Resources Research* 29, pages 551–561.
- OTE, A. S. (2010). *Statistika: Roční zpráva*. [online]. [cit. únor 2016]. Dostupné z: <http://http://www.ote-cr.cz/statistika/rocnizprava>.
- POVODÍ VLTAVY, STÁTNÍ PODNIK (2013). *Vodohospodářské informace: Vltavská kaskáda*. [online]. [cit. březen 2016]. Dostupné z: <http://www.pvl.cz/vodohospodarske-informace/vodni-dila/vltavska-kaskada>.
- R CORE TEAM (2016). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- REICH, D. (2013). A linear programming approach for linear programs with probabilistic constraints. *European Journal of Operational Research* 230, pages 487–494.
- ROYSTON, J. P. (1982). An extension of Shapiro and Wilk’s W test for normality to large samples. *Applied Statistics*, pages 115–124.
- SKUPINA ČEZ (2012). Energetická společnost ČEZ. *Obnovitelné zdroje energie a Skupina ČEZ*. [pdf]. [cit. září 2015]. Dostupné z: <https://www.cez.cz/edee/content/file/pro-media-2012/03-brezen/obnovitelne-zdroje-energie-a-skupina-cez.pdf>.
- TSAY, R. S. (2014). *Multivariate time series analysis with R and financial applications*. Wiley, Hoboken, New Jersey. ISBN 9781118617793.
- VAN ACKOOIJ, W., HENRION, R., MÖLLER, A. a ZORGATI, R. (2014). Joint chance constrained programming for hydro reservoir management. *Optimization and Engineering, Volume 15*, pages 509–531.
- ZORGATI, R. a VAN ACKOOIJ, W. (2011). Optimizing financial and physical assets with chance-constrained programming in the electrical industry. *Optimization and Engineering, Volume 12, Issue 1*, pages 237–255.

# Seznam obrázků

1.1	Rozložení prostoru nádrže . . . . .	10
4.1	Scénářový strom pro konstrukci scénářů přítoků a ceny elektrické energie na trhu . . . . .	47
6.1	Zjednodušené schéma Vltavské kaskády . . . . .	66
6.2	Vnější přítoky Vltavské kaskády v období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015 [m <sup>3</sup> /h] . . . . .	68
6.3	Skutečné hodnoty, vyrovnané hodnoty a residua modelu VAR(9) . . . . .	69
6.4	Scénáře vnějšího přítoku nádrže Lipno 1 spolu se skutečnými hodnotami [m <sup>3</sup> /h] pro období 12.-13. 10. 2015 . . . . .	70
6.5	Scénáře vnějšího přítoku nádrže Hněvkovice spolu se skutečnými hodnotami [m <sup>3</sup> /h] pro období 12.-13. 10. 2015 . . . . .	70
6.6	Scénáře vnějšího přítoku nádrže Kořensko spolu se skutečnými hodnotami [m <sup>3</sup> /h] pro období 12.-13. 10. 2015 . . . . .	70
6.7	Scénáře vnějšího přítoku nádrže Orlík spolu se skutečnými hodnotami [m <sup>3</sup> /h] pro období 12.-13. 10. 2015 . . . . .	71
6.8	Scénáře vnějšího přítoku nádrže Štěchovice 1 spolu se skutečnými hodnotami [m <sup>3</sup> /h] pro období 12.-13. 10. 2015 . . . . .	71
6.9	Scénáře vnějšího přítoku nádrže Vrané spolu se skutečnými hodnotami [m <sup>3</sup> /h] pro období 12.-13. 10. 2015 . . . . .	71
6.10	Cena elektrické energie na trhu v období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015 [€/MWh] . . . . .	72
6.11	Cena elektrické energie na trhu v týdnu od 12. do 18. 10. 2015 [€/MWh] . . . . .	72
6.12	Závislost ceny elektrické energie na hodině v průběhu pracovních dnů z let 2011 až 2015 [€/MWh] . . . . .	73
6.13	Závislost ceny elektrické energie na hodině v průběhu víkendů z let 2011 až 2015 [€/MWh] . . . . .	73
6.14	Skutečné hodnoty, vyrovnané hodnoty a residua modelu SARIMA(5,0,1) × (1,1,2) <sub>24</sub> . . . . .	74
6.15	Q-Q graf residuí . . . . .	75
6.16	Vypočtená residua vs. vyrovnané hodnoty . . . . .	75
6.17	Scénáře ceny elektrické energie na trhu spolu se skutečnými hodnotami [€/MWh] pro období 12.-13. 10. 2015 . . . . .	77
6.18	Scénáře ceny elektrické energie na trhu spolu se skutečnými hodnotami [€/MWh] pro období 16.-17. 10. 2015 . . . . .	77
6.19	Scénáře ceny elektrické energie na trhu spolu se skutečnými hodnotami [€/MWh] pro období 17.-18. 10. 2015 . . . . .	77

6.20	Objem vody v nádržích Lipno 1, Orlík a Slapy v průběhu optimalizačního období sezónní úlohy oceňování [mil. m <sup>3</sup> ] . . . . .	80
6.21	Objem vody v nádržích Hněvkovice, Kamýk, Štěchovice 1 a Vrané v průběhu optimalizačního období sezónní úlohy oceňování [mil. m <sup>3</sup> ] . . . . .	80
6.22	Objem vody v nádržích Lipno 2, Kořensko a Štěchovice 2 v průběhu optimalizačního období sezónní úlohy oceňování [mil. m <sup>3</sup> ] . . . . .	80
6.23	Kategorizování ceny vody v nádrži Lipno 1 pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m <sup>3</sup> ] . . . . .	81
6.24	Kategorizování ceny vody v nádrži Lipno 2 pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m <sup>3</sup> ] . . . . .	81
6.25	Kategorizování ceny vody v nádrži Hněvkovice pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m <sup>3</sup> ] . . . . .	81
6.26	Kategorizování ceny vody v nádrži Kořensko pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m <sup>3</sup> ] . . . . .	82
6.27	Kategorizování ceny vody v nádrži Orlík pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m <sup>3</sup> ] . . . . .	82
6.28	Kategorizování ceny vody v nádrži Kamýk pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m <sup>3</sup> ] . . . . .	82
6.29	Kategorizování ceny vody v nádrži Slapy pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m <sup>3</sup> ] . . . . .	83
6.30	Kategorizování ceny vody v nádrži Štěchovice 1 pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m <sup>3</sup> ] . . . . .	83
6.31	Kategorizování ceny vody v nádrži Štěchovice 2 pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m <sup>3</sup> ] . . . . .	83
6.32	Kategorizování ceny vody v nádrži Vrané pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [€/m <sup>3</sup> ] . . . . .	84
6.33	Objem vody v nádržích Lipno 1, Orlík a Slapy za období 12.-17. 10. 2015 [mil. m <sup>3</sup> ] . . . . .	91
6.34	Objem vody v nádržích Hněvkovice, Kamýk, Štěchovice 1 a Vrané za období 12.-17. 10. 2015 [mil. m <sup>3</sup> ] . . . . .	91
6.35	Objem vody v nádržích Lipno 2, Kořensko a Štěchovice 2 za období 12.-17. 10. 2015 [mil. m <sup>3</sup> ] . . . . .	92
6.36	Optimální hlnosti turbín nádrže Orlík (přerušovaně) a zbylých nádrží kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015 – první část [m <sup>3</sup> /h] . . . . .	94
6.37	Optimální hlnosti turbín nádrže Orlík (přerušovaně) a zbylých nádrží kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015 – druhá část [m <sup>3</sup> /h] . . . . .	95
6.38	Optimální odtoky spodními výpustmi jednotlivých nádrží Vltavské kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015 [m <sup>3</sup> /h] . . . . .	95
6.39	Optimální hlnosti přečerpávacích stanic kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015 – první část [m <sup>3</sup> /h] . . . . .	96
6.40	Optimální hlnosti přečerpávacích stanic kaskády za uvažované období 12.-17. 10. 2015 – druhá část [m <sup>3</sup> /h] . . . . .	97



# Seznam tabulek

6.1	Přehled vodních nádrží Vltavské kaskády (zdroj: ČEZ, a. s., Povodí Vltavy, s. p.) . . . . .	64
6.2	Základní popisné statistiky hodinových vnějších přítoků Vltavské kaskády za období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015 [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] . . . . .	67
6.3	Základní popisné statistiky hodinové ceny elektrické energie na trhu za období 1. 1. 2011 až 18. 10. 2015 [ $\text{€}/\text{MWh}$ ] . . . . .	72
6.4	Odhady ceny vody roční úlohy oceňování Vltavské kaskády pro týden od 12. do 18. 10. 2015 [ $\text{€}/\text{m}^3$ ] . . . . .	78
6.5	Výsledky roční úlohy oceňování Vltavské kaskády [ $\text{€}/\text{m}^3$ ] . . . . .	79
6.6	Výsledné kategorie a ceny vody pro týden od 12. do 18. 10. 2015 .	85
6.7	Výsledky úlohy řízení Vltavské kaskády pro jednotlivé dny od 12. do 14. 10. 2015 . . . . .	87
6.8	Výsledky úlohy řízení Vltavské kaskády pro jednotlivé dny od 15. do 17. 10. 2015 . . . . .	88
6.9	Celkové výsledky řízení Vltavské kaskády za období 12.-17. 10. 2015	89
6.10	Počáteční a koncové rozložení vody v kaskádě za období 12.-17. 10. 2015 . . . . .	90
6.11	Porušené podmínky ze sdruženého pravděpodobnostního omezení (2.10) pro řešené úlohy řízení Vltavské kaskády . . . . .	93